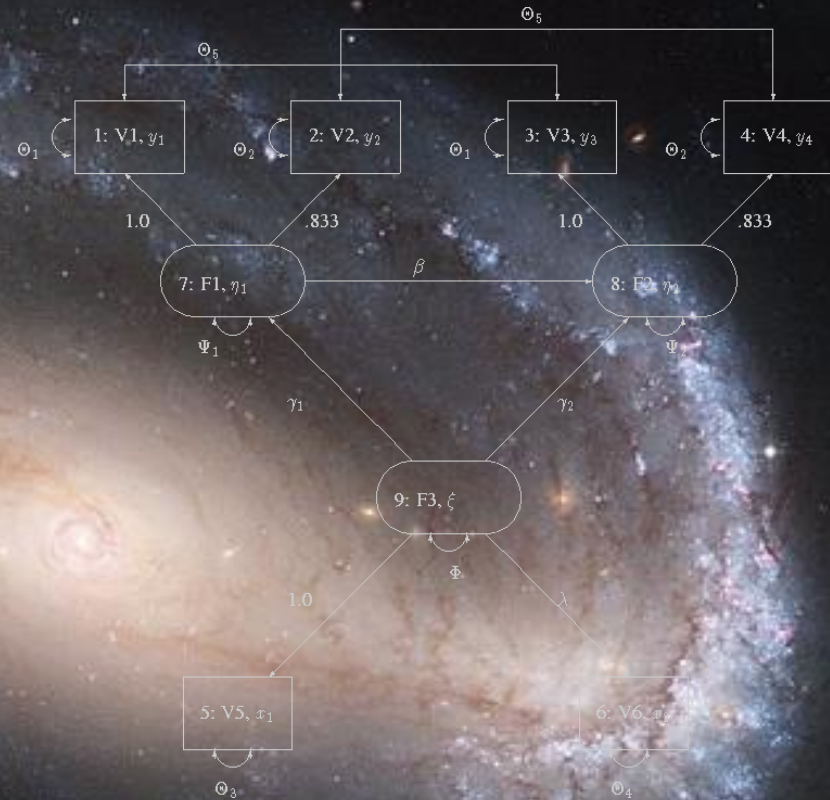


$$C = F_1 F_2 F_3 L F_3^{-1} F_2^{-1} P (F_2^{-1})' (F_3^{-1})' L' F_3' F_2' F_1' + U^2$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & B_3 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} I_2 & & \\ & D_1 & \\ & & D_2 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} I_2 & & \\ & I_2 & \\ & & D_3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} I_2 & o & o \\ I_2 & I_2 & o \\ I_2 & I_2 & I_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} I_2 & & \\ & S_2 & \\ & & S_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$S_2 = I_2 - D_2^2, \quad S_3 = I_2 - D_3^2$$



Multivariate Datenanalyse

Agenda

01 Wissenschaftstheorie

02 Vertiefung Varianzanalyse

- 2.1 Prinzip der Varianzzerlegung
- 2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse
- 2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

03 Vertiefung Regressionsanalyse

- 3.1 Grundlagen von Mediation und Moderation
- 3.2 Moderierte Mediationsmodelle
- 3.3 Logistische Regression

04 Strukturgleichungsmodelle

- 4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse
- 4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell
- 4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse
- 4.4 Fit-Indizes
- 4.5 SEM mit Längsschnittanalysen
- 4.6 Nicht-lineare SEM

05 Mehrebenenanalyse

- 5.1 Grundlagen
- 5.2 Analyse von Modellen mit Random-Intercept und Random-Slope

06 Latent Profile Analysis

- 6.1 Einführung Latent Profile Analysis
- 6.2 Anwendungsbeispiel

07 Sequentialanalyse

- 7.1 Sequentialanalyse nach Wald
- 7.2 Prozedur
- 7.3 Stärken und Schwächen

08 Einführung in Bayes-Statistik



Teil 1: Wissenschaftstheorie

Wissen: Erkenntnis

Eine über das bloße Kennen hinausgehende **Einsicht** in einen Gegenstand, die durch das **Verstehen** von Wesensmerkmalen charakterisiert ist.

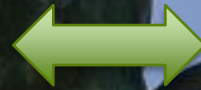
Erkenntnisse beziehen sich auf:

- Dinge und
- Zusammenhänge zwischen Dingen

Wahrheit

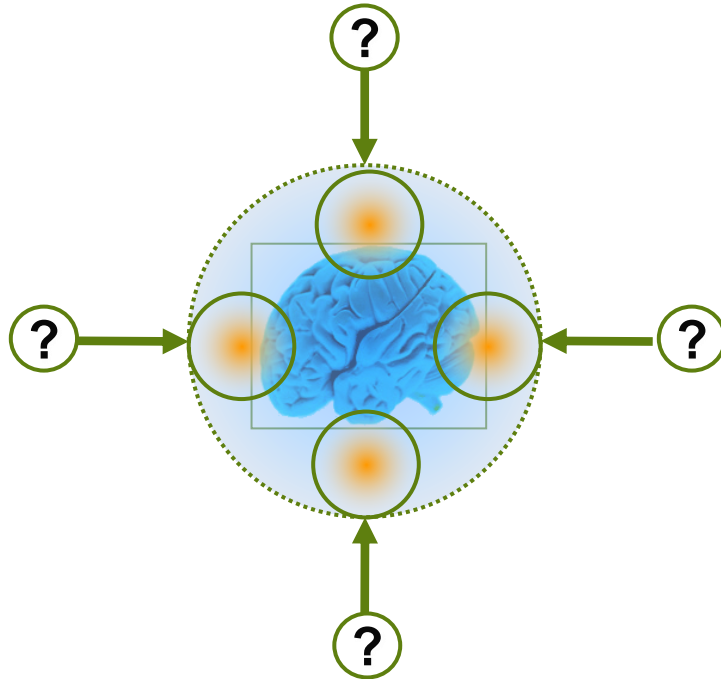
Es gibt drei unterschiedliche Arten von Wahrheit:

1. Aussage entspricht der „inneren Wahrheit“: Man sagt das, was man **für wahr hält** (Gegenteil: Lüge)
2. **Logisch** korrekte Aussage (Gegenteil: Logisch falsch)
3. Die **Wirklichkeit funktioniert** nach dem eigenen Denkmodell (Gegenteil: Falsche Vermutung)



01 Wissenschaftstheorie

Gesetz der spezifischen Sinnesenergien: Wir „erleben“ nur das, was das jeweilige Sinnesorgan „sendet“!



Johannes Peter Müller
(1826)

Wir wissen mit Sicherheit nur, welche Empfindungen wir haben; was diese Empfindungen auslöst, bleibt immer eine Vermutung

01 Wissenschaftstheorie

Transzendente Erkenntnistheorie: Ontologische Differenz

Ding an sich
Was uns nicht
durch die
Wahrnehmung
zugänglich ist

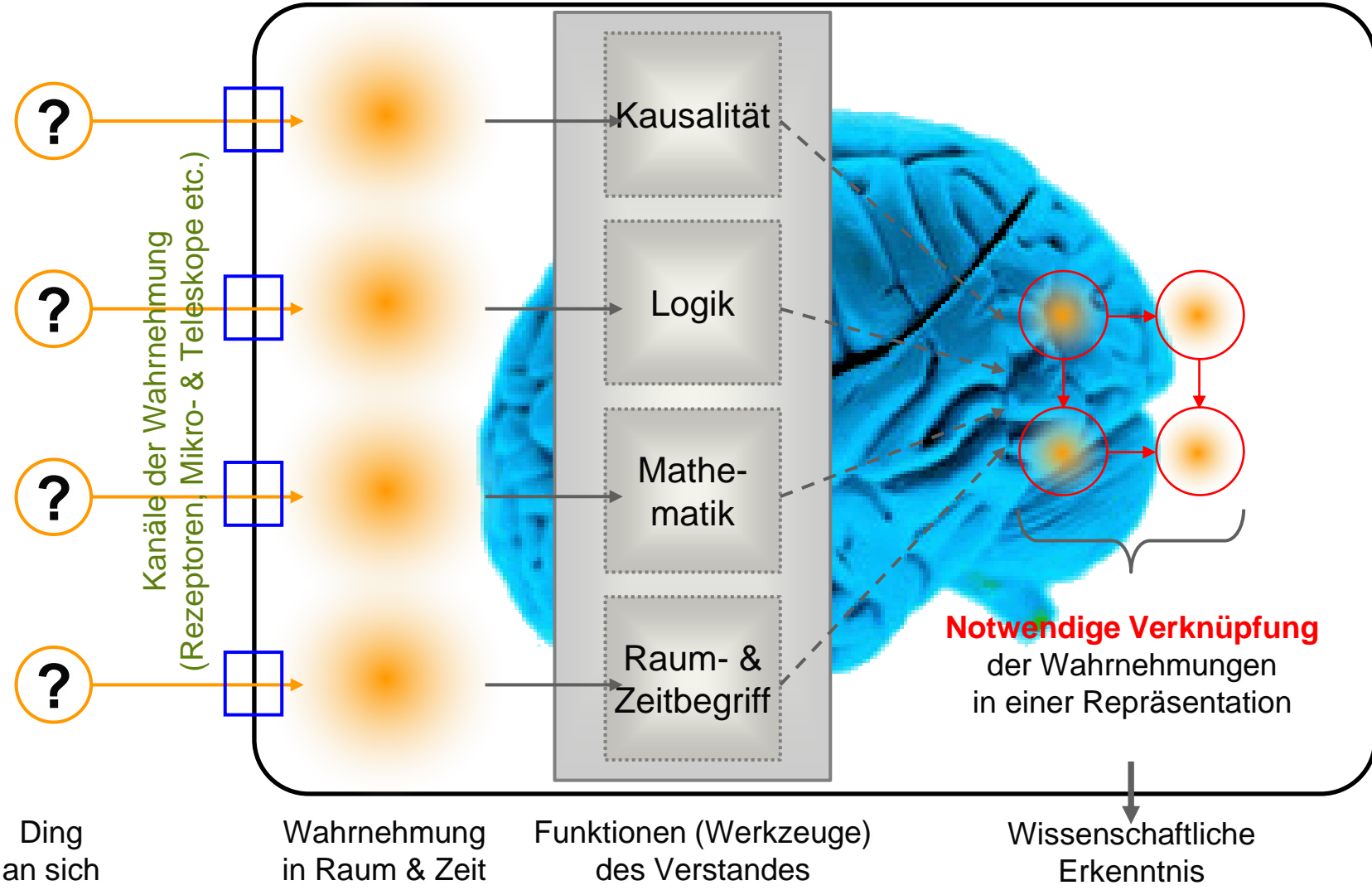
?

Erscheinung:
Was sinnlich
wahrgenommen
werden kann

**Es können nur Aussagen über Erscheinungen,
niemals über die Dinge an sich (über die Welt) getroffen werden.**

01 Wissenschaftstheorie

Transzendente Erkenntnistheorie



Quelle: Kant, I. (1783). Prolegomena

01 Wissenschaftstheorie

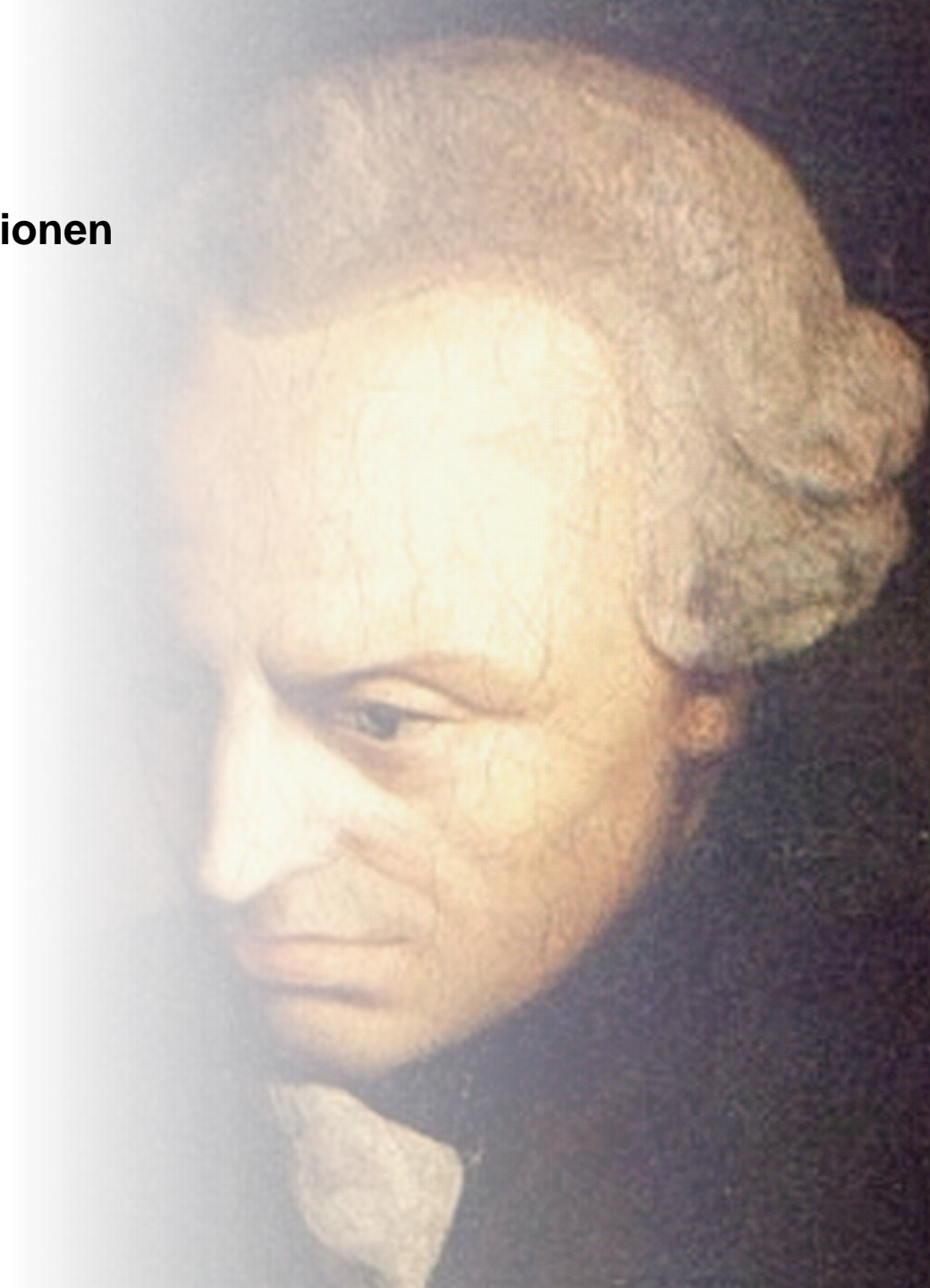
Transzendente Erkenntnistheorie: Implikationen

1. „Der Verstand schöpft seine Gesetze a priori nicht aus der Natur, sondern schreibt sie dieser vor.“ (Immanuel Kant)

- Der Umgang mit der uns in Erscheinung tretenden Wirklichkeit basiert auf Theorien und Modellen, die rein kognitiver Natur sind.

2. Mit empirischer Forschung sind nur (mehr oder weniger) gut begründete Vermutungen möglich, nie „absolute Wahrheiten“.

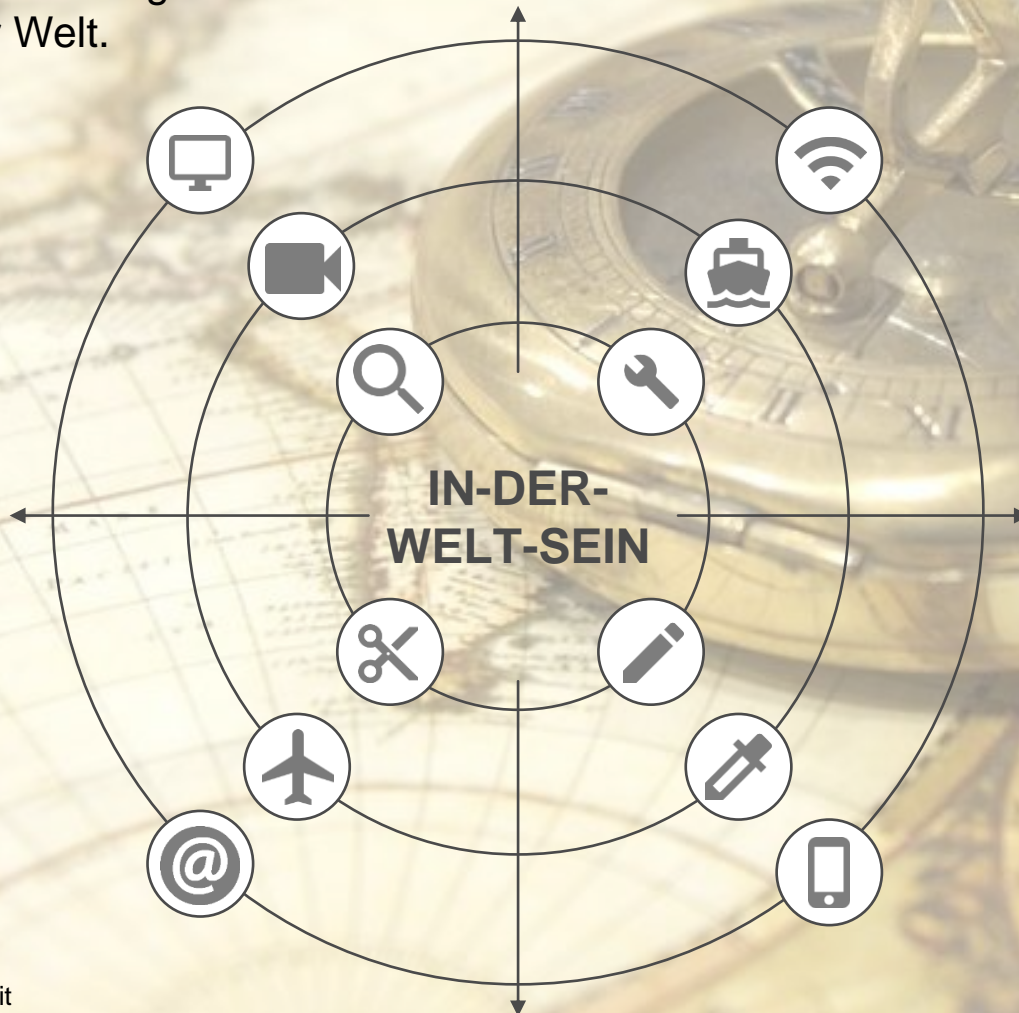
- Ob diese Theorien und Modelle der Wirklichkeit entsprechen, kann nicht gesagt werden (lediglich, dass sie falsch sind!)
- Ein gesicherter Stand der Erkenntnis kann sich stets verändern und plötzlich als „falsch“ bzw. widerlegt gelten



01 Wissenschaftstheorie

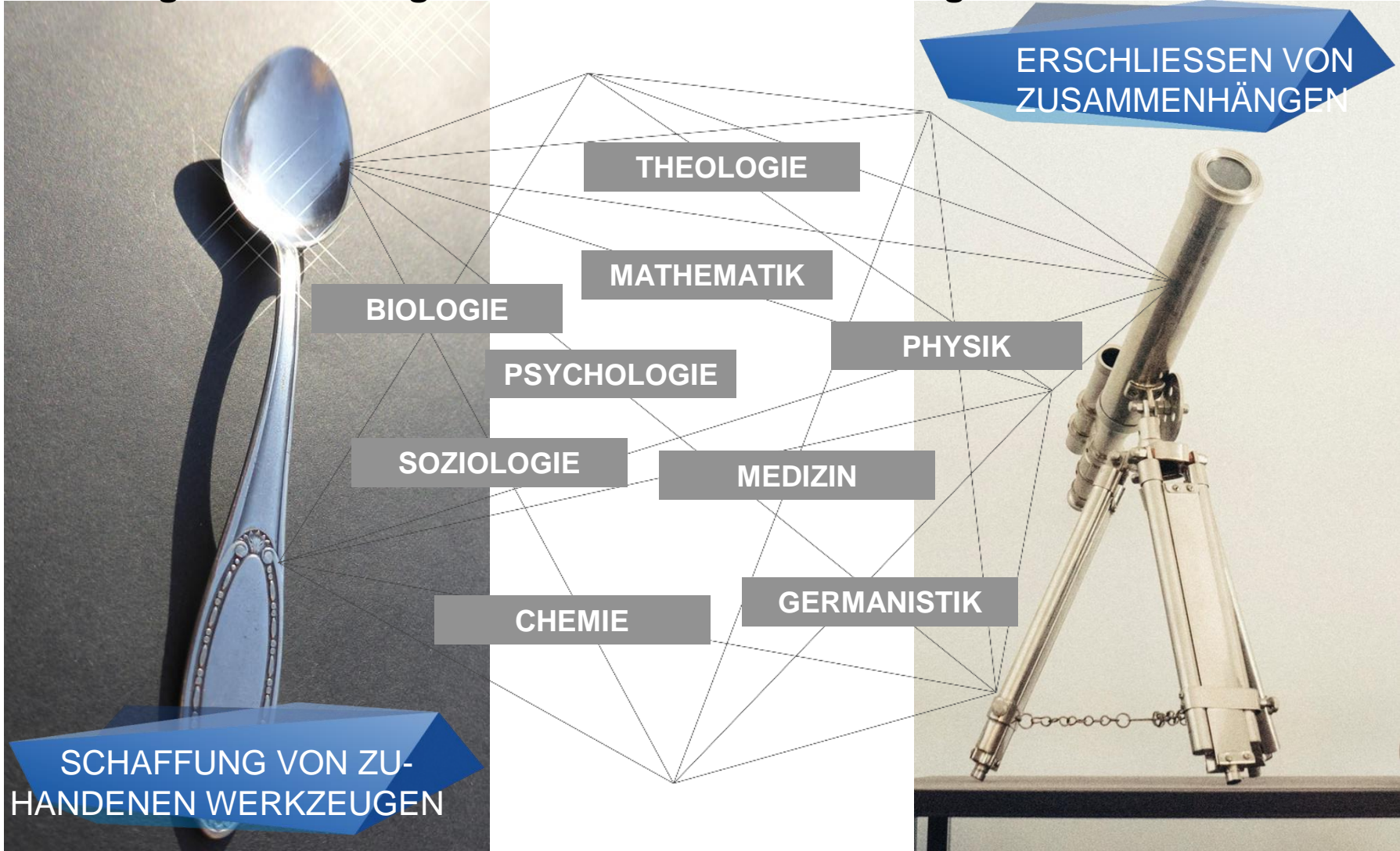
Phänomenologische Ontologie: Das Dasein und die besorgende Umsicht

Mit den uns zuhandenen Werkzeugen erschließen wir die Welt und entwerfen ein grundlegendes Verständnis von uns in der Welt.



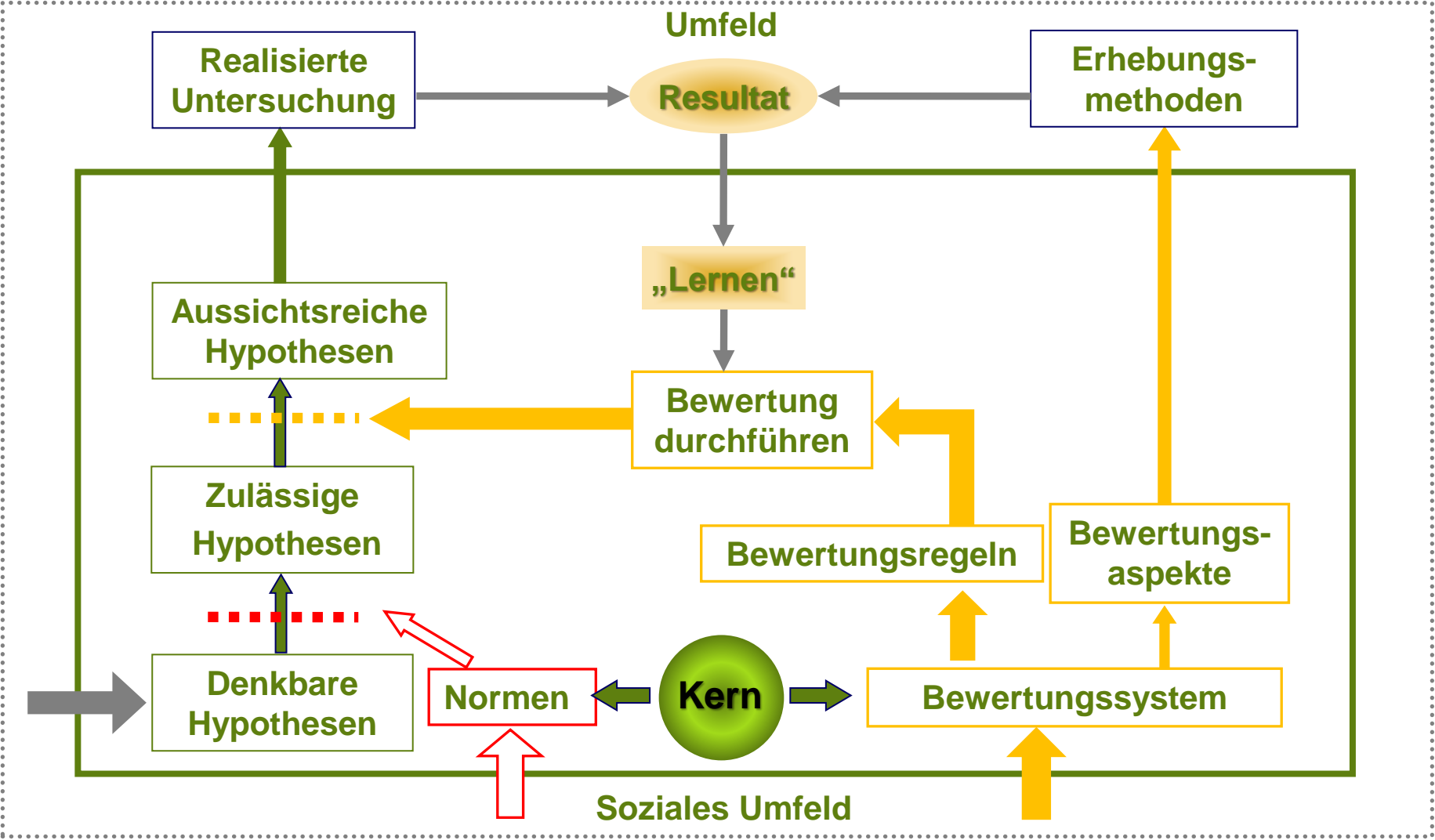
01 Wissenschaftstheorie

Phänomenologische Ontologie: Das Dasein und die besorgende Umsicht



Quelle: Heidegger, M. (1927). Sein und Zeit

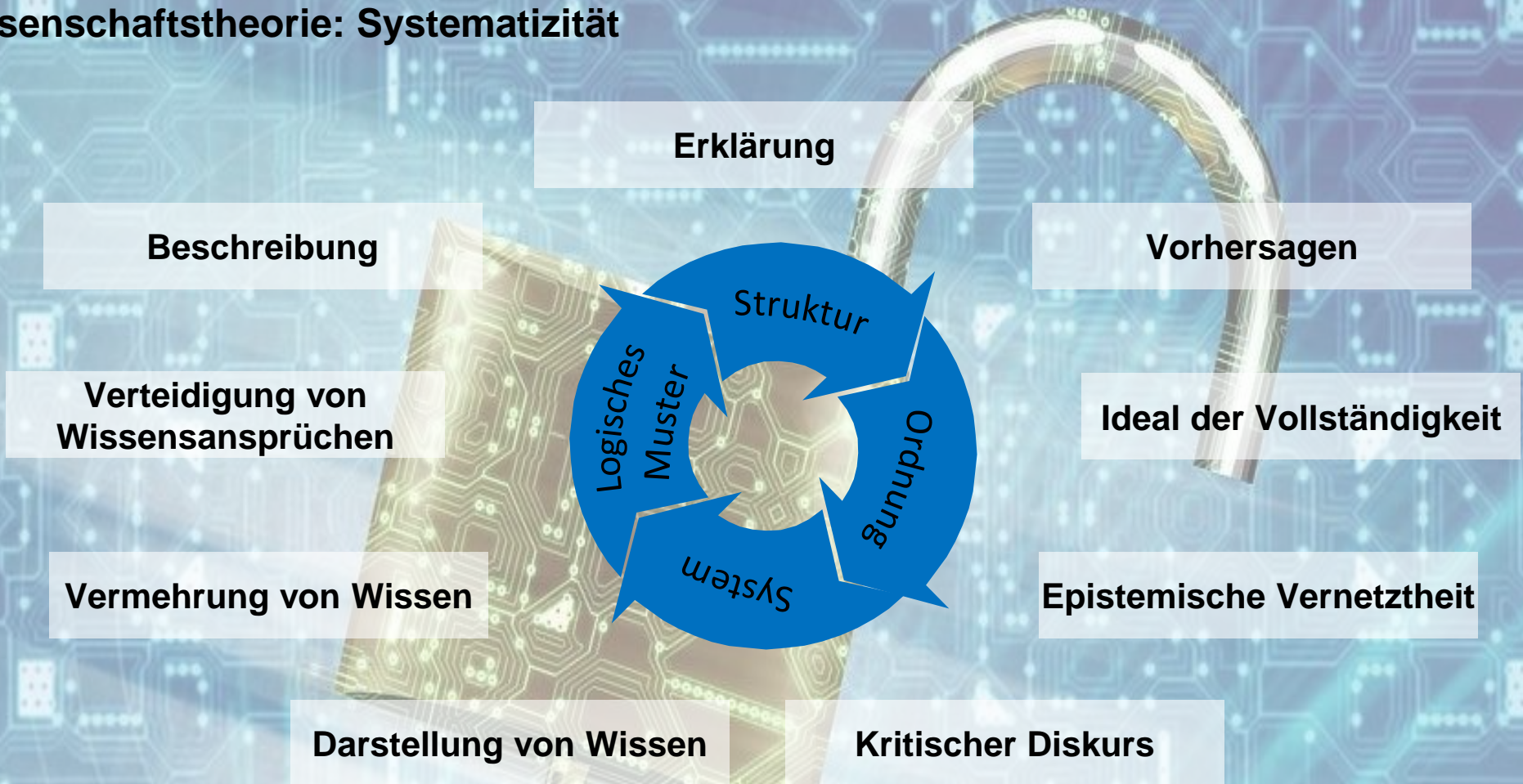
01 Wissenschaftstheorie



Quelle: Kuhn, T., 1962; The Structure of Scientific Revolutions

01 Wissenschaftstheorie

Wissenschaftstheorie: Systematizität



Wissenschaftliches Wissen unterscheidet sich von an deren Wissensarten, besonders dem Alltagswissen, primär durch seinen höheren Grad an Systematizität.

01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

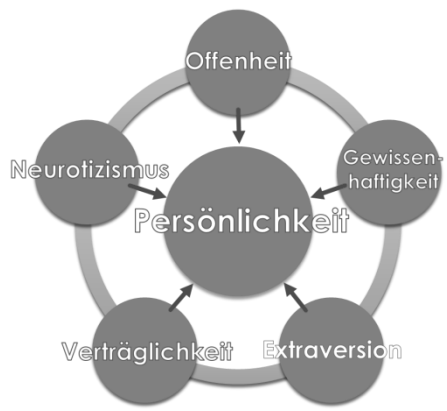
Beschreibung

- *Alle* Beschreibungen sind abstrakt, d.h. nicht alle Aspekte der beschriebenen Sache kommen in der Beschreibung vor
- **historische Beschreibung:** mehr Details hinzufügen, grössere Kohärenz der Details, mehr Kontext berücksichtigen etc.: Verminderung des Abstraktionsgrads, dadurch höhere Spezifität
- **generalisierende Beschreibung:** spezifische Details weglassen, Erhöhung des Abstraktionsgrads, dadurch größere Allgemeinheit

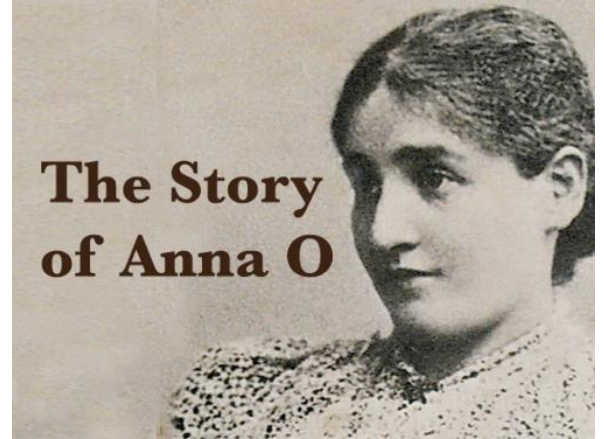
Empirische Gesetze

- ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
- ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ räumliche Nähe
- ● ○ ○ ● ● ○ ○ Ähnlichkeit
- [] [] [] [] abgeschlossener Umriss
- ∞ gute Fortsetzung
- ●● ●● ●● gemeinsamer Bereich
- ●●● ●●● ●●● Zusammenhang

Nomenklatur / Taxonomie



Historische Beschreibung



Quelle: Hoyningen-Huene, P. (2013). Systematicity: The Nature of Science.

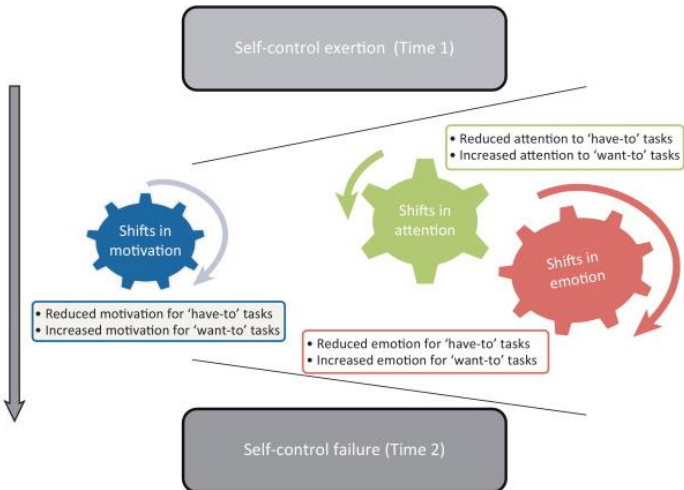
01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

Erklärung

- Erklären im weiten Sinn: meint etwas, was über das Beschreiben hinausgeht, indem warum- und wie-Fragen beantwortet werden
- Erklärungen beziehen sich auf Phänomene und können unterschiedliche Aspekte beinhalten: Erklärung mit empirischen Verallgemeinerungen, Erklärung mit Theorien, Erklärung menschlicher Handlungen, Reduktive Erklärungen und Historische Erklärungen

Theoretische Erklärung



Erklärung von Handlungen

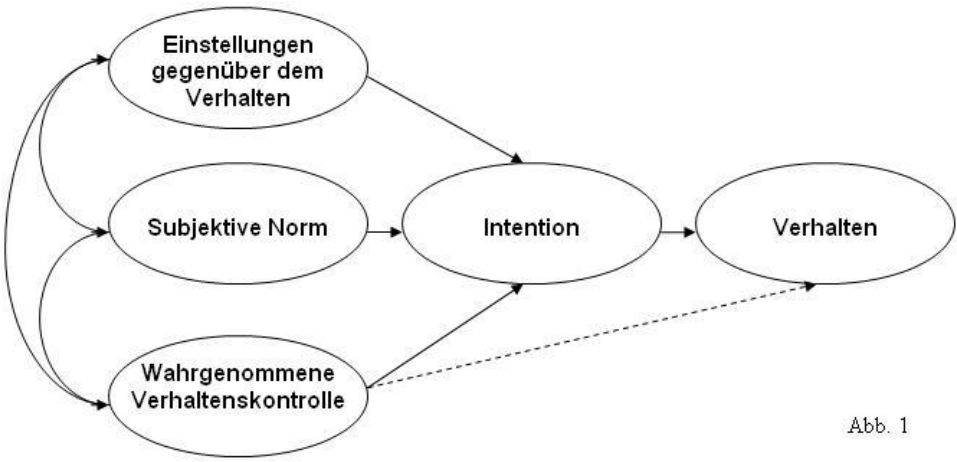


Abb. 1

Quelle: Hoyningen-Huene, P. (2013). Systematicity: The Nature of Science.

01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

Vorhersage

- Vorhersagen durch direkten Rekurs auf (deterministische oder probabilistische) Regularitäten von Daten
- Vorhersagen mittels Korrelationen mit anderen Datensätzen
- Vorhersagen mittels Theorien
- Vorhersagen mittels Modellen

Korrelationsbasierte Vorhersage: Psychologische Eignungsdiagnostik

Vorhersagestärke von Auswahlverfahren (Validität)

1	Perfekte Prognose	UNERREICHBAR GUT!
0,63	Kognitive Fähigkeitstest und strukturiertes Interviews	
0,60	Kognitive Fähigkeitstest und Arbeitsproben	
0,54	Arbeitsproben	
0,51	Kognitive Fähigkeitstests	
0,51	Strukturierte Interviews	
0,40	Persönlichkeitsfragebögen	
0,37	Assesment Center	
0,27	Referenzen	
0,10	Interessentest	
0	Zufallsprognose	VÖLLIG NUTZLOS!

Quelle: Schmidt & Hunter (1998): „The Validity and Utility of Selection Methods in Personnel Psychology: Practical and Theoretical Implications of 85 Years of Research Findings“. In: Psychological Bulletin, Vol. 124, No. 2, 262-274.

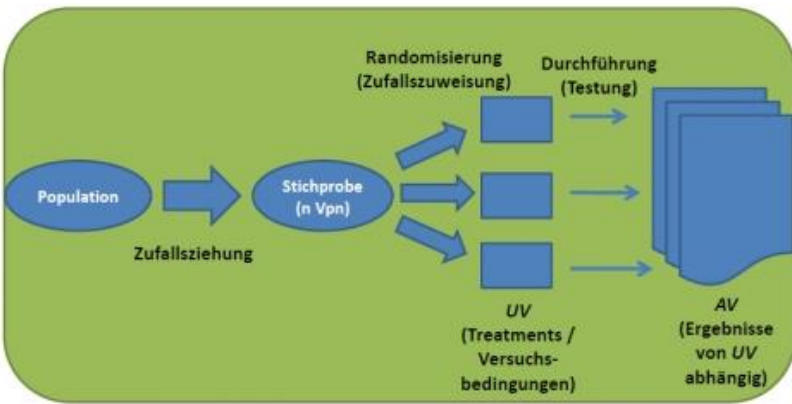
01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

Verteidigung von Wissensansprüchen

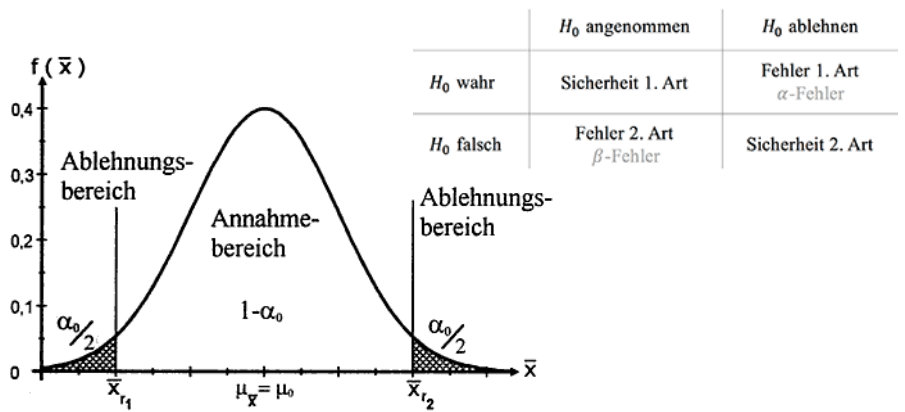
- systematische Berücksichtigung der Fehlbarkeit von Wissensansprüchen: systematische Irrtumsreduktion
- Zentrales Mittel in den Formalwissenschaften (Mathematik und formale Logik): Beweis
- Zentrales Mittel in den „empirischen“ Wissenschaften: Rechtfertigung bezieht sich auf irgendwie empirisch Vorfindbares
- Art der Erzeugung und Verwendung empirischer Daten kann sehr unterschiedlich sein: (bloße) Beobachtung, Experiment, Fragebogen, Interview, Archive im wörtlichen und übertragenen Sinn, statistische Verfahren etc.

Kausalnachweis: Das Experiment



Dreifache Repräsentativität: 1. Wie repräsentativ ist die Stichprobe? 2. Wie repräsentativ sind die Treatments? 3. Wie repräsentativ ist die Operationalisierung?

Inferenzstatistische Hypothesentestung



Quelle: Hoyningen-Huene, P. (2013). Systematicity: The Nature of Science.

01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

Vermehrung von Wissen

- Ein Teil des kreativen Prozesses der Wissenschaft ist hoch chaotisch: Erzeugung von Hypothesen oder neuer Konzepte, besonders in den theoretischen Teilen der Wissenschaften
- Besonders systematische Aspekte der wissenschaftlichen Wissensvermehrung: Systematische Sammlung von Daten

Kohortenstudien

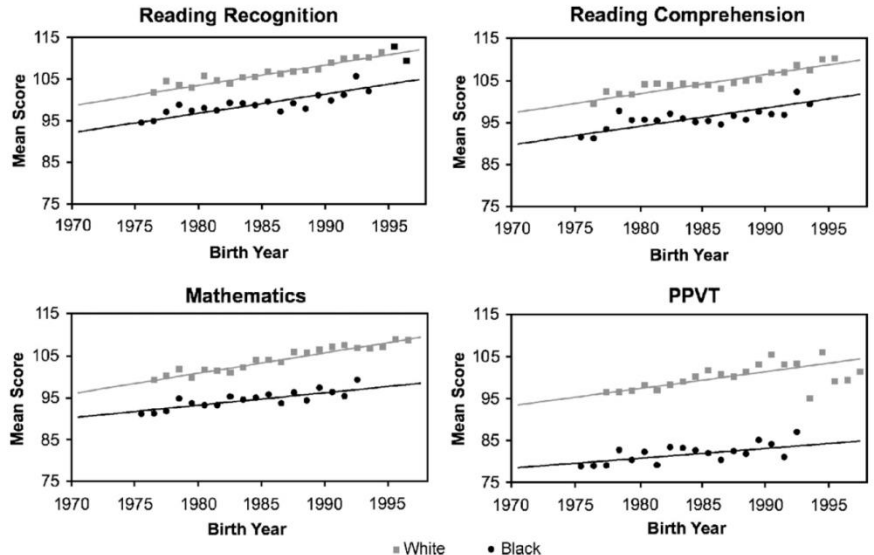
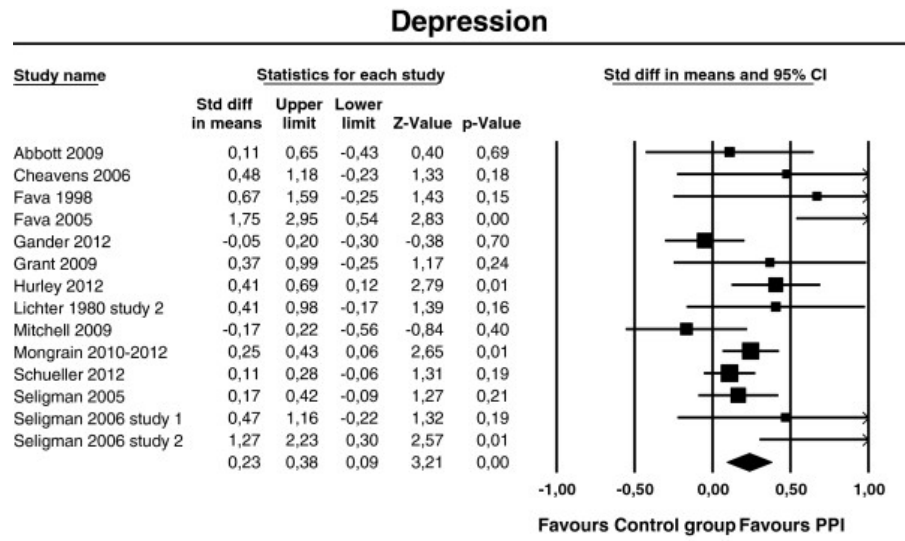


Fig. 1. Unadjusted trends in test score by birth date.

Metaanalysen



Study name	Statistics for each study				
	Std diff in means	Upper limit	Lower limit	Z-Value	p-Value
Abbott 2009	0,11	0,65	-0,43	0,40	0,69
Cheavens 2006	0,48	1,18	-0,23	1,33	0,18
Fava 1998	0,67	1,59	-0,25	1,43	0,15
Fava 2005	1,75	2,95	0,54	2,83	0,00
Gander 2012	-0,05	0,20	-0,30	-0,38	0,70
Grant 2009	0,37	0,99	-0,25	1,17	0,24
Hurley 2012	0,41	0,69	0,12	2,79	0,01
Lichter 1980 study 2	0,41	0,98	-0,17	1,39	0,16
Mitchell 2009	-0,17	0,22	-0,56	-0,84	0,40
Mongrain 2010-2012	0,25	0,43	0,06	2,65	0,01
Schueller 2012	0,11	0,28	-0,06	1,31	0,19
Seligman 2005	0,17	0,42	-0,09	1,27	0,21
Seligman 2006 study 1	0,47	1,16	-0,22	1,32	0,19
Seligman 2006 study 2	1,27	2,23	0,30	2,57	0,01
Overall	0,23	0,38	0,09	3,21	0,00

Meta Analysis

Quelle: Hoyningen-Huene, P. (2013). Systematicity: The Nature of Science.

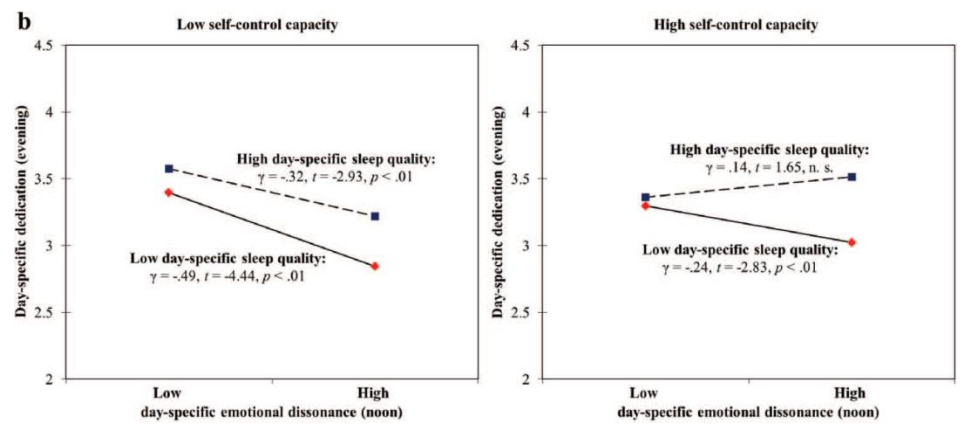
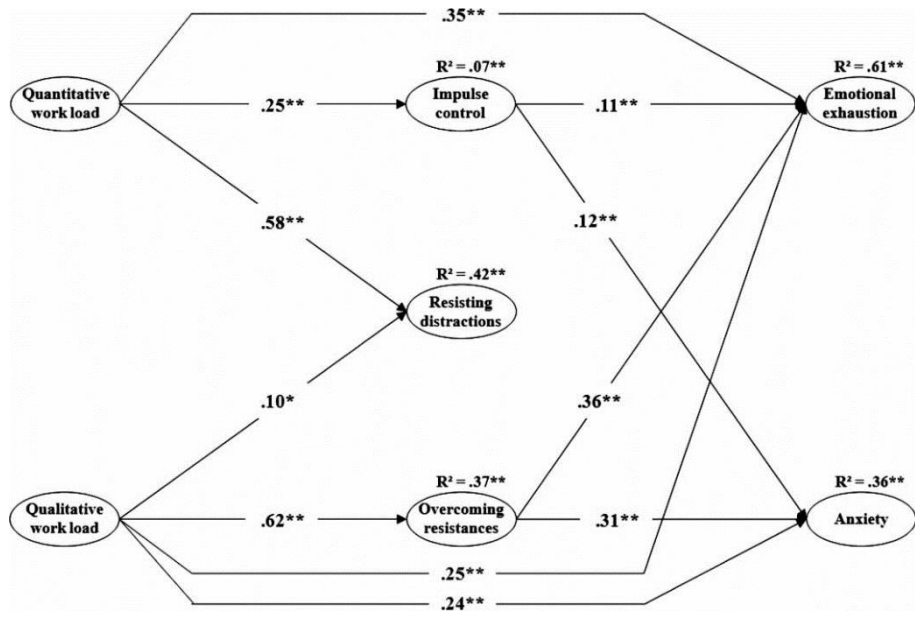
01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

Darstellung von Wissen

- Wissenschaften haben eine Unmenge von Darstellungsweisen erfunden, um mit der Fülle und Neuartigkeit des wissenschaftlichen Wissens umzugehen
- Formalwissenschaften: Symbolsysteme, Formeln, Graphen, axiomatische Darstellung, etc.

Wechselwirkungen und Pfadmodelle



Quelle: Hoyningen-Huene, P. (2013). Systematicity: The Nature of Science.

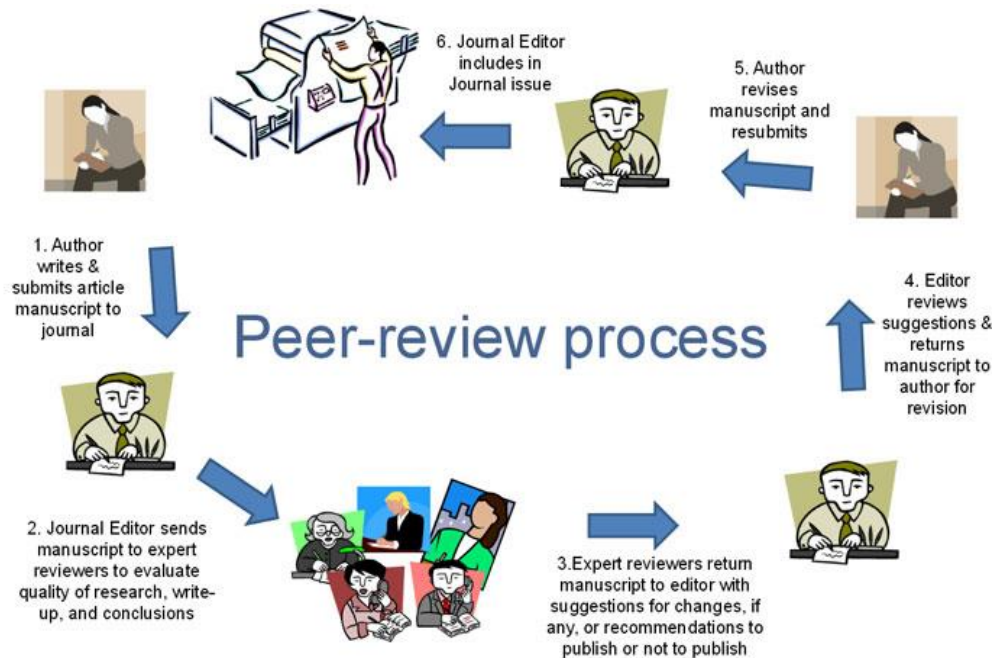
01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

Kritischer Diskurs

- Systematische Berücksichtigung der Fehlbarkeit von Wissenschaftlern: wird auf aufgefangen durch systematischen kritischen Diskurs
- Entsprechende soziale Organisation der Wissenschaft, die den kritischen Diskurs institutionalisiert.

Peer-reviewed Verfahren



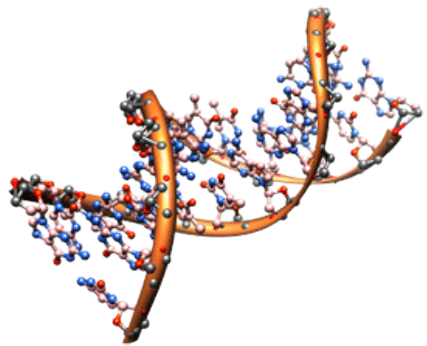
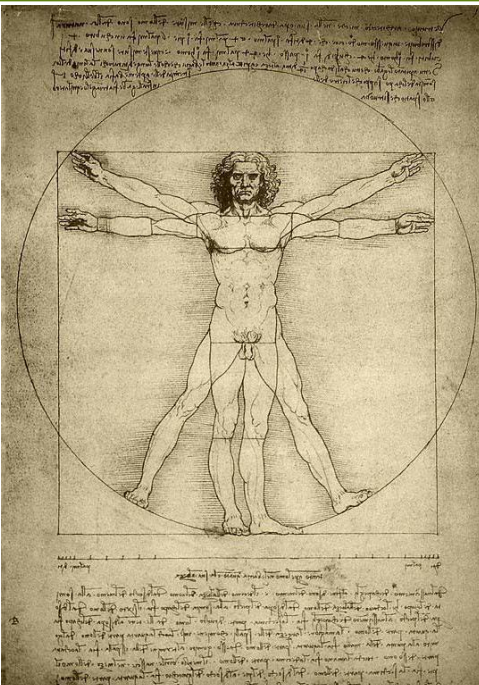
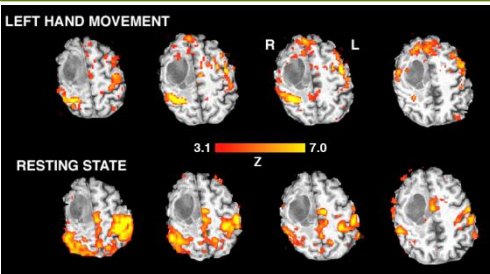
01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

Epistemische Vernetztheit

- „Epistemische Vernetztheit“ bedeutet das Bestehen von Verbindungen zu anderen Wissensbeständen.
- Epistemische Vernetztheit ist ein Aspekt von Systematizität

Biologie und Psychologie



BWL und Psychologie

Gefangenendilemma		B gesteht		B schweigt	
	A gesteht	Strafe: 5 Jahre	Strafe: 5 Jahre	Strafe: 0 Jahre	Strafe: 15 Jahre
	A schweigt	Strafe: 15 Jahre	Strafe: 0 Jahre	Strafe: 1 Jahr	Strafe: 1 Jahr

Quelle: Hoyningen-Huene, P. (2013). Systematicity: The Nature of Science.

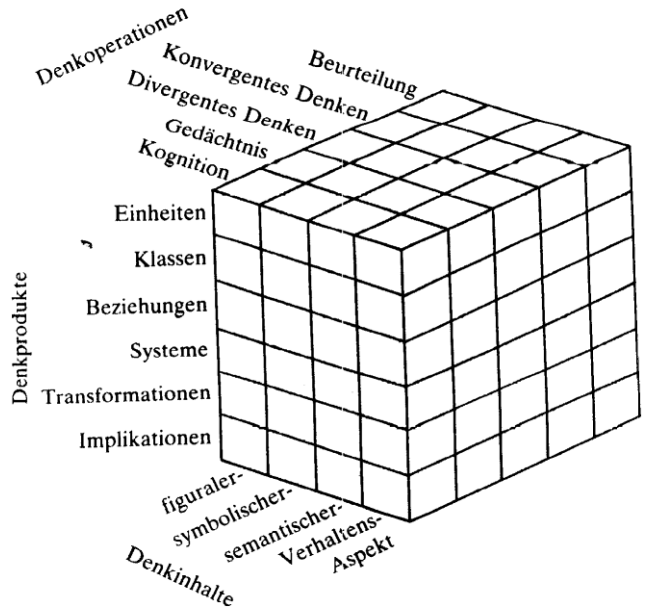
01 Wissenschaftstheorie

Systematizität in der Psychologie

Ideal der Vollständigkeit

- Ideal der Vollständigkeit des Wissens über den jeweiligen Gegenstandsbereich
- Beispiel: Integration von unterschiedlichen oder ähnlichen Wissensaspekten zu einem ganzheitlichen sowie umfassenden Verständnis über ein Phänomen bzw. Gegenstand.

Persönlichkeitspsychologie



Quelle: Hoyningen-Huene, P. (2013). Systematicity: The Nature of Science.



Teil 2: Vertiefung Varianzanalyse

Multivariate Datenanalyse

2 Vertiefung Varianzanalyse

2.1 Prinzip der Varianzzerlegung

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen



Lehrstuhl
für Arbeits-,
Organisations- und
Wirtschaftspsychologie



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

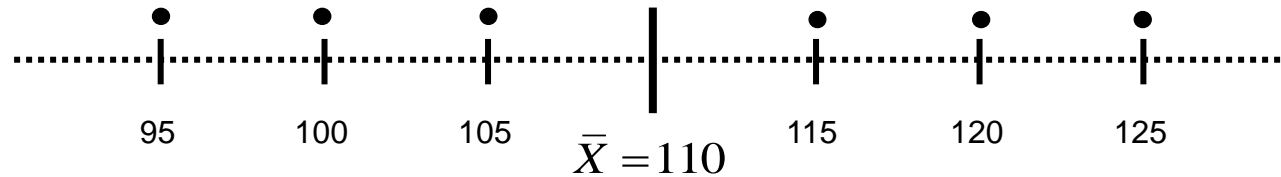
SchumpeterSchool
of Business and Economics



2.1 Prinzip der Varianzzerlegung

Varianzzerlegung

Die Verteilung der Anzahl der Vertragsabschlüsse innerhalb einer Versicherungsfiliale:

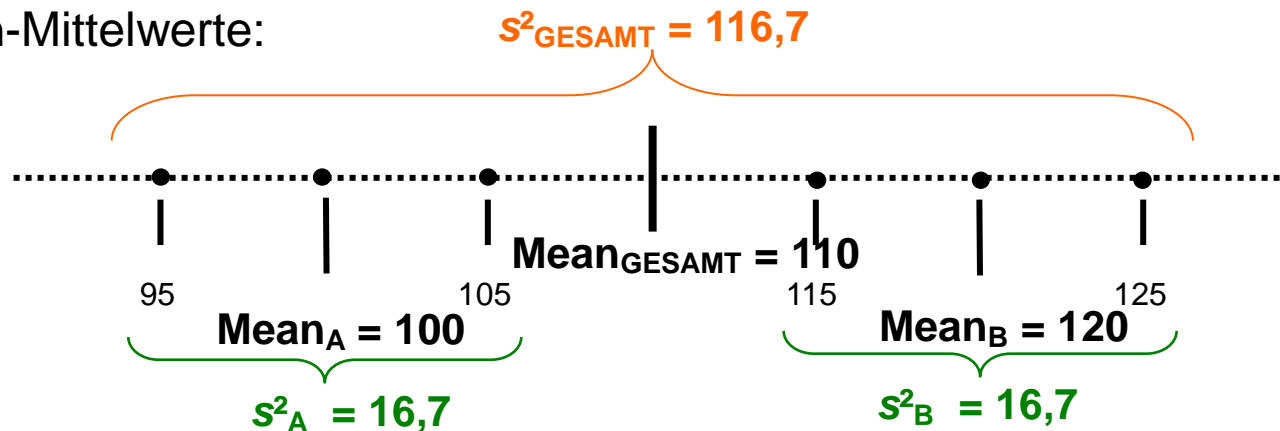


- Die Varianz beträgt: $s^2 = 116,7$
- Die Stichprobe besteht aus 2 Gruppen (die unterschiedliche Führungskräfte haben), von denen jeweils die Mittelwerte bekannt sind: $\text{Mean}_A = 100$ $\text{Mean}_B = 120$
- Innerhalb der Subgruppen fallen dementsprechend die Varianzen deutlich niedriger aus: $s_A^2 = 16,7$ $s_B^2 = 16,7$
- Wichtig: Solange kein Subgruppen-Unterschied bekannt ist, ist der Gesamtmittelwert der beste Schätzer der Variablen X

2.1 Prinzip der Varianzzerlegung

Varianzzerlegung

Die mittlere Abweichung der Werte vom Mittelwert reduziert sich bei Berücksichtigung der Subgruppen-Mittelwerte:



Die „übrig gebliebene“ Varianz bei Berücksichtigung der Subgruppen-Mittelwerte ergibt sich aus der Summe der Subgruppen-Varianzen dividiert durch die Anzahl der Gruppen:

$$\frac{1}{2} \cdot (s_A^2 + s_B^2) = \frac{1}{2} \cdot (16,7 + 16,7) = 16,7 = s^2_{\text{within}}$$

→ man spricht von der Varianz *innerhalb* der (Sub-)Gruppen

2.1 Prinzip der Varianzzerlegung

Varianzzerlegung

Die **Gesamtvarianz** der Variablen X wird mit Berücksichtigung der Subgruppen-Mittelwerte zerlegt in die **Varianz innerhalb der Gruppen** und die **Varianz zwischen den Gruppen**:

$$s^2_{total} = s^2_{within} + s^2_{between}$$

→ im Beispiel: $116,7 = 16,7 + 100$

In mathematischer Form:

$$s^2_X = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j s_j^2}_{S^2_{within}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j (\bar{X}_j - \bar{X}_{TOTAL})^2}_{S^2_{between}}$$

j: _ Laufindex für die Gruppen

m: Anzahl der Gruppen

X_{TOTAL}: Gesamtmittelwert

2.1 Prinzip der Varianzzerlegung

Varianzzerlegung

Die Unterscheidung zwischen Varianz innerhalb und zwischen den Gruppen ist für die statistische Datenanalyse von entscheidender Bedeutung:

- Varianz zwischen den Gruppen ($sd^2_{between}$) wird auch als „**erklärte**“ **Varianz (Primärvarianz)** bezeichnet, da sie den Anteil an der Gesamtvarianz darstellt, der auf den Gruppenunterschied (Gruppe A vs. Gruppe B) zurückgeht
 - Die „übrig gebliebene“ Varianz innerhalb der Gruppen (sd^2_{within}) ist der „**unerklärte**“ **Varianzanteil (Fehlervarianz)**, der nicht auf den Unterschied zwischen den Gruppen (Gruppe A vs. Gruppe B) zurückzuführen ist
- Der Anteil der **erklärten Varianz** einer Variablen stellt das Ausmaß der Verbesserung der Vorhersage oder Schätzung in Kenntnis einer anderen Variablen (Subgruppenunterschied in den Mittelwerten) dar – gemessen an der Schätzung mit dem Gesamtmittelwert (Gesamtvarianz)

Das statistische Prinzip der Varianzzerlegung liegt allen einfachen (t-Test und Varianzanalyse) sowie komplexen Analyseverfahren (Regressions- sowie Faktorenanalyse, Hierarchisch lineare Modelle und Strukturgleichungsmodellen) der linearen Statistik zu Grunde.

Multivariate Datenanalyse

2 Vertiefung Varianzanalyse

2.1 Prinzip der Varianzzerlegung

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen



Lehrstuhl
für Arbeits-,
Organisations- und
Wirtschaftspsychologie



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

SchumpeterSchool
of Business and Economics



2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Varianzaufklärung

- **Grundgedanke: Aufklärung, wie viel Variation der AV durch die UV erzeugt wird (Primärvarianz)**
 - Gesamtvarianz wird aufgeteilt in Primärvarianz (*between*) und Fehlervarianz (*within*)
 - man vergleicht Primärvarianz (PV) / Fehlervarianz (FV)
 - wenn PV größer ist als FV, dann hat die UV gewirkt
- **Einfaktorielle Versuchspläne:**
 - H_0 : Die Gruppen kommen aus Populationen mit gleichen Mittelwerten (Mittelwerte der Gruppen unterscheiden sich nicht)
 - H_1 : Die Gruppen kommen nicht aus Populationen mit gleichen Mittelwerten (mindestens zwei Mittelwerte unterscheiden sich)
- **Mehrfaktorielle Versuchspläne:**
 - Hauptwirkungen der Faktoren wie beim einfaktoriellen Plan
 - Wechselwirkung:
 - H_0 : Die Zellenmittelwerte setzen sich additiv aus den Haupteffekten zusammen
 - H_1 : Die Zellenmittelwerte setzen sich nicht additiv aus den Haupteffekten zusammen

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel

- Vier Testgruppen, die unterschiedliche Treatments erhalten und deren Leistung bei einem Test gemessen wird

	j=1 Kein Treatment	j=2 Extraportion Milch	j=3 Vitamine	j=4 Warme Mahlzeit
	8	10	13	17
	10	12	15	19
	12	14	17	21
Mittelwert \bar{X}_j	10	12	15	19
Gesamtmittelwert \bar{X}_{TOTAL}	14			

$$\text{Total Sum of Squares} = s_X^2 = \sum (X - \bar{X}_{TOTAL})^2 = 170$$

$$\text{Between Sum of Squares} = \sum [n_j (\bar{X}_j - \bar{X}_{TOTAL})^2] = 138$$

$$\text{Within Sum of Squares} = \sum (X - \bar{X}_j)^2 = 32$$

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel

	Quadratsumme SS	Freiheitsgrade df	Mittel der Quadrate (MS)	F	p
Between conditions = Signal	138	3	46	11,50	0,003
Within conditions = Noise	32	8	4		

„Würde man diese Studie eintausend mal durchführen, so würde in 3 von 1.000 Fällen ein F-Wert > 11,50 ausgewiesen, selbst wenn zwischen den vier Gruppen tatsächlich kein Unterschied bestünde.“

$$df_{between} = k - 1 = 3$$

$$df_{within} = N - k = 8$$

$$MS = \frac{SS}{df}$$

$$F = \frac{MS_{between}}{MS_{within}}$$

Das selbe Ergebnis als Original SPSS-Output:

Einfaktorielle ANOVA

Testergebnis

	Quadratsumme	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz
Zwischen den Gruppen	138,000	3	46,000	11,500	,003
Innerhalb der Gruppen	32,000	8	4,000		
Gesamt	170,000	11			

Beispiel entnommen aus: Rosnow & Rosenthal: Beginning Behavioral Research.

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

1. Fragestellung

- Mercedes Benz beabsichtigt die Markteinführung von zwei Modellen der neuen C-Klasse (Touring und Cabriolet).



- Angesichts der Krise in der Automobilbranche strebt der Konzern eine große Wirkung der Werbekampagne an.
- In zwei, gemessen an ökonomischen Maßstäben vergleichbaren Verkaufsgebieten werden unterschiedliche Marketingstrategien angewandt, die der Absatzmaximierung dienen:
 - **Emotionsbezogenes Marketing** fokussiert auf stimulierendes Design, einzigartiges Fahrvergnügen und exklusive Ausstattung.
 - **Informationsbezogenes Marketing** hingegen hebt pragmatische, ökonomische Merkmalsfacetten des Autos hervor, wie bspw. Komfort, Sicherheit oder Sparsamkeit.

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

1. Fragestellung

- Der Konzern möchte vor einer großflächigen Einführung beider Modelle die Wirksamkeit der Marketingstrategien anhand der Anzahl der Verkäufe überprüfen.
- Für diese Fragestellung werden zwei unabhängige Variablen (Prädiktoren) berücksichtigt
 - 1. Prädiktor (X1): Marketingstrategie (emotions-/informationsbezogen)
 - 2. Prädiktor (X2): Modell der C-Klasse (Touring/Cabriolet)
 - Kriterium (Y): Häufigkeit der Bestellung
- Um die Unterschiede zwischen den Bedingungen (Touring vs. Cabrio; emotions- vs. Informationsbezogen) zu kodieren, werden folgende Parameter festgelegt:

	Informations- bezogen	Emotions- bezogen
C-Klasse Touring	c	c + b₁
C-Klasse Cabriolet	c + b₂	c + b₁ + b₂

c: Ausgangsbedingung „informationsbezogene Strategie und C-Touring“

b₁: Effekt „emotionsbezogene Strategie“ relativ zu c

b₂: Effekt „C-Klasse Cabriolet“ relativ zu c

$$\hat{Y} = X_1 \cdot b_1 + X_2 \cdot b_2 + c$$

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

2. Modellspezifikation und Untersuchungsdesign

- **Diese Form des Modells basiert auf der Annahme, dass die Wirkungen der einzelnen Faktoren sich addieren:**

$$Y = b_1 \cdot [\text{Marketingstrategie}] + b_2 \cdot [\text{Modell}] + c + E$$

- Diesem Modell zufolge unterscheiden sich die Wirkungen der Marketingstrategien auf die Verkaufszahlen, d.h. eine der beiden Marketingstrategien ist wirkungsvoller im Hinblick auf die Verkaufszahlen.
 - Darüber hinaus nimmt dieses Modell auch einen durch den Autotyp bedingten Unterschied im Verkaufserfolg an, d.h. eines der beiden Automodelle wird mehr verkauft.
 - In sechs großen Niederlassungen werden die Verkaufszahlen ein Monat nach Einführung der beiden Automodelle erhoben – drei der Niederlassungen wendeten die informationsbezogene Strategie an, während die drei anderen Niederlassungen die emotionsbezogene Strategie verwendeten.
- **Zentrale Voraussetzungen für die Spezifikation einer mehrfaktoriellen Varianzanalyse:**
 1. **Jedes** Versuchsobjekt muss **genau einer** Merkmalskombination zuzuordnen sein
 2. **Jede** Merkmalskombination muss logisch möglich sein

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

2. Modellspezifikation und Untersuchungsdesign

$$Y_i = c + b_1 \times X_1 + b_2 \times X_2 + \varepsilon_i$$

- Lineare Funktionen mit Variablen lassen sich als algebraische Vektorenfunktionen darstellen:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \\ Y_{10} \\ Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{0,1} & X_{1,1} & X_{2,1} \\ X_{0,2} & X_{1,2} & X_{2,2} \\ X_{0,3} & X_{1,3} & X_{2,3} \\ X_{0,4} & X_{1,4} & X_{2,4} \\ X_{0,5} & X_{1,5} & X_{2,5} \\ X_{0,6} & X_{1,6} & X_{2,6} \\ X_{0,7} & X_{1,7} & X_{2,7} \\ X_{0,8} & X_{1,8} & X_{2,8} \\ X_{0,9} & X_{1,9} & X_{2,9} \\ X_{0,10} & X_{1,10} & X_{2,10} \\ X_{0,11} & X_{1,11} & X_{2,11} \\ X_{0,12} & X_{1,12} & X_{2,12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 21 \\ 5 \\ 19 \\ 4 \\ 20 \\ 3 \\ 12 \\ 11 \\ 10 \\ 14 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$


- Für jede der sechs Niederlassungen liegen die Verkaufszahlen separat für beide C-Klassen-Varianten vor, so dass insgesamt zwölf Verkaufszahlen die abhängige Variable konstituieren.
- Aus dieser Modellnotation geht hervor, auf welche Marketingstrategie b_1 (informations- vs. Emotionsbezogen) sowie auf welchen Autotyp b_2 sich die einzelnen Verkaufszahlen beziehen.

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

3. Ergebnisse

- Nach drei Monaten werden die Verkaufszahlen der sechs Niederlassungen bestimmt, aus denen sich die Mittelwerte der vier Gruppen errechnen lassen:

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 5 \\ 19 \\ 4 \\ 20 \\ 3 \\ 12 \\ 11 \\ 10 \\ 14 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$


	Informations- bezogen	Emotions- bezogen
C-Klasse Touring	20	12
C-Klasse Cabriolet	4	12

- Aus diesem Ergebnismuster lassen sich auf Grundlage der Modellspezifikation keine eindeutigen Aussagen über die Wirksamkeit der beiden Marketingstrategien ableiten.
- Offensichtlich unterscheidet sich die Wirkung der beiden Marketingstrategien in Abhängigkeit des Autotyps.

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

3. Ergebnisse: Was ist eigentlich eine Wechselwirkung? (Triviales Beispiel)

- **Es soll der Fluss eines Wasserhahns vorhergesagt werden**

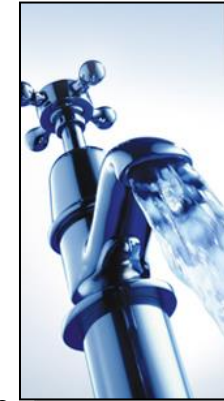
- Kriterium: „Wasserfluss“ [l/m]
- 1. Prädiktor: „Wasserhahn aufgedreht“ [ja/nein]
- 2. Prädiktor: „Rohrgröße“ [klein/groß]

	aufgedreht	zugeschraubt
kleines Rohr	c	c + b₁
Großes Rohr	c + b₂	c + b₁ + b₂

c: Ausgangsbedingung

b₁: Effekt „zugeschraubt“ relativ zu c

b₂: Effekt „großes Rohr“ relativ zu c



- **Nun wird der Wasserfluss in den unterschiedlichen Bedingungen gemessen:**

a. **Ausgangsbedingung „c“:** Aufgedrehter Hahn bei kleinem Rohr

→ Durchfluss: 3 l/m

b. **Effekt „großes Rohr“:** Wird ein großes Rohr eingesetzt, erhöht sich der Wasserfluss auf 7 l/m

→ Zuwachs beträgt 4 l/m: $b_2 = 4$

c. **Effekt „zugeschraubt“:** Ist der Hahn bei kleinem Rohr zugeschraubt, fließt kein Wasser mehr 0 l/m

→ Verminderung um 3 l/m: $b_1 = -3$

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

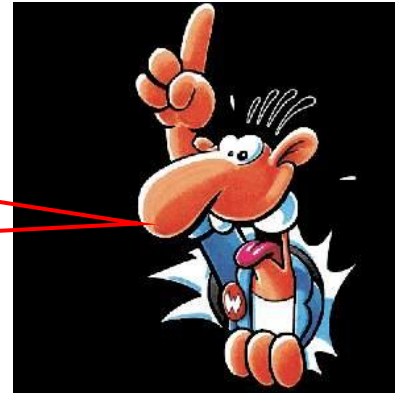
3. Ergebnisse: Was ist eigentlich eine Wechselwirkung? (Triviales Beispiel)

- Wird von einem linearen Zusammenhang zwischen den Faktoren ausgegangen, so erwarte ich bei geschlossenem Hahn und großem Rohr:

$$\hat{Y} = c + b_1 + b_2 = 3l/m - 3l/m + 4l/m = \underline{\underline{4l/m}}$$

- Aber: Gemessen wird 0 l/m

Wenn der Hahn zu
is', kann nix
fließen!!



- Schlussfolgerung: Der Zusammenhang zwischen den Faktoren ist nicht linear!

- Lösung: Ein Wechselwirkungsparameter muss den Unterschied zwischen der linearen Vorhersage und dem tatsächlich gemessenen Wert erfassen

$$w_1 = -4$$

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

3. Ergebnisse: Was ist eigentlich eine Wechselwirkung? (Triviales Beispiel)

	aufgedreht	zugedreht
kleines Rohr	c 3 l/m	c + b₁ 0 l/m
Großes Rohr	c + b₂ 7 l/m	c + b₁ + b₂ + w₁ 0 l/m

c: Ausgangsbedingung

b₁: Effekt „zugedreht“ relativ zu c

b₂: Effekt „großes Rohr“ relativ zu c

w₁: Wechselwirkung

Wasserhahn x Rohrgröße

- Varianzanalysen können *nicht-lineare Beziehungen* darstellen, wenn diese *in linearer Form* kodiert werden
- Eine Wechselwirkung (auch Interaktion) bedeutet nicht, dass sich die Faktoren gegenseitig hinsichtlich ihrer Ausprägung beeinflussen
- Eine Wechselwirkung besteht dann, wenn die Merkmalsausprägungen des einen Faktors die Wirkung des anderen Faktors auf das Kriterium beeinflusst

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

3. Ergebnisse: Kodierung der Wechselwirkung im Auto-Beispiel

	Informations-bezogen	Emotions-bezogen
C-Klasse Touring	c	c + b₁
C-Klasse Cabriolet	c + b₂	c + b₁ + b₂ + w₁

c: Ausgangsbedingung „informationsbezogene Strategie und E-Touring“

b₁: Effekt „emotionsbezogene Strategie“ relativ zu c

b₂: Effekt „E-Klasse Cabriolet“ relativ zu c

w₁: Wechselwirkung zwischen Autotyp und Marketingstrategie

• **Korrekt spezifiziertes Modell:**

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \\ Y_{10} \\ Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{0,1} & X_{1,1} & X_{2,1} & X_{3,1} \\ X_{0,2} & X_{1,2} & X_{2,2} & X_{3,2} \\ X_{0,3} & X_{1,3} & X_{2,3} & X_{3,3} \\ X_{0,4} & X_{1,4} & X_{2,4} & X_{3,4} \\ X_{0,5} & X_{1,5} & X_{2,5} & X_{3,5} \\ X_{0,6} & X_{1,6} & X_{2,6} & X_{3,6} \\ X_{0,7} & X_{1,7} & X_{2,7} & X_{3,7} \\ X_{0,8} & X_{1,8} & X_{2,8} & X_{3,8} \\ X_{0,9} & X_{1,9} & X_{2,9} & X_{3,9} \\ X_{0,10} & X_{1,10} & X_{2,10} & X_{3,10} \\ X_{0,11} & X_{1,11} & X_{2,11} & X_{3,11} \\ X_{0,12} & X_{1,12} & X_{2,12} & X_{3,12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ b_1 \\ b_2 \\ w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \\ Y_{10} \\ Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ b_1 \\ b_2 \\ w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

4. Parameterschätzung

- Die Schätzung der Modellparameter erfolgt über die Kleinstquadrat-Methode, die impliziert, dass der beste Schätzer die subgruppenspezifischen Mittelwerte sind:

	Informations- bezogen	Emotions- bezogen
C-Klasse Touring	20	12
C-Klasse Cabriolet	4	12

$$\begin{array}{ll} c = 20 & b_2 = -16 \\ b_1 = -8 & w_1 = 16 \end{array}$$

- Das volle Modell lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$Y = X_1 \cdot b_1 + X_2 \cdot b_2 + X_3 \cdot w_1 + c + E$$

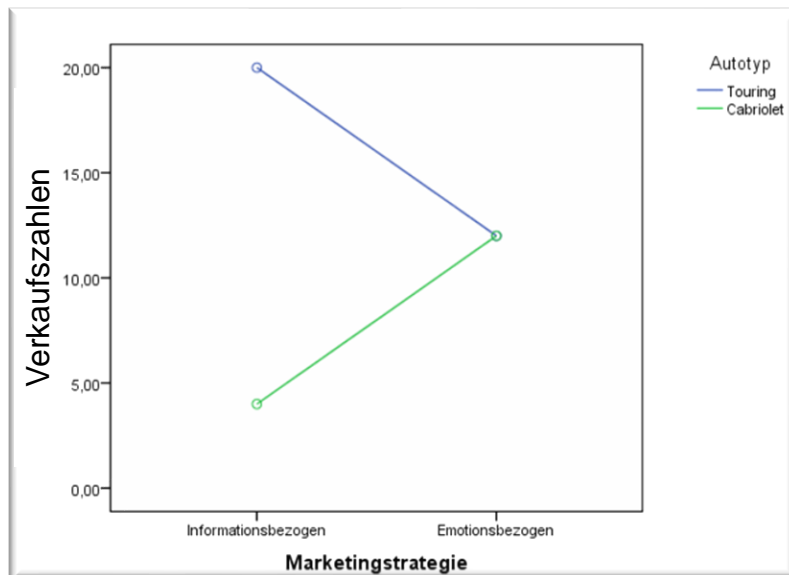
$$Y = X_1 \cdot (-8) + X_2 \cdot (-16) + X_3 \cdot (16) + 20 + E$$

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

5. Visualisierung der Haupt- und Wechselwirkungen

- Anhand der graphischen Darstellung der subgruppenspezifischen Mittelwertsausprägungen in einem Koordinatensystem lassen sich die Haupt- und Wechselwirkungen beschreiben:



- **1. Haupteffekt:** Die Verkaufszahlen des Tourings sind durchschnittlich höher als die des Cabriolets.
- **2. Haupteffekt:** Unabhängig vom Autotyp unterscheiden sich beide Marketingstrategien in ihrer Wirkung auf die Verkaufszahlen nicht.
- **Wechselwirkung:** Die Wirkung der Marketingstrategie auf die Verkaufszahlen hängt vom Autotyp ab – die informationsbezogene Strategie wirkt bei den Tourings besser als die emotionsbezogene, während die emotionsbezogene Strategie einen höheren Absatz bei Cabriolets zur Folge hat

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Ablauf einer mehrfaktoriellen ANOVA

6. Hypothesentestung: ANOVA-Tabelle (Analysis of Variance)

Differenz $MS_{TOTAL} - MS_{WITHIN}$ **Varianzanalyse**

Abhängige Variable: Verkaufszahl

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Sig.	Partielles Eta-Quadrat
Korrigiertes Modell	384.000 ^a	3	128.000	56.889	.000	.955
Konstanter Term	1728.000	1	1728.000	768.000	.000	.990
Marketingstrategie	.000	1	.000	.000	1.000	.000
Autotyp	192.000	1	192.000	85.333	.000	.914
Marketingstrategie * Autotyp	192.000	1	192.000	85.333	.000	.914
Fehler	18.000	8	2.250			
Gesamt	2130.000	12				
Korrigierte Gesamtvarianz	402.000	11				

a. R-Quadrat = .955 (korrigiertes R-Quadrat = .938)

Prädiktoren & Interaktionen (links, grüne Klammer)

MS_{WITHIN} : Unerklärter Varianzanteil (links, grüne Klammer)

$s^2: MS_{TOTAL}$ Gesamtvarianz (links, grüne Klammer)

F-Wert (rot, Pfeil auf F-Wert)

Signifikanz: $p < .05$ (rot, Pfeil auf Sig.)

Partielle Effektstärken (rechts, rote Klammer)

Determinationskoeffizient:
Relativer Anteil der aufgeklärten Varianz

- In diesem Fall erreichen die Hauptwirkung des Autotyps sowie die Wechselwirkung statistische Signifikanz.
- Die wichtigsten Kennwerte sind in **rot** dargestellt

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Wechselwirkung bei zweifaktoriellen Plänen

Ob die Hauptwirkung (HW) bei Signifikanz der Wechselwirkung (WW) interpretiert werden kann, hängt von der Art der WW ab.

Logik der Interpretation:

Verändert die Wechselwirkung die Richtung der Hauptwirkung?

- Wenn nein, darf die Hauptwirkung interpretiert werden.
- Wenn ja, darf die Hauptwirkung nicht interpretiert werden.

Interpretation ist damit nur durch Veranschaulichung der Effekte möglich, entweder graphisch oder in einer Tabelle.

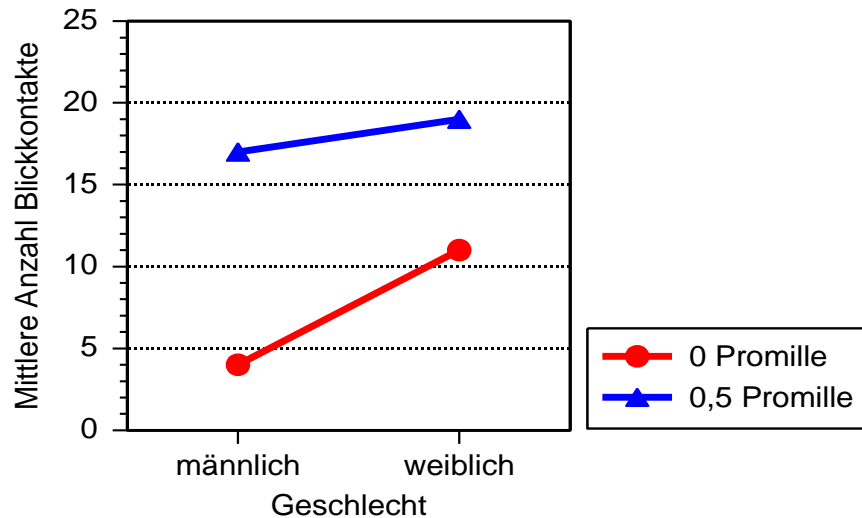
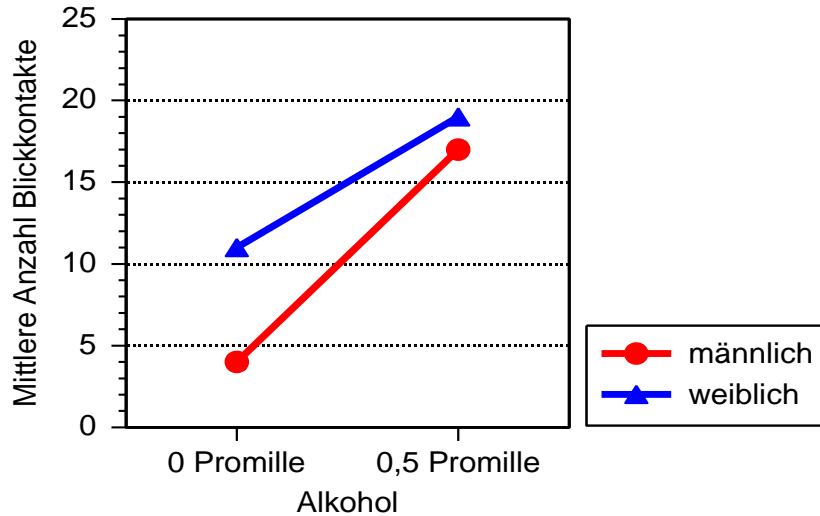
Bei Signifikanz der Wechselwirkung und Hauptwirkung: WW darf immer interpretiert werden, HW in Abhängigkeit der Art der WW.

Arten der Wechselwirkung

- **Ordinale Wechselwirkung:** Beide Hauptwirkungen dürfen interpretiert werden. Die Reaktion auf die UVn ist unterschiedlich stark, aber in die gleiche Richtung.
- **Semi-disordinale oder hybride Wechselwirkung:** Eine Hauptwirkung darf interpretiert werden, die andere nicht.
- **Disordinale Wechselwirkung:** Nur die WW darf interpretiert werden.

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

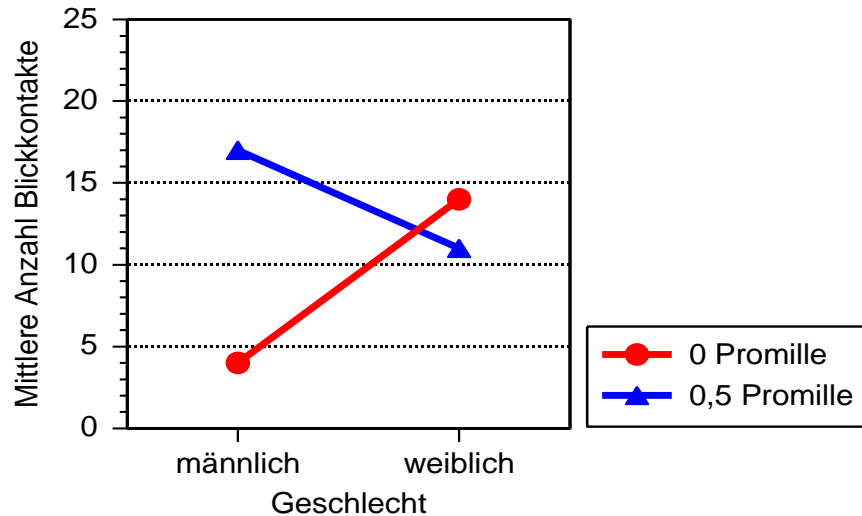
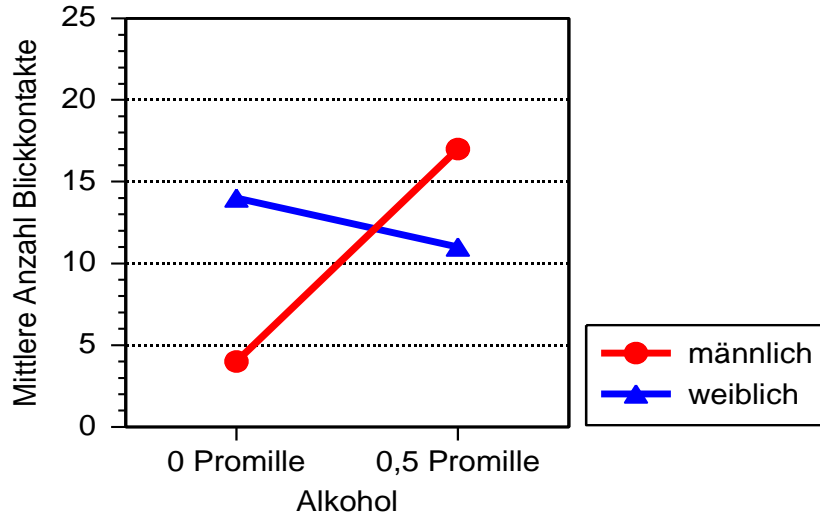
Ordinale Wechselwirkung



- Beide Hauptwirkungen (Alkohol und Geschlecht) dürfen interpretiert werden.
- Die Wechselwirkung (Unterschied zwischen Männern und Frauen besteht nur ohne Alkohol) darf interpretiert werden.

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

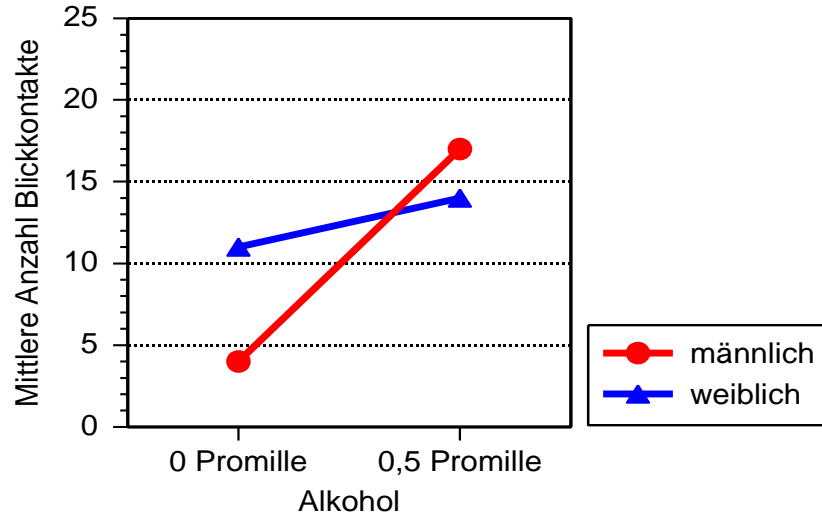
Disordinale Wechselwirkung



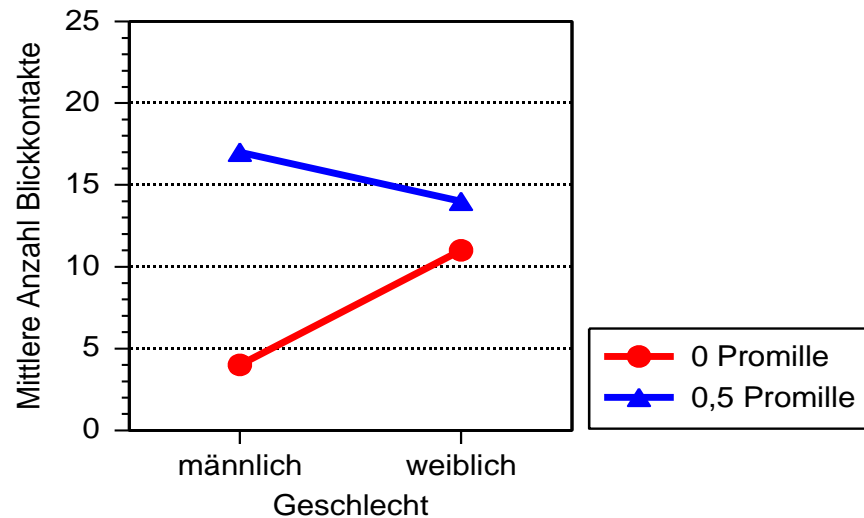
- Nur die Wechselwirkung darf interpretiert werden:
Männer haben unter Alkohol mehr Blickkontakte,
Frauen haben unter Alkohol weniger Blickkontakte

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

Semiordinale Wechselwirkung



- Eine Hauptwirkung (Alkohol) darf interpretiert werden, die andere (Geschlecht) nicht.
- Wechselwirkung (Männer haben unter Alkohol mehr Blickkontakte als Frauen, aber nüchtern weniger) darf interpretiert werden.



Multivariate Datenanalyse

2 Vertiefung Varianzanalyse

2.1 Prinzip der Varianzzerlegung

2.2 Mehrfaktorielle Varianzanalyse

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen



Lehrstuhl
für Arbeits-,
Organisations- und
Wirtschaftspsychologie



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

SchumpeterSchool
of Business and Economics



2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Varianzzerlegung

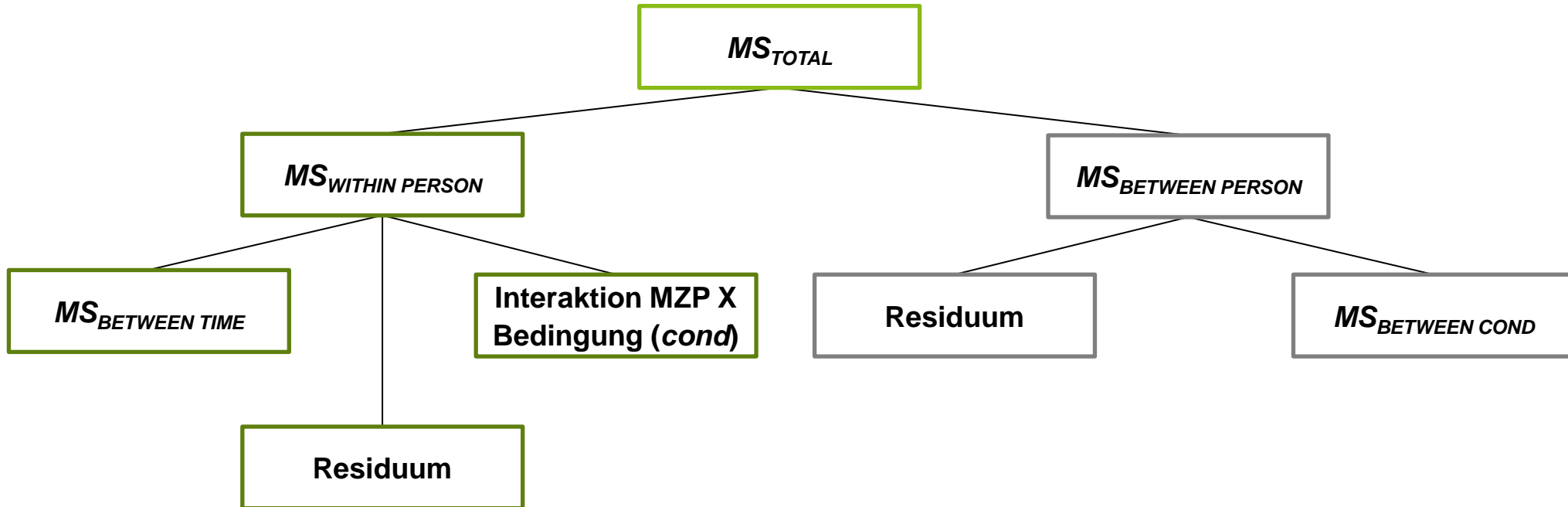
Vergleich von Mittelwerten einer abhängigen Variable, für die mehrere Messungen (z. B. bei Längsschnittuntersuchungen) vorliegen.

Bei der ANOVA mit Messwiederholungen wird ein Teil der Varianz in der AV dadurch erklärt, dass die einzelnen Messungen AV miteinander kovariieren, da diese Messungen immer für die *gleiche* Person vorliegen.

Für den Fall, dass zusätzlich der Einfluss einer unabhängigen Variable untersucht werden soll (zweifaktorielle ANOVA mit Messwiederholung), wird die Varianz in der AV in Varianzanteile *innerhalb* der Person (Messwiederholung) und Varianzanteile *zwischen* den Personen.

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Varianzzerlegung



2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Inferenzstatistische Testung

Um die einzelnen Effekte (Messwiederholung, Bedingung, Interaktion) testen zu können, müssen die Quotienten aus der jeweiligen mittleren Quadratsumme (MS) und dem Residuum gebildet werden.

**Haupteffekt
Messwiederholung**

$MS_{BETWEEN}$

$TIME$

**Residuum-
Innerhalb**

**Haupteffekt
Bedingung (UV)**

$MS_{BETWEEN}$

$COND$

**Residuum-
Zwischen**

**Interaktion MZP X
Bedingung**

**Interaktion MZP
X Bedingung**

**Residuum-
Innerhalb**

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Inferenzstatistische Testung

Haupteffekt Bedingung (UV):

$$F_A = \frac{MQS_A}{MQS_{Pers\ inn\ A}} = q \cdot n \frac{\frac{\sum_{j=1}^p (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2}{p-1}}{q \cdot \frac{\sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^{n_{Zelle}} (\bar{x}_{mj} - \bar{x}_{\cdot j})^2}{p \cdot (n_{Zelle} - 1)}}$$

Haupteffekt Messwiederholung:

$$F_B = \frac{MQS_B}{MQS_{Res}} = \frac{p \cdot n \frac{\sum_{j=1}^p (\bar{x}_{\cdot k} - \bar{x})^2}{q-1}}{\frac{\sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^{n_{Zelle}} (x_{mjk} - \bar{x}_{\cdot jk} - \bar{x}_{mj} + \bar{x}_{\cdot j})^2}{p \cdot (q-1) \cdot (n_{Zelle} - 1)}}$$

Interaktion Bedingung X MZP:

$$F_{A \times B} = \frac{MQS_{A \times B}}{MQS_{Res}} = \frac{\frac{n \cdot \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p (\bar{x}_{\cdot jk} - \bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot k} + \bar{x})^2}{(p-1) \cdot (q-1)}}{\frac{\sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^{n_{Zelle}} (x_{mjk} - \bar{x}_{\cdot jk} - \bar{x}_{mj} + \bar{x}_{\cdot j})^2}{p \cdot (q-1) \cdot (n_{Zelle} - 1)}}$$

Anmerkung: $MQS = MS$

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Beispiel

UV	Messwiederholung		Personenmittelwerte
	MZP1	MZP2	
Bedingung 1	58	29	43,5
	46	36	41
	50	27	38,5
	70	55	62,5
	71	43	57
Bedingung 2	28	23	25,5
	21	33	27
	36	35	35,5
	44	51	47,5
	51	43	47

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Beispiel

Quelle der Variation	s^2	df	MS	F	p
UV	720	1	720	3.225	.11
Residuum <i>zwischen</i>	1786	8	233.25		
MZP	500	1	500	14.49	.005
UV X MZP	605	1	605	17.54	.003
Residuum <i>innerhalb</i>	276	8	34.5		
Total	3887	19	204.58		

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Annahmen und Voraussetzungen

1. **Unabhängigkeit der Beobachtungen innerhalb einer Gruppe oder Bedingung**
2. **Homoskedastizität: Homogenität der Varianz-Kovarianzmatrix des nicht-messwiederholten Faktors**
3. **Sphärizität/Zirkularität: Homogenität der Varianz-Kovarianzmatrix des messwiederholten Faktors**

Überprüfung von Sphärizität bei SPSS mit dem Mauchly-Test. Liegt **keine** Sphärizität vor, wird der F -Test zu liberal, was das Risiko eines Alpha-Fehlers erhöht. In diesem Fall besteht die Möglichkeit, den F -Wert mit Korrekturformeln (Greenhouse-Geisser oder nach Huynh-Feldt) anzupassen. Alternativ ist eine Analyse mit Regressionsmodellen oder Mehrebenenanalysen möglich, da diese Sphärizität nicht voraussetzen.

2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Beispiel: Selbstkontrollparadigma



2.3 ANOVA mit Messwiederholungen

Beispiel: Selbstkontrollparadigma

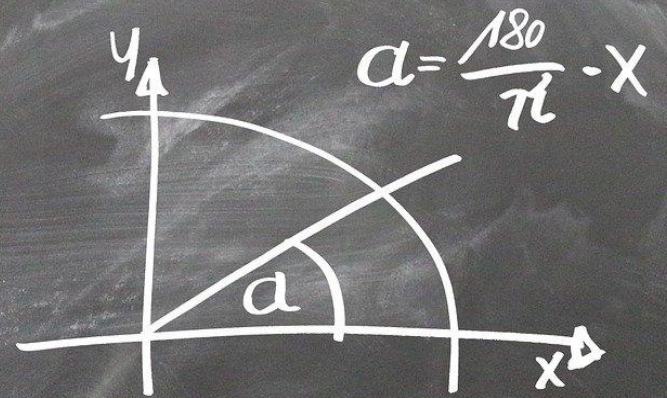
AV: Ausdauer beim Handgrip

Condition	Time 1	Time 2	Change	
Increase emotional response	78.73	53.63	-25.10	} * } * } n.s.
No emotional control	60.09	58.52	-1.57	
Decrease emotional response	70.74	52.25	-18.49	

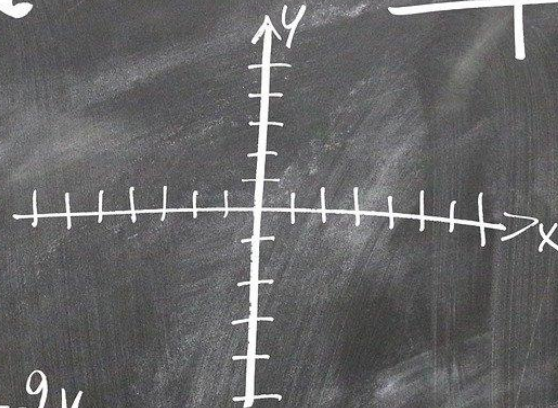
Note. Numbers under Time 1 and Time 2 represent mean times that participants squeezed the handgrip, in seconds. Standard deviations for Time 1, top to bottom, are 49.93, 35.14, and 47.70. For Time 2, they are 31.62, 32.36, and 31.76. Rightmost column represents change in performance, in seconds, from Time 1 to Time 2. N = 20 in each condition.

- Stärkeres Anstrengungserleben bei den Teilnehmern in den beiden Emotionskontrollbedingungen.
- Stärkerer Anstieg der erlebten Ermüdung in den beiden Emotionskontrollbedingungen (jeweils im Vergleich zur Kontrollbedingung).
- Keine bedeutsamen Unterschiede in der Anstrengung u. Ermüdung zwischen den Emotionskontrollbedingungen.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$x^2 + px + q = 0$$



$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = 6 - 2y$$

$$x + a = b$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \sin x$$

Teil 3: Vertiefung Regressionsanalyse





Multivariate Datenanalyse

3 Vertiefung Regressionsanalyse

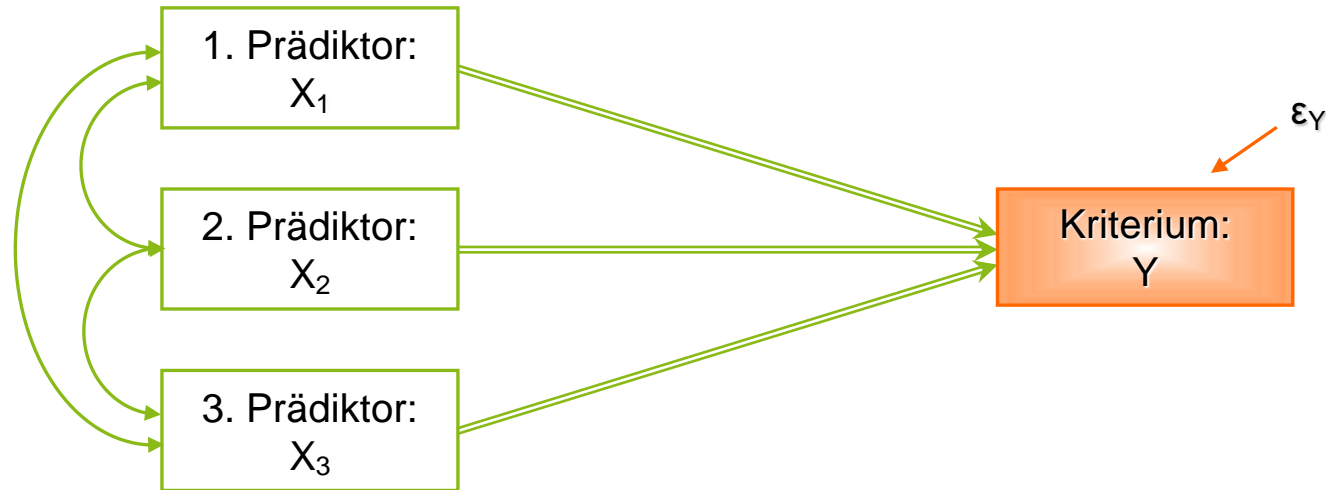
3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

3.2 Moderierte Mediationsmodelle

3.3 Logistische Regression

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Regressionsanalyse

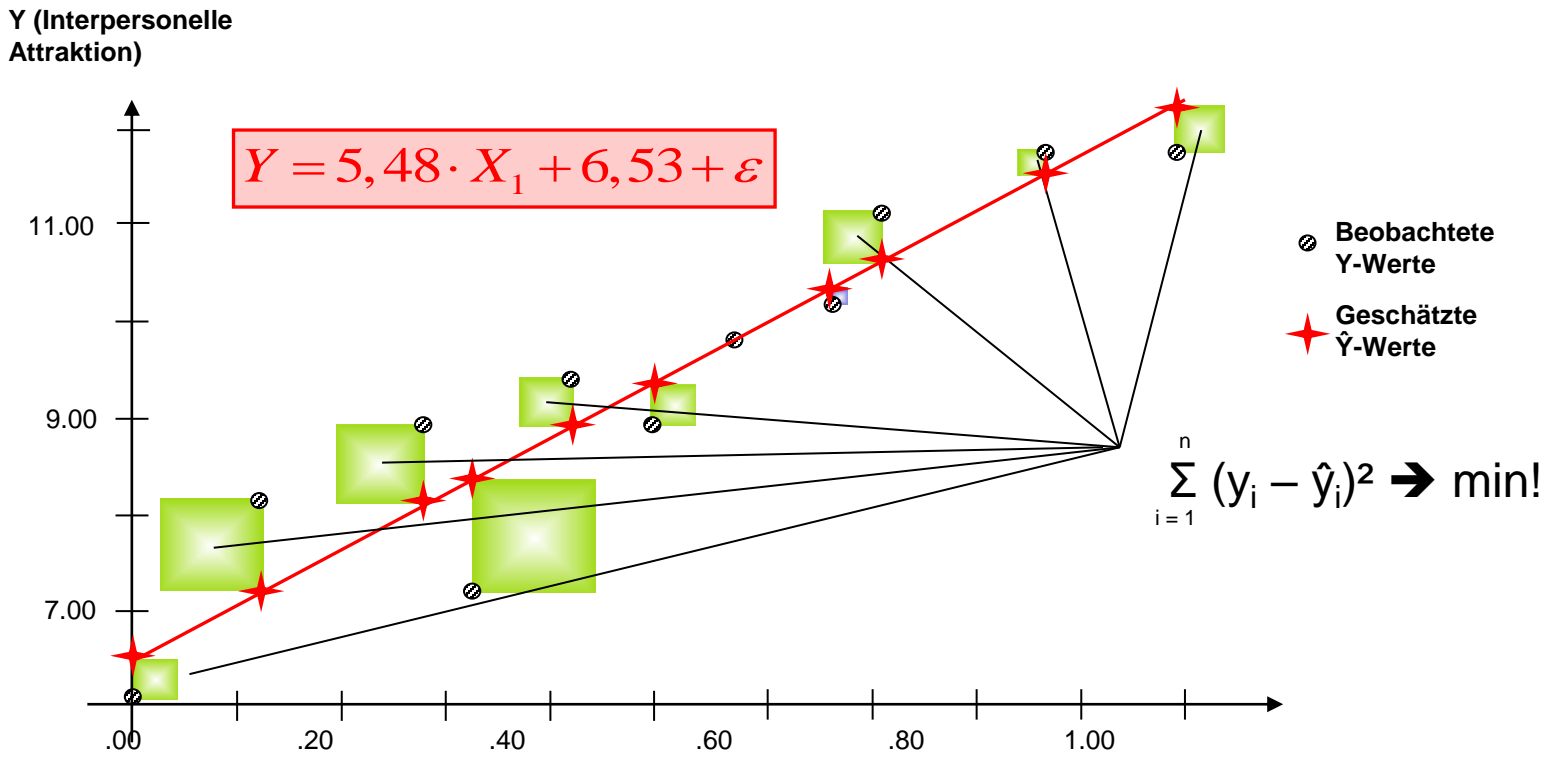


- Gegeben seien eine abhängige Variable Y und m unabhängige Variablen $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_m$.
- Gesucht sei eine lineare Funktion, die beschreibt, wie sich Y durch die Prädiktoren vorhersagen lässt, also:

$$Y = \beta_0 + X_1 \cdot \beta_1 + X_2 \cdot \beta_2 \dots + X_m \cdot \beta_m + \epsilon$$

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Regressionsanalyse



β_0 und β_1 werden so bestimmt, dass die Summe der quadrierten Residuen (σ_ε^2) minimal wird (OLS-Ansatz):

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Regressionsanalyse: OLS-Schätzung

Der OLS-Schätzer (Methode der Kleinstquadrate):

β = Parametervektor (enthält b und c)

Y = Kriteriumsvektor

X = Designmatrix: beinhaltet alle Prädiktorwerte

X' = Transponierte der Designmatrix

(X'X)⁻¹ = Inverse des Produkts aus der Designmatrix und ihrer Transponierten

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

Da es sich um geschätzte Parameterwerte handelt, die möglichst den wahren Populationsparametern entsprechen sollen, gilt die Schreibweise:

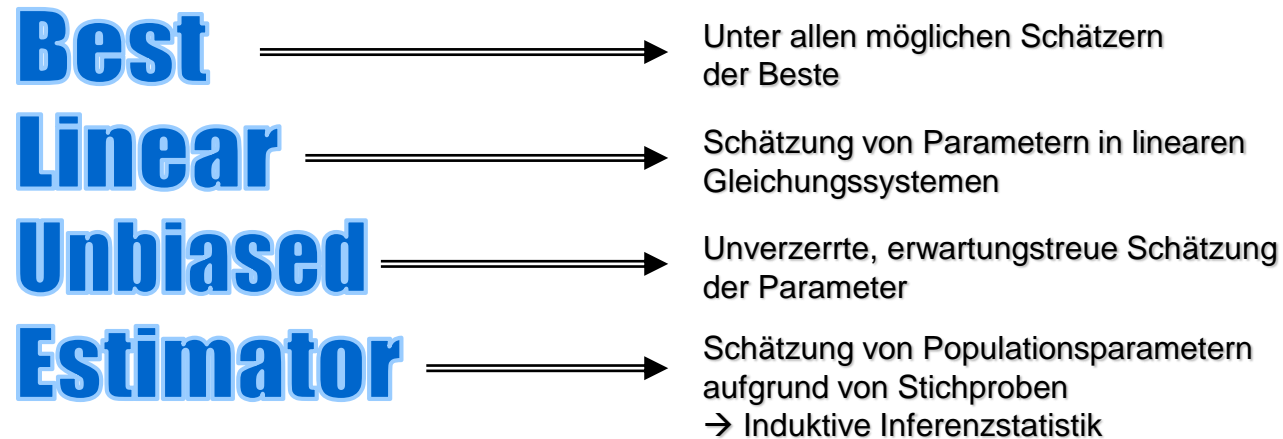
$$\hat{\beta} : \hat{c}, \hat{b}$$

Linear-algebraische Darstellung der Formel mit 12 Stichprobenelementen und einem Prädiktor:

$$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x_{0,1} & x_{0,2} & \dots & x_{0,12} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,1} & x_{1,1} \\ x_{0,2} & x_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{0,12} & x_{1,12} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_{0,1} & x_{0,2} & \dots & x_{0,12} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \beta_0 = \hat{c} \\ \beta_1 = \hat{b} \end{matrix}$$

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Regressionsanalyse: OLS-Schätzung



Alle aus dem OLS-Schätzalgorithmus resultierenden Schätzwerte ($\beta[c,b]$) haben die sog. „blue“-Eigenschaft:

Erwartungstreue

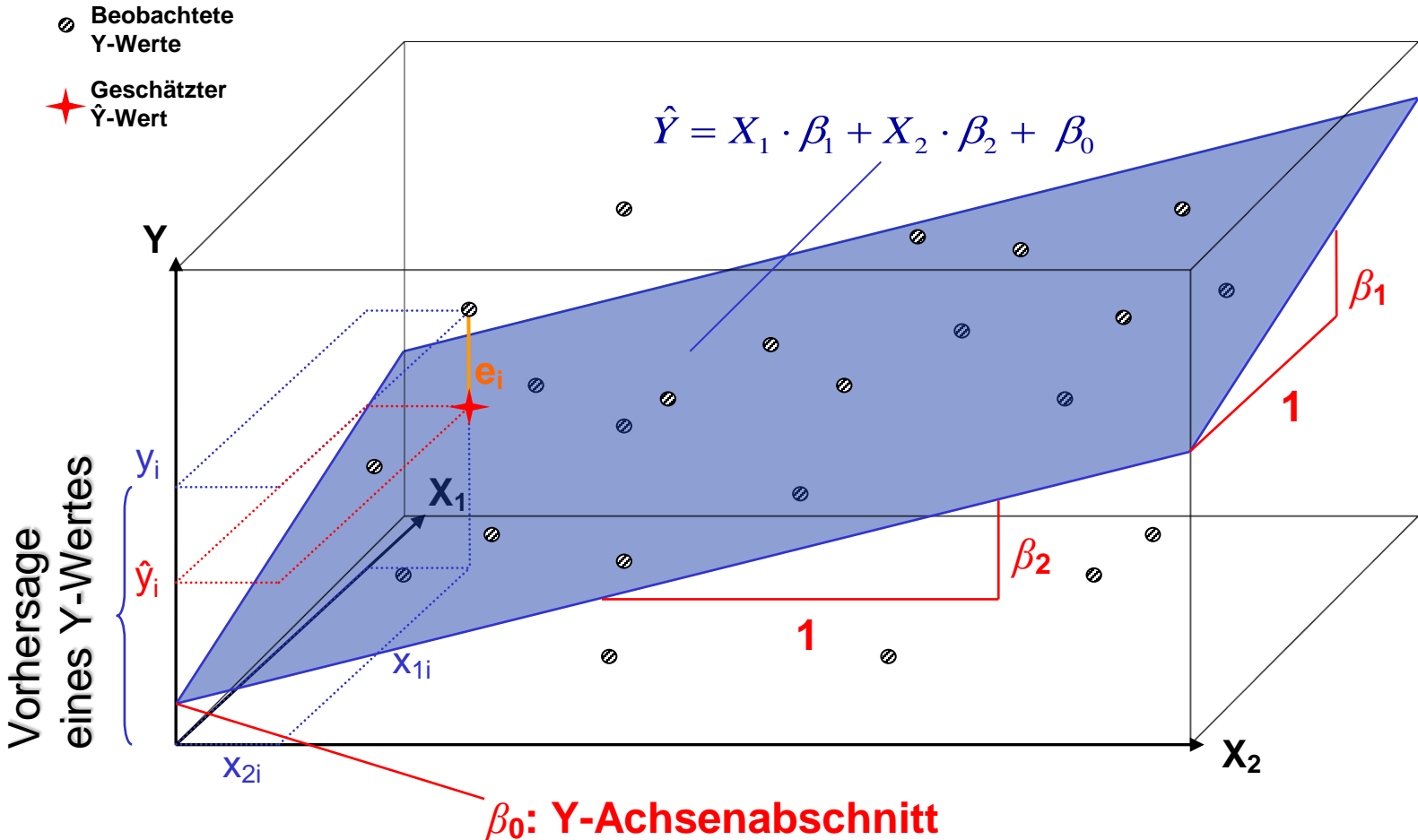
Ein Schätzer ist erwartungstreu, wenn das arithmetische Mittel einer Stichprobenkennwerteverteilung bzw. sein Erwartungswert dem wahren Populationsparameter entspricht

Systematische Abweichungen eines geschätzten Kennwertes vom wahren Populationsparameter wird als Verzerrung (engl. bias) bezeichnet

Die Schätzung auf Basis des arithmetischen Mittels ist unverzerrt: $\text{Bias}(X) = E(X) - \mu = 0$

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Regressionsanalyse mit zwei Prädiktoren



3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Regressionsanalyse

Ergebnisse von hierarchischen Regressionsanalysen auf Basis der Kleinstquadrat-Schätzung (Ordinary Least Squares: OLS)

Regressionschritte	1. Kriterium		2. Kriterium	
	β	ΔR^2	β	ΔR^2
I. Prädiktor 1	.07	.01	-.08*	.08**
Prädiktor 2	-.03		.12**	
Prädiktor 3	.03		.07	
Prädiktor 4	.02		-.01	
II. Prädiktor 5	.22**	.28**	.26**	.24**
Prädiktor 6	.45**		.33**	
R^2		.29		.32
F		39.62**		44.93**

Interkorrelationen der Untersuchungsvariablen

Variable	1	2	3	4	5	6	7	8
1 Prädiktor 1	-							
2 Prädiktor 2	.10	-						
3 Prädiktor 3	-.04	.59	-					
4 Prädiktor 4	.64	.14	.16	-				
5 Prädiktor 5	.01	.15	.21	.10	-			
6 Prädiktor 6	-.11	.08	.09	.00	.19	-		
7 1. Kriterium	.03	.06	.09	.08	.29	.50	-	
8 2. Kriterium	-.12	.22	.23	-.01	.37	.46	.52	-

Anmerkung: Es sind die standardisierten Parameter dargestellt.
 ** $p < .01$, * $p < .05$.

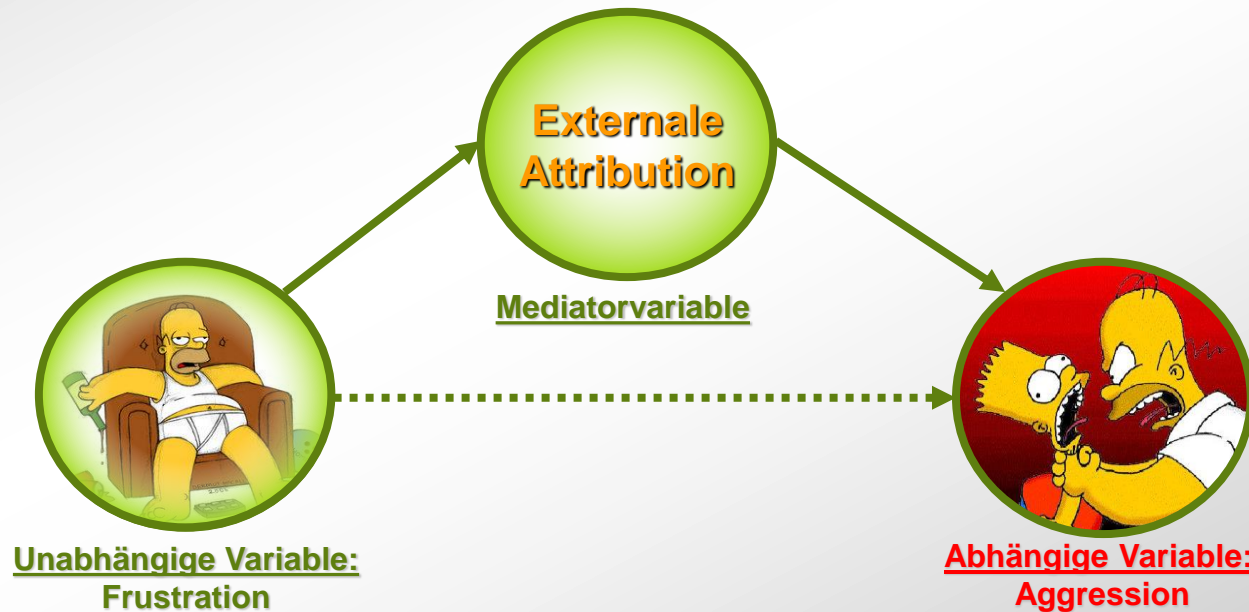
- Bei mehr oder weniger stark kovariierenden Prädiktoren fallen die Zusammenhänge in der Regressionsanalyse anders aus als bei der Berechnung bivariater Korrelationen.
- Bei der Analyse der spezifischen Effekte müssen unterschiedliche Einflüsse anderer Variablen Berücksichtigung finden.

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Mediator- und Moderatoranalysen

I. Der Mediatoreffekt:

- Der Mediatoreffekt beschreibt einen über eine Drittvariable vermittelten „kausalen“ Zusammenhang zwischen einer unabhängigen und abhängigen Variablen.
- Der ursprünglich enge, aber „in Wahrheit“ vermittelte Zusammenhang zwischen beiden Variablen lässt sich durch den sogenannten Mediator erklären, der den „kausalen“ Einfluss der unabhängigen Variablen auf die abhängige Variable bedingt.

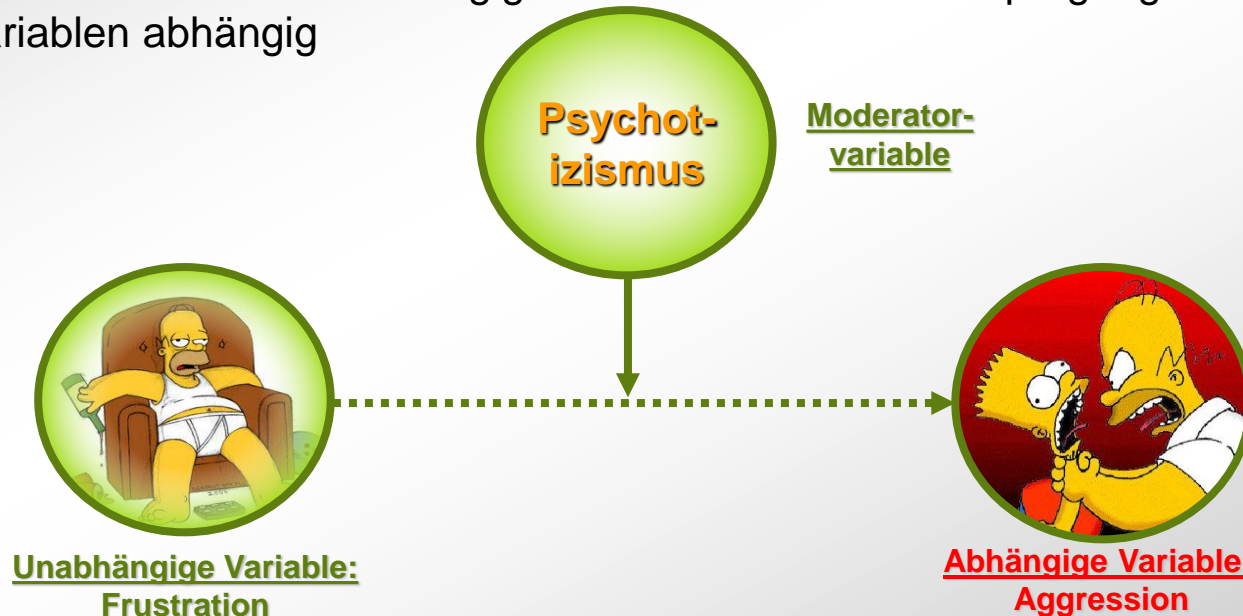


3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Mediator- und Moderatoranalysen

II. Der Moderatoreffekt:

- Korrelative Beziehungen zwischen zwei Variablen können ja nach Ausprägung einer dritten Variablen unterschiedlich ausfallen.
→ Man spricht hier von einer Moderatorvariablen
- Der Moderatoreffekt ist als statistische Wechselwirkung zu verstehen: Der Effekt der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable ist von der Ausprägung der Moderatorvariablen abhängig



3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Mediator- und Moderatoranalysen

Die Methode nach Baron und Kenny (1986):

- Das Prinzip der *schrittweisen, hierarchischen* Regressionsanalyse erlaubt die Prüfung von Moderator- und Mediatoreffekten bei intervallskalierten Variablen
- Bei der schrittweisen Regressionsanalyse werden bezogen auf ein Kriterium mehrere Regressionsmodelle nacheinander ausgewertet
 - Die Regressionsmodelle unterscheiden sich in der Anzahl der berücksichtigten Prädiktoren.
 - Pro Regressionsmodell werden neben den schon enthaltenen Prädiktoren zusätzlich weitere theoretisch relevante Prädiktoren zur Vorhersage herangezogen.

$$\vec{Y} = X_i \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \bar{E} \longrightarrow \vec{Y} = X_i \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \bar{E} \longrightarrow \vec{Y} = X_i \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + \bar{E}$$

- ➔ Entscheidend ist die Frage, ob und inwiefern die Varianzaufklärung durch Berücksichtigung zusätzlicher Prädiktoren zunimmt, was durch Signifikanz des F-Wertes und Stärke der inkrementellen Varianzaufklärung (ΔR^2 , spr^2) indiziert wird.

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

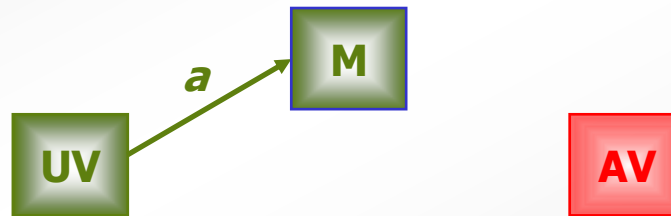
Mediator- und Moderatoranalysen

Die Mediatoranalyse nach Baron und Kenny (1986):

1. Schritt: Nachweis des Zusammenhangs zwischen Kriterium und Prädiktor (c-Pfad)



2. Schritt: Nachweis der signifikanten Vorhersage des Mediators M durch den Prädiktor (a-Pfad)



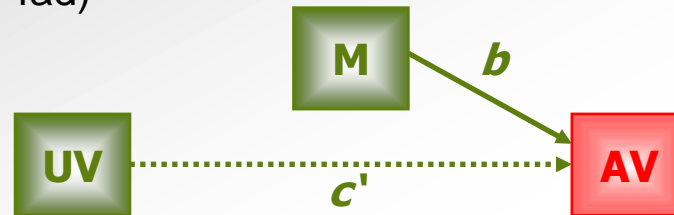
→ Die Pfade a, b und c sowie c' entsprechen den jeweiligen Regressionskoeffizienten ($\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$) aus den einzelnen Regressionsgleichungen zur Schätzung der Zusammenhänge zwischen Prädiktor, Mediator und Kriterium.

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Mediator- und Moderatoranalysen

Die Mediatoranalyse nach Baron und Kenny (1986):

3. Schritt: Gleichzeitige Vorhersage des Kriteriums durch den vermuteten Mediator (b-Pfad) und den Prädiktor (c'-Pfad)



4. Schritt: Nachweis der statistisch signifikanten Reduktion des Zusammenhangs zwischen Prädiktor und Kriterium bei Berücksichtigung des Mediators in der linearen Vorhersage des Kriteriums ($c - c'$) – man spricht von einem **indirekten Effekt**

- Der Differenz zwischen dem c - und c' -Pfad (also das Ausmaß der Reduktion des Zusammenhangs) entspricht genau dem Produkt der Pfade a und b

$$c - c' = a \cdot b$$

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Beyond Baron & Kenny: Sobeltest

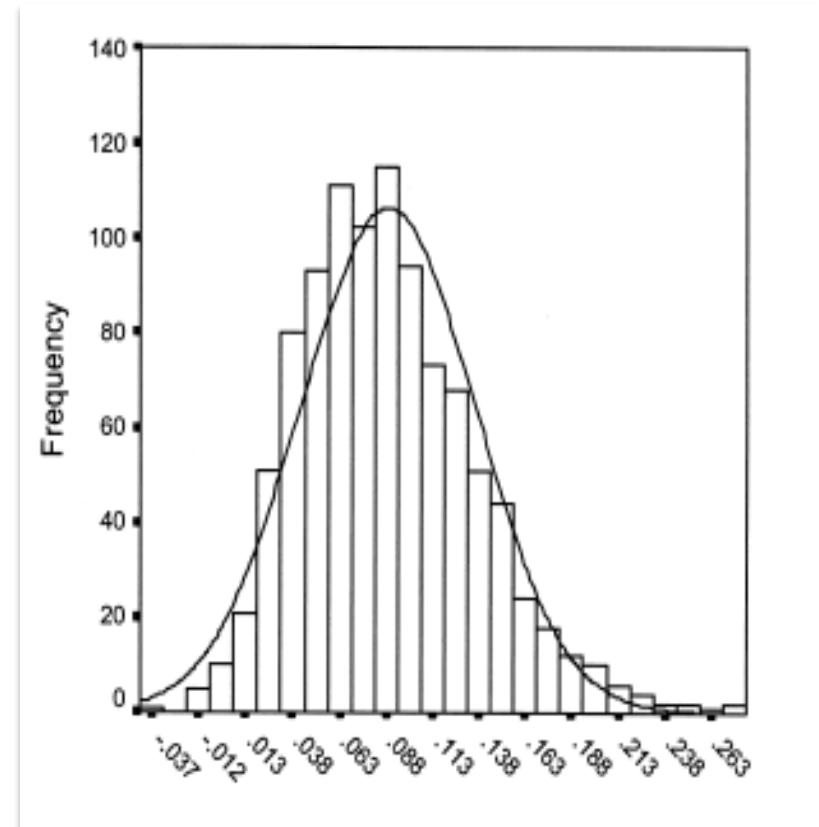
Kritik am Vorgehen von Baron & Kenny (1986): Keine wirkliche Prüfung, ob der indirekte Effekt signifikant von Null verschieden ist

- Zusätzliche Testung: Der Sobeltest gibt an, ob die Differenz $c-c'$, also der indirekte Effekt signifikant ist (z-Wert entspricht dem t-Wert)

$$\text{Sobel test equation: } z\text{-value} = \frac{a*b}{\sqrt{(b^2*s_a^2 + a^2*s_b^2)}}$$

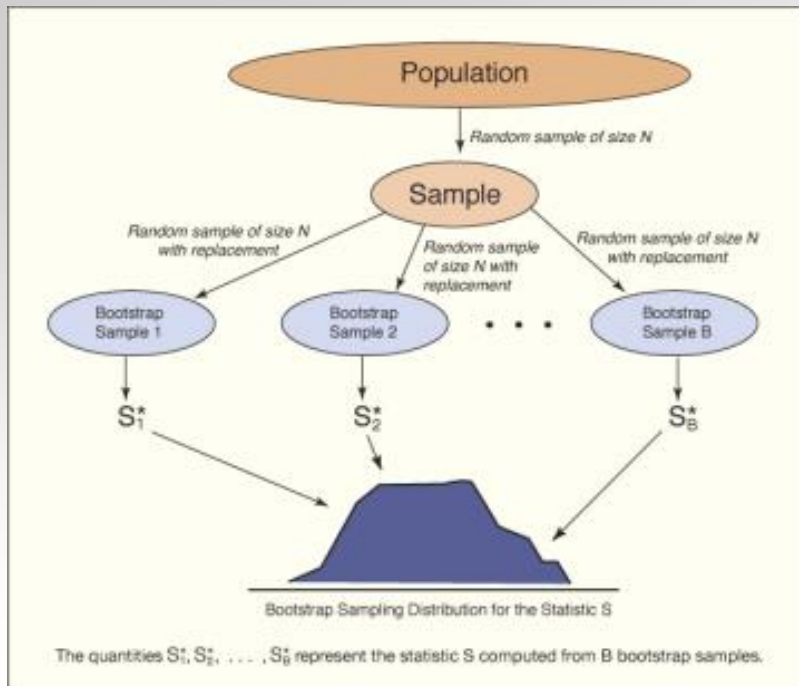
$$\text{Aroian test equation: } z\text{-value} = \frac{a*b}{\sqrt{(b^2*s_a^2 + a^2*s_b^2 + s_a^2*s_b^2)}}$$

- **ABER:** Verletzung der inferenzstatistische Voraussetzung einer Normalverteilung des indirekten Effekts.
- Der indirekte Effekt ist mit einer positiven Schiefe nicht normalverteilt.



3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Bootstrapping



- Generierung einer künstlichen Stichprobe der Größe N aus der ursprünglichen Stichprobe durch Ziehen mit Zurücklegen
- Berechnung des indirekten Effekts für diese künstliche Stichprobe
- Diese beiden Schritte werden k-mal wiederholt, sodass k resamples und k indirekte Effekte entstehen (Minimum 5000 resamples)
- Aus diesen k indirekten Effekten lässt sich die Häufigkeitsverteilung sowie Stichprobenkennwerte generieren
- Über einen verzerrungskorrigierenden Algorithmus wird ein 95%-Konfidenzintervall für den indirekten Effekt erzeugt (**unverzerrte Schätzung**).
- 95%-Konfidenzintervall: Wenn dieses KI die Null nicht beinhaltet, dann ist der indirekte Effekt signifikant ($p < .05$)

- Die Bootstrap-Methode schätzt das 95%-Konfidenzintervall für den c' -Pfad und hat eine bessere Teststärke als der Sobeltest

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Bootstrap-Methode mit SPSS

I. Schritt: Installation eines SPSS-Zusatzmoduls (einmalig)

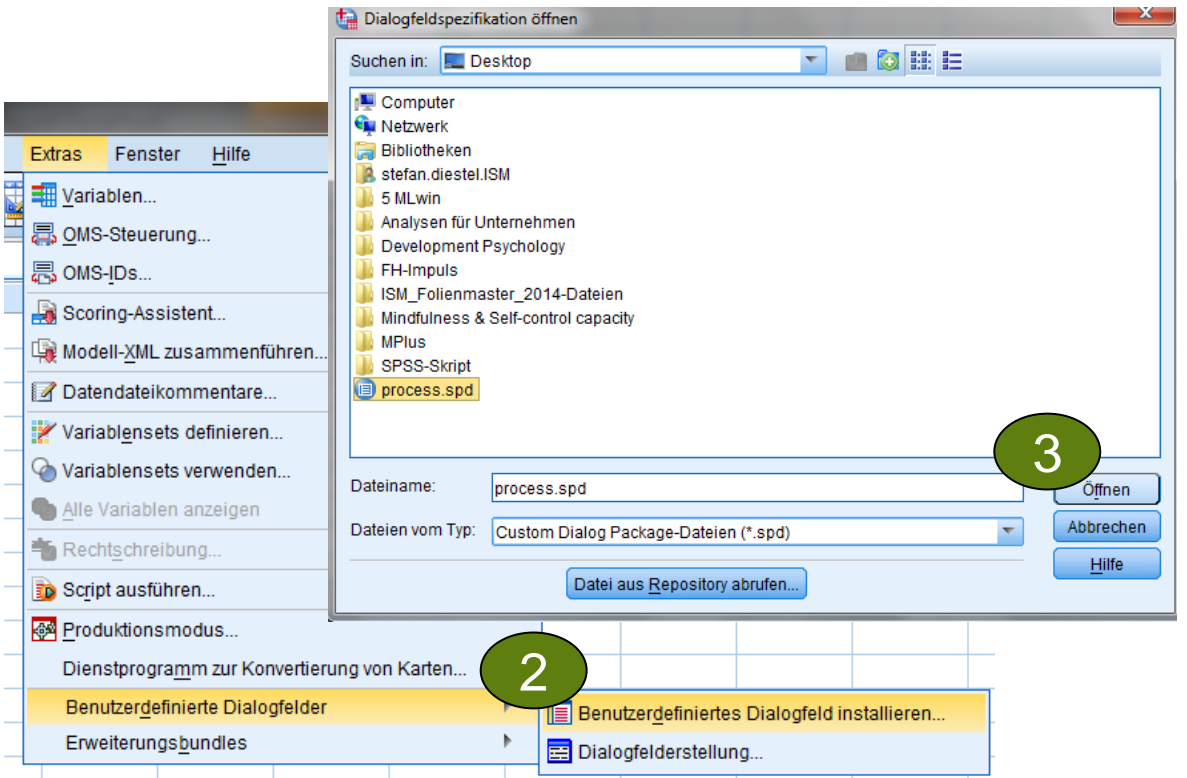
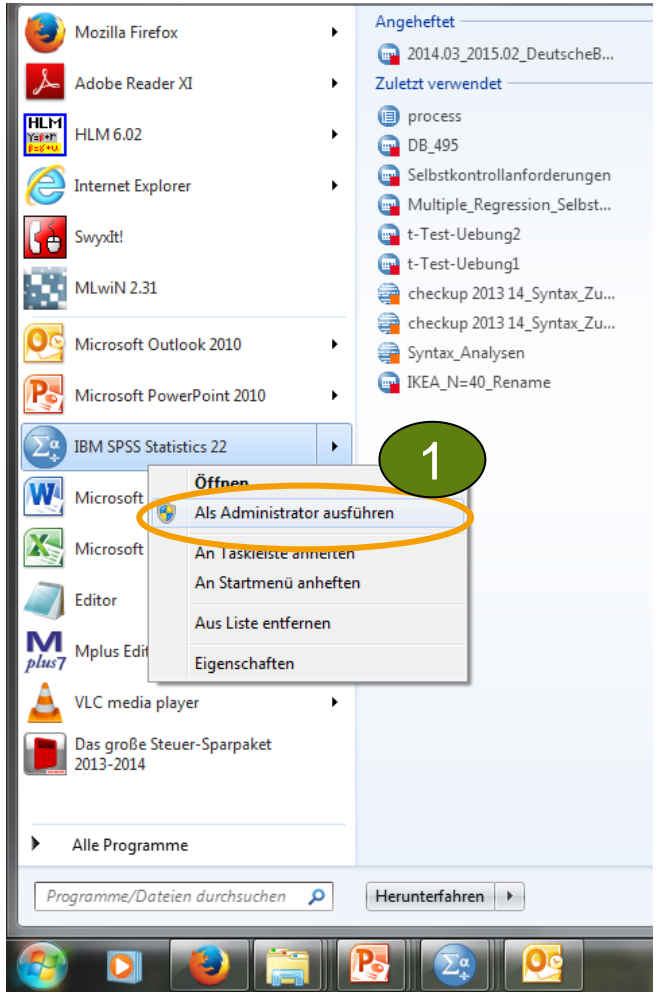
II. Schritt: Definition der direkten und indirekten Effekten

III. Schritt: Analyse der Bootstrap-Ergebnisse

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Bootstrap-Methode mit SPSS

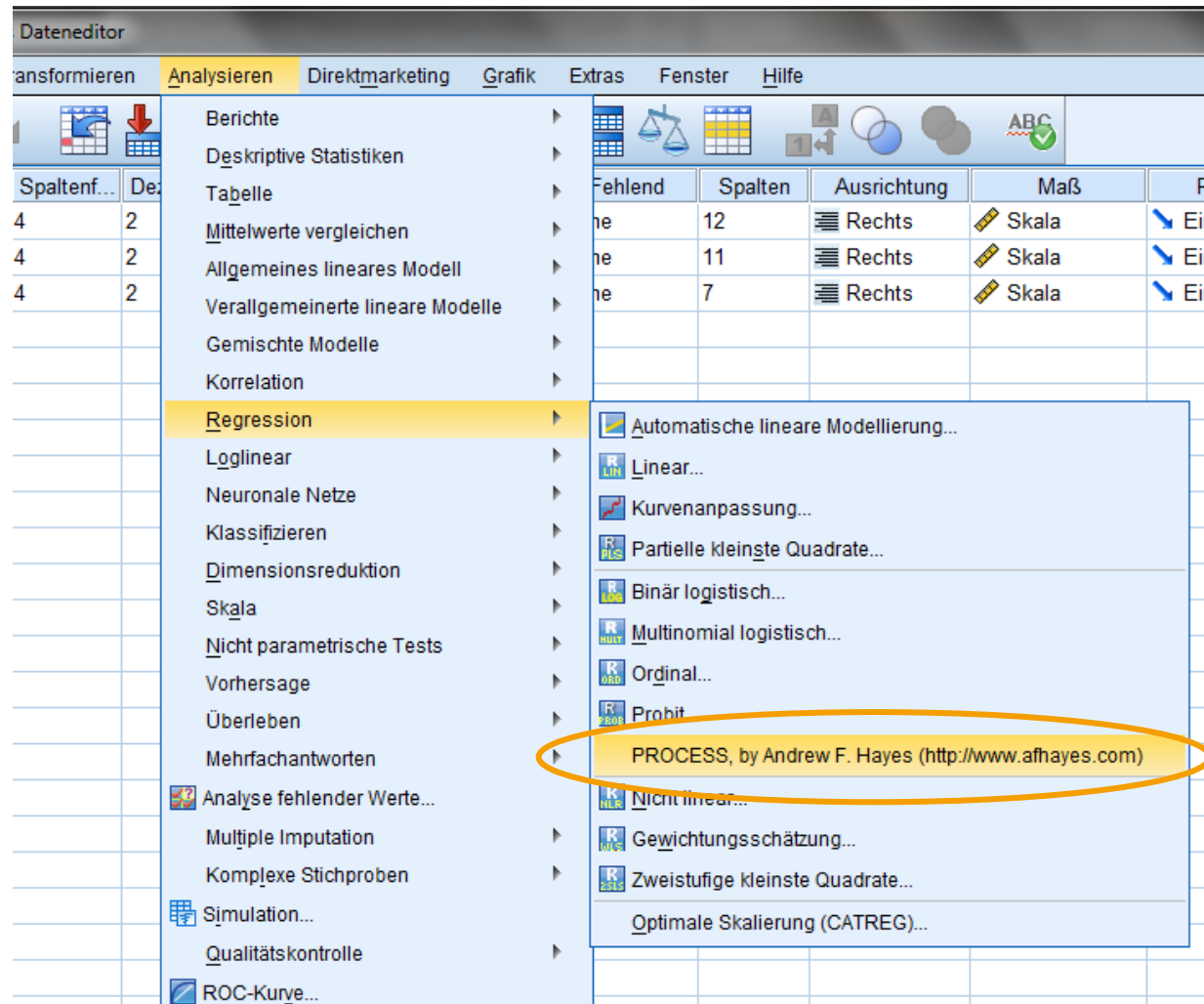
- I. Schritt: Installation eines SPSS-Zusatzmoduls (einmalig)



3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Bootstrap-Methode mit SPSS

- II. Schritt: Definition der direkten und indirekten Effekten



3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Bootstrap-Methode mit SPSS

II. Schritt: Definition der direkten und indirekten Effekten



Definition des Pfadmodells (standardmäßig: 4)

Anzahl der Substichprobenziehungen (1000 bis 5000)

Niveau des Konfidenzintervalls:

- 95%: bei großen Stichproben (N > 150)
- 90%: bei kleinen Stichproben (N < 151)

Achtung: Variablennamen darf nicht mehr als 8 Zeichen umfassen

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Bootstrap-Methode mit SPSS

III. Schritt: Analyse der Bootstrap-Ergebnisse

***** PROCESS Procedure for SPSS Release 2.13.2 *****

Written by Andrew F. Hayes, Ph.D. www.afhayes.com
Documentation available in Hayes (2013). www.guilford.com/p/hayes3

Model = 4
Y = WorkEng
X = servlead
M = voacl

Sample size
495

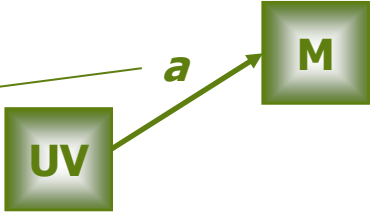
Outcome: voacl

Model Summary

	R	R-sq	MSE	F	df1	df2	p
	,3441	,1184	2,0520	66,2267	1,0000	493,0000	,0000

Model

	coeff	se	t	p	LLCI	ULCI
constant	2,4415	,2892	8,4425	,0000	1,8733	3,0096
servlead	,6818	,0838	8,1380	,0000	,5172	,8464

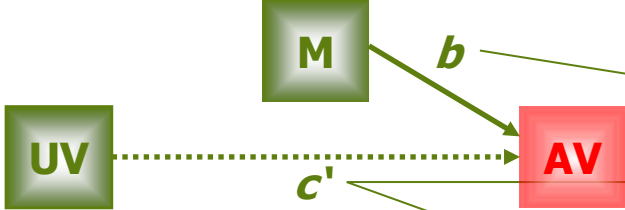


3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Bootstrap-Methode mit SPSS

- III. Schritt: Analyse der Bootstrap-Ergebnisse

H₀: Commitment übt keine Mediatoreffekte aus!



$$c - c' = a \cdot b$$

$\beta_{Ind} = .25; CI_{95\%} = .18 - .33$

H₀ kann verworfen werden, da das Konfidenzintervall den Wert Null nicht beinhaltet
 → Commitment übt Mediatoreffekte aus!

```
*****
Outcome: WorkEng

Model Summary
      R      R-sq      MSE      F      df1      df2      p
      ,6528  ,4262  ,6861  182,6894  2,0000  492,0000  ,0000

Model
      coeff      se      t      p      LLCI      ULCI
constant  ,2931  ,1789  1,6383  ,1020  -,0584  ,6446
voacl     ,3729  ,0260  14,3202  ,0000  ,3218  ,4241
servlead  ,3591  ,0516  6,9601  ,0000  ,2577  ,4605

***** DIRECT AND INDIRECT EFFECTS *****

Direct effect of X on Y
      Effect      SE      t      p      LLCI      ULCI
      ,3591  ,0516  6,9601  ,0000  ,2577  ,4605

Indirect effect of X on Y
      Effect      Boot SE      BootLLCI      BootULCI
voacl  ,2543  ,0391  ,1825  ,3315

Partially standardized indirect effect of X on Y
      Effect      Boot SE      BootLLCI      BootULCI
voacl  ,2330  ,0332  ,1676  ,2963

Completely standardized indirect effect of X on Y
      Effect      Boot SE      BootLLCI      BootULCI
voacl  ,1792  ,0253  ,1298  ,2266
```

Standardisierte Werte

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Mediator- und Moderatoranalysen

Die Moderatoranalyse nach Aiken und West (1991):

- Bei der Moderatoranalyse werden drei Variablen berücksichtigt und zu jenen die entsprechenden Parameter kodiert:
 1. Prädiktor X (unabhängige Variable): β_x
 2. Prädiktor M (vermuteter Moderator): β_M
 3. Produkt aus M und X: β_{XM}
- Die Variablen X, M sowie das Kriterium Y werden vor der Analyse z-standardisiert
- Der Interaktionsterm M·X wird aus der Multiplikation der z-standardisierten Variablen X und M gebildet
 - Der Interaktionsterm wird jedoch nach der Produktbildung NICHT nochmal z-standardisiert

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Mediator- und Moderatoranalysen

Die Moderatoranalyse nach Aiken und West (1991):

- Zum Nachweis eines Moderatoreffektes wird die Methode der schrittweisen, hierarchischen Regressionsanalyse in zwei Schritten angewandt:

Kriterium: Aggression			
	β	p	
<i>Schritt I</i>			
Frustration (X)	.41	< .01	$\vec{Y} = X_i \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_X \\ \beta_M \end{bmatrix} + \vec{E}$
Psychotozismus (M)	.46	< .01	
	$\Delta R^2 = .35^{**}$		
<i>Schritt II</i>			
Interaktionsterm (X·M)	.32	< .01	$\vec{Y} = X_i \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_X \\ \beta_M \\ \beta_{XM} \end{bmatrix} + \vec{E}$
	$\Delta R^2 = .09^{**}$		
	$R^2 = .44^{**}$		

** p<.01, * p<.05

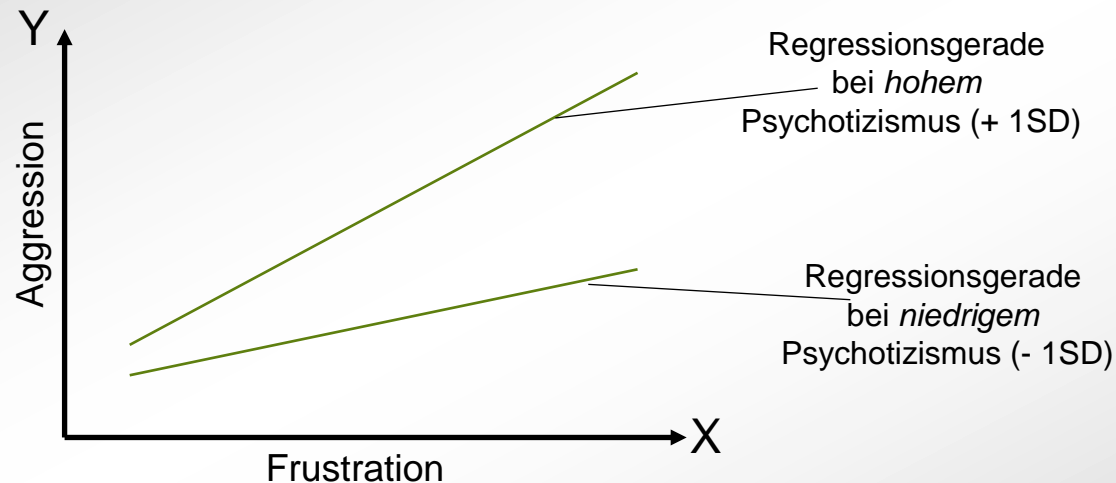
- ➔ Wenn die Hinzunahme des Interaktionsterms im Schritt II zu einer signifikanten Zunahme der Varianzaufklärung (ΔR^2) führt, so geht man von einem Moderatoreffekt durch Variable M aus.

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

Mediator- und Moderatoranalysen

Die Moderatoranalyse nach Aiken und West (1991):

- Ähnlich wie bei varianzanalytischen Designs lassen sich auch Moderatoreffekte graphisch darstellen



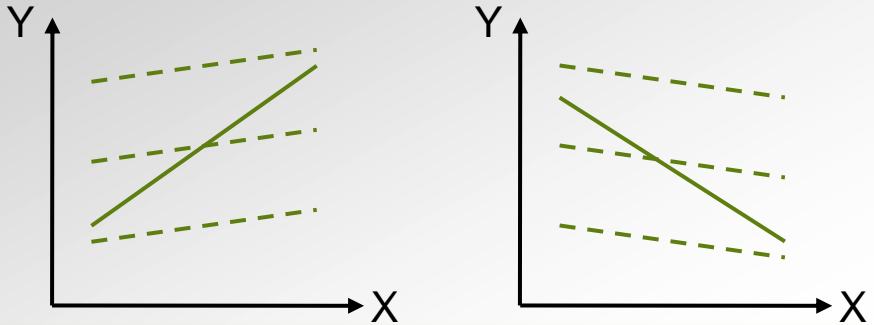
- Dargestellt sind die Regressionsgeraden, welche die lineare Vorhersage des Kriteriums durch den Prädiktor „Frustration“ beschreiben
- In Abhängigkeit von der Ausprägung des Moderators variieren die Steigungen der Regressionsgeraden
- In diesem Fall ist der Zusammenhang größer, wenn der Moderator hoch ausgeprägt ist

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

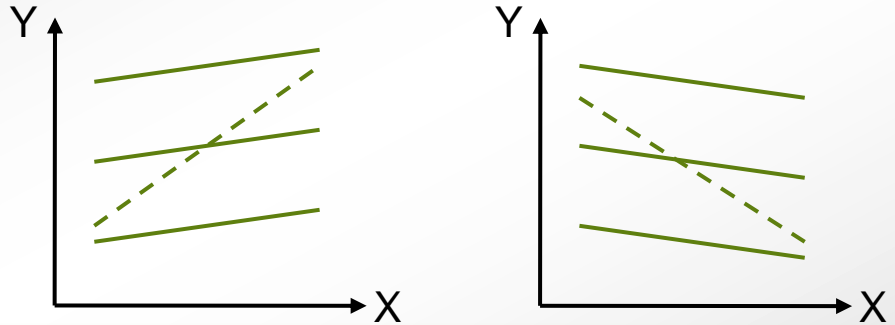
Mediator- und Moderatoranalysen

Wechselwirkungsmuster:

**Wirkungsverstärkende
Moderatoreffekte**



**Wirkungsabschwächende
Moderatoreffekte**



— Zusammenhang zwischen X und Y bei hoher Moderatorausprägung
- - - Zusammenhang zwischen X und Y bei schwacher Moderatorausprägung

- Der Zusammenhang zwischen X und Y wird als Funktion des Moderators verstärkt.
- Unabhängig von der Wirkungsrichtung der unabhängigen und Moderatorvariablen besteht nur im Falle einer starken Moderatorausprägung ein Zusammenhang zwischen X und Y.

— Zusammenhang zwischen X und Y bei hoher Moderatorausprägung
- - - Zusammenhang zwischen X und Y bei schwacher Moderatorausprägung

- Der Zusammenhang zwischen X und Y wird als Funktion des Moderators abgeschwächt.
- Unabhängig von der Wirkungsrichtung der unabhängigen und Moderatorvariablen besteht nur im Falle einer schwachen Moderatorausprägung ein Zusammenhang zwischen X und Y.



Multivariate Datenanalyse

3 Vertiefung Regressionsanalyse

3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse

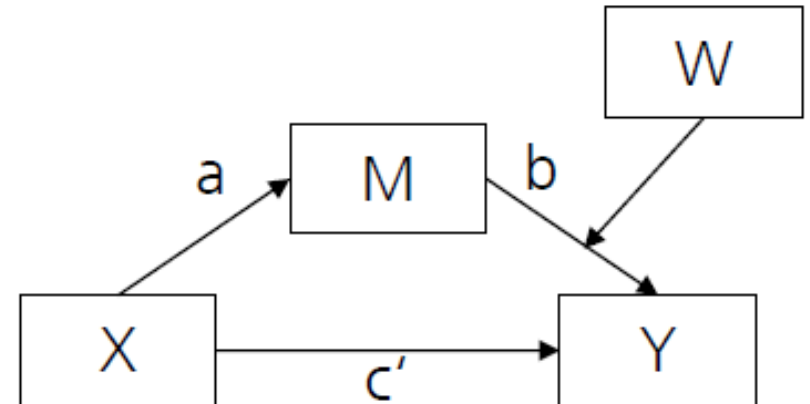
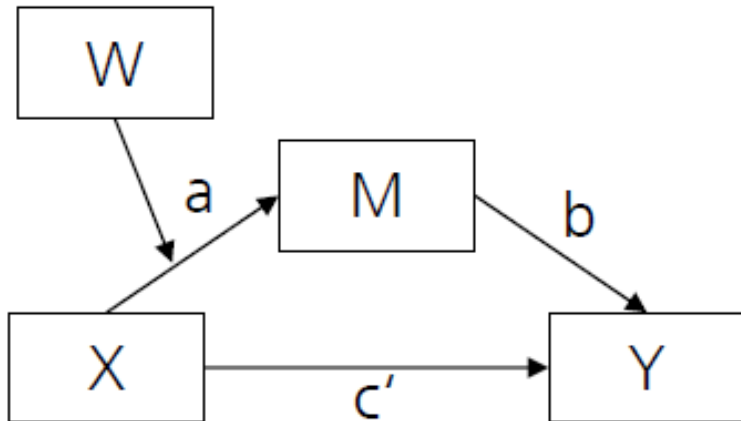
3.2 Moderierte Mediationsmodelle

3.3 Logistische Regression

3.2 Moderierte Mediation

Moderierte Mediation

Moderierte Mediation: Einfluss einer Drittvariable auf den a- oder b-Pfad eines Mediationsmodells (Preacher, Rucker & Hayes, 2007)



Moderierte Mediation indiziert inhaltlich, dass der indirekte Einfluss einer Prädiktorvariable von der Ausprägung einer weiteren Variable (Moderator) abhängig ist – man spricht hier von *konditionalen indirekten Effekten*

Berechnung in SPSS mit dem PROCESS-Makro

3.2 Moderierte Mediation

***** DIRECT AND INDIRECT EFFECTS *****

Direct effect of X on Y

Effect	SE	t	p	LLCI	ULCI
-,2694	,0358	-7,5292	,0000	-,3396	-,1992

Conditional indirect effect(s) of X on Y at values of the moderator(s):

Mediator	Mod	Effect	Boot SE	BootLLCI	BootULCI
Med	,0000	-,0129	,0077	-,0297	,0007
Med	1,0000	-,0397	,0163	-,0781	-,0135



Indirekter Effekt ist nur signifikant, wenn der Moderator die Ausprägung „1“ annimmt

Values for quantitative moderators are the mean and plus/minus one SD from mean.
 Values for dichotomous moderators are the two values of the moderator.

***** INDEX OF MODERATED MEDIATION *****

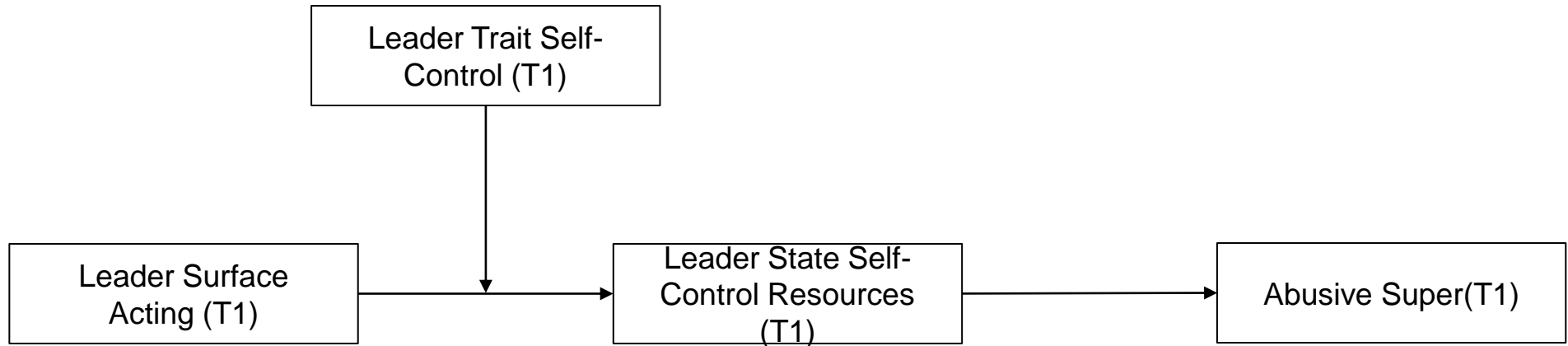
Mediator

Index	SE(Boot)	BootLLCI	BootULCI	
Med	-,0268	,0173	-,0664	,0022

When the moderator is dichotomous, this is a test of equality of the conditional indirect effects in the two groups.

3.2 Moderierte Mediation

Beispiel: Yam, Fehr, Keng-Highberger, Klotz & Reynolds (2016).

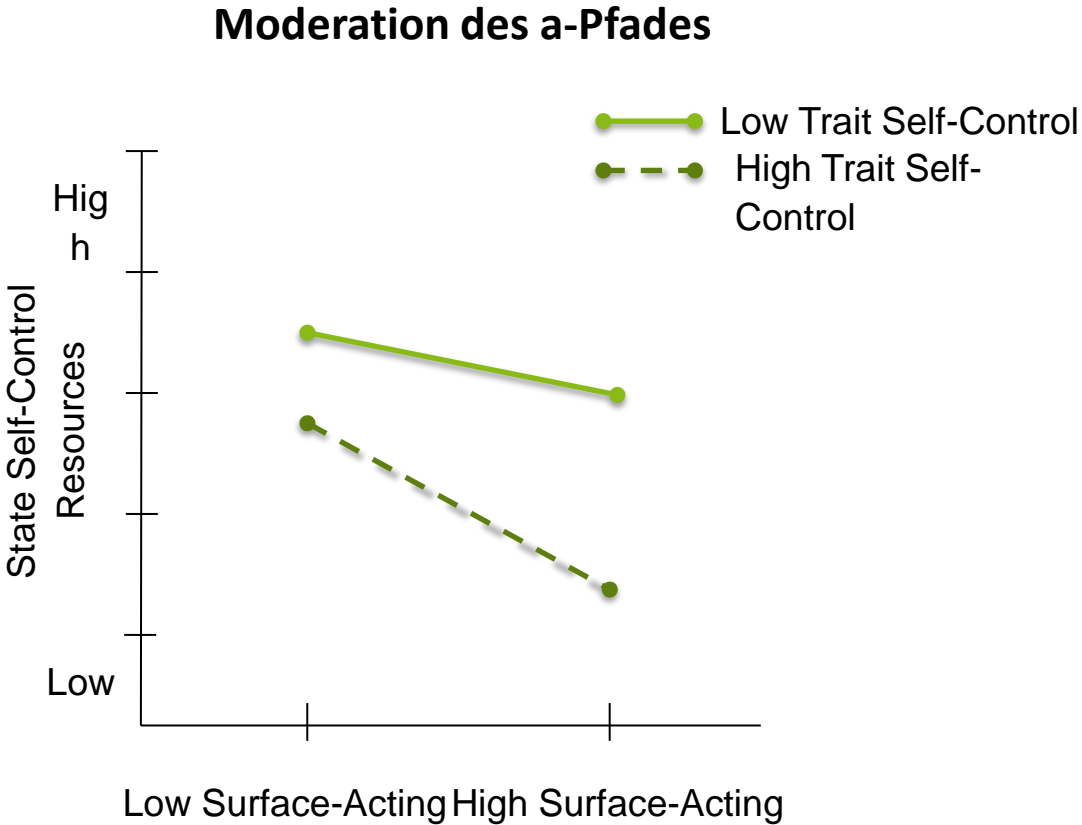


Die Selbstkontrollfähigkeit der FK moderiert die Mediation von Surface Acting der FK über Selbstkontrollressourcen auf negatives/feindseliges Führungsverhalten

3.2 Moderierte Mediation

Beispiel: Yam, Fehr, Keng-Highberger, Klotz & Reynolds (2016).

Interpretation: Führungskräfte mit hoher Selbstkontrollfähigkeit benötigen für das Zeigen von Surface-Acting weniger Selbstkontrollressourcen.



3.2 Moderierte Mediation

Beispiel: Yam, Fehr, Keng-Highberger, Klotz & Reynolds (2016).

Variablen	Direkter Effekt	Indirekter Effekt	Totaler Effekt
Low Trait Self-Control	.06	.11**	.17**
High Trait Self-Control	.06	.02	.08

Ergebnisdarstellung der konditionalen indirekten und totalen Effekte von Surface-Acting auf negatives Führungsverhalten via Selbstkontrollressourcen

3.2 Moderierte Mediation

Beispiel: Beispiel: Moderation des a-Pfads mit R

```
model <- „crit~ c*pred + cw*interact + b*med + w*mod
         med~ a*pred + aw*interact + aw1*mod

         # indirect and total effects, conditional on W = 0
         ind.0 := a*b           # + 0*aw*b
         total0 := ind.0 + c    # + 0*cw

         # indirect and total effects, conditional on W = 1
         ind.1 := a*b + 1*aw*b
         total1 := ind.1 + c + 1*cw“
```



Multivariate Datenanalyse

3 Vertiefung Regressionsanalyse

- 3.1 Grundlagen Mediations- und Moderationsanalyse
- 3.2 Moderierte Mediationsmodelle
- 3.3 Logistische Regression

3.3 Logistische Regression

Einführung

Die logistische Regression versucht das Eintreffen von Ereignissen einer binären Variable Y vorherzusagen. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten für die Ausprägungen von Y prognostiziert.

In der Praxis sind folgende Anwendungsbereiche denkbar:

- Personalplanung (Welche Eigenschaften haben einen Einfluss darüber, ob ein Mitarbeiter befördert wird?)
- Kaufentscheidung (Welche Faktoren bestimmen, ob ein Kunde sich für Produkt A oder B entscheidet?)

Die Eintrittswahrscheinlichkeiten P der Ereignisse stehen in folgender Beziehung:

$$P(y=0) + P(y=1) = 1 \text{ und } P(y=0) = 1 - P(y=1)$$

Y = dichotome abhängige Variable 0 = MA wird nicht befördert 1 = MA wird befördert
--

Bei mehr als zwei Ausprägungen in der abhängigen Variable:

multinomialen logistischen Regression (z. B. um die Wahl einer Partei vorherzusagen)

3.3 Logistische Regression

Einführung

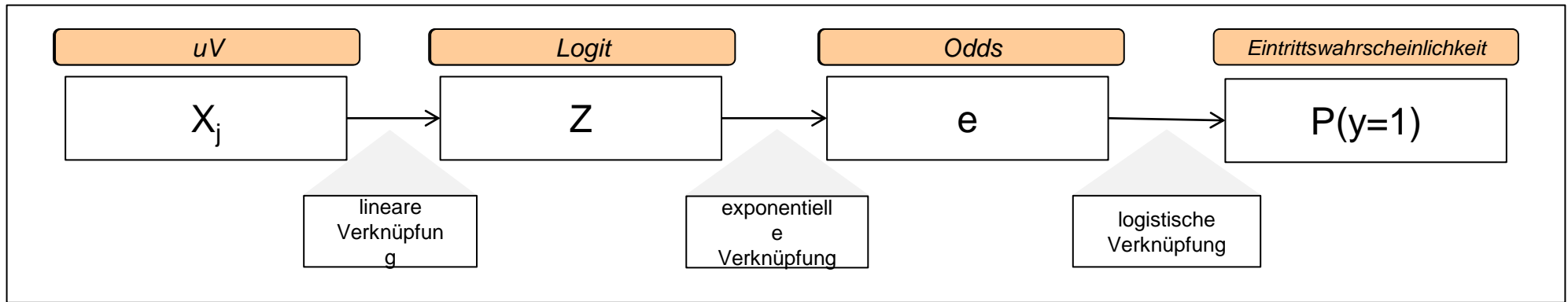
Die Ähnlichkeit zur Regressionsanalyse wird durch die Bestimmung der Gewichtung über den Regressionsansatz deutlich.

Methoden	Unterscheidung/ Merkmal
Lineare Regression	Abhängige Variable ist metrisch (metrisches Skalenniveau)
Logistische Regression	Abhängige Variable ist diskret (nominales Skalenniveau)

Ziel der logistischen Regression ist, es die Eintrittswahrscheinlichkeit für das empirisch beobachtete Ereignis abzuleiten.

3.3 Logistische Regression

Modellformulierung



Zusammenhänge zwischen den Betrachtungsgrößen einer logistischen Regression

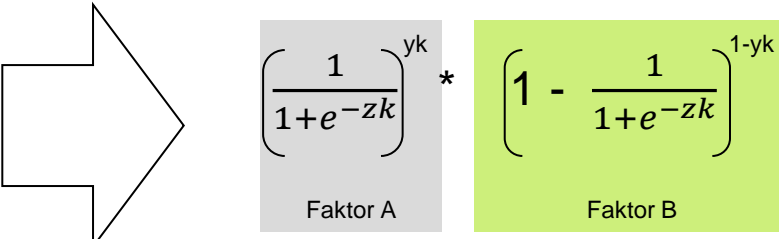
3.3 Logistische Regression

Schätzung der logistischen Regressionsfunktion

Die Schätzung der Modellparameter einer logistischen Regression erfolgt über die *Maximum Likelihood-Methode*. Dabei werden die Regressionsparameter so bestimmt, dass die Wahrscheinlichkeit, die beobachteten Erhebungsdaten zu erhalten, maximiert wird.

Der Beobachtungswert einer Person bei einer empirischen Erhebung kann entweder $y=1$ oder $y=0$ enthalten.

Die Parameterschätzung einer Person kann demnach die Wahrscheinlichkeit $P(y=1)$ oder $P(y=0)$ erhalten.

$$p_k(\mathbf{y}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+e^{-z_k}} \right) & \text{für } y_k = 1 \\ \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}} \right) & \text{für } y_k = 0 \end{cases}$$


The diagram illustrates the decomposition of the logistic probability function. On the left, the piecewise definition is shown. A large arrow points to the right, where the function is expressed as the product of two factors: 'Faktor A' (shaded grey) and 'Faktor B' (shaded green). Faktor A is $\left(\frac{1}{1+e^{-z_k}} \right)^{y_k}$ and Faktor B is $\left(1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}} \right)^{1-y_k}$.

Je nach Fall wird entweder Faktor A oder Faktor B gleich 1. Die Parameter sind an dieser Stelle zu schätzen, sodass die Wahrscheinlichkeit maximiert wird.

3.3 Logistische Regression

Schätzung der logistischen Regressionsfunktion

Für die gleichzeitige Maximierung der Wahrscheinlichkeiten findet der Wahrscheinlichkeitssatz für unabhängige Ereignisse Anwendung.

→ Für zwei beliebige Ereignisse (A und B) berechnet sich die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintretens dieser Ereignisse folgendermaßen: $p(A) * p(B) = p(A \cap B)$

„Das bedeutet, dass sich für unabhängige Ereignisse die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintretens der Ereignisse durch Multiplikation der einzelnen Ereignisse ergibt.“

Zur Maximierung wird die Likelihood-Funktion eingesetzt:

(vgl. Hosmer & Lemeshow, 2000)

$$\mathbf{L} = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1}{1+e^{-z_k}} \right)^{y_k} * \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}} \right)^{1-y_k} \quad \rightarrow \mathbf{max!}$$

Um das Maximierungsproblem zu vereinfachen wird das Produkt logarithmiert, sodass die LogLikelihood-Funktion entsteht:

$$\mathbf{LL} = \sum_{k=1}^K \left[y_k * \ln \left(\frac{1}{1+e^{-z_k}} \right) \right] + \left[(1 - y_k) * \ln \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}} \right) \right]$$

3.3 Logistische Regression

Interpretation der Regressionskoeffizienten

Interpretationsproblem

Der nicht lineare Zusammenhang erschwert die inhaltliche Interpretation.

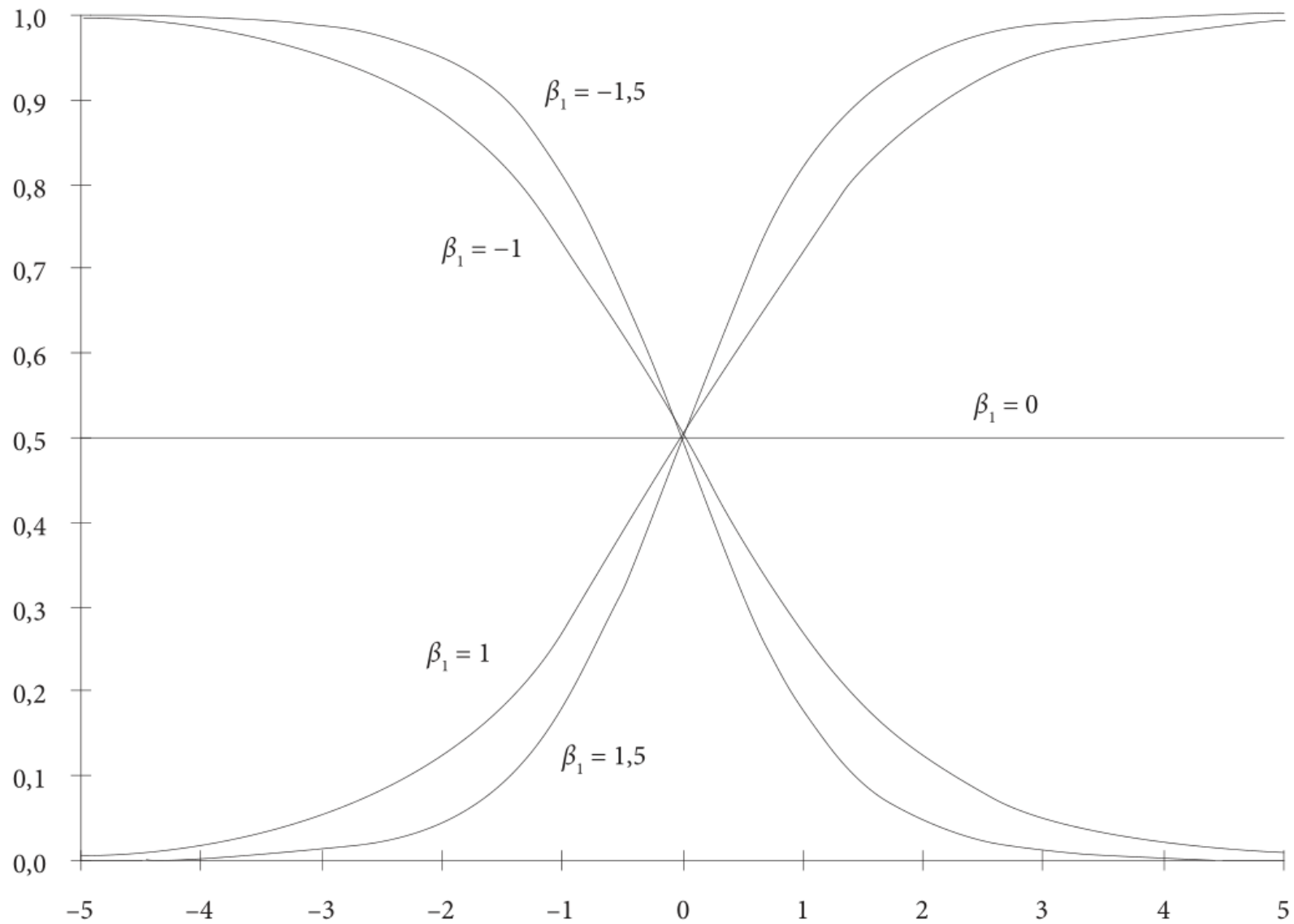
Aufgrund der Bestimmung der Exponenten der e-Funktion durch die uV ist der Einfluss als indirekt und nicht-linear zu determinieren. Gründe dafür liegen einerseits in der Wahrscheinlichkeitsberechnung (indirekt) und andererseits in der logistischen Funktion (nicht-lineare Form).

- Fazit: Regressionskoeffizienten sind untereinander nicht vergleichbar und die Wirkung der uV über die gesamte Breite ist nicht konstant
- Lineare Verknüpfung kann lediglich durch die aggregierte Einflussstärke (z-Wert) unterstellt werden

Verlauf und Lage der Funktion

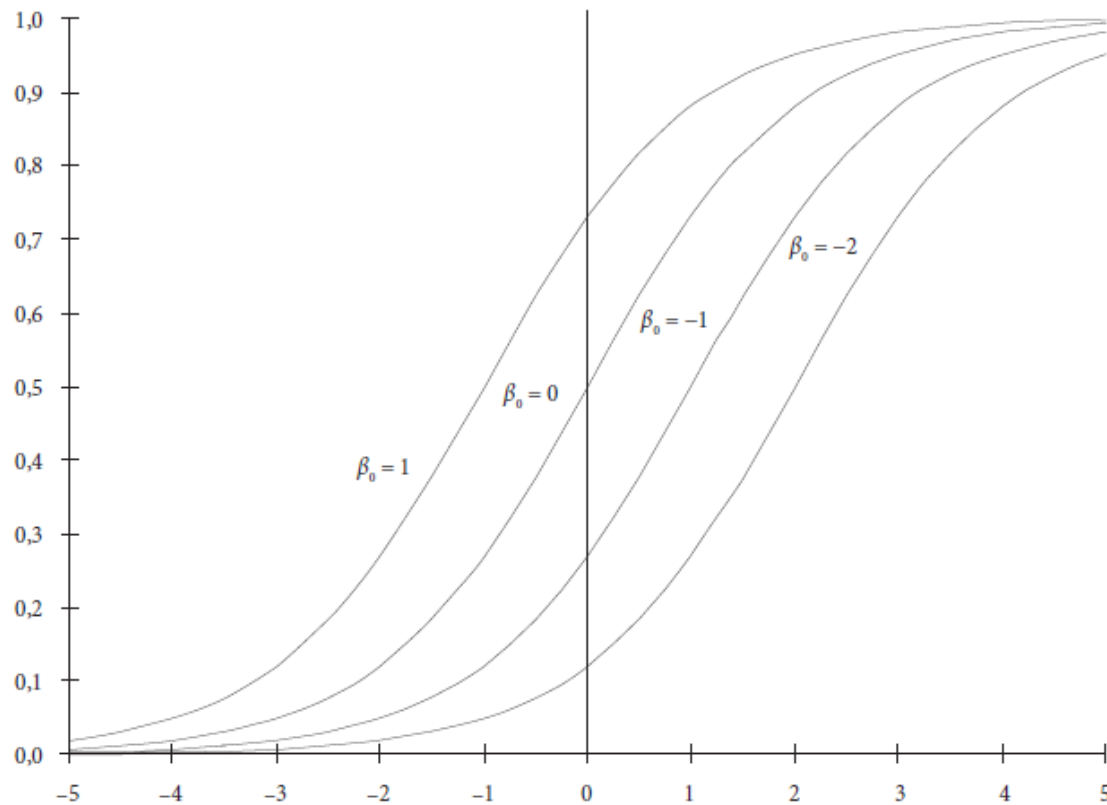
- Durch die Angabe der logistische Funktion $\left(\frac{1}{1+e^{-z}}\right)$ in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung wird ein Sättigungseffekt abgebildet (max.: 1). Dies führt dazu, dass Extrembereichsänderungen der latenten Variable Z nicht mehr wesentlich zu Eintrittswahrscheinlichkeitsänderungen führen
- Positive Regressionskoeffizienten indizieren ein Ansteigen der Wahrscheinlichkeit; negative Koeffizienten ein Abfallen (s. nächste Folie)

3.3 Logistische Regression



3.3 Logistische Regression

Interpretation der Regressionskoeffizienten



Verlauf und Lage der Funktion

- Der Parameter β_0 gibt Aufschluss über die Wahrscheinlichkeit an der Stelle $X = 0$
- Für $\beta_0 = 0$ ergibt sich für beide Kategorien die gleiche Wahrscheinlichkeit (50 %)

3.3 Logistische Regression

Interpretation der Regressionskoeffizienten

Interpretationserleichterung kann durch das Verhältnis der Eintrittswahrscheinlichkeit zur Gegenwahrscheinlichkeit erlangt werden

Dieses Verhältnis gibt Auskunft über die Wahrscheinlichkeit, das Ereignis $y=1$ im Vergleich zum Ereignis $y=0$ zu erhalten: Wettquotienten oder *Odds Ratio*

$$\text{Odds}(y = 1) = \frac{p(y = 1)}{1 - p(y = 1)}$$

Odds Ratio = e^{β_x} gibt die Veränderung des Wettquotienten an, wenn sich die unabhängige Variable um eine Einheit erhöht

e^{β_x} gibt also an, mit welchem Faktor der bedingte Wettquotient gewichtet wird, wenn der Wert von X um eine Einheit erhöht wird

Beispiel Odds Ratio für $X = 3$: $e^{\beta_0} \times e^{\beta_1} \times e^{\beta_1} \times e^{\beta_1}$; Odds Ratio für $X = 3$ setzt sich zusammen aus e^{β_0} (entspricht dem Wettquotienten für $X = 0$) und dem Faktor e^{β_1} (entspricht der Erhöhung des Wertes von X um eine Einheit)

3.3 Logistische Regression

Interpretation der Regressionskoeffizienten

Zusammenfassung:

- Bezogen auf die Interpretation des Zusammenhanges zwischen der AV und der UV wirken sich gleiche Veränderungen in den Beobachtungswerten (z.B. von 1 zu 2 oder 3 zu 4; $\Delta X=1$) unterschiedlich auf die Eintrittswahrscheinlichkeit aus, da die logistische Funktion keinen linearen Zusammenhang aufweist.*
- Ist Regressionskoeffizient b_j positiv, erhöht sich bei steigendem X_{jk} Wahrscheinlichkeit für $Y = 1$; bei einem negativen Regressionskoeffizienten sinkt die Wahrscheinlichkeit*

3.3 Logistische Regression

Pseudo-R²-Statistiken

- Determinationskoeffizient aus der linearen Regression gibt den Anteil der durch das Regressionsmodell aufgeklärten Varianz der abhängigen Variable an
 - Voraussetzungen: 1) Varianzzerlegung der AV in Linearkombination aus den UVs sowie der Residualvariablen; 2) Unabhängigkeit der Residualvarianz von der Ausprägung der UVs
 - Beide Annahmen sind für die logistische Regression nicht erfüllt
- Lösung: Andere Maße für die Bestimmung der Anpassungsgüte heranziehen
→ Pseudo-R²
- Caveat: Es gibt nicht *das* Maß, da jedes Pseudo-R² mit spezifischen Einschränkungen verbunden ist
- Insgesamt fallen die Ausprägungen *geringer* aus, als der Determinationskoeffizient der linearen Regression und es gibt keine einheitlichen Konventionen für die Interpretation der Ausprägung
→ Oft werden zur Interpretation die Odds Ratio-Werte herangezogen und weniger die globalen Maße zur Bestimmung der Anpassungsgüte

3.3 Logistische Regression

Pseudo-R²-Statistiken

McFadden-Index

$$MF = 1 - \frac{L_M}{L_0}$$

- Dieses Maß vergleicht die logarithmierten Likelihoods des spezifizierten Modells L_M und des Null-Modells L_0 , das nur die Konstante beinhaltet
- Die Differenz gibt somit den Erklärungsgewinn durch die Aufnahme der Prädiktoren im Vergleich zum Modell mit perfekter Anpassungsgüte an

Cox & Snell-Index

$$CS = 1 - \left[\frac{L_M}{L_0} \right]^{\frac{2}{n}}$$

- Index entspricht, wenn man ihn für die lineare Regression heranzieht, exakt dem Wert des Determinationskoeffizienten, kann aber nicht der Wert 1 (perfekte Vorhersage) annehmen
- n ist der Stichprobenumfang

3.3 Logistische Regression

Pseudo-R²-Statistiken

Nagelkerke-Index

$$NK = \frac{CS}{CS_{max}} ; CS_{max} = 1 - L_0^{\frac{2}{n}}$$

- **Index entspricht de Quotienten des Cox & Snell-Index, geteilt durch dessen Maximalwert**

→ Nagelkerkes-R² ist so definiert, dass auch der Maximalwert von 1 erreicht werden kann

3.3 Logistische Regression

Beispiel logistische Regression aus der Medizin (Anderson, Jin & Grunkemeier, 2003)

Table 1. Logistic Regression Analysis of Risk of Death in Coronary Bypass Patients

	Coeff.	Standard Error	<i>p</i> Value	Odds Ratio	CI Lower Limit	CI Upper Limit
AGE	0.073	0.006	<0.001	1.076	1.062	1.090
RENAL	1.162	0.177	<0.001	3.198	2.259	4.526
Constant	-8.868	0.471	<0.001			

AGE = age in years; RENAL = history of renal insufficiency; Coeff. = coefficient expressed in logits; CI = 95% confidence interval for the odds ratio.

Interpretation:

Das Todesrisiko von Patienten nach einer Bypass-Operation steigt mit zunehmenden Alter (mit jedem Jahr um den Faktor 1.076) und bei vorheriger Niereninsuffizienz: Personen mit vorheriger Niereninsuffizienz haben ein 3.198-fach höheres Risiko nach einer Bypass-OP zu sterben, als Personen ohne Niereninsuffizienz.

3.3 Logistische Regression

Beispiel logistische Regression aus dem Bereich Business Ethics (Cassebatis & Wortley, 2013)

Table 3 Second logistic regression predicting whistleblowing or non-reporting observation

Predictor	β	SE	Odds ratio
Individual initiative	0.23**	0.08	1.25
Individual approval	0.29**	0.08	1.33
Org. approval	0.24**	0.06	1.27
Fear reprisals	-0.20**	0.06	0.82
Personal victimisation	1.22**	0.10	3.37
Wrongdoing seriousness	0.69**	0.05	1.98

Gender coded 0 = female, 1 = male. Whistleblower/non-reporter coded 0 = non-reporting observer, 1 = whistleblower

* $p < 0.05$, ** $p < 0.001$

Interpretation:

Die Wahrscheinlichkeit von Whistleblowing steigt, wenn z. B. die Ernsthaftigkeit des Verhaltens als hoch eingeschätzt wird (je Einheit um den Faktor 1.98). Werden negative Konsequenzen bzw. Repressalien durch Whistleblowing erwartet, sinkt die Wahrscheinlichkeit um den Faktor 0.82.



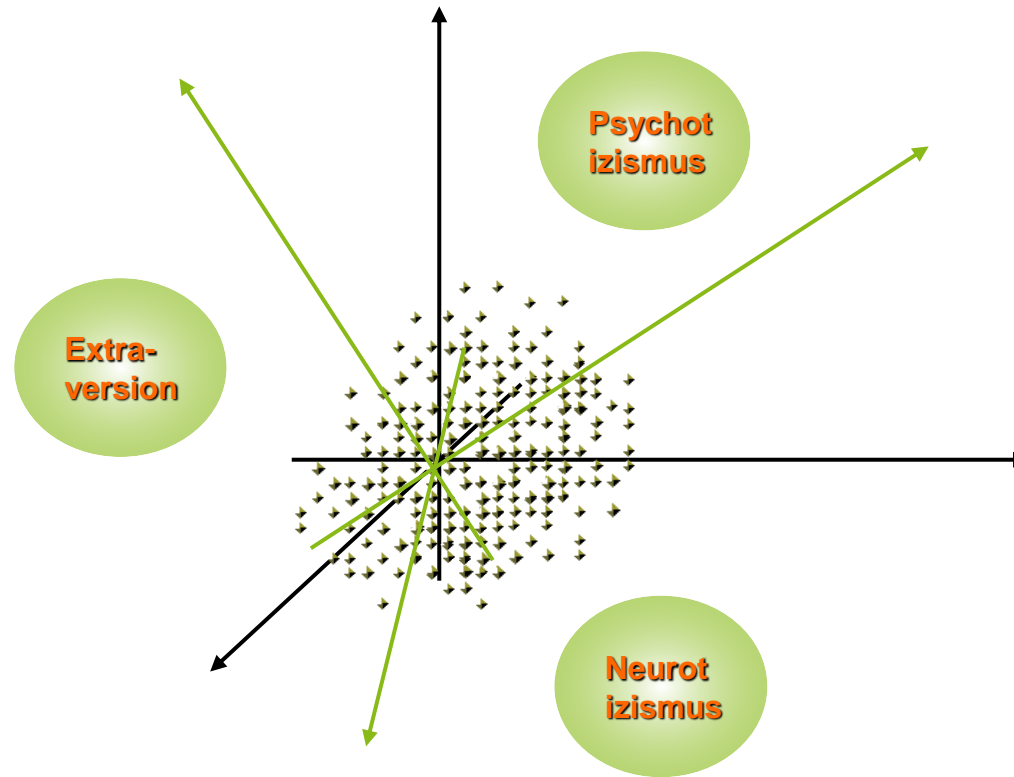
Multivariate Datenanalyse

4 Strukturgleichungsmodelle

- 4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse
- 4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell
- 4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse
- 4.4 Fit-Indizes
- 4.5 SEM mit Längsschnittanalysen
- 4.6 Nicht-lineare SEM

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

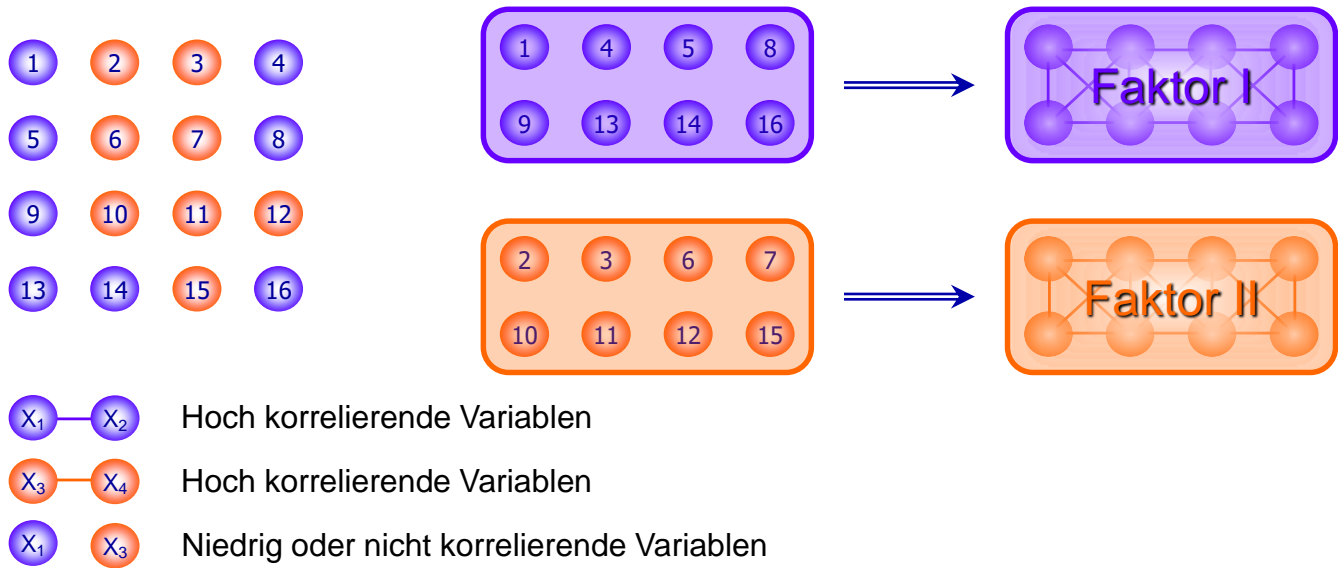
Faktorenanalyse



4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Faktorenanalyse

- Faktoren sind *grundlegende, nicht direkt messbare, hypothetische* (oder auch latente) Variablen.
- Mehrere miteinander hoch korrelierende Variablen bilden einen Faktor, dessen Varianz sich aus der Kovarianz dieser Variablen zusammensetzt.
- Faktoren als hypothetische Konstrukte „verursachen“, bedingen die „Gemeinsamkeit“, den Zusammenhang zwischen den Variablen.



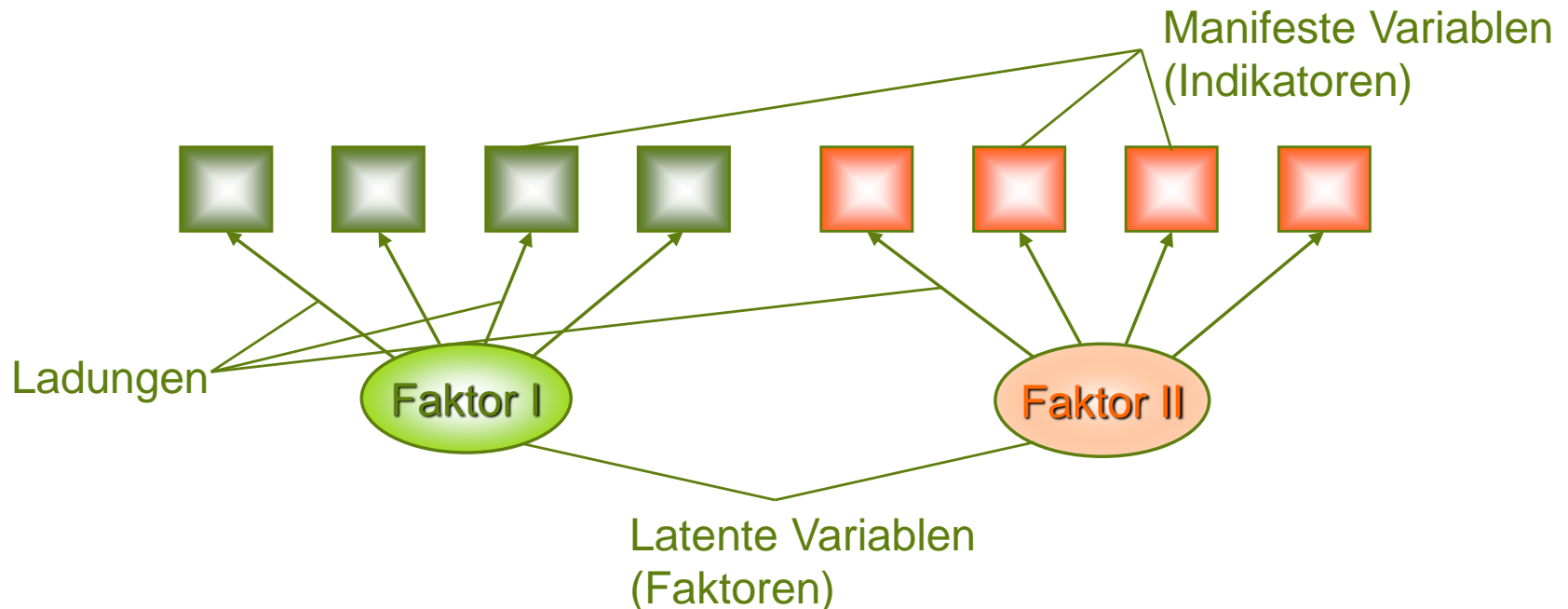
4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Faktorenanalyse

➤ Die „Verursachung“ der Variablen durch latente Konstrukte wird als Ladung bezeichnet.

- Die Ladung informiert über die Stärke des Zusammenhangs zwischen der Variablen und dem Faktor.

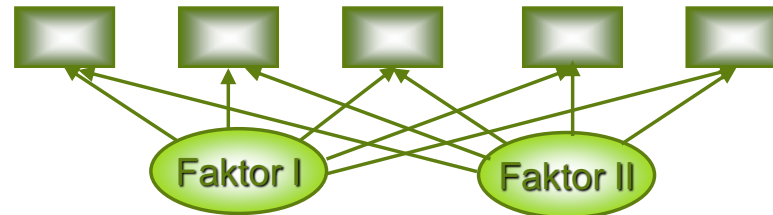
➤ Ziel ist die Identifikation von Faktoren, die nur bestimmten Variablen zu Grunde liegen, d.h. deren Ladungen zwischen den manifesten Variablen differenzieren.



4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

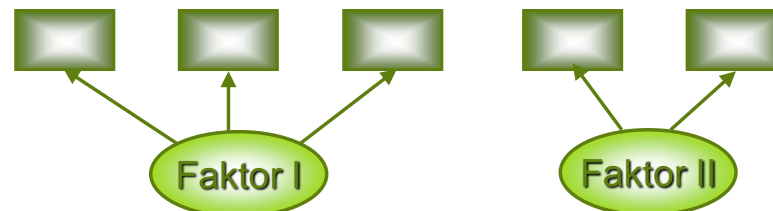
Explorative vs. konfirmatorische Faktorenanalyse

- Mit Hilfe der explorativen (suchende) Faktorenanalyse werden latente Konstrukte identifiziert, die den manifesten Variablen zu Grunde liegen sowie deren hohe Zusammenhänge erklären.
- Deskriptivstatistische Auswertung: Es werden mit der explorativen Faktorenanalyse Hypothesen generiert, aber nicht getestet.
- Ziel: Reduktion der eingegangenen Variablen auf zugrundeliegende Faktoren



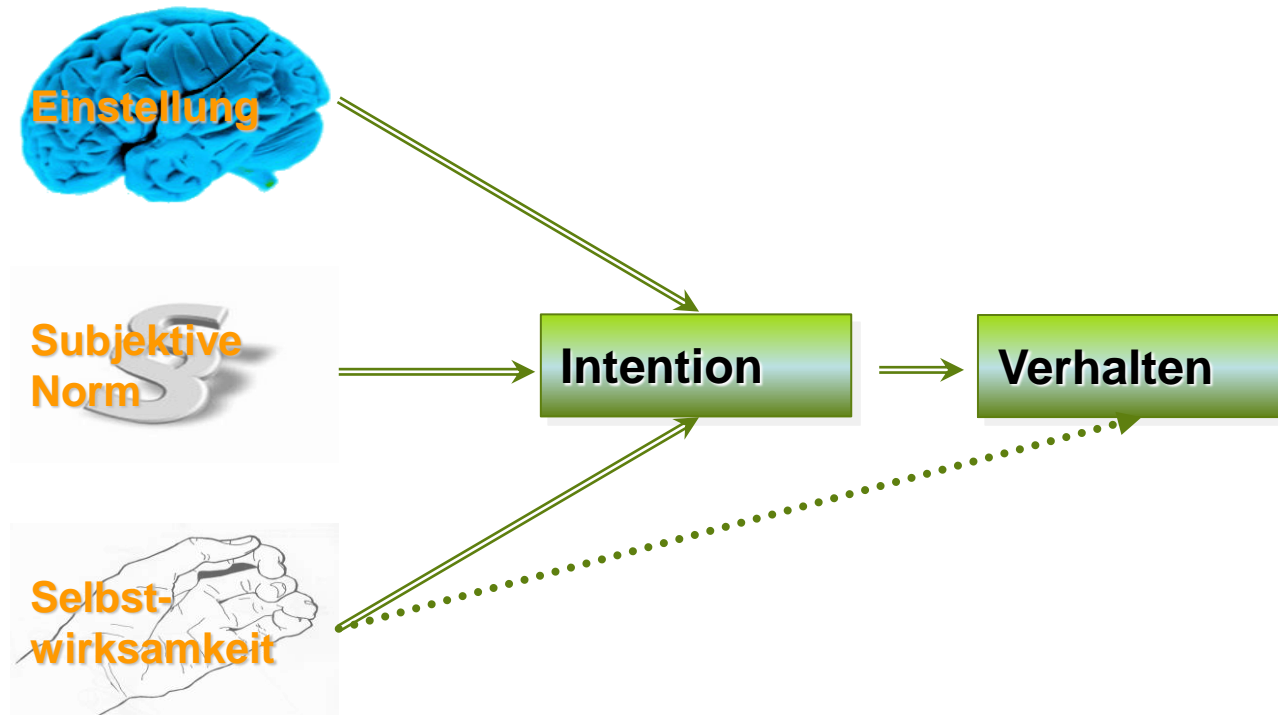
- Mit Hilfe der konfirmatorischen Faktorenanalyse werden *a priori* Annahmen über die Zuordnung von manifesten Variablen zu latenten Konstrukten getestet.

- Ziel: Inferenzstatistische Prüfung von Faktoren- bzw. Messmodellen



4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

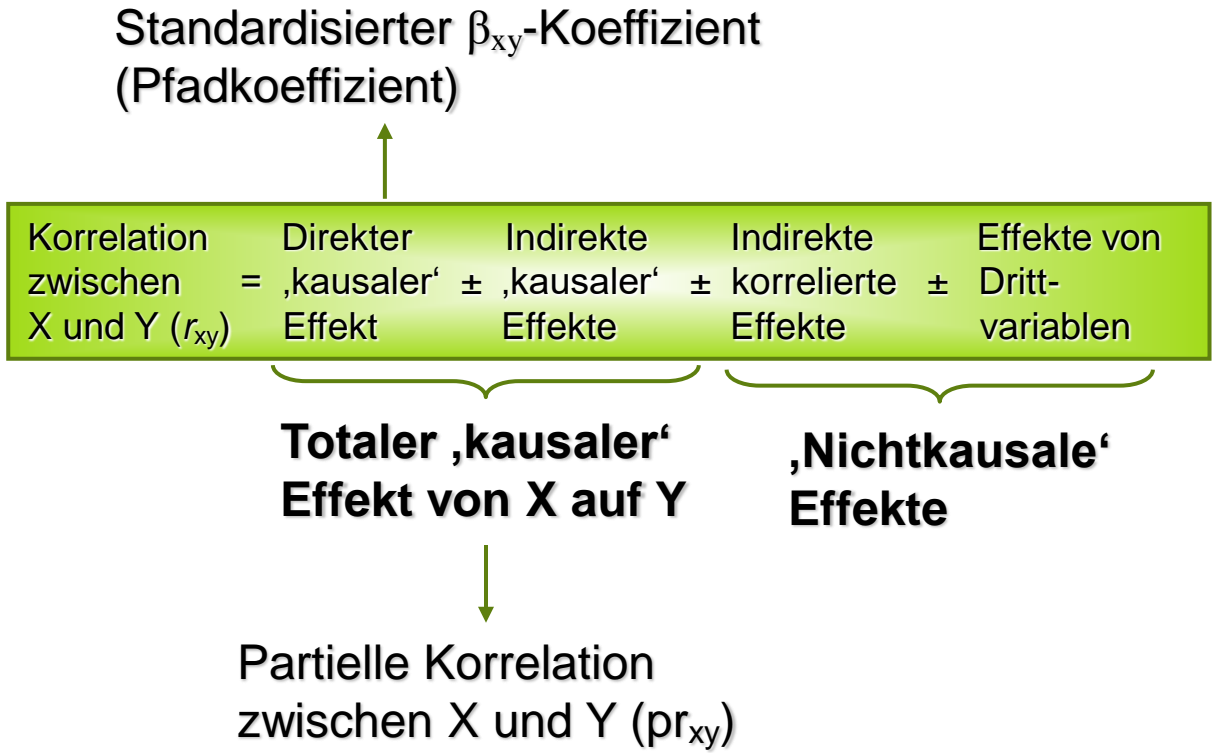
Theorie des geplanten Verhaltens (Ajzen, 1988):



4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

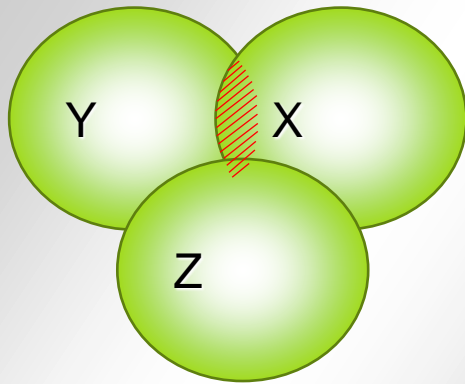
Zerlegung von Korrelationen

Jede empirische Korrelationen lässt sich in den totalen „kausalen“ Effekt und in die „nicht-kausale“ Effekte:



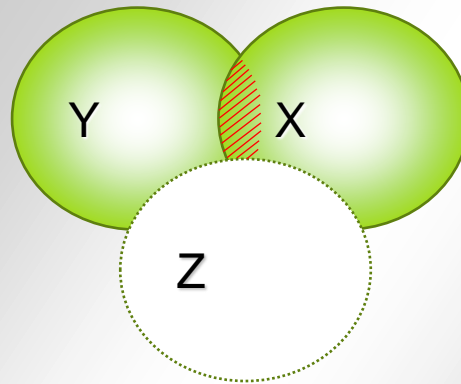
4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Partial- und Semipartialkorrelation



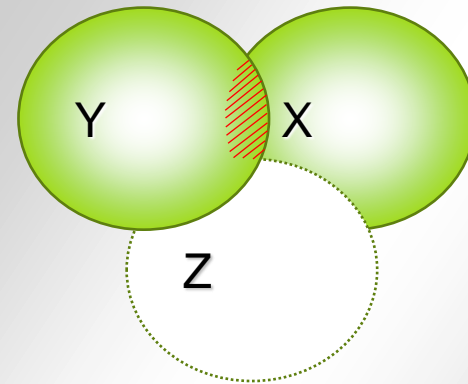
Produkt-Moment-Korrelation

Die Beziehung zwischen X und Y ist nicht um den Einfluss von Z bereinigt. Der gemeinsame, spezifische Varianzanteil von X und Y wird überschätzt.



Partielle Korrelation

Gibt die spezifische Beziehung zwischen Y und X an. Der Varianzanteil von Z in Y und X ist herauspartialisiert.

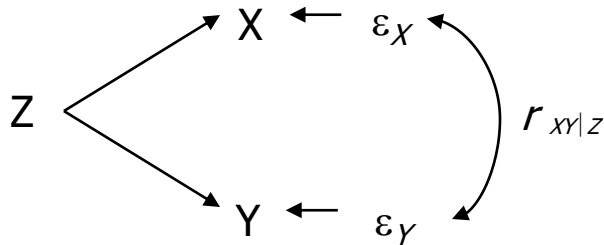


Semipartielle Korrelation

Gibt in der quadratischen Form den relativen spezifischen Varianzanteil von X in Y an (inkrementelle Varianzaufklärung vgl. ΔR^2).

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Partialkorrelation



$$r_{XY|Z} = \frac{r_{XY} - r_{XZ} \cdot r_{YZ}}{\sqrt{1 - r_{XZ}^2} \cdot \sqrt{1 - r_{YZ}^2}}$$

- Die Partialkorrelation entspricht der bivariaten Korrelation zwischen Regressionsresiduen:

$$pr_{YX} = r_{e_Y e_X}$$

- Die Residuen ergeben sich aus zwei Regressionen, in denen die herauszupartialisierende Variable (Z) jeweils zur Vorhersage der Variablen (Y, X) herangezogen wird, für welche die Partialkorrelation zu bestimmen ist:

$$\hat{X} = \beta \cdot Z + \beta_0 \qquad \hat{Y} = \beta \cdot Z + \beta_0$$

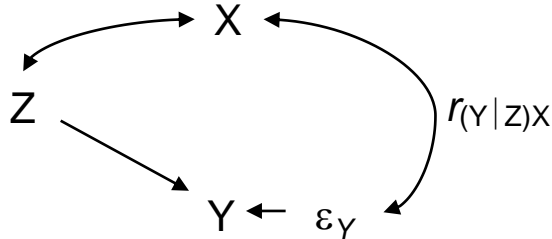
- Die Residuen, die unabhängig von der Variablen Z sind (Voraussetzung für Kleinst-Quadrate-Schätzung), lassen sich nun berechnen:

$$e_X = X - \hat{X} \qquad e_Y = Y - \hat{Y}$$

- Die Produkt-Moment-Korrelation zwischen beiden Residuen ist die Partialkorrelation zwischen Y und X.

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Semipartialkorrelation



$$r_{XY|Z} = \frac{r_{XY} - r_{XZ} \cdot r_{YZ}}{\sqrt{1 - r_{YZ}^2}}$$

$$spr_{YX} = r_{e_Y X}$$

- Die Semipartialkorrelation entspricht der bivariaten Korrelation zwischen einer Variablen und einem Regressionsresiduum:

$$\hat{Y} = \beta \cdot Z + \beta_0 \quad e_Y = Y - \hat{Y}$$

- Das Regressionsresiduum ergibt sich aus der linearen Vorhersage von Y durch Z:

- Die inkrementelle Validität gibt den *zusätzlichen* relativen Anteil der aufgeklärten Varianz im Kriterium (Y) an, die durch Hinzunahme des Prädiktors (X) in die Regressionsfunktion gebunden wird.

- Dementsprechend entspricht spr^2 der inkrementellen Varianzaufklärung durch X: ΔR^2 (Delta R-Quadrat).

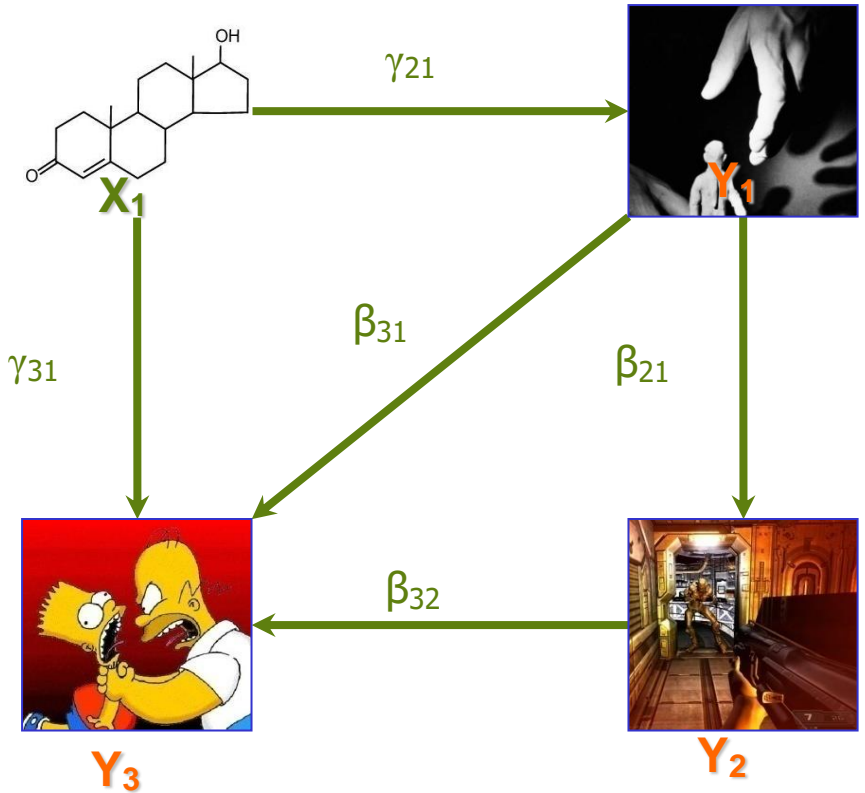
4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Grenzen der linearen Regression

- Regressionsanalytische Auswertungen erlauben die statistische Vorhersage *nur* eines Kriteriums: multivariate Modelle mit mehreren abhängigen Variablen können nicht getestet werden.
- Die Wirkrichtung des spezifischen Zusammenhangs bleibt empirisch sowie auch theoretisch oftmals ungeklärt.
- Mangelnde Reliabilität (bspw. die Nichtbeachtung von Messfehlern) bei der Konstruktooperationalisierung führen zu verzerrten Parameterschätzungen.
- Die Konstruktvalidität der Variablen in der Regressionsfunktion ist in vielen Fällen nicht gegeben.
- Die Identifikation von nicht-linearen Effekten (Interaktions- oder quadratische Effekte) ist bei mangelnder Validität und Reliabilität mit erheblichen Verzerrungen verbunden.

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Pfadanalyse



- X₁: Testosterongehalt
- Y₁: Machtmotivation
- Y₂: Präferenz für gewaltverherrlichende Videospiele
- Y₃: Ausmaß aggressiven Verhaltens

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Pfadanalyse

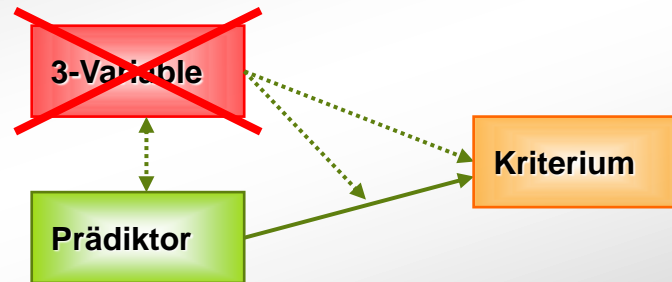
- Pfadanalyse stellt ein sukzessives Verfahren zur Testung komplexer Kausalmodelle mit mehreren abhängigen Variablen dar.
- Die in den Regressionsanalysen ermittelten Parameter dienen der Berechnung der Pfadkoeffizienten.
- Die Pfadanalyse basiert ausschließlich auf manifesten Variablen.
- Wichtig: Die Kausalitätsfrage wird durch die Pfadanalyse noch nicht beantwortet – Pfadanalysen dienen lediglich dazu, Nicht-Kausalität auszuschließen.

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Prinzipien der Pfadanalyse

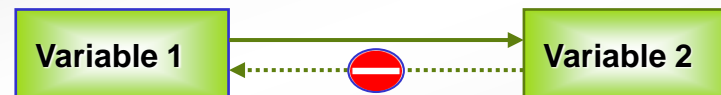
I. Kausale Abgeschlossenheit

Jeder Einfluss durch „Drittvariablen“ muss theoretisch ausgeschlossen werden können: Moderator- bzw. Mediatoreffekte dürfen nicht auftreten.



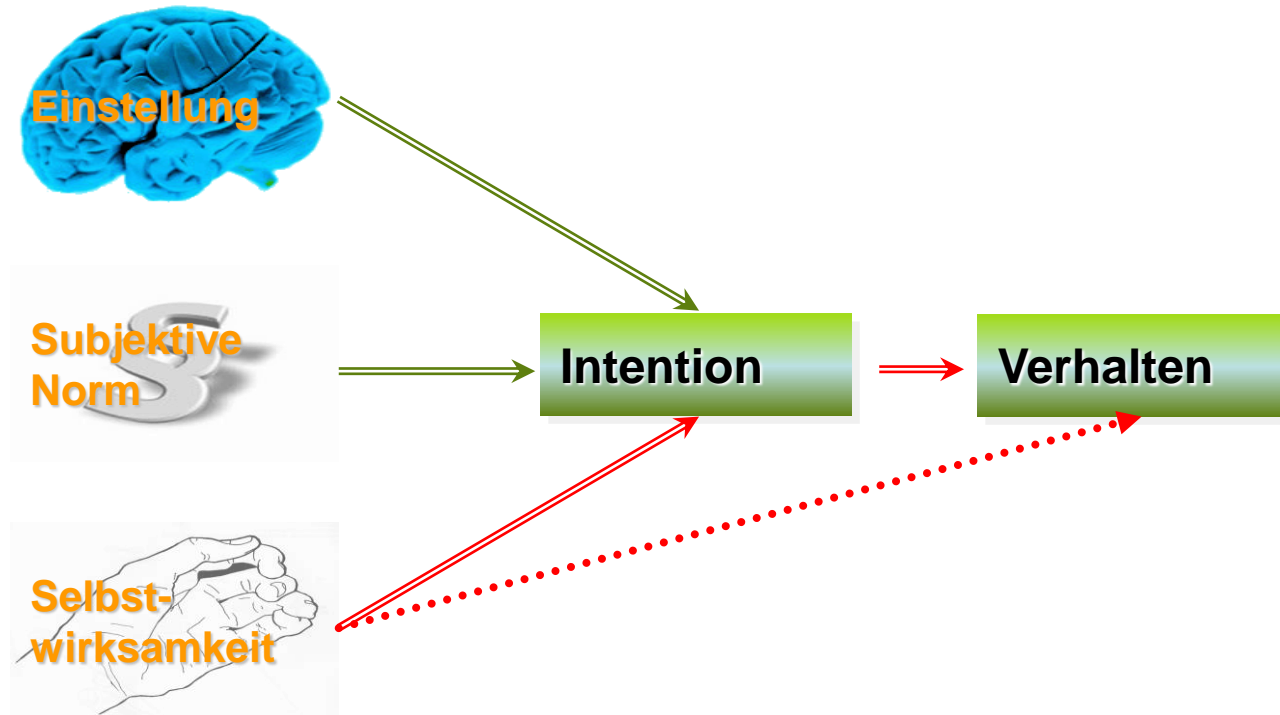
II. Kausale Rekursivität

Es dürfen auch keine zirkulären Kausalbedingungen auftreten: Die beteiligten Variablen müssen sich in eine Kausalkette einordnen lassen können, so dass keine Variable eine vorgeordnete Variable vorhersagt.



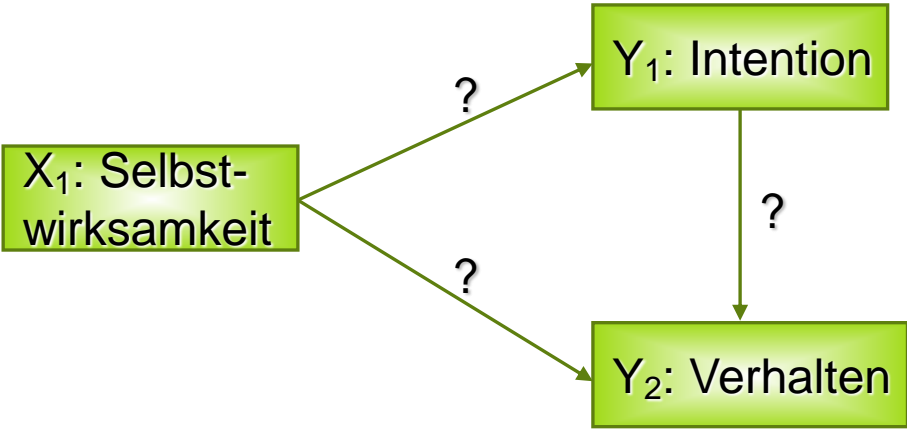
4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Beispiel einer Pfadanalyse



4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Beispiel einer Pfadanalyse



Korrelation zwischen X und Y (r_{xy})	Direkter = „kausaler“ Effekt	Indirekte = „kausaler“ Effekte	Indirekte = korrelierte Effekte	Effekte von = Dritt- variablen
---	---	--------------------------------------	---------------------------------------	--------------------------------------

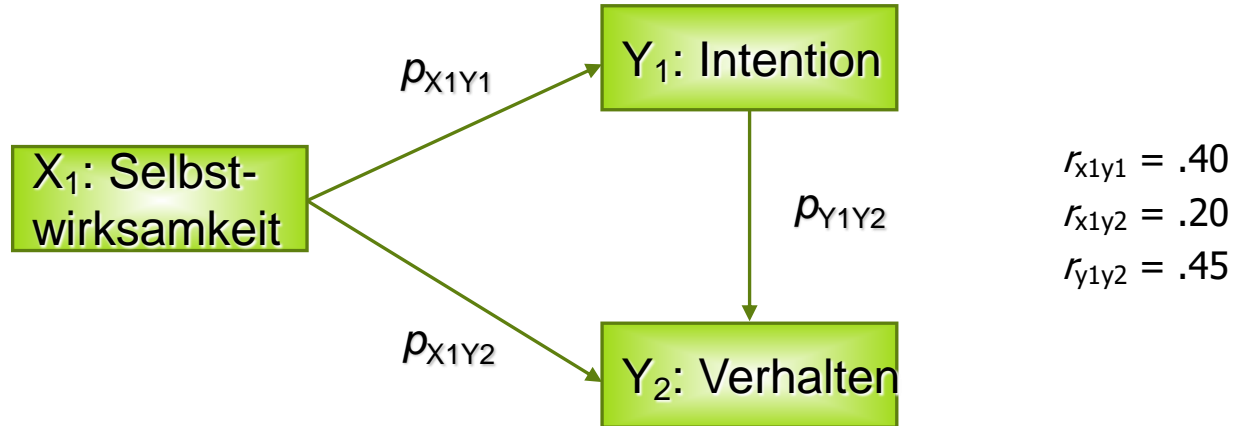
Folgende Korrelationen seien gegeben:

- Selbstwirksamkeit und Intention: $r_{x_1y_1} = .40$
- Selbstwirksamkeit und Verhalten: $r_{x_1y_2} = .20$
- Intention und Verhalten: $r_{y_1y_2} = .45$

Die Pfadkoeffizienten werden anhand der Korrelationen ermittelt.

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Beispiel einer Pfadanalyse



Mit folgenden Gleichungen lassen sich die Pfadkoeffizienten ermitteln:

Direkter Effekt	Indirekte Effekte
$r_{x_1y_1} = p_{X_1Y_1}$	
$r_{x_1y_2} = p_{X_1Y_2} + (p_{X_1Y_1} \cdot p_{Y_1Y_2})$	
$r_{y_1y_2} = p_{Y_1Y_2} + (p_{X_1Y_1} \cdot p_{X_1Y_2})$	

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Beispiel einer Pfadanalyse

Folgenden Gleichungen ergeben sich durch Einsetzen der Korrelationen:

$$\begin{array}{ll} (1) & .40 = \rho_{X_1Y_1} & r_{x_1y_1} = .40 \\ (2) & .20 = \rho_{X_1Y_2} + (.40 \cdot \rho_{Y_1Y_2}) & r_{x_1y_2} = .20 \\ (3) & .45 = \rho_{Y_1Y_2} + (.40 \cdot \rho_{X_1Y_2}) & r_{y_1y_2} = .45 \end{array}$$

Durch Auflösen von Gleichung (3) nach $\rho_{Y_1Y_2}$ und Einsetzen in (2) erhält man folgende Gleichung:

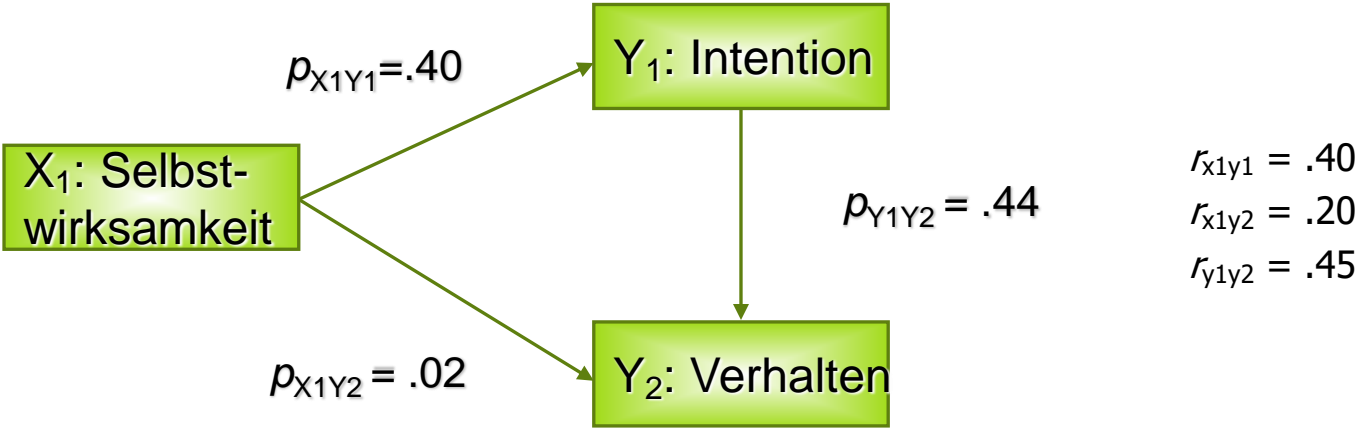
$$\begin{array}{l} (4) \quad .20 = \rho_{X_1Y_2} + (.40 \cdot (.45 - .40\rho_{X_1Y_2})) \\ \quad .02 = \rho_{X_1Y_2} \end{array}$$

In (3):

$$\begin{array}{l} (5) \quad .45 = \rho_{Y_1Y_2} + (.40 \cdot .02) \\ \quad .442 = \rho_{Y_1Y_2} \end{array}$$

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Beispiel einer Pfadanalyse



Neben dem direkten, lassen sich auch die indirekten und totalen Effekte ermitteln:

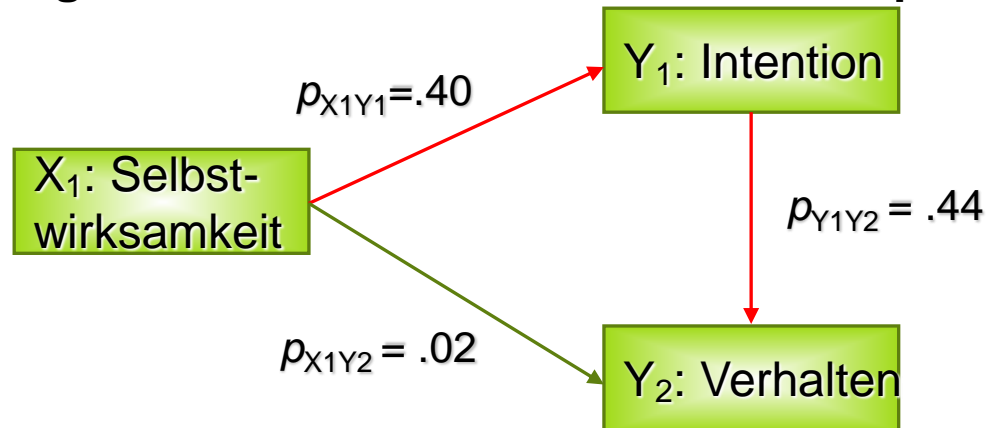
Korrelation zwischen X und Y (r_{xy})	=	Direkter 'kausaler' Effekt	±	Indirekte 'kausaler' Effekte	±	Indirekte korrelierte Effekte	±	Effekte von Drittvariablen
---	---	----------------------------	---	------------------------------	---	-------------------------------	---	----------------------------

Totaler 'kausaler' Effekt von X auf Y

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Beispiel einer Pfadanalyse

Der indirekte Effekt ergibt sich aus dem Produkt der Einzelpfade:



- Indirekter Effekt von Selbstwirksamkeit auf Verhalten über Intention:

$$\rho_{X_1Y_1} \cdot \rho_{Y_1Y_2} = \text{indirekter Effekt}$$

$$.40 \cdot .44 = .18$$

- Wenn sich die Selbstwirksamkeit um eine Standardabweichung verändert, ändert sich das Verhalten, vermittelt über die Intention, um .18 Standardabweichungen.

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Beispiel einer Pfadanalyse

Der totale Effekt von Selbstwirksamkeit auf Verhalten ist die Summe (.02 + .18 = .20) des direkten (.02) und des indirekten (.18) Pfads:

Direkter Pfad: .02

Indirekter Pfad: .18

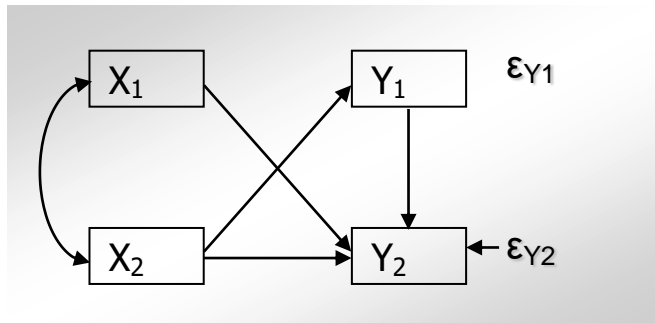
Totaler Effekt: .20

Korrelation zwischen X und Y (r_{xy})	=	Direkter ,kausaler' Effekt	±	Indirekte ,kausaler' Effekte	±	Indirekte korrelierte Effekte	±	Effekte von Drittvariablen
---	---	----------------------------	---	------------------------------	---	-------------------------------	---	----------------------------

Totaler ,kausaler' Effekt von X auf Y

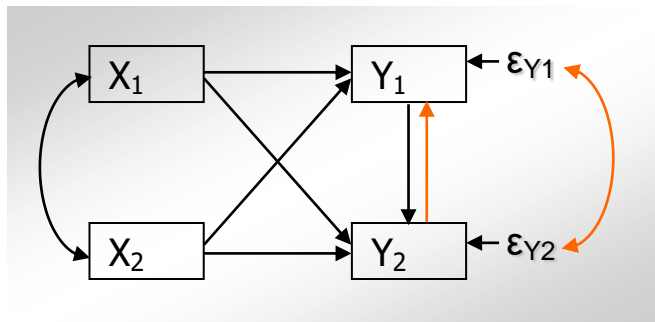
4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

Rekursive und Nicht-rekursive Pfadmodelle



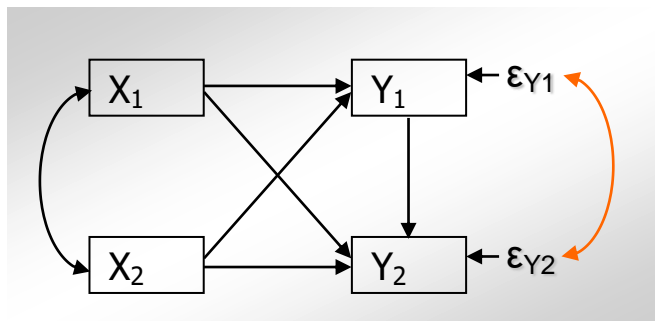
Rekursive Pfadmodelle

- Alle kausalen Effekte sind unidirektional
- Keine Korrelation der Residuen
- Eindeutige Kausalspezifikation
- Parameter sind gut schätzbar



Nicht-rekursive Pfadmodelle

- Feedbackschleifen werden spezifiziert
- Korrelation der Residuen
- Bidirektionale Kausalbeziehungen
- Schwer anpassbar und theoretisch schwer zu begründen



Partial-rekursive Pfadmodelle

- Korrelation der Residuen
- Direktionale Kausalbeziehungen
- Theoretisch gut begründbar



Multivariate Datenanalyse

4 Strukturgleichungsmodelle

- 4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse
- 4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell
- 4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse
- 4.4 Fit-Indizes
- 4.5 SEM mit Längsschnittdaten
- 4.6 Nicht-lineare SEM

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Probleme bei manifesten Variablen

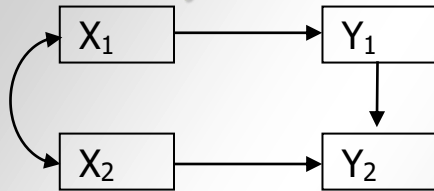


1. Die Messung von manifesten Variablen ist mit Fehlern behaftet, die in die Schätzung der Zusammenhänge miteinbezogen werden - mangelnde Reliabilität.
 - Keine hinreichende Differenzierung zwischen „wahrer“ (Ko-) Varianz und „messbedingter“ Varianz in den Variablen
 - Folge: Die Zusammenhänge werden unterschätzt
2. Es kann nicht angenommen werden, dass ein Indikator hinreichend valide das zu Grunde gelegte latente Konstrukt abbildet.
 - Eingeschränkte Generalisierbarkeit der Ergebnisse der Stichprobe auf die zu Grunde liegende Population.

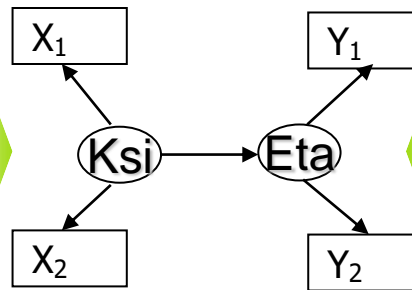
4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Integrativer Ansatz

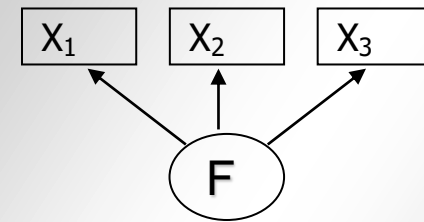
Pfadanalyse:



- Techniken zur Kausalmodellierung
- Multivariater Ansatz
- Bestimmung von direkten und indirekten Effekten



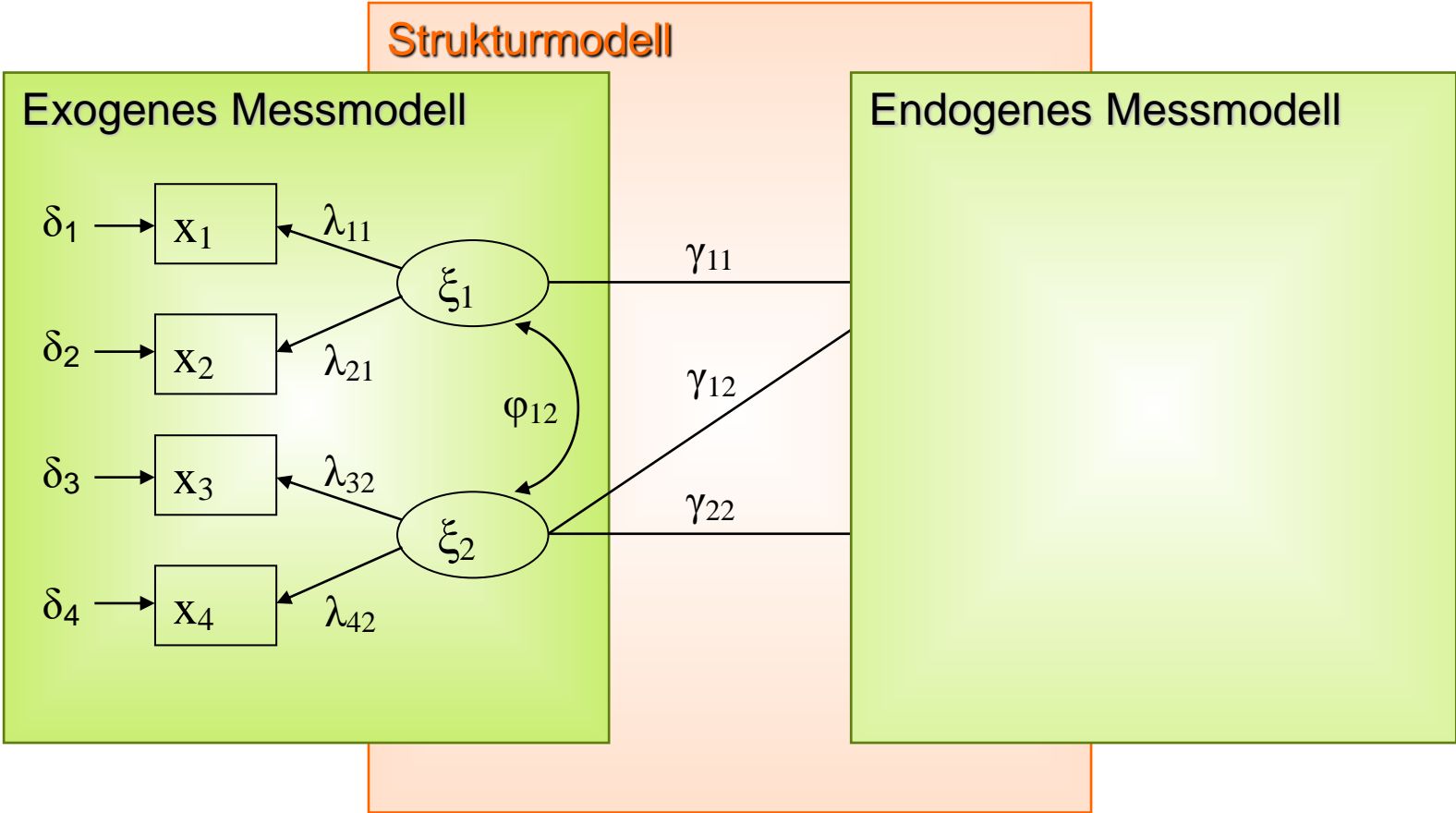
Faktorenanalyse:



- Multiple Indikatoren pro Konstrukt
- Identifikation der Konstruktvarianz
- Hohe Reliabilität und Validität der Konstrukte

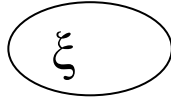
4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Vollständiges Strukturgleichungsmodell

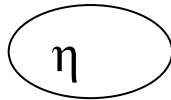


4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

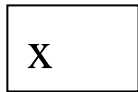
Parameternotation



Ksi: Latente exogene (unabhängige) Variable



Eta: Latente endogene (abhängige) Variable



Manifeste exogene (unabhängige) Variable



Manifeste endogene (abhängige) Variable






Ungerichtete, symmetrische Effekte: Kovarianz oder Korrelation



Gerichtete, asymmetrische Effekte: Pfad- oder Regressionskoeffizient

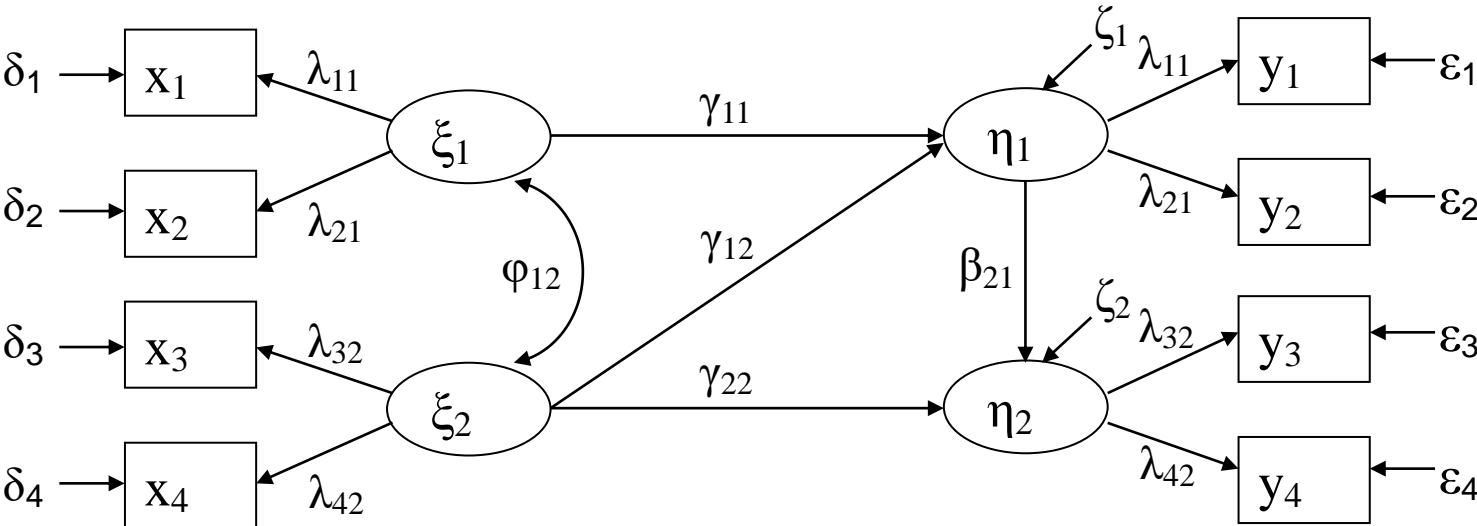
4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Parameternotation

γ	Gamma: Pfadbeziehung zwischen latenten exogenen und latenten endogenen Variablen
β	Beta: Pfadbeziehung zwischen latenten endogenen Variablen
φ	Phi: Varianzen und Kovarianzen von und zwischen latenten exogenen Variablen
ψ	Psi: Varianzen und Kovarianzen von und zwischen latenten endogenen Variablen
 ζ	Zeta: Residualvariable für eine latente endogene Variable
λ	Lambda: Ladung zwischen latenten Konstrukten und manifesten Indikatoren
 δ	Delta: Residualvariable für eine manifeste exogene Variable (X)
 ε	Epsilon: Residualvariable für eine manifeste endogene Variable (Y)

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

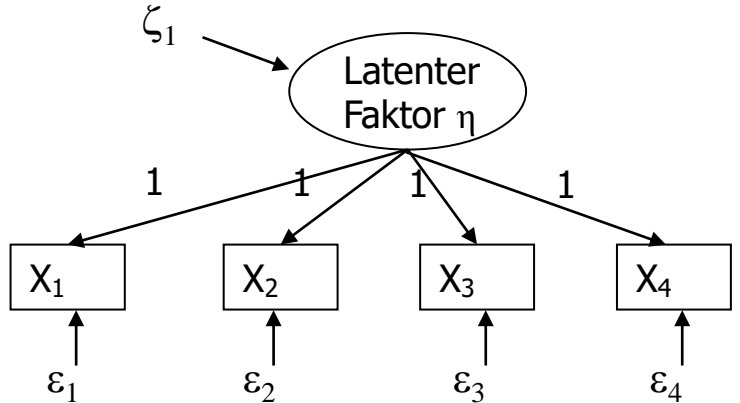
Vollständiges Strukturgleichungsmodell



<p style="color: green; margin: 0;">Exogenes Messmodell</p> $x = \tau_x + \Lambda_x \xi + \delta$	<p style="color: orange; margin: 0;">Strukturmodell</p> $\eta = \alpha + B\eta + \Gamma\xi + \zeta$	<p style="color: blue; margin: 0;">Endogenes Messmodell</p> $y = \tau_y + \Lambda_y \eta + \epsilon$
--	--	---

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Theoretisches, a priori definiertes Faktorenmodell (confirmatorische Faktorenanalyse):



$$\begin{aligned}
 X_1 &= \eta + \varepsilon_1 \\
 X_2 &= \eta + \varepsilon_2 \\
 X_3 &= \eta + \varepsilon_3 \\
 X_4 &= \eta + \varepsilon_4
 \end{aligned}$$

Aus der Spezifikation resultiert eine modellimplizierte Kovarianzmatrix:

$$\Sigma(\Theta) = \begin{pmatrix}
 \text{Var}(\eta + \varepsilon_1) & & & & \\
 \text{Cov}(\eta + \varepsilon_2, \eta + \varepsilon_1) & \text{Var}(\eta + \varepsilon_2) & & & \\
 \text{Cov}(\eta + \varepsilon_3, \eta + \varepsilon_1) & \text{Cov}(\eta + \varepsilon_3, \eta + \varepsilon_2) & \text{Var}(\eta + \varepsilon_3) & & \\
 \text{Cov}(\eta + \varepsilon_4, \eta + \varepsilon_1) & \text{Cov}(\eta + \varepsilon_4, \eta + \varepsilon_2) & \text{Cov}(\eta + \varepsilon_4, \eta + \varepsilon_3) & \text{Var}(\eta + \varepsilon_4) & \\
 \text{Var}(\eta) + \text{Var}(\varepsilon_1) & & & & \\
 \text{Var}(\eta) & \text{Var}(\eta) + \text{Var}(\varepsilon_2) & & & \\
 \text{Var}(\eta) & \text{Var}(\eta) & \text{Var}(\eta) + \text{Var}(\varepsilon_3) & & \\
 \text{Var}(\eta) & \text{Var}(\eta) & \text{Var}(\eta) & \text{Var}(\eta) + \text{Var}(\varepsilon_4) &
 \end{pmatrix}$$

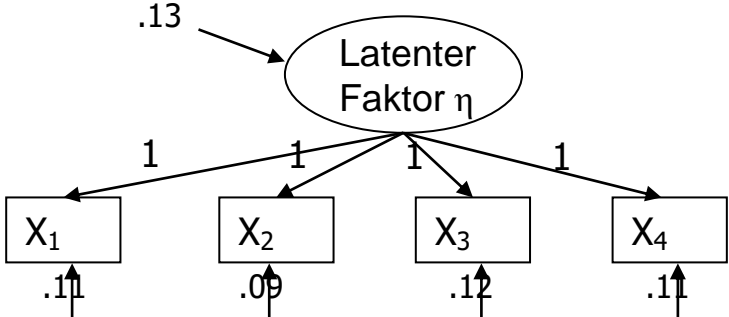
4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Parameterschätzung

Beobachtete Matrix $\begin{pmatrix} .213 & & & \\ .120 & .225 & & \\ .122 & .138 & .251 & \\ .128 & .131 & .127 & .256 \end{pmatrix}$ S	=	Modellimplizierte Matrix $\begin{pmatrix} .225 & & & \\ .126 & .220 & & \\ .126 & .126 & .243 & \\ .126 & .126 & .126 & .256 \end{pmatrix}$ $\Sigma(\Theta)$
--	---	---

Die Schätzung der Modellparameter erfolgt durch Maximierung der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der empirischen Matrix unter der Bedingung, dass beide Matrizen in der Population exakt übereinstimmen.

$$F_{ML} = tr | S \cdot \Sigma^{-1}(\Theta) | - p + \log | \Sigma(\Theta) | - \log | S |$$



4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Parameterschätzung

Durch die Maximum-Likelihood-Diskrepanzfunktion wird die Differenz zwischen S und Σ minimiert

$$F_{ML} = tr | S \cdot \Sigma^{-1}(\Theta) | - p + \log | \Sigma(\Theta) | - \log | S |$$

- S : Empirische (beobachtete) Kovarianzmatrix
 $\Sigma(\Theta)$: Modellimplizierte Kovarianzmatrix
 p : Anzahl der Variablen (empirischen Varianzen)
 tr : Spur einer Matrix (Anzahl der Varianzen in der Diagonalen)
 $\Sigma^{-1}(\Theta)$: Inverse der empirischen Kovarianzmatrix

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Statistische Voraussetzungen

I. Intervallskaliertheit der Variablen

II. Multivariate Normalverteilung aller manifester Variablen:

$$X \sim N(\mu, \sigma); Y \sim N(\mu, \sigma)$$

III. Empirische nachweisbare und theoretisch erwartete *lineare* Zusammenhänge zwischen den manifesten Variablen

IV. Hinreichend große Anzahl von Stichprobenelementen:

$$n \geq 100$$

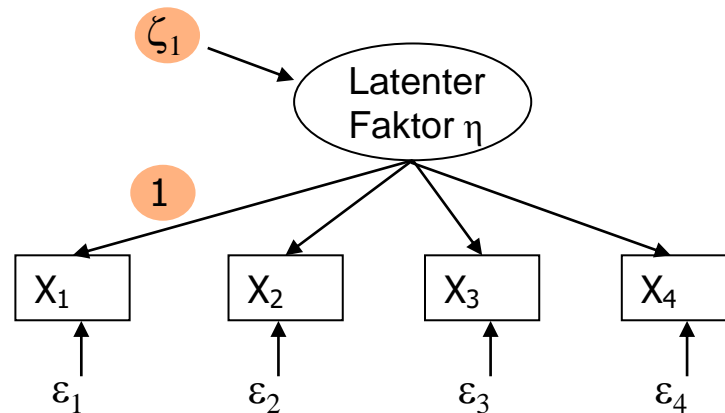
V. Keine Multikollinearität - Korrelationen von über $r = .75$ zwischen manifesten Variablen führen zu Verzerrungen der Parameterschätzung

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Identifizierbarkeit des Modells

➤ Die Identifizierung eines Modells erfordert zwei Schritte:

1. **Parameterfixierung:** Jede latente Variable und jede Fehlervariable (Varianz) muss in ihrer Metrik definiert sein
2. **Identifikation:** Jedes Modell muss mehr beobachtete als geschätzte Parameter aufweisen



Die Metrik der latenten Variablen wird durch zwei sich ausschließende Wege erzielt:

- Für jede latente Variable wird eine Ladung auf EINS gesetzt
- Die Varianz der latenten Variablen wird auf EINS gesetzt

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Identifizierbarkeit des Modells

Es muss geprüft werden, ob mehr Informationen bekannt sind als geschätzt werden müssen

- Bekannte Informationen: Elemente der Varianz-Kovarianzmatrix

$$\frac{1}{2}[p(p+1)] \quad p: \text{Anzahl der zu schätzenden Parameter}$$

- Vgl. ALM-Voraussetzung des vollen Spaltenrangs (mehr Stichprobenelemente als Parameter)

Drei potentielle Szenarien:

1. Unteridentifiziertes Modell: Es liegen mehr zu schätzende Parameter als empirische Informationen vor
 $a + b = 12 \rightarrow$ verschiedene Lösungen ($3 + 9 = 12$, $6 + 6 = 12$ etc.)
2. Identifiziertes Modell: Es liegen genauso viele zu schätzende Parameter wie empirische Informationen vor
 $a + b = 6$ und $2a + b = 10 \rightarrow$ eindeutige Lösung ($a = 4$ und $b = 2$)
3. Überidentifiziertes Modell: Es gibt mehr empirische Informationen als zu schätzende Parameter

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Alternative Schätzmethoden

I. Generalized Least Squares (GLS)

- Skalenunabhängig
- Erfordert multivariate Normalverteilung der manifesten Variablen
- Anwendung führt zu konsistenten und unverzerrten Schätzungen

II. Unweighted Least Squares (ULS)

- Skalenabhängig
- Erfordert keine multivariate Normalverteilung der manifesten Variablen
- Anwendung führt zu konsistenten Schätzungen

$$F_{GLS} = \frac{1}{2} \cdot tr[(S - \Sigma^{-1}(\Theta)) \cdot S^{-1}]^2$$

III. Asymptotically Distribution Free (ADF)

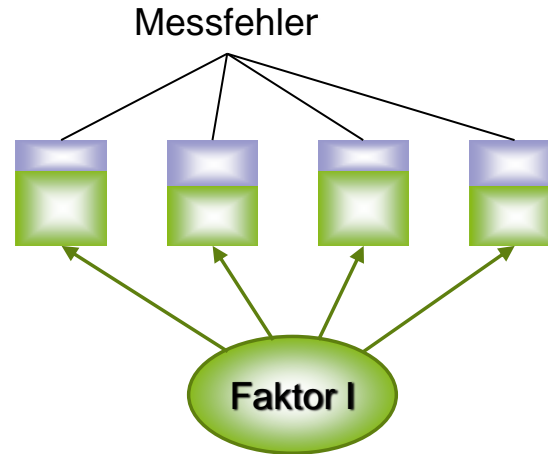
- Erfordert keine multivariate Normalverteilung der manifesten Variablen
- Anwendung führt zu konsistenten Schätzungen
- Erst ab sehr großen Stichproben anwendbar (N > 500)

$$F_{ULS} = \frac{1}{2} \cdot tr[(S - \Sigma^{-1}(\Theta))]^2$$

Minimierung der quadratischen
Abweichungen zwischen empirischen
und theoretischen cov-Matrix

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Umgang mit Messfehlern und fehlender Normalverteilung



- Messfehler, die durch die Faktoren nicht aufgeklärt werden, verringern die Reliabilität der Faktoren.
- In Folge dessen wird die Datenanpassung des spezifizierten Modells erheblich beeinträchtigt.
Der RMSEA-Wert indiziert eine schlechte Datenreproduktion, obwohl das Modell korrekt spezifiziert ist.
Reduzierte Konstruktvalidität der latenten Faktoren
- Fehlende Normalverteilung der Indikatoren führen zur Ablehnung korrekt spezifizierter Modelle

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Umgang mit Messfehlern und fehlender Normalverteilung

Parceling

Prinzip: Manifeste Indikatoren werden zu Mittelwerten zusammengefasst.

1. Mittels explorativer Faktorenanalysen werden die Ladungen der manifesten Variablen auf den latenten Konstrukten ermittelt.
2. Anhand der Ladungen werden die manifesten Variablen aggregiert: Im Durchschnitt sollen die Ladungen gleich hoch sein.
3. Die aggregierten manifesten Variablen dienen als Indikatoren für die latenten Konstrukte.

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

Umgang mit Messfehlern und fehlender Normalverteilung

Hauptkomponentenanalyse (Kaiser-Guttman-Kriterium) mit VariMax-Rotation

Component Matrix	
	Component
	1
Item1	,782
Item2	,646
Item3	,864
Item4	,815
Item5	,718
Item6	,689

Extraction Method: Principal Component Analysis.
a. 1 components extracted.

Parcel 1
Parcel 2

$$\frac{1}{n}(Item1 + Item4 + Item6)$$

$$\frac{1}{n}(Item2 + Item3 + Item5)$$

Faktor

Vorteile des Parceling

1. Reduktion der Messfehler pro Konstrukt: Höhere Reliabilität
 2. Sparsame Modelle
- Verwendung von Parceling ausschließlich bei Strukturmodellen mit latenten Beziehung (Keine konfirmatorischen Faktorenanalysen)



Multivariate Datenanalyse

4 Strukturgleichungsmodelle

- 4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse
- 4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell
- 4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse
- 4.4 Fit-Indizes
- 4.5 SEM mit Längsschnittdaten
- 4.6 Nicht-lineare SEM

4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse

Zielsetzung

- Die konfirmatorische Faktorenanalyse ist ein integraler Bestandteil von Strukturgleichungsmodellen, zur Formulierung und Überprüfung der Messmodelle.
- Die konfirmatorische Faktorenanalyse kann aber auch, als Spezialfall der Strukturgleichungsmodelle allein auf einzelne Messmodelle angewendet werden (ohne diese in ein Strukturmodell zu integrieren).
- Auf diese Weise kann z.B. die Dimensionalität eines Fragebogens (anhand anderer Datenmaterials als bei der ggf. zuvor durchgeführten explorativen Faktorenanalyse) geprüft werden.
- In der Praxis werden i.d.R. unterschiedliche Modelle, mit einer unterschiedlichen Faktorenzahl, geprüft und verglichen.
- Als Ergebnis der konfirmatorischen Faktorenanalyse erhält man die gleichen Kriterien wie bei der Prüfung von Strukturgleichungsmodellen, die auch auf die gleiche Weise interpretiert werden.

4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse

Beispiel

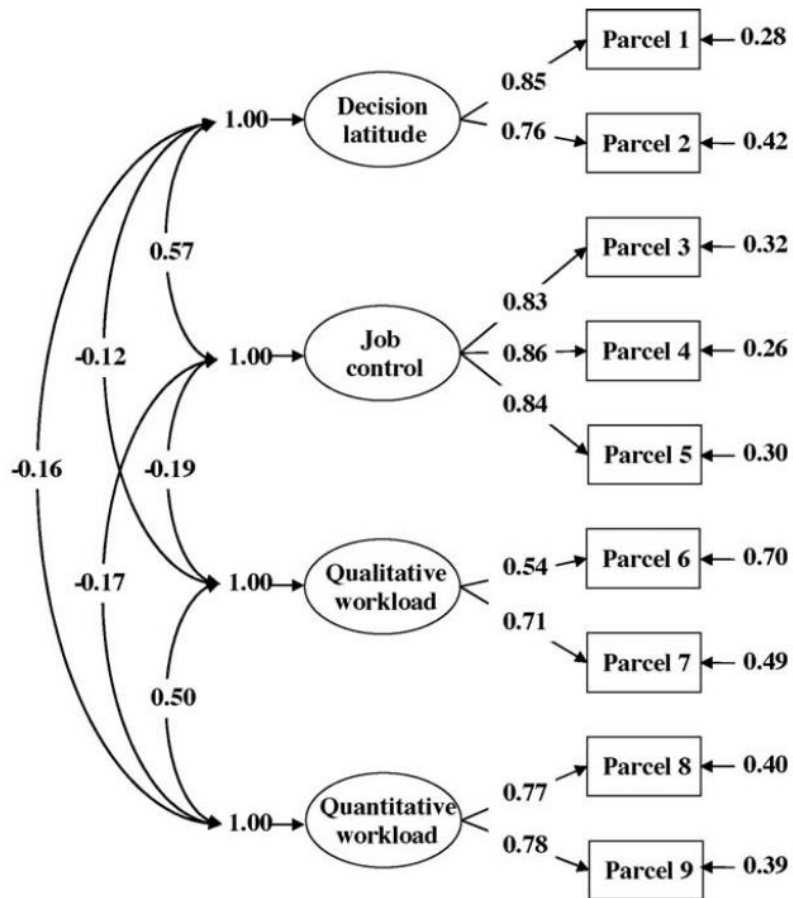


Table 1
Results of confirmatory factor analyses for testing the differentiability of the study variables.

	χ^2	df	RMSEA	CI _{90%} (RMSEA)	SRMR	CFI
<i>Measurement models of predictors</i>						
1-Factor model	358.96**	27	.180	.160-.200	.140	.76
2-Factor model	170.63**	26	.121	.100-.140	.078	.90
3-Factor model ^a	132.07**	24	.109	.091-.130	.065	.92
3-Factor model ^b	70.69**	24	.072	.053-.091	.050	.97
4-Factor model	29.40 ^{ns}	21	.033	.010-.058	.024	.99

^a Decision latitude and control as one factor.

^b Quantitative and qualitative workload as one factor.

** $p < .01$.

- Parcels sind in diesem Fall Subskalen, die als Indikatoren bzw. manifeste Variablen fungieren.
- Prinzipiell wurden Arbeitsressourcen (decision latitude = Entscheidungsmöglichkeit; Job Control = Kontrollspielräume) sowie Arbeitsanforderungen (Qualitative workload = Aufgabenkomplexität; quantitative workload = Arbeitsdruck) psychometrisch in Modell 4 differenziert.
- In Tabelle 1 werden zum Vergleich Messmodelle dargestellt, die unterschiedliche Variablenkonstellationen beinhalten.
- Diese Vergleiche dienen zur Bestimmung des „validesten“ Modells, das die Datenstruktur am besten repräsentiert.



Multivariate Datenanalyse

4 Strukturgleichungsmodelle

- 4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse
- 4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell
- 4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse
- 4.4 Fit-Indizes
- 4.5 SEM mit Längsschnittdaten
- 4.6 Nicht-lineare SEM

4.4 Fit-Indizes

χ^2 -Anpassungstest

Inferenzstatistische Fragestellung:

Stimmen die modellimplizierte ($\Sigma(\Theta)$) und die Populationskovarianzmatrix (Σ) überein? Nullhypothese: $\Sigma = \Sigma(\Theta)$

Anzahl der Freiheitsgrade: $\frac{1}{2}[p(p+1)] - t$

$$\chi^2 = (N - 1) \cdot F_{ML}$$

N: Anzahl der Stichprobenelemente
(Stichprobengröße)

F_{ML} : Minimierte Diskrepanz zwischen S und $\Sigma(\Theta)$

p: Anzahl der zu schätzenden Parameter

t: Anzahl der freien Parameter

Annahme des Modells bei Nichtsignifikanz des χ^2 -Wertes

Kritik:

- Das α -Signifikanzniveau wird üblicherweise auf 5 % limitiert
- Logisch korrekt wäre allerdings die Testung auf den β -Fehler
- Bei hoher Stichprobengröße wird der χ^2 -Wert schnell signifikant

4.4 Fit-Indizes

Absolute Anpassungsindizes

$$RMSEA = \sqrt{\max \left\{ \left(\frac{F(S, \Sigma(\hat{\theta}))}{df} - \frac{1}{N-1} \right), 0 \right\}} = \sqrt{\frac{\chi^2 - df}{N \cdot df}}$$

χ^2 : Chi-Quadrat-Wert des getesteten Modells

df: Freiheitsgrade des getesteten Modells

N: Stichprobengröße

I. Root Mean Square Error of Approximation (Steiger, 1990):

- RMSEA stellt die Messung der approximierenden Modellanpassung in der Population dar
- Quadratwurzel der geschätzten Approximationsdiskrepanz pro Freiheitsgrad
- Diskrepanz (χ^2): Abweichung der empirischen (s) von der modell-implizierten Kovarianzmatrix (Σ)
- Einfluss der Modellkomplexität: Mit zunehmender Modellkomplexität fällt der RMSEA-Wert höher aus.
- Der Wertebereich liegt zwischen 0 und 1: perfekter Fit „0“
- RMSEA < .05: „guter Fit“; .05 ≤ RMSEA ≤ .08: „akzeptabler Fit“; RMSEA > .08: „schlechter Fit“

4.4 Fit-Indizes

Absolute Anpassungsindizes

$$SRMR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^i r_{ij}^2}{e}}$$
$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i \cdot s_j} - \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_i}$$
$$e = \frac{p(p+1)}{2}$$

S_{ij} : Element der empirischen Kovarianzmatrix S

σ_{ij} : Element der model-implizierten Kovarianz-matrix $\Sigma(\theta)$

p : Anzahl der beobachteten (manifesten) Variablen

II. Standardized Root Mean Residual (Jöreskog & Sörbom, 1981; Bentler, 1995):

- Durchschnittliche Differenz (Standardisierte Residualkorrelationsmatrix) zwischen der empirischen (s) von der modellimplizierten Kovarianzmatrix (Σ)
- Der Wertebereich liegt zwischen 0 und 1: perfekter Fit „0“
- Hoher SRMR-Wert: Indikator für Fehlspezifikation der Zusammenhänge der latenten Variablen
- $SRMR < .05$: „guter Fit“; $.05 \leq SRMR \leq .09$: „akzeptabler Fit“; $SRMR > .09$: „schlechter Fit“

4.4 Fit-Indizes

Komparative Anpassungsindizes

$$\text{Gamma Hat} = \frac{p}{p + 2 \left(\frac{\chi^2 - df}{N - 1} \right)} = \frac{p}{p + 2df (RMSEA^2)}$$

χ^2 : Chi-Quadrat-Wert des getesteten Modells

df: Freiheitsgrade des getesteten Modells

N: Stichprobengröße

p: Anzahl der manifesten Variablen

III. Gamma Hat (Fan & Sivo, 2007):

- Mit Hilfe des Gamma Hat wird (wie beim RMSEA) die Approximationsdiskrepanz pro Freiheitsgrad geschätzt.
- Allerdings wird bei der Schätzung auch die Modellkomplexität (Anzahl der Variablen) berücksichtigt.
- Der Wertebereich liegt zwischen 0 und 1: perfekter Fit „1“
- Gamma Hat > .95: „guter Fit“

4.4 Fit-Indizes

Komparative Anpassungsindizes

$$NNFI = \frac{(\chi_i^2 / df_i) - (\chi_t^2 / df_t)}{(\chi_i^2 / df_i) - 1}$$

χ_i^2 : Chi-Quadrat-Wert des unabhängigen Basismodells
(Alle Variablen sind unkorreliert)

χ_t^2 : Chi-Quadrat-Wert des getesteten Modells

df: Freiheitsgrade

IV. Nonnormed Fit Index (Bentler & Bonnett, 1980):

- Basiert auf einem Anpassungsvergleich zwischen dem getesteten Modell und einem unabhängigen Modell, das von einer fehlerfreien Messung ausgeht und in dem nur die Varianzen der Variablen geschätzt werden
- Inkrementeller Fit-Index: Ausmaß der Optimierung der Anpassung durch das spezifizierte Testmodell
- Stichprobenunabhängig
- Der Wertebereich liegt zwischen 0 und 1: perfekter Fit „1“
- $NNFI \geq .95$: „akzeptabler Fit“; $NNFI \geq .97$: „guter Fit“

4.4 Fit-Indizes

Komparative Anpassungsindizes

$$CFI = 1 - \frac{\chi_t^2 - df_t}{\chi_i^2 - df_i}$$

- χ_i^2 : Chi-Quadrat-Wert des unabhängigen Basismodells
(Nullmodell: alle Variablen sind unkorreliert)
- χ_t^2 : Chi-Quadrat-Wert des getesteten Modells
- df: Freiheitsgrade

V. Comparative Fit Index (Bentler, 1990):

- Inkrementeller Fit-Index: Ausmaß der Optimierung der Anpassung durch das spezifizierte Testmodell
- Stichprobenunabhängig
- Der Wertebereich liegt zwischen 0 und 1: perfekter Fit „1“
- $CFI \geq .95$: „akzeptabler Fit“; $CFI \geq .97$: „guter Fit“

4.4 Fit-Indizes

Vergleichende Anpassungsindizes

$$AIC = \chi^2 + 2 \cdot t$$

χ^2 : Chi-Quadrat-Wert des getesteten Modells

t: Anzahl der geschätzten Parameter

VI. Akaike Information Criterion (Akaike, 1987):

- Dient zum kontrastierenden Vergleich zwischen nicht-genesteten Modellen (mit unterschiedlicher Anzahl latenter Variablen)
- Indiziert sowohl die Datenanpassung als auch die Sparsamkeit der Modelle
- Stichprobenunabhängig
- Sehr sensibel
- Ein im Vergleich am besten angepasstes Modell generiert den niedrigsten AIC-Wert

4.4 Fit-Indizes

Grenzwerte für Anpassungsindizes

	Guter Fit	Akzeptabler Fit	Schlechter Fit
RMSEA	< .05	.05 - .08	> .08
SRMR	< .05	.05 - .09	> .09
Gamma Hat	> .97	.95 - .97	< .95
NNFI	> .97	.95 - .97	< .95
CFI	> .97	.95 - .97	< .95
AIC	Geringster Wert		

Schermelleh-Engel, Moosbrugger & Müller (2003)

4.4 Fit-Indizes

Beispiel: Schaubroeck, J., Lam, S. S., & Peng, A. C. (2011). Cognition-based and affect-based trust as mediators of leader behavior influences on team performance. Journal of Applied Psychology, 96(4), 863-871.

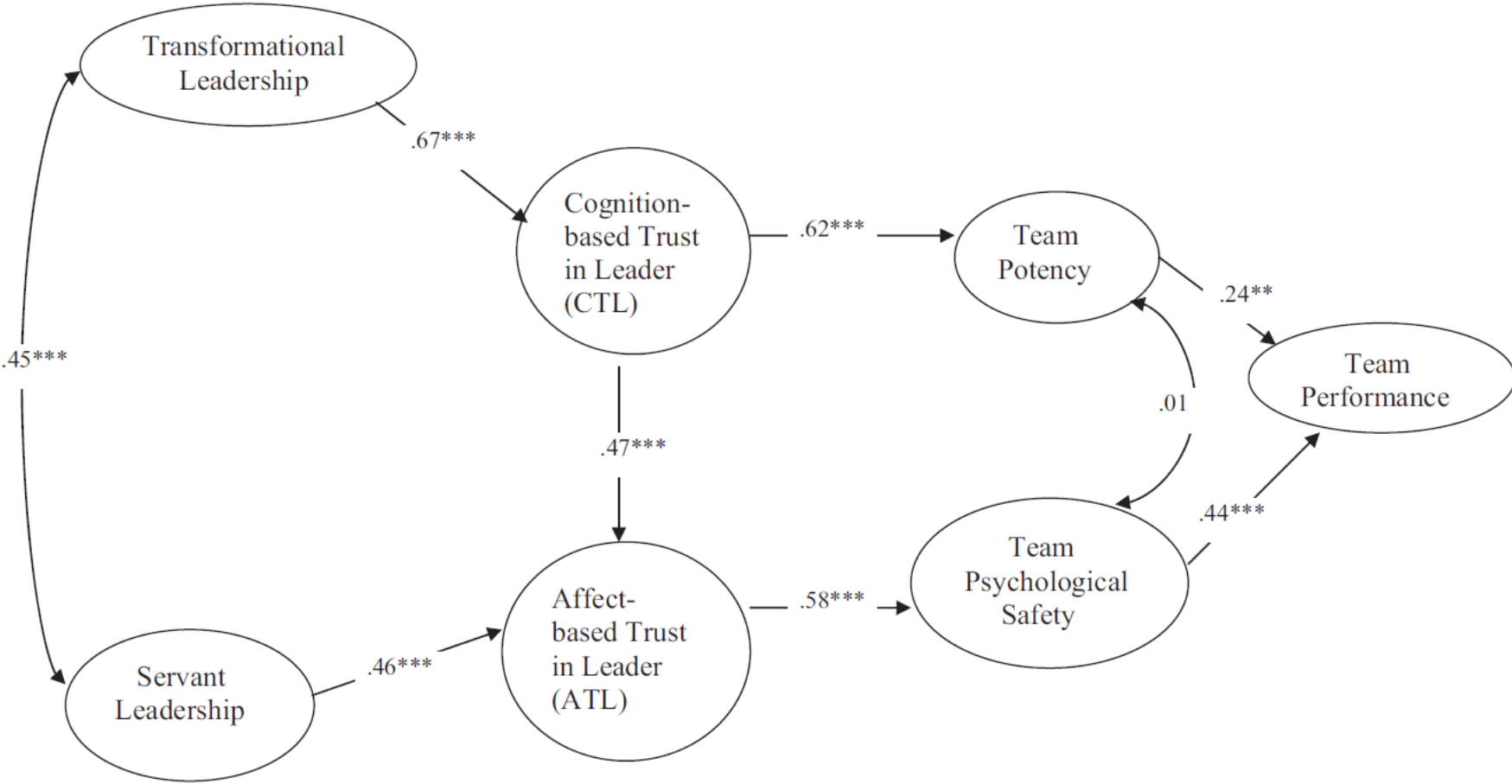


Figure 1. Hypothesized model of affect-based and cognition-based trust in the leader mediating effects of leader behavior on team performance (with standardized path coefficients). ** $p < .01$. *** $p < .001$.

4.4 Fit-Indizes

Beispiel: Schaubroeck, J., Lam, S. S., & Peng, A. C. (2011). Cognition-based and affect-based trust as mediators of leader behavior influences on team performance. *Journal of Applied Psychology*, 96(4), 863-871.

Table 2
Goodness-of-Fit Indices for Structural Equation Models

Model	χ^2 (df)	CFI	NFI	GFI	RMSR	Model comparison test	
						$\Delta\chi^2$	Δdf
Model 1—Hypothesized model	22.94 (12)	.984	.968	.967	.036		
Model 2—Added direct effects of SL and TL on team potency	21.47 (10)	.983	.970	.969	.037	1.47	2
Model 3—Added direct effects of SL and TL on team psychological safety	22.21(10)	.983	.969	.968	.036	0.73	2
Model 4—Added direct effects of CTL and ATL on team performance	14.22 (10)	.994	.980	.979	.022	8.72*	2
Model 5—Added effects of CTL on team psychological safety and ATL on team potency	21.32 (10)	.984	.971	.969	.036	1.62	2
Model 6—Added effects of SL on CTL and TL on ATL	18.59 (10)	.988	.974	.973	.031	4.35	2

Note. CFI = Comparative Fit Index; NFI = Normed Fit Index; GFI = Goodness of Fit Index; RMSR = root-mean-squared residual; SL = servant leadership; TL = transformational leadership; CTL = cognition-based trust in leader; ATL = affect-based trust in leader.

* $p < .05$.

4.4 Fit-Indizes

Empfehlungen Modellfit

! CAVEAT: Vorsichtiger und transparenter Gebrauch ratsam !

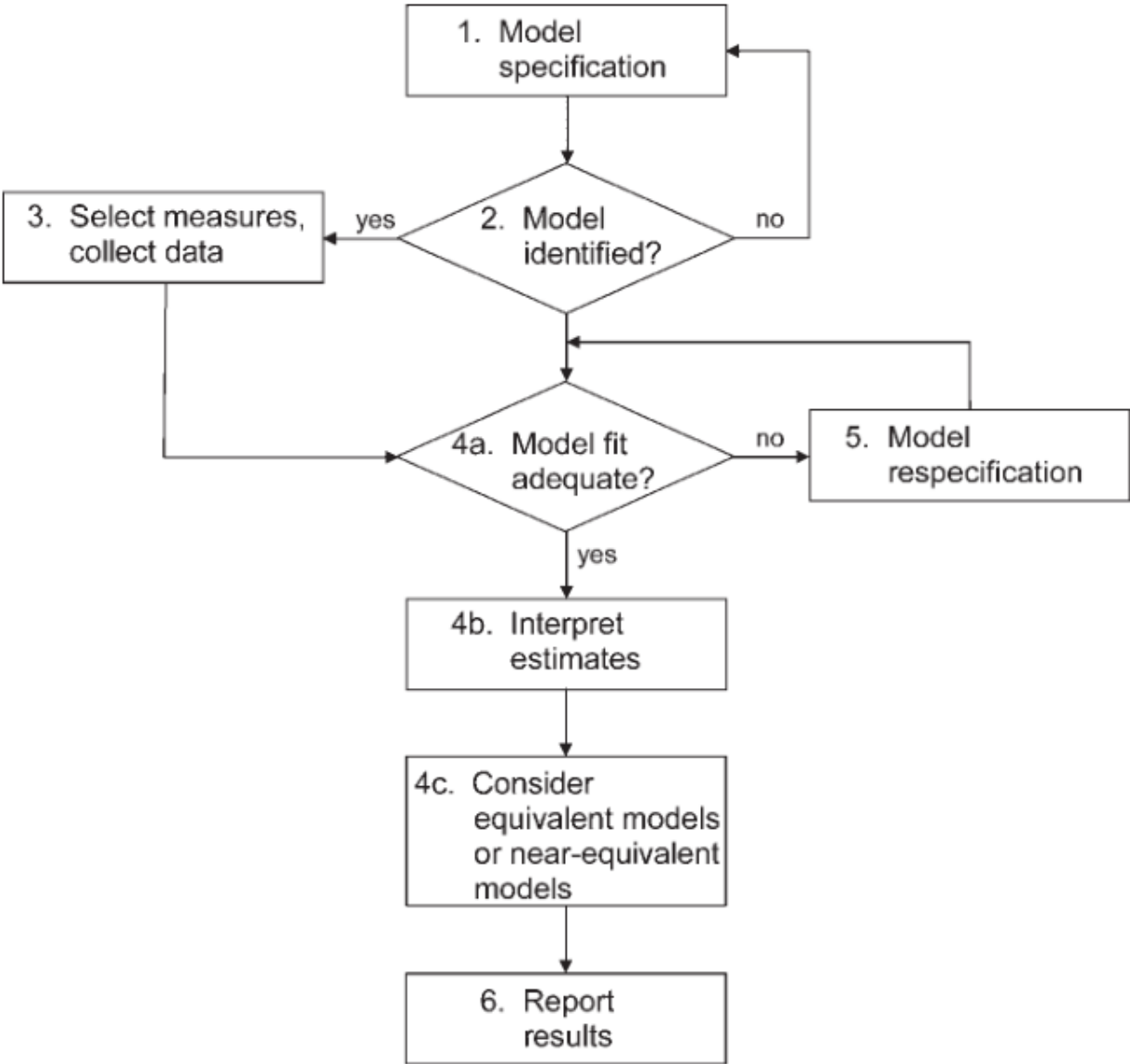
Berichtet werden immer: χ^2 -Anpassungstest, CFI, RMSEA, SRMR

Bei schlechtem Fit Korrelationsresiduen ansehen und nach großen Abweichungen suchen

Betrachtung von Modifikationsindices (MI): MI gibt die Verbesserung des Modellfits an, wenn ein fixierter Parameter frei geschätzt wird

Sollte das ursprüngliche Modell geändert werden, müssen die Respezifikationen begründet sowie Implikationen für die Theorie diskutiert werden

4.4 Fit-Indices



Quelle: Kline (2010)



Multivariate Datenanalyse

4 Strukturgleichungsmodelle

4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse

4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell

4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse

4.4 Fit-Indizes

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

4.6 Nicht-lineare SEM

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

Strukturgleichungsmodelle bieten vielfältige Möglichkeiten der Modellierung von Längsschnittdaten

Untersuchung der...

- zeitlichen Beziehung von Variablen;
- Veränderung von Konstrukten über die Zeit, sowie interindividuelle Unterschiede in den intraindividuellen Veränderungen;
- Bedingungen (Prädiktoren) für zeitliche Veränderung

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

Cross-Lagged-Modelle

Ermöglichen die Untersuchung der zeitlichen Beziehung zwischen zwei oder mehr Variablen
Werden auch autoregressive Modelle genannt, da der Einfluss einer Variable des vorherigen Messzeitpunktes kontrolliert wird → Stabilitätskoeffizient

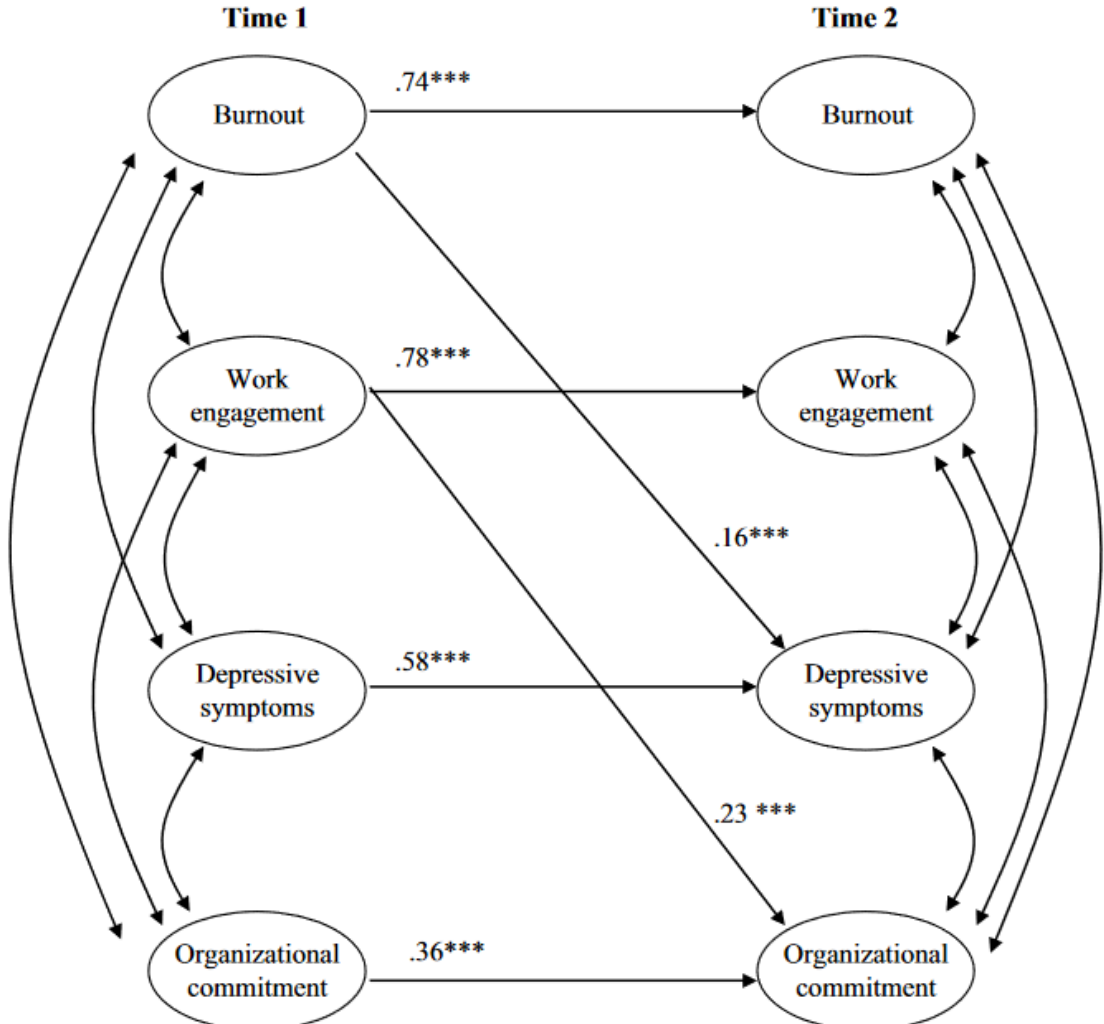
Cross-Lagged-Regression: zeitlich versetzter Einfluss einer Prädiktorvariable auf Kriterium

Vorteil von Cross-Lagged-Modellen: Einfluss einer Prädiktorvariable auf zeitlich-versetzt gemessenes Kriterium bei gleichzeitiger Kontrolle der vorherigen Merkmalsausprägung (s. nächste Folie)

Aufgrund der zeitlich versetzten Messung lassen sich validere Aussagen als bei der Analyse von Querschnittsdaten ziehen

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

Beispiel: Hakanen, J. J., Schaufeli, W. B., & Ahola, K. (2008). The Job Demands-Resources model: A three-year cross-lagged study of burnout, depression, commitment, and work engagement. *Work & Stress*, 22(3), 224-241.



Quelle: Hakanen, Schaufeli & Ahola (2008)

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

Einschränkungen Cross-Lagged-Modelle

Cross-Lagged-Modelle...

- können das Ausmaß von Veränderungen nicht direkt erfassen
- erlauben es nicht, die Art der Veränderung zu modellieren
- bieten keine Möglichkeit, Prädiktoren der Veränderungsrate direkt vorherzusagen

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

Latente Wachstumskurvenmodelle

Latente Wachstumskurvenmodelle (eng. latent growth curve modeling) werden für die Modellierung von zeitlichen Veränderungen eingesetzt

Erlauben die Untersuchung von intraindividuellen Veränderungen sowie interindividuelle Unterschiede in diesen

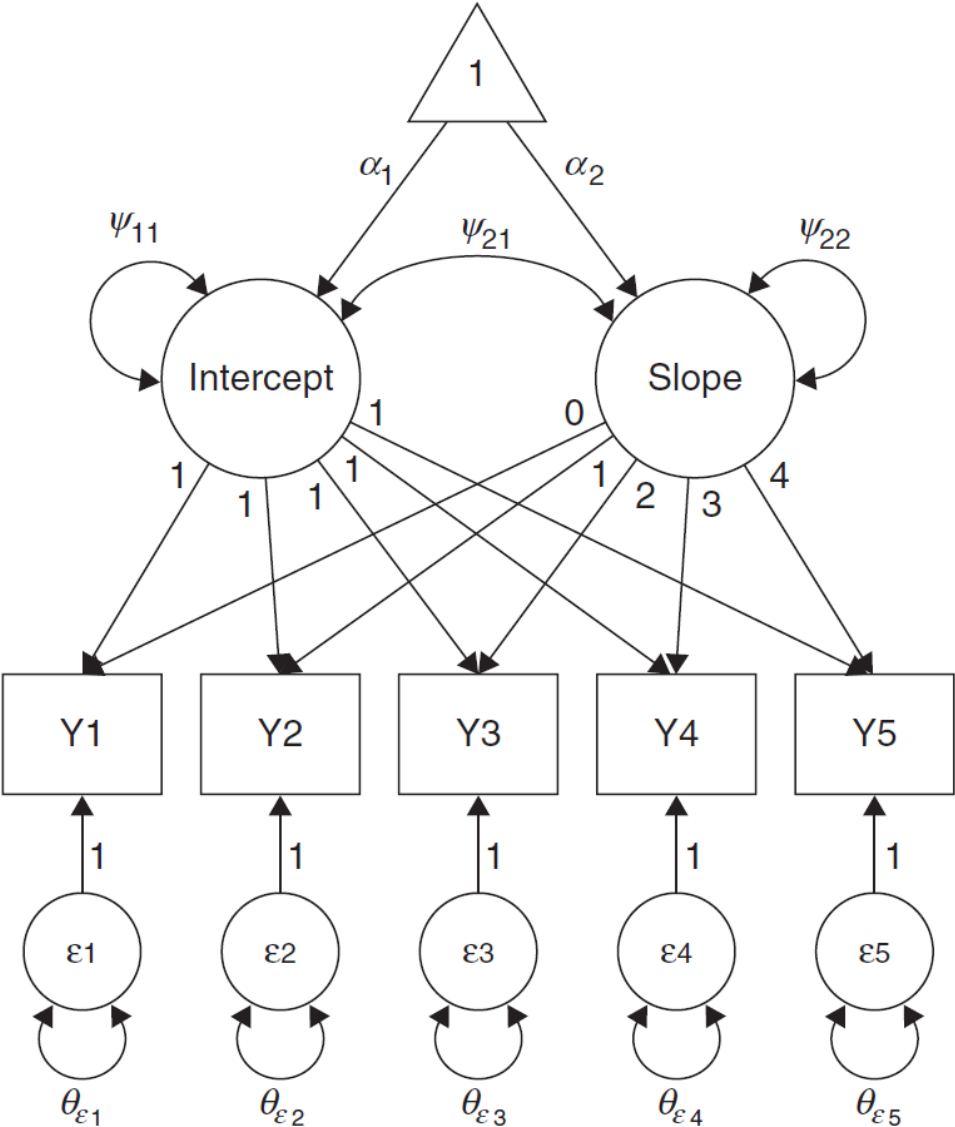
Slope gibt die Veränderung über die unterschiedlichen Messzeitpunkte an

→ Mittelwerte der Slopes sind von zentralem Interesse, da sie die absolute Veränderung über die Zeit angeben

Voraussetzungen

1. Metrische Variable, die mindestens an **drei** Messzeitpunkten (MZP) gemessen wurde, damit das Modell identifiziert ist
2. Messungen über die MZP liegt in der gleichen Einheit für das gleiche Konstrukt vor
3. Beibehaltung der zeitlichen Struktur der Messungen: Abstände der Messungen sind für alle Teilnehmer gleich

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

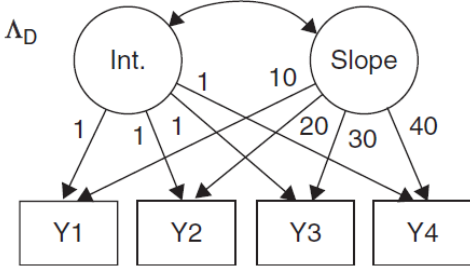
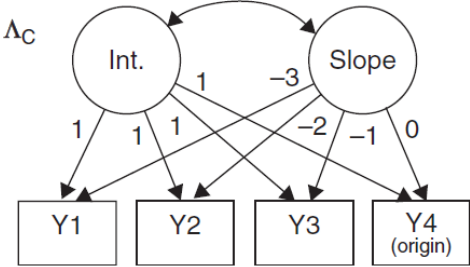
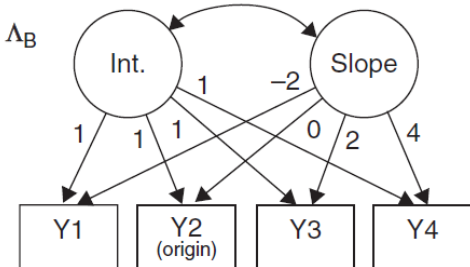
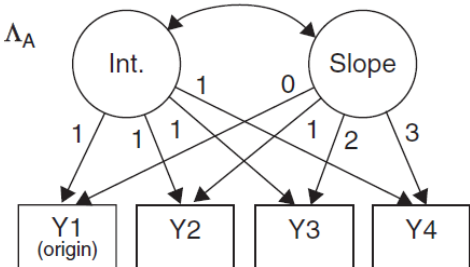


Quelle: Preacher (2010)

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

Intercept

- Interpretation als *Ausgangswert*, wenn die Ladung des Slopes auf Null fixiert ist



Slopes

- Fixierung der Ladungen auf dem Slope-Faktor kann zur Modellierung unterschiedlicher Veränderungsprozesse genutzt werden
 - Linear: 0, 1, 2, 3, 4
 - Nicht-linear: 0, 1, 2, 4, 9

Kovarianz zwischen Intercept und Slope: **Pos. Kovarianz** indiziert ein stärkeres Wachstum bei höheren Ausgangswerten; **neg. Kovarianz** hingegen ein schwächeres Wachstum (Hinweis auf *Deckeneffekt*)

Quelle: Preacher (2010)

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

Latente Wachstumskurvenmodelle

Neben den Veränderungsraten liegt ein Fokus auf den Bedingungen oder Faktoren, die Veränderung beeinflussen

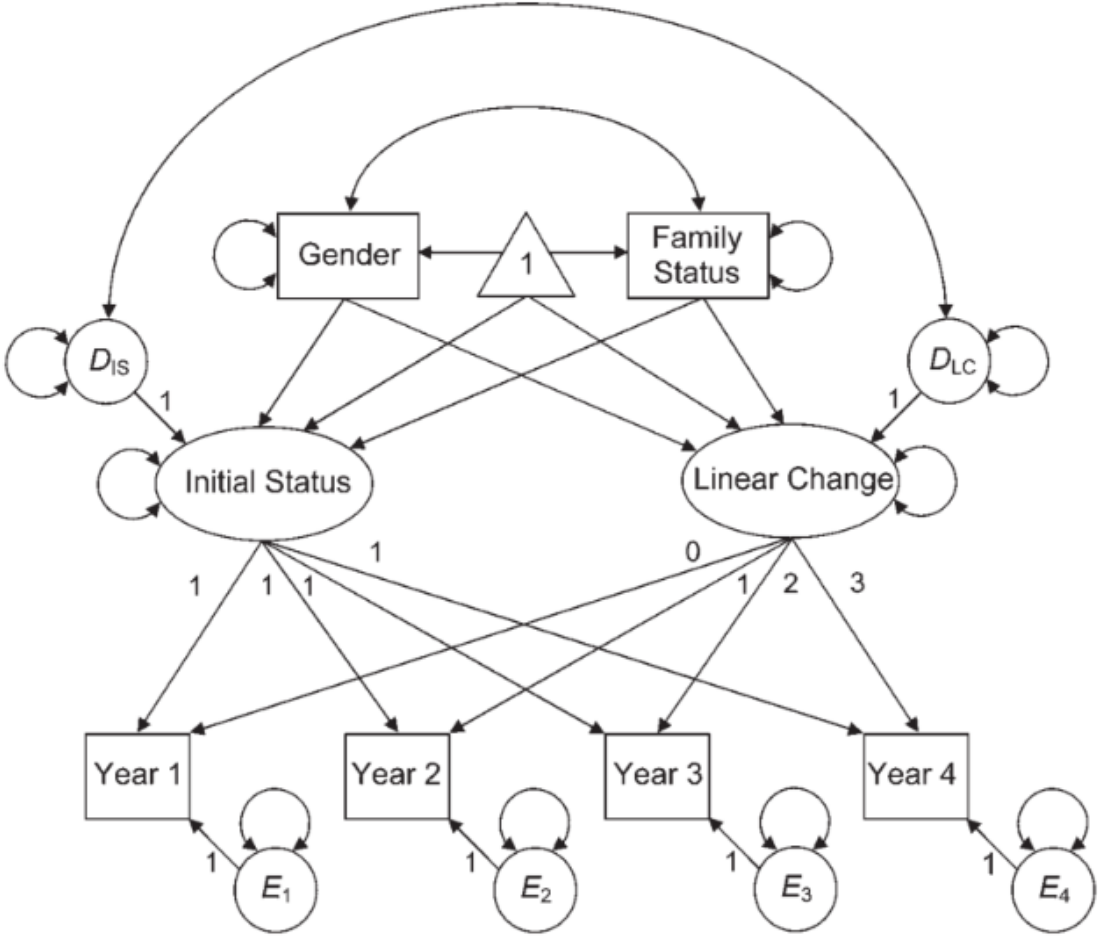
Wachstumskurvenmodelle erlauben es, den Einfluss weiterer Variablen auf Intercept und Slope der Veränderung zu modellieren

Interpretation:

Intercept	Slope
Positiver Effekt: Höhere Ausprägung im Prädiktor indizieren einen höheren Ausgangswert	Positiver Effekt: Höhere Ausprägung im Prädiktor indizieren ein stärkeres Wachstum
Negativer Effekt: Höhere Ausprägung im Prädiktor indizieren einen geringeren Ausgangswert	Negativer Effekt: Höhere Ausprägung im Prädiktor indizieren ein geringeres Wachstum

4.5 SEM mit Längsschnittdaten

Beispiel: Geschlecht und Familienstatus als Prädiktoren von Veränderungen im Trinkverhalten über vier Jahre



Quelle: Kline (2011)



Multivariate Datenanalyse

4 Strukturgleichungsmodelle

- 4.1 Grundlagen: Faktoren- und Pfadanalyse
- 4.2 Vollständiges Strukturgleichungsmodell
- 4.3 Konfirmatorische Faktorenanalyse
- 4.4 Fit-Indizes
- 4.5 SEM mit Längsschnittdaten
- 4.6 Nicht-lineare SEM

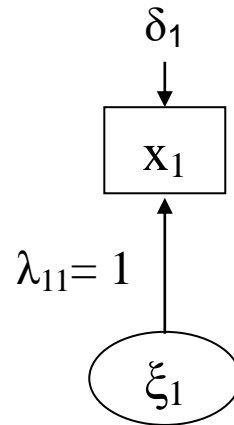
4.6 Nicht-lineare SEM

Probleme bei moderierten SEM

Der Interaktionsterm bei einer Moderation stellt eine *Ein-Item-Messung* dar

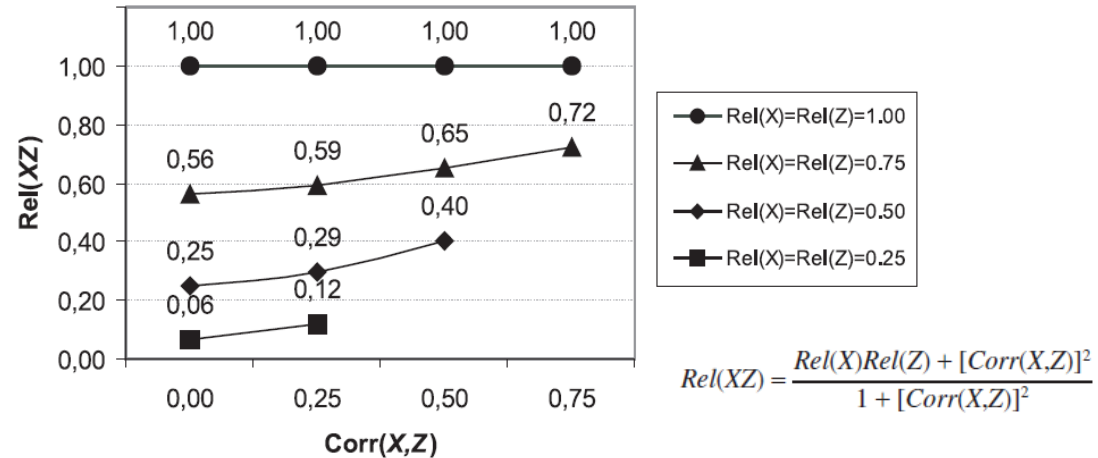
Operationalisierungen durch lediglich einen Indikator sind durch Messfehler konfundiert

Bedingt durch den hohen Messfehler weist das Konstrukt eine geringe Reliabilität auf, was zu einer Unterschätzung der wahren Beziehung zwischen zwei Variablen führen kann (Typ II-Fehler)



4.6 Nicht-lineare SEM

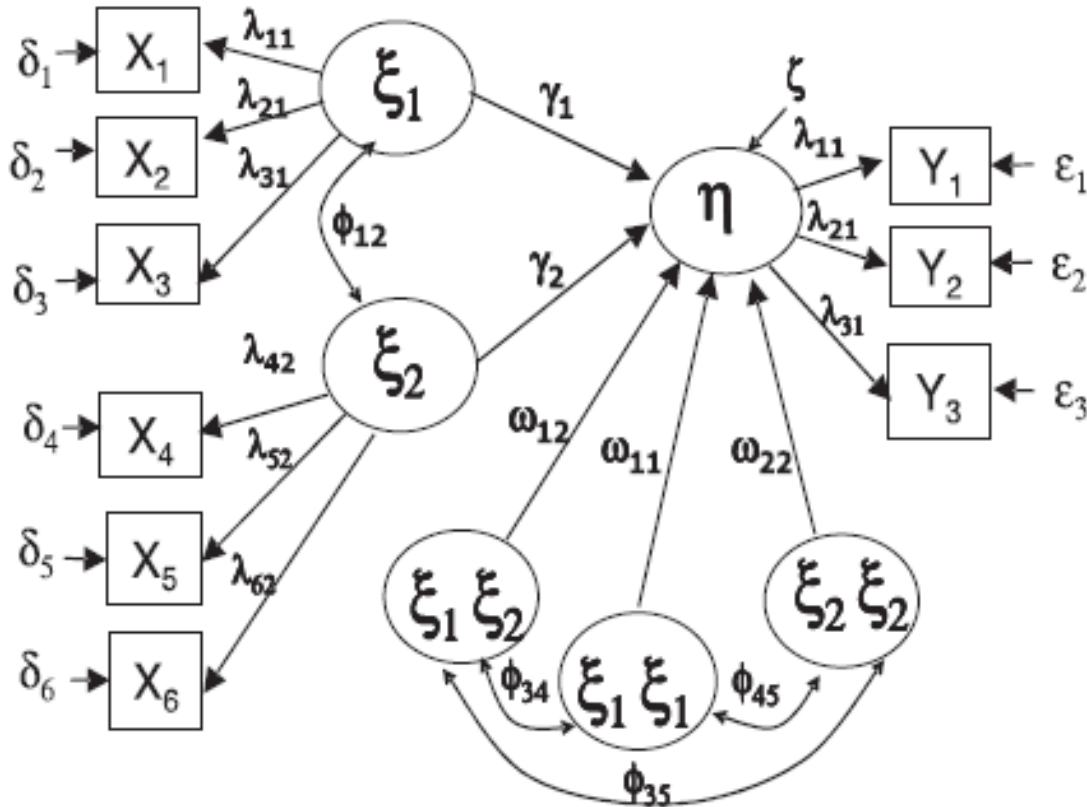
Probleme bei moderierten SEM



- Das Problem geringer Reliabilität und damit verbundenen Verzerrungen werden durch die Aufnahme von (non-linearen) Produkttermen verschärft
- Die Reliabilität von Produkttermen wird deutlich stärker beeinflusst, da bei geringerer Korrelation zwischen Prädiktor und Moderator die Reliabilität des Produktterms ebenfalls gemindert wird
- Nur unter der Bedingung, dass Prädiktor & Moderator eine perfekte Reliabilität aufweisen, hat auch der Produktterm eine perfekte Reliabilität

4.6 Nicht-lineare SEM

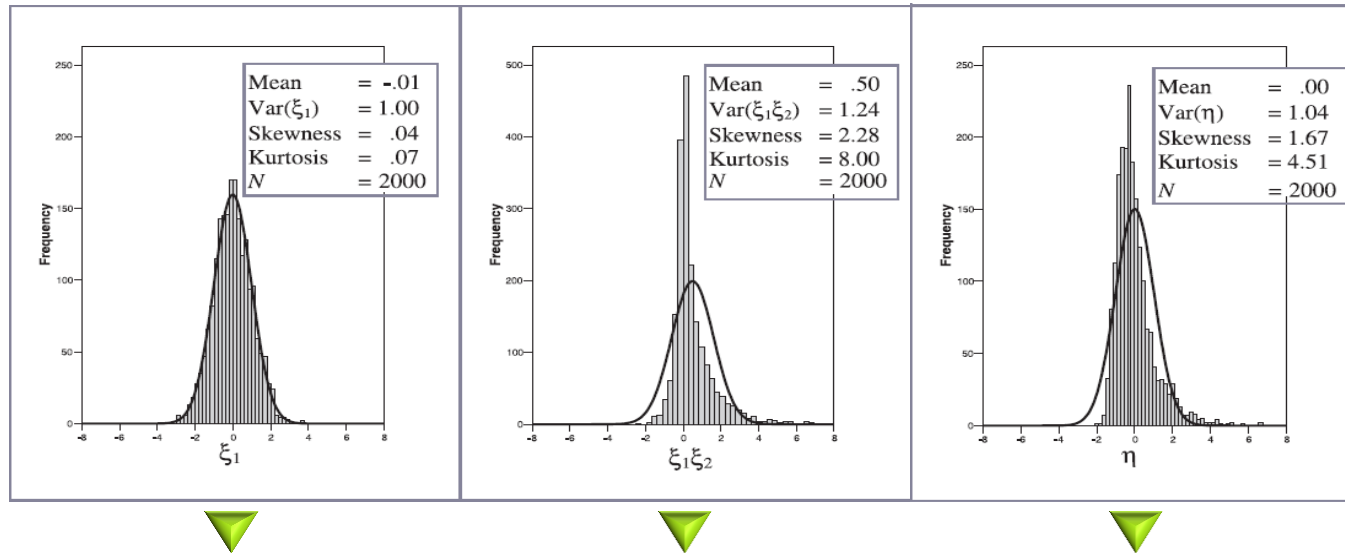
Probleme bei moderierten SEM



Quelle: Dimitruk, Schermelleh-Engel, Kelava, & Moosbrugger (2007)

4.6 Nicht-lineare SEM

Probleme bei moderierten SEM



- Auch bei normalverteilttem latentem Prädiktor ist der Produktterm und die latente abhängige Variable nicht normalverteilt – besonders wenn in der Grundgesamtheit tatsächlich ein Interaktionseffekt existiert
- Konsequenz: Mathematische Voraussetzungen der Maximum-Likelihood-Schätzung sind verletzt
- Die Verwendung von ML- oder Two-Stage-Least-Squares-Schätzungen führt zu einer ernsthaften Unterschätzung der Standardfehler und verzerrter X^2 -Werten

4.6 Nicht-lineare SEM

Latent Moderated Structural Equation Modeling (LMS)

LMS-Method (Klein & Moosbrugger, 2000)

- Es werden keine Produktindikatoren benötigt, da die Verteilungen der Indikatoren durch eine Mischverteilung (finite mixture distribution) approximiert werden: Schätzung von latenten Kreuzprodukten
 - Parameterschätzung: Iterative Prozedur, bei dem die ML-Schätzung um die Verletzung der Normalverteilungsannahme korrigiert wird
 - LMS-Schätzer: Konsistent, asymptotisch unverzerrt, asymptotisch effizient und asymptotisch normalverteilt.
 - Standardfehler sind relativ robust und unverzerrt
-
- Aufgrund der fehlenden Normalverteilung liegen für LMS-Schätzungen keine X^2 -Werte sowie Fit-Indices vor.
 - Alternativ kann ein Log-Likelihood-Differenztest ($\Delta 2LL$) durchgeführt werden, um die Verbesserung des Modellfits des moderierten SEM gegenüber dem linearen SEM ohne Produktterm zu testen.

Schumpeter School
of Business and Economics



Teil 5: Multilevel Modeling

Multivariate Datenanalyse

5 Multilevel Modeling

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

5.2 Analyse von Modellen mit Random-Intercept und Random-Slope



Lehrstuhl
für Arbeits-,
Organisations- und
Wirtschaftspsychologie



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

SchumpeterSchool
of Business and Economics



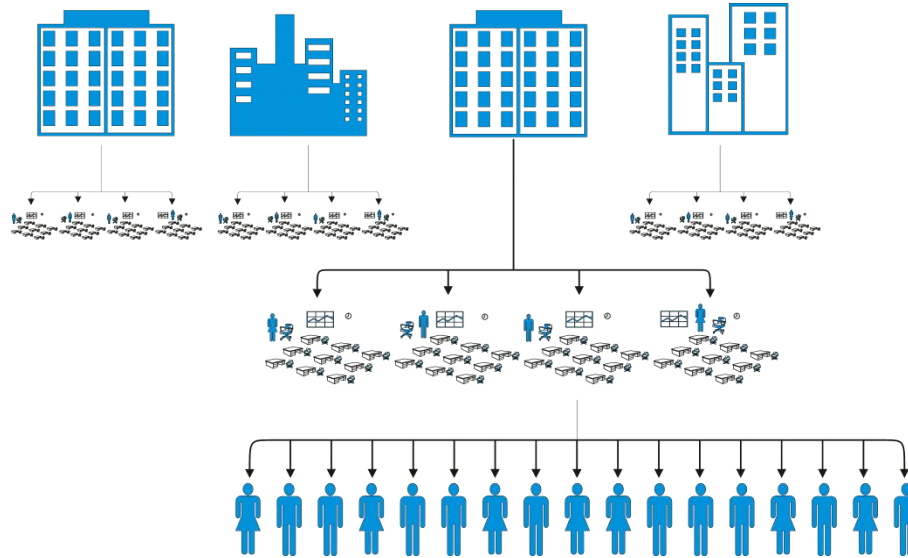
5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Mehrebenenstruktur

Level 3:
Organisationsebene

Level 2:
Arbeitsgruppen-
ebene

Level 1:
Individualebene

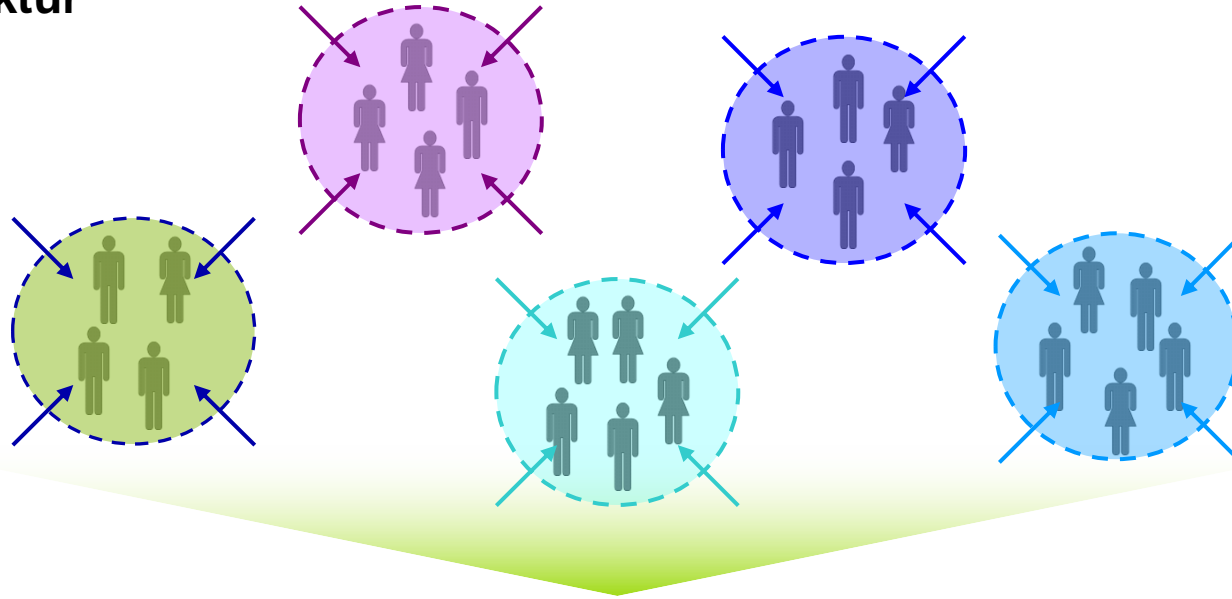


Eine Vielzahl von Untersuchungsfeldern ist durch eine geschachtelte Mehrebenenstruktur gekennzeichnet:

- Personen sind innerhalb sozialer Einheiten eingebettet
- Soziale Einheiten stellen Kontexte dar, die spezifische Bedingungen haben
- Diese Bedingungen können auf individuelles Verhalten und Erleben wirken

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Mehrebenenstruktur



Kontextspezifische Effekte führen zu Unterschieden im individuellen Verhalten und Erleben zwischen den sozialen Einheiten:

- In Abhängigkeit des sozialen Kontextes variiert das Verhalten und Erleben der Organisationsmitglieder.
- Folglich lässt sich die Gesamtvarianz in Varianz innerhalb der sozialen Einheiten (zwischen den Organisationsmitgliedern) und zwischen den sozialen Einheiten zerlegen.

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

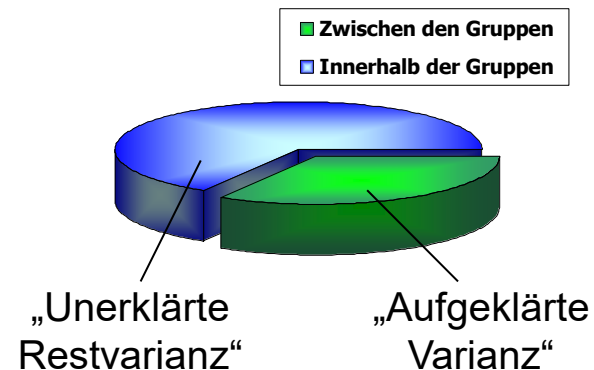
Mehrebenenstruktur - Varianzzerlegung

Die Varianz zwischen den Gruppen stellt ein Indikator für potentielle Einflüsse des sozialen Kontexts dar

- Das Ausmaß der Varianz zwischen den Gruppen (s^2_{between}) lässt sich über die Varianzzerlegung ermitteln

$$s_Y^2 = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j s_j^2}_{S^2_{\text{within}}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^m n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{\text{TOTAL}})^2}_{S^2_{\text{between}}}$$

- j: Laufindex für die Gruppen
- m: Anzahl der Gruppen
- \bar{Y}_{TOTAL} : Gesamtmittelwert



- Bei ANOVA-Auswertungen entspricht der relative Anteil der s^2_{between} dem Bestimmtheitsmaß (η^2)

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Mehrebenenstruktur - Varianzzerlegung

Bei einer größeren Anzahl von Gruppen (Level2-Einheiten: n_{Level2}) wird der relative Anteil der s^2_{between} mit dem ICC berechnet

$$ICC(1) = \frac{\tau^2}{(\tau^2 + \sigma^2)}$$

τ^2 = Varianz zwischen den Gruppen (Level 2)

σ^2 = Varianz innerhalb der Gruppen (Level 1)

→ Die einzelnen Varianzkomponenten werden mit der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt

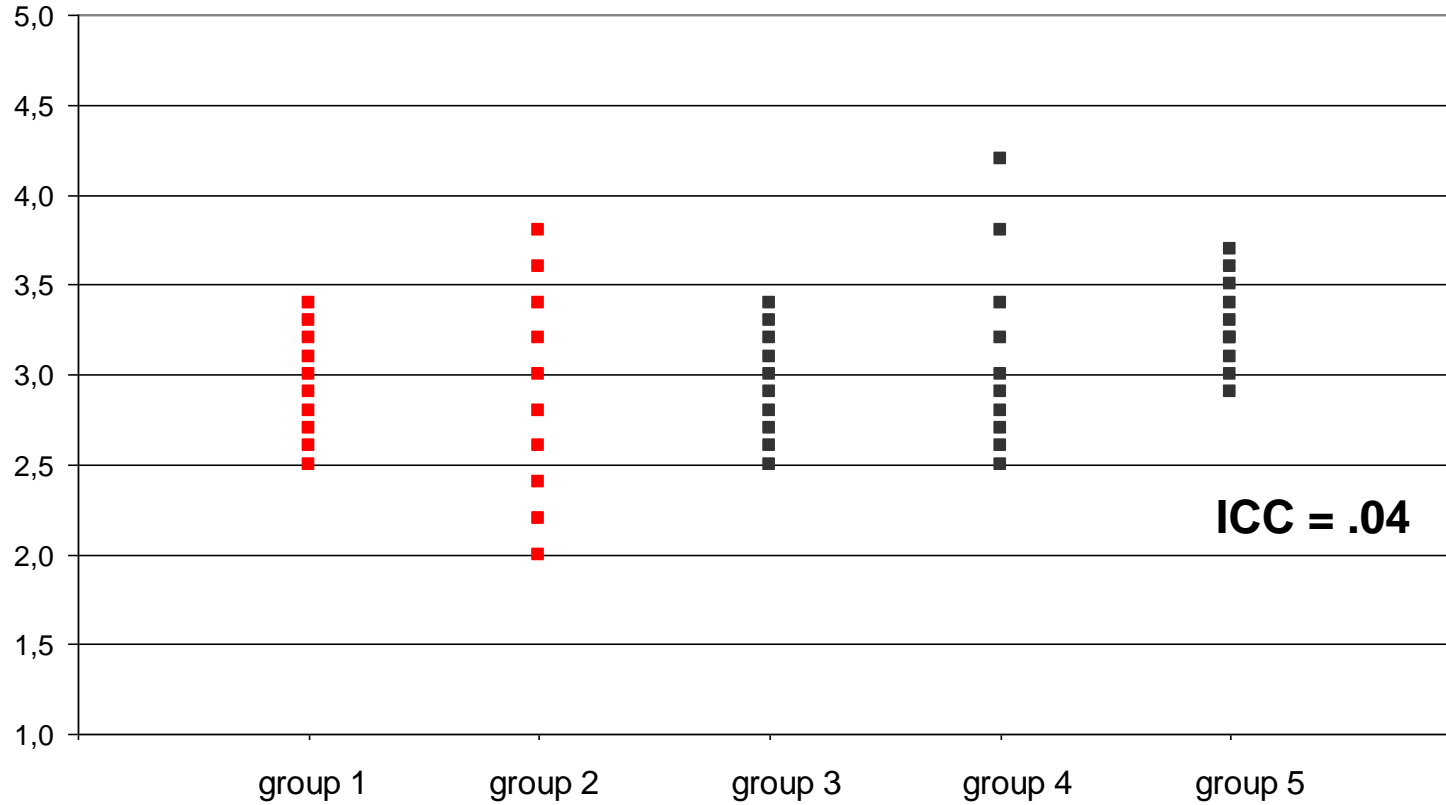
ICC(1): Zwei Interpretationen

1. Relative Anteil der Varianz, der zwischen den Level2-Einheiten liegt
2. Korrelation zwischen zwei zufällig gezogenen Level1-Einheiten in einer zufällig gezogenen Level2-Einheit

James (1982): $ICC(1) \geq .12$ (12% Variation zwischen den Gruppen) ist theoretisch relevant

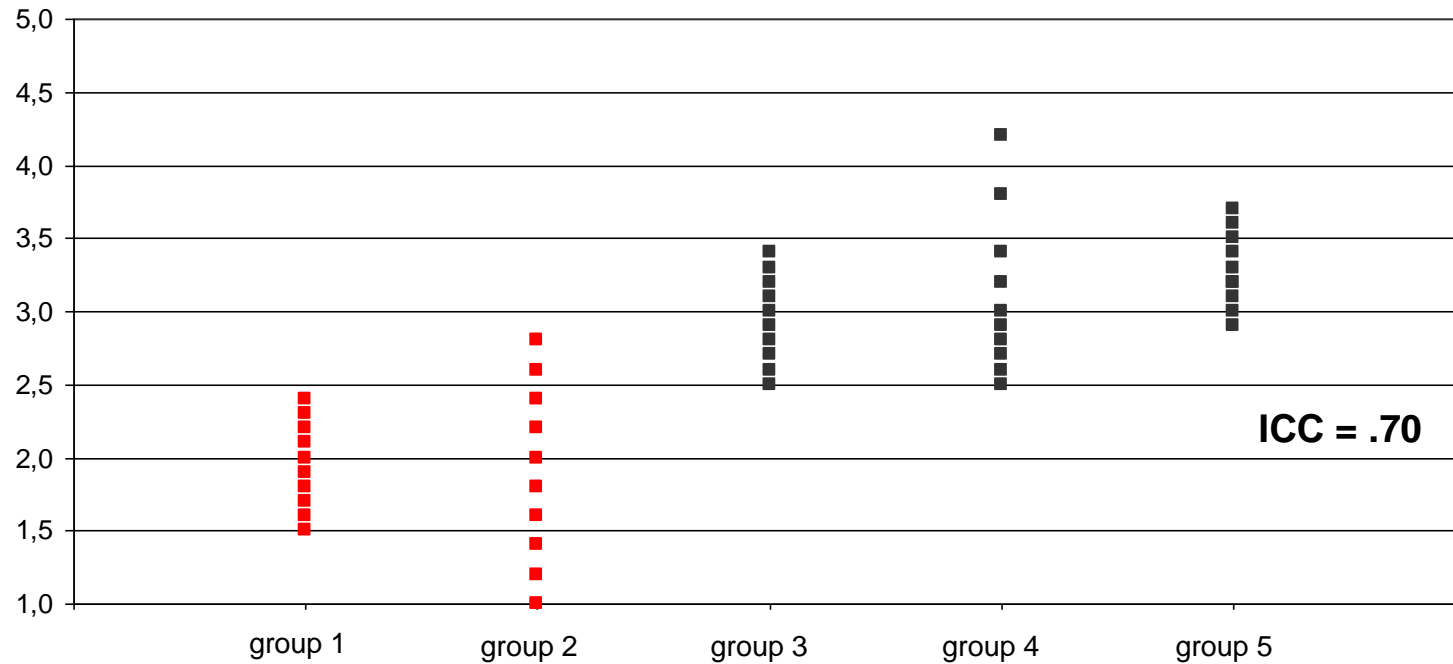
5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Mehrebenenstruktur - Varianzzerlegung



5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Mehrebenenstruktur - Varianzzerlegung



5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Mehrebenenstruktur - Statistische Lösung: Aggregation?

„shift of meaning“

- Die Bedeutung einer Variablen wird durch die Aggregation auf Gruppenebene verändert
 - das aggregierte Konstrukt bezieht sich nicht mehr auf die Mikroebene
- Beispiel: Selbstkonzept der Mathematik auf der Ebene von 40 Nationen (Shen & Pedulla, 2000):
 - Korrelation zwischen Selbstkonzept und Leistung auf Individualebene: $r = .12-.47$
 - Korrelation auf Ebene der Nationen: $r = -.57$

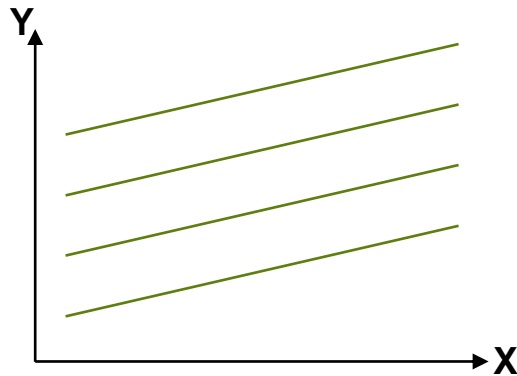
Ökologischer Fehlschluss

- Korrelationen zwischen Makrovariablen erlauben keine Aussage über Zusammenhänge auf Mikroebene
- „atomistic fallacy“: Vernachlässigung des Kontexts

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

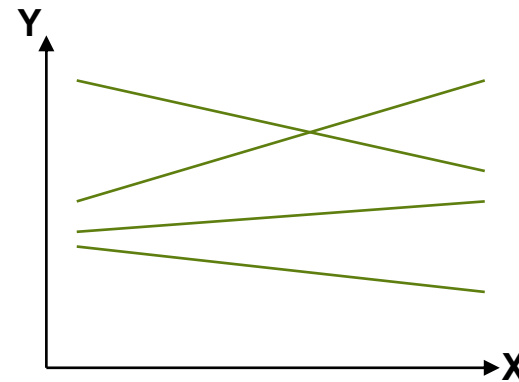
Zusammenhänge zwischen Konzepten auf verschiedenen Ebenen

Die Variation auf Aggregatebene (Level 2) in einer abhängigen Variablen kann sich in den Zusammenhängen auf zwei verschiedene Arten ausdrücken:



Variation der intercepts

- Erhebliche Varianz im Niveau des Kriteriums
- β_0 -Konstante (Intercept) variiert in Abhängigkeit der Level 2-Einheiten



Variation der slopes

- Nicht nur die β_0 -Konstante (Intercept) hat Varianz auf Aggregatebene
- Auch der β_1 -Koeffizient (slope) variiert in Abhängigkeit der Level 2-Einheiten
- Cross-Level-Interaktion

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Beispiel: Fehlzeitenunterschiede

Mathieu & Kohler (1990) und Schmidt (2002)



- Zwischen organisatorischen Einheiten können erstaunlich große Unterschiede in den durchschnittlichen Abwesenheitsquoten ihrer Mitglieder bestehen
- Erklärung: Innerhalb von sozialen Aggregaten bilden sich bestimmte Normen aus, die bestimmte Verhaltensweisen eher tolerieren und akzeptieren als andere Arten des Verhaltens und Erlebens
- Abwesenheitskultur (sozialer Kontext) operationalisiert über ein innerhalb von Arbeitsgruppen aggregiertes Konstrukt der in einem Zeitraum (6 oder 12 Monate) erfassten individuellen Fehlzeiten

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

„Cross-Level“-Methode

- Ziel: Analyse von Zusammenhängen von aggregierten Konstrukten (Abwesenheitskulturen) mit korrespondierenden Variablen auf der Mikroebene (individuelles Abwesenheitsverhalten)
- Jedem Mitglied einer sozialen Einheit wird der auf der Ebene seiner Einheit gebildete Mittelwert der jeweils untersuchten Variable in der entsprechenden Regressionsfunktion zugewiesen

$$\begin{bmatrix} Y_{1,1} \\ Y_{2,1} \\ \dots \\ Y_{6,2} \\ \dots \\ Y_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{1,1} & \bar{X}_1 & X_{1,1} \cdot \bar{X}_1 \\ 1 & X_{2,1} & \bar{X}_1 & X_{2,1} \cdot \bar{X}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{6,2} & \bar{X}_2 & X_{6,2} \cdot \bar{X}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{n,k} & \bar{X}_k & X_{n,k} \cdot \bar{X}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \vec{\varepsilon}$$

β_1 : Individualeffekt

β_2 : Effekt des sozialen Kontexts

β_3 : Effekt Cross-Level-Interaktion

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

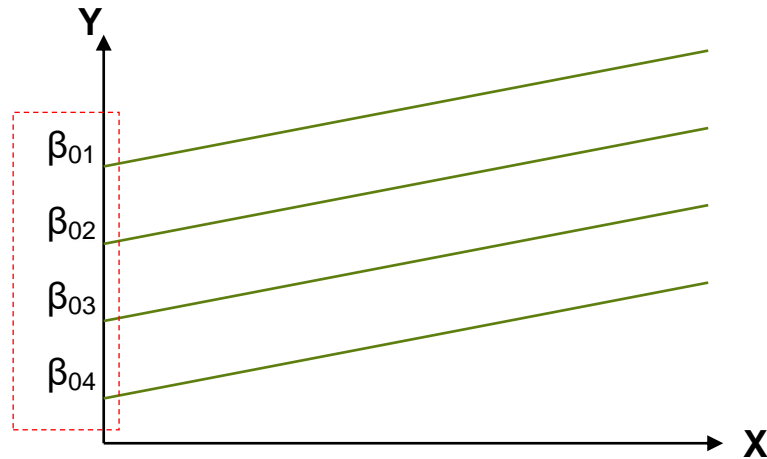
„Cross-Level“-Methode

Grundsätzliche Einschränkungen der „Cross-Level“-Methode (Rousseau, 1985):

- Regressionsanalytische Auswertungen erlauben die Bestimmung der aufgeklärten Varianz nur **innerhalb** der sozialen Einheiten
- Das Ausmaß der aufgeklärten Varianz **zwischen** den Einheiten bleibt allerdings ungeklärt
- Stichproben innerhalb der Einheiten schwanken in ihrer Größe – trotzdem werden die Einflüsse des Kontexts gleich gewichtet
- Die Parametervarianz (Variation der intercepts und slopes) wird nicht berücksichtigt
- Unterschätzung der Standardfehler
- Verletzung der Varianzhomogenität

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Variation der intercepts



- Die Regressionskonstanten (β_{0j}) variieren in Abhängigkeit des sozialen Kontexts (Gruppenzugehörigkeit)
- Dabei können kontextspezifische Effekte (Level 2-Variablen) die Varianz der intercepts bedingen: ICC(1)

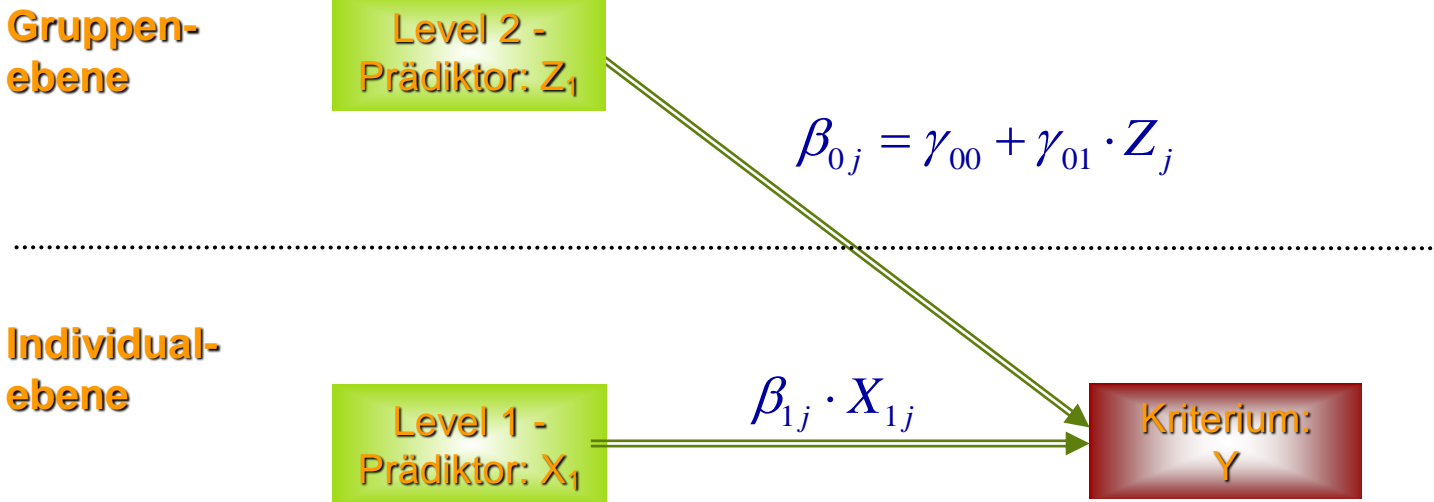
Wenn sich die Varianz der intercepts auf Unterschiede in den Level 2-Variablen zurückführen lässt, so müssen sich die intercepts mittels einer linearen Funktion aus gewichteten Level 2-Prädiktoren direkt vorhersagen lassen.

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Variation der intercepts

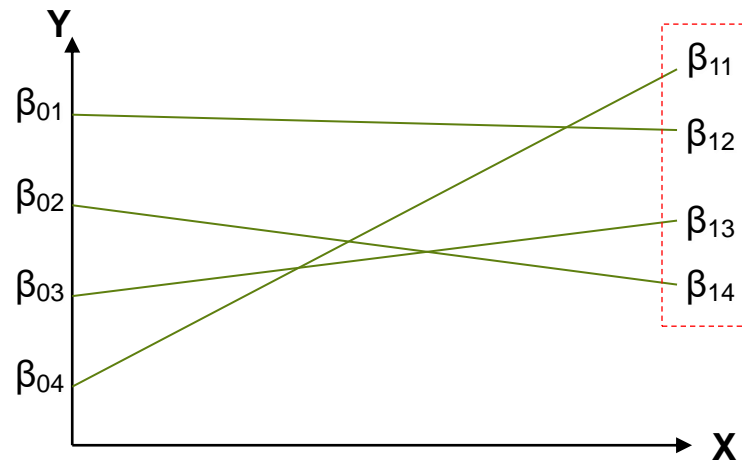
$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot X_{ij} + r_{ij}$$
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot Z_j + u_{0j}$$

- Index i = Einzelnes Untersuchungselement (Level 1)
- Index j = Gruppenzugehörigkeit (Level 2)
- Z_j = Level 2-Prädiktor (Level 2)
- γ = Parameter der Gruppenebene (Level 2)
- u = Residuum der Gruppenebene



5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Variation der slopes



- Die Steigungskoeffizienten (β_{1j}) variieren in ihrer Ausprägung und Richtung in Abhängigkeit der Gruppenzugehörigkeit
- Hier können ebenfalls kontextspezifische Effekte (Level 2-Variablen) die Varianz der slopes in Richtung und Stärke bedingen

Im Falle einer Cross-Level Interaktion, bei der die Wirkung eines Level 1-Prädiktors in Abhängigkeit von der Ausprägung von Level 2-Prädiktoren unterschiedlich ausfällt, müssen sich die slopes durch eine gewichtete Summe aus Level 2-Prädiktoren vorhersagen lassen.

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Variation der slopes

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot X_{ij} + r_{ij}$$
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot Z_j + u_{0j}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot Z_j + u_{1j}$$

Index i = Einzelnes Untersuchungselement (Level 1)
Index j = Gruppenzugehörigkeit (Level 2)
 Z_j = Level 2-Prädiktor (Level 2)
 γ = Parameter der Gruppenebene (Level 2)
u = Residuum der Gruppenebene

**Gruppen-
ebene**

Level 2 -
Prädiktor: Z_1

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot Z_j$$

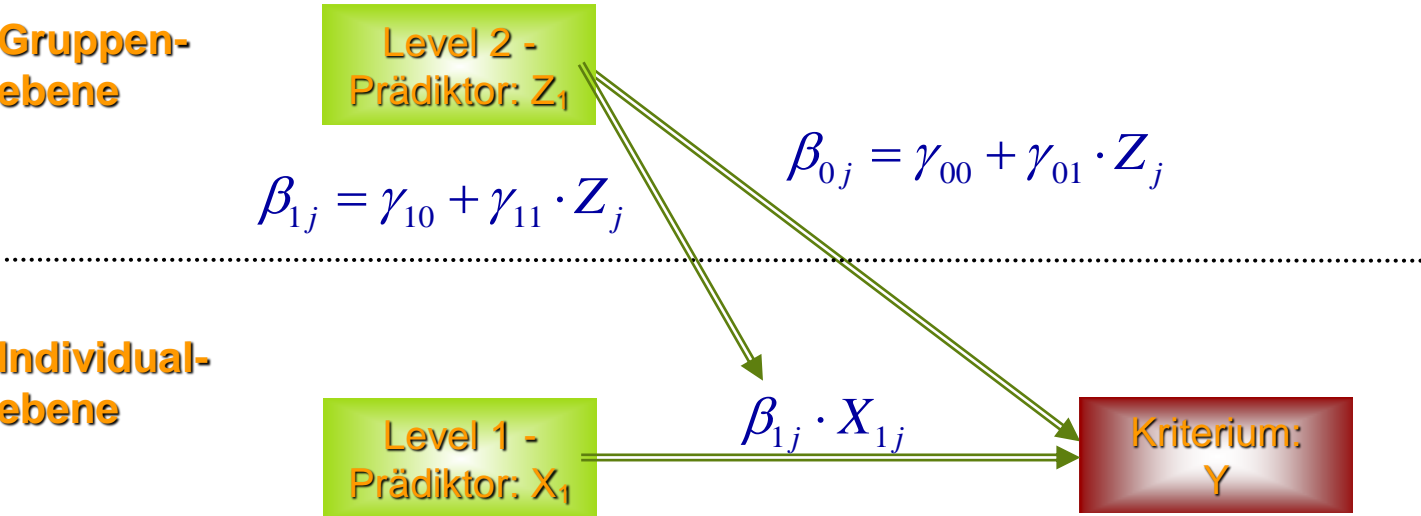
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot Z_j$$

**Individual-
ebene**

Level 1 -
Prädiktor: X_1

$$\beta_{1j} \cdot X_{1j}$$

Kriterium:
Y



5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Raudenbush & Bryk (2002): Hierarchisch lineares Modell

<u>Level 1:</u>	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot X_{1j} + r_{ij}$
<u>Level 2:</u>	$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot Z_j + u_{0j}$
	$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot Z_j + u_{1j}$

$$Y_{ij} = (\gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot Z_j + u_{0j}) + (\gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot Z_j + u_{1j}) \cdot X_{ij} + r_{ij}$$

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot Z_j + \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot Z_j \cdot X_{ij} + u_{0j} + u_{1j} \cdot X_{ij} + r_{ij}$$

$$Y_{ij} = \text{feste Effekte } (\gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{10}, \gamma_{11}) + \text{zufällige Effekte } (u_{0j}, u_{1j}, r_{ij})$$

Allgemeines Modell	{	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \sum_{q=1}^Q \beta_{qj} \cdot X_{qij} + r_{ij}$	Varianzkomponenten:	
		$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \sum_{r=1}^R \gamma_{rj} \cdot Z_{rj} + u_{0j}$		$Var(r_{ij}) = \sigma^2$
		$\beta_{qj} = \gamma_{q0} + \sum_{s=1}^{S_q} \gamma_{qs} \cdot Z_{sj} + u_{qj}$		$Var(u_{qj}) = \tau_{qq}$
			$Cov(u_{qj}, u_{q'j}) = \tau_{qq'}$	

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Parameterschätzung

Ordinary Least Squares

- Trotz Schwankungen der Gruppengröße werden alle Koeffizienten gleich gewichtet
- Keine Differenzierung zwischen „wahrer“ und „stichprobenbedingter“ Varianz in den Parametern (intercepts, slopes)



Maximum Likelihood

- Varianzkomponenten (Variation der intercepts und slopes) und feste Effekte (u.a. Mittelwert der intercepts und slopes) werden direkt geschätzt
- Die einzelnen Koeffizienten der Subgruppen fließen nach ihrer „Reliabilität“ gewichtet in eine Gesamtschätzung ein

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Parameterschätzung

1. Full Information Maximum Likelihood (FIML):

- Maximiert die Likelihood-Funktion für feste Effekte (γ) und Varianzkomponenten (τ, σ) simultan
- Die festen Effekte werden bei der Varianzkomponentenschätzung als bekannt vorausgesetzt: Dabei werden die Freiheitsgrade überschätzt
- Folge: Verzerrungen (bias) bei der Schätzung von Varianzkomponenten in kleinen Stichproben
- Anpassung des gesamten Modells

2. Restricted Maximum Likelihood (REML):

- Maximiert die Likelihood-Funktion der Residuen
- Dabei werden nur die Varianzkomponenten als unbekannte Parameter angesehen
- Anpassung der zufälligen Effekte

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Statistische Voraussetzungen

I. Der Erwartungswert der Residuen auf allen Ebenen beträgt Null:

$$E(r_{ij}) = 0; E(\mu_{ij}) = 0$$

II. Nullkorrelation der Residuen auf allen Ebenen:

$$\text{COV}(u_{ij}, r_{ij}) = 0; \text{COV}(u_{1j}, r_{1j}) = 0$$

III. Normalverteilung der Residuen auf allen Ebenen:

$$R \sim N(\mu, \sigma); U \sim N(\mu, \sigma)$$

IV. Hinreichend große Varianz zwischen den Level 2-Einheiten:

$$ICC(1) \geq .10$$

V. Hinreichend große Anzahl von Level 2-Einheiten:

$$n_j \geq 50$$

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Skalierung der Level 1-Prädiktoren

Hintergrund

- Statistisch: Vermeidung von Multikollinearität und verzerrten Schätzungen bei Moderatormodellen
- Inhaltlich: Erhöhung der Interpretierbarkeit des intercepts
 - Die Ausprägung Null im zentrierten Level 1-Prädiktor repräsentiert den Durchschnitt entweder der Gruppe oder der Gesamtstichprobe

Verschiedene Skalierungsmöglichkeiten:

1. Zentrierung am Gesamtmittelwert ($X_{ij} - \bar{X}$ - grand mean)
2. Zentrierung am Gruppenmittelwert ($X_{ij} - \bar{X}_j$ group mean)
3. Zentrierung an einem inhaltlich relevanten Wert (Populations-mittelwert)
4. Keine Zentrierung (wird nicht empfohlen; Hofmann & Gavin, 1998; Raudenbush & Bryk, 2002)

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Skalierung der Level 1-Prädiktoren

Wahl der
Zentrierung hat
Einfluss auf

1. Schätzung der festen Level 1-Koeffizienten
2. Zerlegung von Personen- und Gruppeneffekten
 - group-mean: Level 1-Prädiktoren klären nur Varianz **innerhalb** der Gruppen auf
 - grand-mean: Level 1-Prädiktoren klären auch Varianz **zwischen** den Gruppen auf
3. Schätzung der Level 2-Effekte bei Kontrolle von Level 1-Kovariaten
4. Schätzung der Varianz von Level 1-Koeffizienten (slopes)
 - Hier sollte group-mean-Zentrierung gewählt werden, da grand-mean-Zentrierung zu einer Unterschätzung der Varianz in den slopes führt

random-intercept
Modelle

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Zentrierung der Prädiktoren

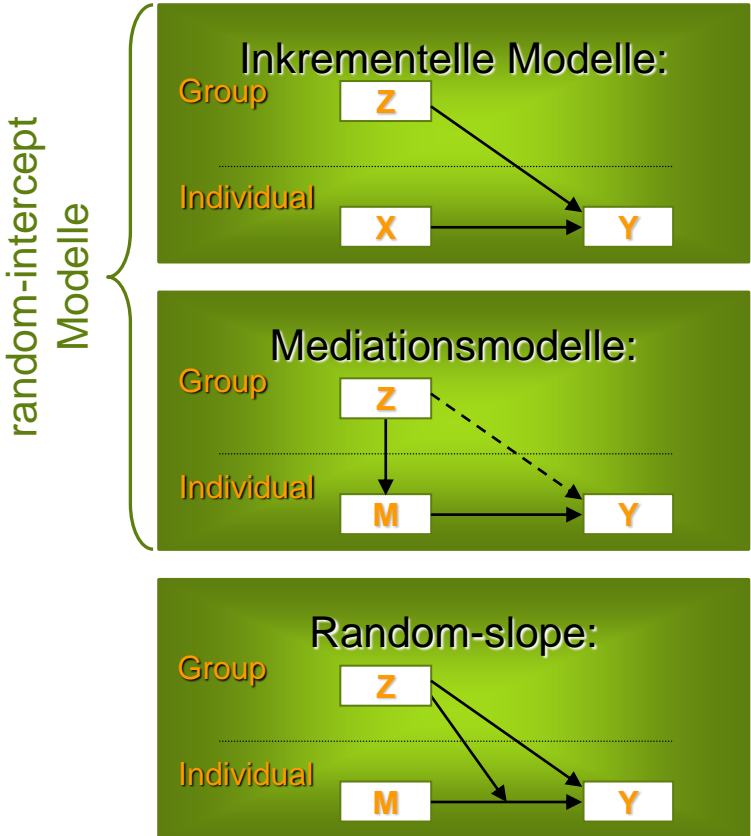
Empfehlungen nach Hofmann & Gavin (1998):

$$X_{ij} - \bar{X}$$

Grand-Mean

$$X_{ij} - \bar{X}_j$$

Group-Mean



*Nur wenn die Level 2-Variable das Aggregat eines Level 1-Prädiktors ist



5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Varianzaufklärung bei Mehrebenenmodellen

- I. Raudenbush & Bryk (2002): „Relative Verringerung der Individual- und Gruppenvarianz der abhängigen Variable“

- Anteil erklärter Varianz auf Individualebene:

$$R_{LEVEL1}^2 = \frac{\sigma_0^2 - \sigma_{FIT}^2}{\sigma_0^2}$$

σ_0^2 : Gesamtvarianz innerhalb der Gruppen (Null-Modell)

σ_{FIT}^2 : Fehlervarianz innerhalb der Gruppen (Volles Modell)

- Anteil erklärter Varianz in β_{qj} :

$$R_{LEVEL2}^2 = \frac{\tau_0^2 - \tau_{FIT}^2}{\tau_0^2}$$

τ_0^2 : Gesamtvarianz zwischen den Gruppen (Null-Modell)

τ_{FIT}^2 : Fehlervarianz zwischen den Gruppen (Volles Modell)

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Varianzaufklärung bei Mehrebenenmodellen

II. Snijders & Bosker (1999): „Relative Verringerung der Vorhersagefehler“

- Level 1: „Relative Fehlerrückgang bei Vorhersage eines individuellen Kriteriums.“

$$R_1^2 = 1 - \frac{\text{Var}(Y_{ij} - \sum_{h=0}^q \gamma_h X_{hij})}{\text{Var}(Y_{ij})} = 1 - \frac{\hat{\sigma}_{FIT}^2 + \hat{\tau}_{FIT}^2}{\hat{\sigma}_0^2 + \hat{\tau}_0^2}$$

- Level 2: „Relative Fehlerrückgang bei Vorhersage eines Gruppenmittelwertes“

$$R_2^2 = 1 - \frac{\text{Var}(\bar{Y}_j - \sum_{h=0}^q \gamma_h \bar{X}_{h,j})}{\text{Var}(\bar{Y}_j)} = 1 - \frac{\hat{\tau}_{FIT}^2 + \hat{\sigma}_{FIT}^2 / n}{\hat{\tau}_0^2 + \hat{\sigma}_0^2 / n}$$

n: Anzahl der Gruppen

σ_0^2 : Gesamtvarianz innerhalb der Gruppen (Null-Modell)

τ_0^2 : Gesamtvarianz zwischen den Gruppen (Null-Modell)

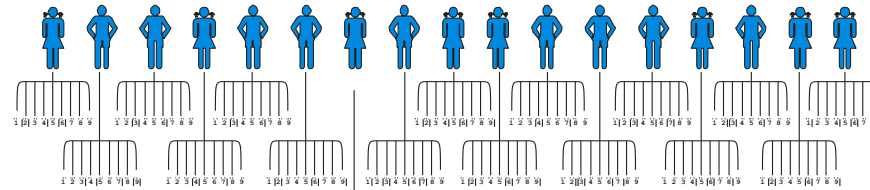
σ_{FIT}^2 : Fehlervarianz innerhalb der Gruppen (Volles Modell)

τ_{FIT}^2 : Fehlervarianz zwischen den Gruppen (Volles Modell)

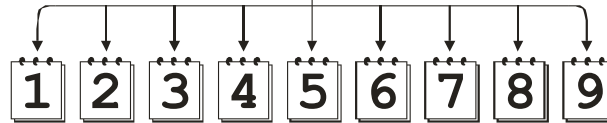
Beschränkt sich ausschließlich auf random-intercept Modelle (Variation der Regressionskonstanten)

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Level 2: Personen



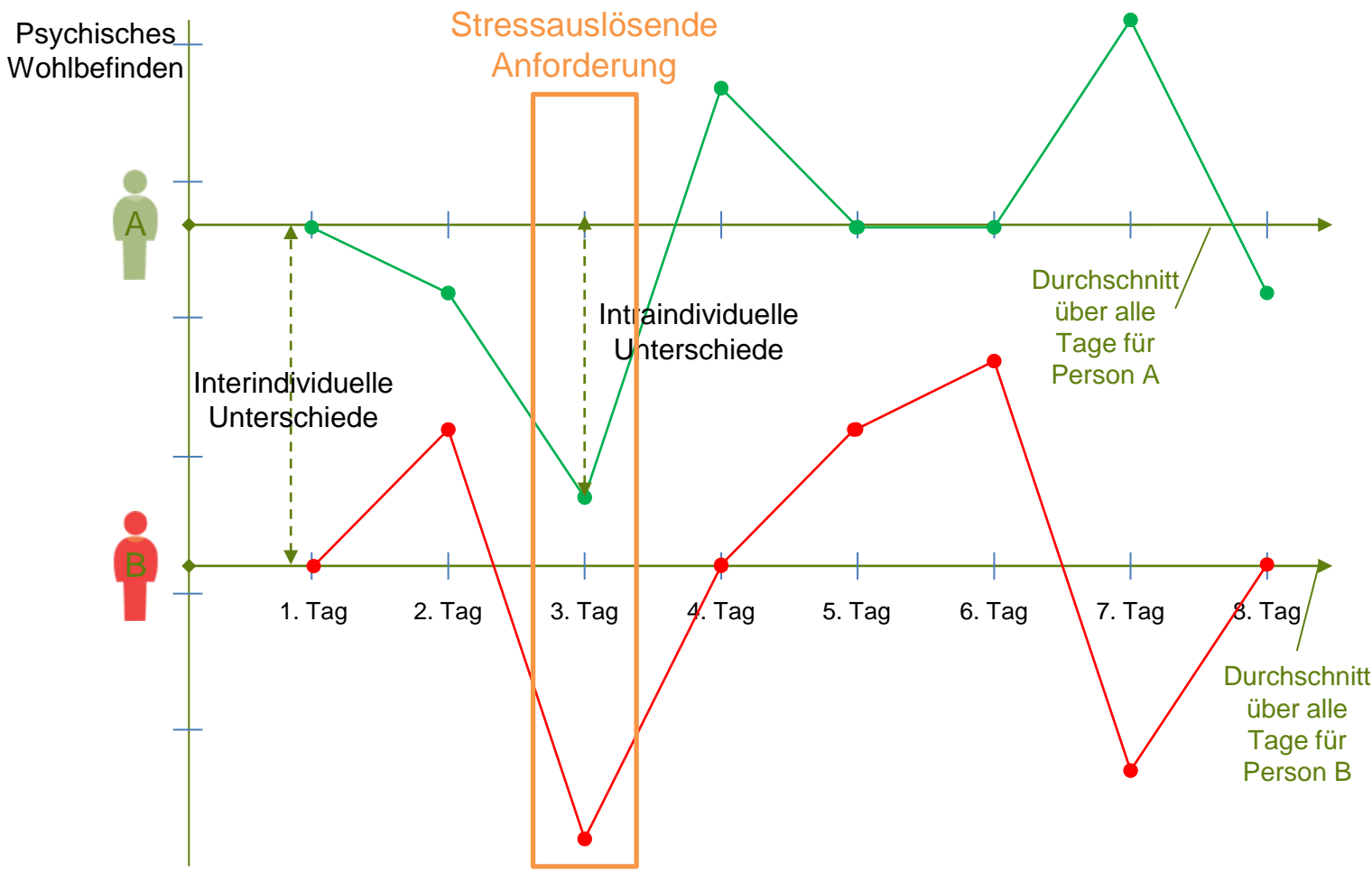
Level 1: Messzeitpunkte



- Bei (arbeits-)psychologischen Tagebuchstudien (Diary Studies) werden an mindestens 5 Arbeitstagen Personen zu unterschiedlichen Themen befragt.
- D.h. alle Teilnehmer der Studie bearbeiten exakt identische Fragebögen an mehreren aufeinanderfolgenden Tagen.
- Gegenstand der Tagebuchstudien sind bspw. sogenannte intraindividuelle Zusammenhänge zwischen tagesspezifischen Wahrnehmungen (bspw. Stress oder Flow-Erleben) und fluktuierenden Erlebenszuständen (psychische Gesundheit oder Leistungsfähigkeit).

(Ohly, Sonntag , Niessen & Zapf, 2010)

5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

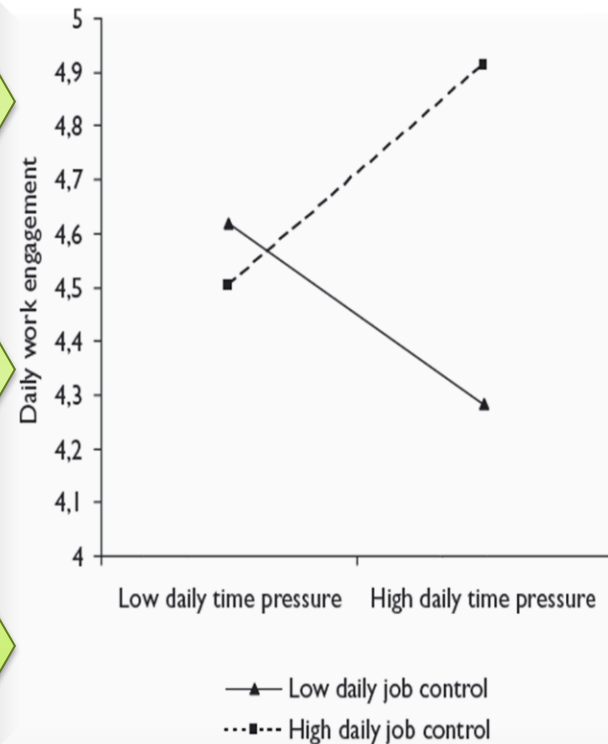


5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

Die Verfügbarkeit von Ressourcen fluktuiert über unterschiedliche Arbeitstage ähnlich wie Anforderungen und Motivations- sowie Erschöpfungszustände.

Durch psychisch wirksame Ressourcen werden Anforderung nicht als „Bedrohung“, sondern Herausforderung wahrgenommen mit der Folge, dass deren erfolgreiche Bewältigung Work Engagement fördert.

Im Falle großer Kontrollspielräume nimmt tagesspezifisches Work Engagement mit steigenden Anforderungen zu, während bei schwachen Ressourcen Anforderung das Engagement beeinträchtigen.



(Kühnel, Sonnentag , & Bledow , 2012)

Multivariate Datenanalyse

5 Multilevel Modeling

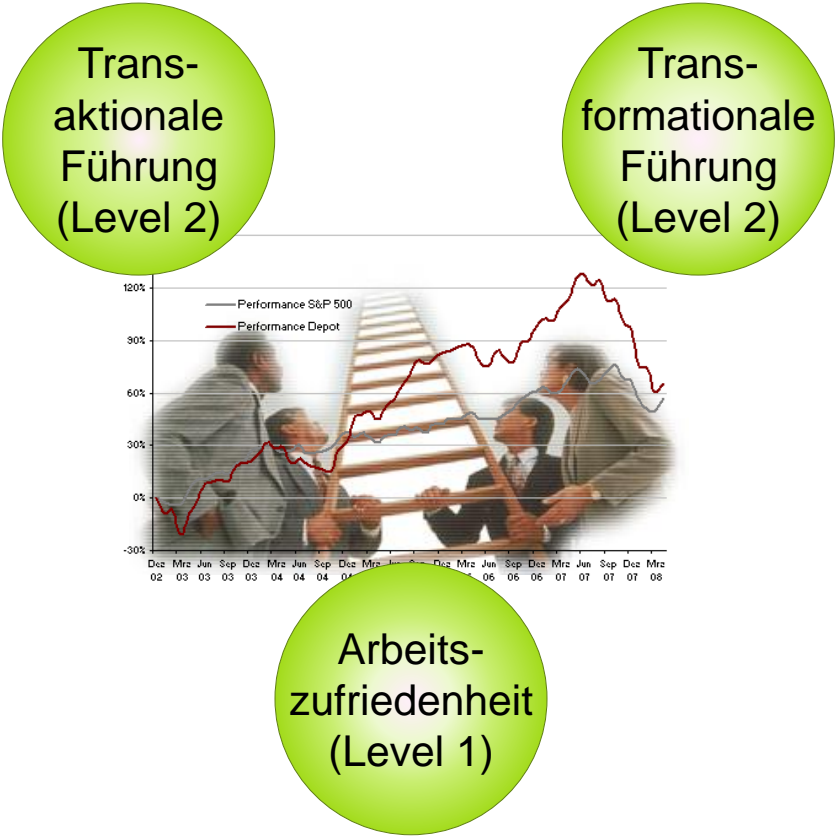
5.1 Grundlagen der Mehrebenenanalyse

5.2 Analyse von Modellen mit Random-Intercept und Random-Slope

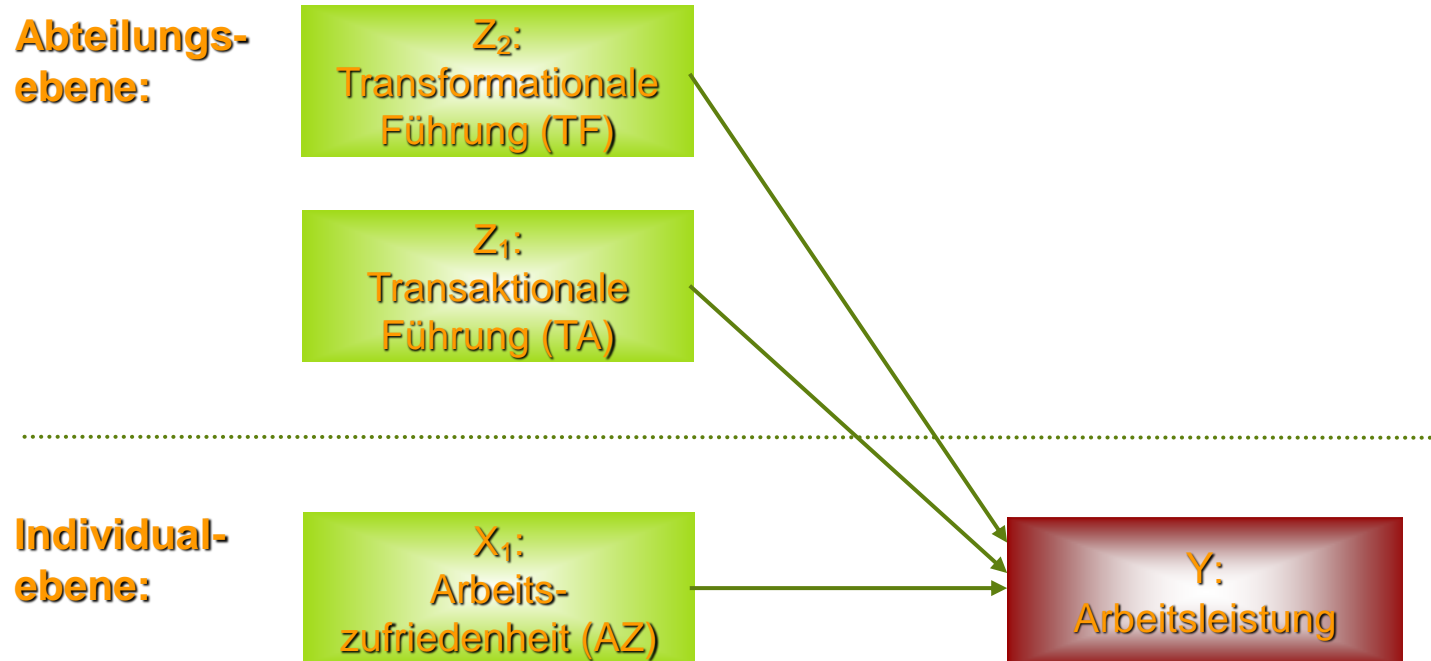


5.2 Random-Intercept & -Slope

Fiktives Anwendungsbeispiel zur Mehrebenenanalyse



5.2 Random-Intercept & -Slope



Inkrementelles Modell:

Zentrierung der Level 1-Prädiktoren am Gesamtmittelwert

Fiktive Stichprobe:

4460 Organisationsmitglieder (68% männlich) in 189 Abteilungen
- Beurteilung des Abteilungsleiters

5.2 Random-Intercept & -Slope

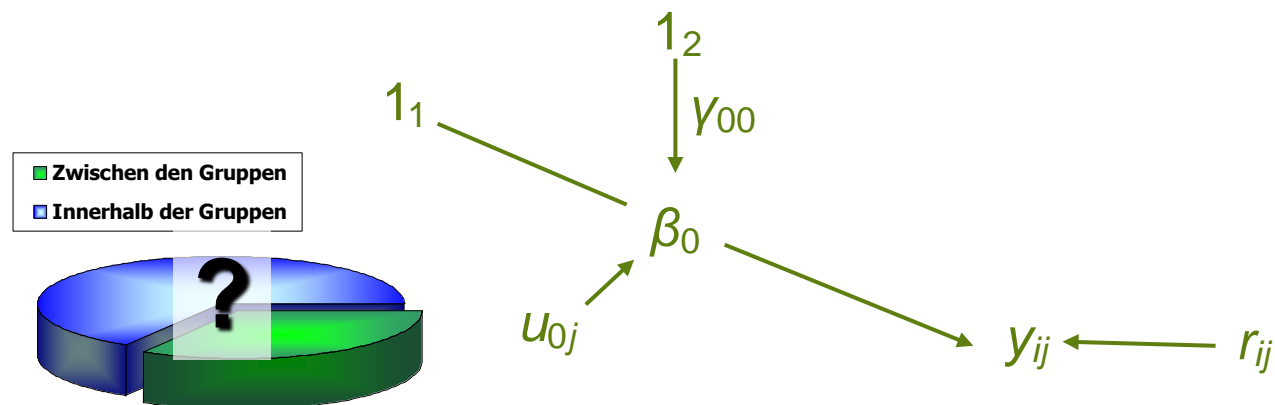
1. Nullmodell (,triviales' oder ,total eingeschränktes' Modell 0)

- Dient der Bestimmung der Varianzkomponenten (σ^2_0 , τ^2_0), in die sich die Gesamtvarianz des Kriteriums (Arbeitsleistung) zerlegen lässt

Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}$

Y_{ij} : Arbeitsleistung

Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$



5.2 Random-Intercept & -Slope

Darstellung der Ergebnisse

	Modell 0	Modell 1	Modell 2
feste Effekte	B (SE)	B (SE)	B (SE)
Level 1			
g ₀₀ = Intercept	8.74** (1.02)		
g ₁₀ = AZ			
Level 2			
g ₀₁ = TA			
g ₀₂ = TF			
zufällige Effekte	Varkomp.	Varkomp.	Varkomp.
t ₀ ² = Var(u _{0j})	20.62**		
s ² = Var(r _{ij})	45.41		

** p<.01, * p<.05

Auswertung der Varianzzerlegung:

$$ICC(1) = t_0^2 / (t_0^2 + s^2) = 20.62 / (20.62 + 45.41) = .31$$

5.2 Random-Intercept & -Slope

2. Individualmodell (Modell 1) - random intercept

- Vorhersage des Kriteriums Y mit Level 1-Prädiktoren (Arbeitszufriedenheit)
- Der Level 1-Prädiktor ist am Gesamtmittelwert zentriert

Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot (X_{1j} - \bar{X}) + r_{ij}$

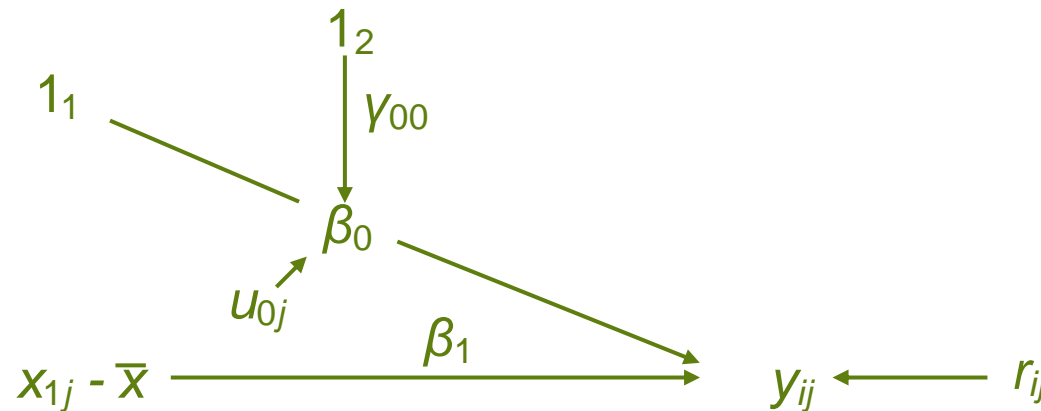
Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$

$\beta_{1j} = \gamma_{10}$

Y_{ij} : Arbeitsleistung

X_1 : Arbeitszufriedenheit

\bar{X} : Gesamtmittelwert der
Arbeitszufriedenheit



5.2 Random-Intercept & -Slope

3. Volles Modell (Modell 2) - random intercept

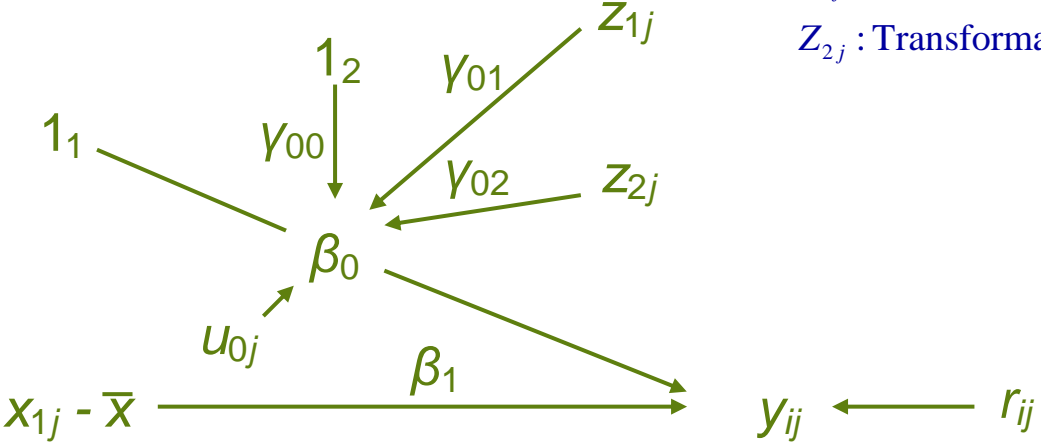
- Vorhersage des Kriteriums Y mit Level 1- (Arbeitszufriedenheit) und Level 2-Prädiktoren (transform. & transaktion. Führung)

Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot (X_{1j} - \bar{X}) + r_{ij}$

Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot Z_{1j} + \gamma_{02} \cdot Z_{2j} + u_{0j}$

$\beta_{1j} = \gamma_{10}$

- Y_{ij} : Arbeitsleistung
- X_{1j} : Arbeitszufriedenheit
- \bar{X} : Gesamtmittelwert der Arbeitszufriedenheit
- Z_{1j} : Transaktional
- Z_{2j} : Transformational



5.2 Random-Intercept & -Slope

Darstellung der Ergebnisse

	Modell 0	Modell 1	Modell 2
feste Effekte	B (SE)	B (SE)	B (SE)
Level 1			
$g_{00} = \text{Intercept}$	8.74** (1.02)	8.75** (1.01)	9.21** (0.99)
$g_{10} = \text{AZ}$		9.94** (1.21)	9.01** (1.19)
Level 2			
$g_{01} = \text{TA}$			11.90** (1.12)
$g_{02} = \text{TF}$			8.98** (1.05)
zufällige Effekte			
	Varkomp.	Varkomp.	Varkomp.
$t_0^2 = \text{Var}(u_{0j})$	20.62**	18.41**	7.29**
$s^2 = \text{Var}(r_{ij})$	45.41	35.71	30.70

** $p < .01$, * $p < .05$.

R^2 nach Raudenbush & Bryk (2002) (für Modell 2):

$$R^2_{\text{Level 1}} = (45.41 - 30.70)/45.41 = .32$$

$$R^2_{\text{Level 2}} = (20.62 - 7.29)/20.62 = .65$$

5.2 Random-Intercept & -Slope

Darstellung der Ergebnisse

	Modell 0	Modell 1	Modell 2
feste Effekte	B (SE)	B (SE)	B (SE)
Level 1			
$g_{00} = \text{Intercept}$	8.74** (1.02)	8.75** (1.01)	9.21** (0.99)
$g_{10} = \text{AZ}$		9.94** (1.21)	9.01** (1.19)
Level 2			
$g_{01} = \text{TA}$			11.90** (1.12)
$g_{02} = \text{TF}$			8.98** (1.05)
zufällige Effekte	Varkomp.	Varkomp.	Varkomp.
$t_0^2 = \text{Var}(u_{0j})$	20.62**	18.41**	7.29**
$s^2 = \text{Var}(r_{ij})$	45.41	35.71	30.70

** $p < .01$, * $p < .05$.

R^2 nach Snijders & Bosker (1999) (für Modell 2):

$$R^2_{\text{Level 1}} = 1 - (30.70 + 7.29)/(45.41 + 20.62) = .42$$

$$R^2_{\text{Level 2}} = 1 - ((30.70/189) + 7.29)/(45.41/189 + 20.62) = .64$$

5.2 Random-Intercept & -Slope

Darstellung der Ergebnisse

	Modell 0	Modell 1	Modell 2
feste Effekte	B (SE)	B (SE)	B (SE)
Level 1			
g_{00} = Intercept	8.74** (1.02)	8.75** (1.01)	9.21** (0.99)
g_{10} = AZ		9.94** (1.21)	9.01** (1.19)
Level 2			
g_{01} = TA			11.90** (1.12)
g_{02} = TF			8.98** (1.05)
zufällige Effekte			
	Varkomp.	Varkomp.	Varkomp.
$t_0^2 = \text{Var}(u_{0j})$	20.62**	18.41**	7.29**
$s^2 = \text{Var}(r_{ij})$	45.41	35.71	30.70
ICC(1)	.31	.34	.19
$R^2_{\text{Level1}^a}$.21	.32
$R^2_{\text{Level2}^a}$.11	.65

** $p < .01$, * $p < .05$; ^a R^2 nach Raudenbush & Bryk (2002).

5.2 Random-Intercept & -Slope

Effektgröße für β -Koeffizienten

$$\Delta = \frac{2 \times B \times SD_{\text{Predictor}}}{\sigma}$$

σ = Streuung der Level-1 Residuen

B = unstandardisiertes Regressionsgewicht

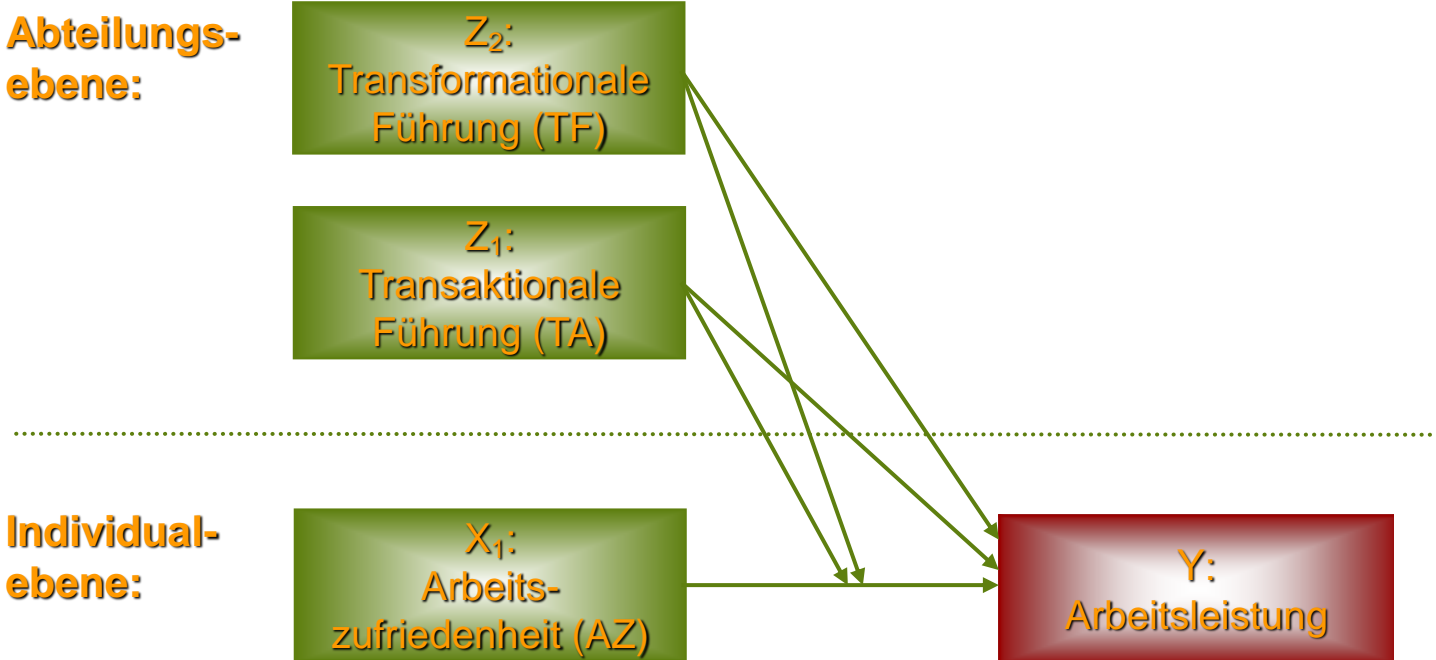
SD = Streuung des Prädiktors

Effektgröße für den Kontexteffekt (Transformationale Führung):

$$\Delta = \frac{2 \times 8.98 \times .989}{\sqrt{30.70}} = 3.21$$

5.2 Random-Intercept & -Slope

Erweitertes theoretisches Modell



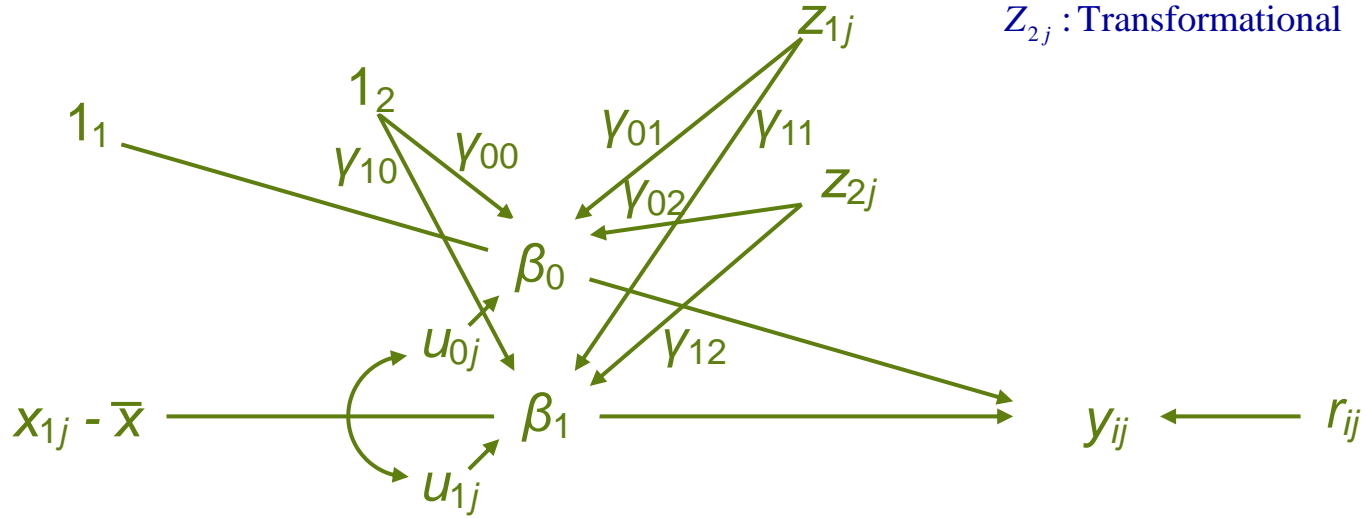
5.2 Random-Intercept & -Slope

4. Volles Modell (Modell 3) - random slope

- Vorhersage des Kriteriums der Level 1-slopes in Abhängigkeit Level 2-Prädiktoren (Transform. & transaktion. Führung)

Level 1: $Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot (X_{1j} - \bar{X}) + r_{ij}$ Y_{ij} : Arbeitsleistung
 X_{1j} : Arbeitszufriedenheit

Level 2: $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot Z_{1j} + \gamma_{02} \cdot Z_{2j} + u_{0j}$ \bar{X} : Gesamtmittelwert der
Arbeitszufriedenheit
 $\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot Z_{1j} + \gamma_{12} \cdot Z_{2j} + u_{1j}$ Z_{1j} : Transaktional
 Z_{2j} : Transformational



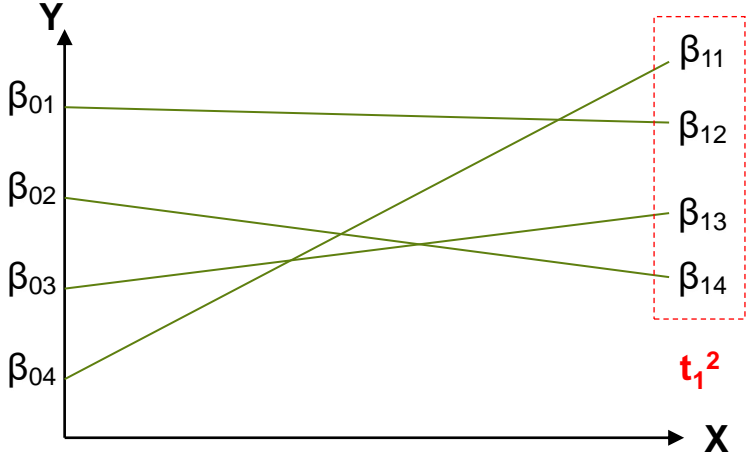
5.2 Random-Intercept & -Slope

Darstellung der Ergebnisse

	Modell 0	Modell 3	
feste Effekte	B (SE)	B (SE)	
Level 1			
$g_{00} = \text{Intercept}$	8.74** (1.02)	9.01** (0.92)	
$g_{10} = \text{AZ}$		9.41** (1.23)	
Level 2			
$g_{01} = \text{TA}$		11.94** (1.13)	
$g_{02} = \text{TF}$		8.91** (1.01)	
Cross-Level			
$g_{11} = \text{TA} \times \text{AZ}$		1.90 (1.03)	
$g_{12} = \text{TF} \times \text{AZ}$		7.81** (1.45)	** $p < .01$, * $p < .05$.
zufällige Effekte			
	Varkomp.	Varkomp.	
$t_0^2 = \text{Var}(u_{0j})$	20.62**	7.41**	
$t_1^2 = \text{Var}(u_{1j})$		10.13**	
$t_{01}^2 = \text{Cov}(u_{0j}, u_{1j})$		-6.67**	
$s^2 = \text{Var}(r_{ij})$	45.41	34.43	

5.2 Random-Intercept & -Slope

Slope-Varianz



- Die Varianz der Steigungskoeffizienten informiert über die Unterschiedlichkeit der Level-1 Zusammenhänge
- Hohe Varianz der Slopes (τ_1^2) deutet auf Level-1 Interaktionen oder Cross-level Interaktionen hin

Die Signifikanz der Slope-Varianz wird als Voraussetzung für die Testung von Wechselwirkungen in HLM betrachtet. Diese Signifikanz kann über zwei Möglichkeiten getestet werden:

1. Die Signifikanz der Slope-Varianz wird im Modell ($UV_{Level1} \rightarrow AV_{Level1}$) ohne Moderatoren (!) direkt bestimmt:
2. Über den Log-Likelihood-Differenz-Test werden die Signifikanz des Unterschieds in der Anpassung des Modells mit fixiertem $\tau_1^2 = 0$ und frei geschätztem τ_1^2 ermittelt.

zufällige Effekte	Varkomp.
$\tau_0^2 = \text{Var}(u_{0j})$	7.41**
$\tau_1^2 = \text{Var}(u_{1j})$	10.13**

** $p < .01$, * $p < .05$.



Teil 6: Latente Profile Analysis



Multivariate Datenanalyse

6 Latent Profile Analysis

6.1 Einführung Latent Profile Analysis

6.2 Anwendungsbeispiel

6.1 Einführung Latent Profile Analysis

Grundgedanke Latent Profile Analysis

- Latent Profile Analysis dient der Zuordnung von Fällen (z. B. Personen) anhand von kontinuierlichen Variablen zu einer Kategorie (oder Klasse)
- Die Klassenzuordnung ist dabei nicht deterministisch, sondern beruht auf einer Wahrscheinlichkeitsaussage
- Die Schätzung der Wahrscheinlichkeiten beruht dabei auf sogn. *Finite Mixture Models*
- Die Zuordnung zu den Klassen ermöglicht es, Unterschiede zwischen den Klassen in den Ausprägungen der zugrundeliegenden Variablen zu untersuchen und klassentypische Profile zu bilden (z. B. Klassen von Führungskräften anhand deren Führungsstile, Arnold et al., 2017)
- Diese Profile lassen sich wiederum in Bezug auf Außenvariablen (z. B. Indikatoren von Führungserfolg) setzen

6.1 Einführung Latent Profile Analysis

Grundgedanke Latent Profile Analysis

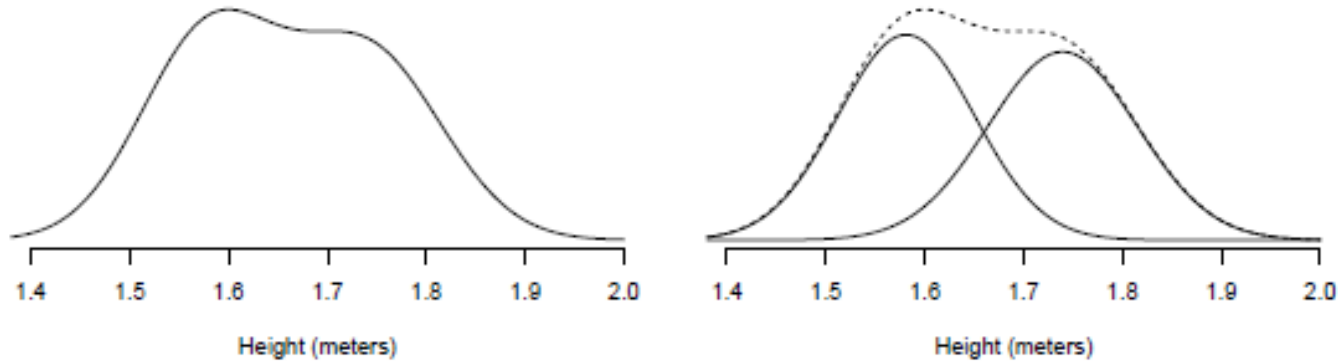
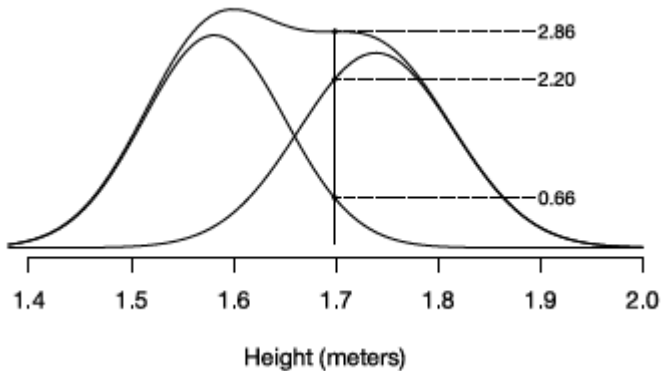


Fig. 1 Peoples' height. Left: observed distribution. Right: men and women separate, with the total shown as a dotted line.



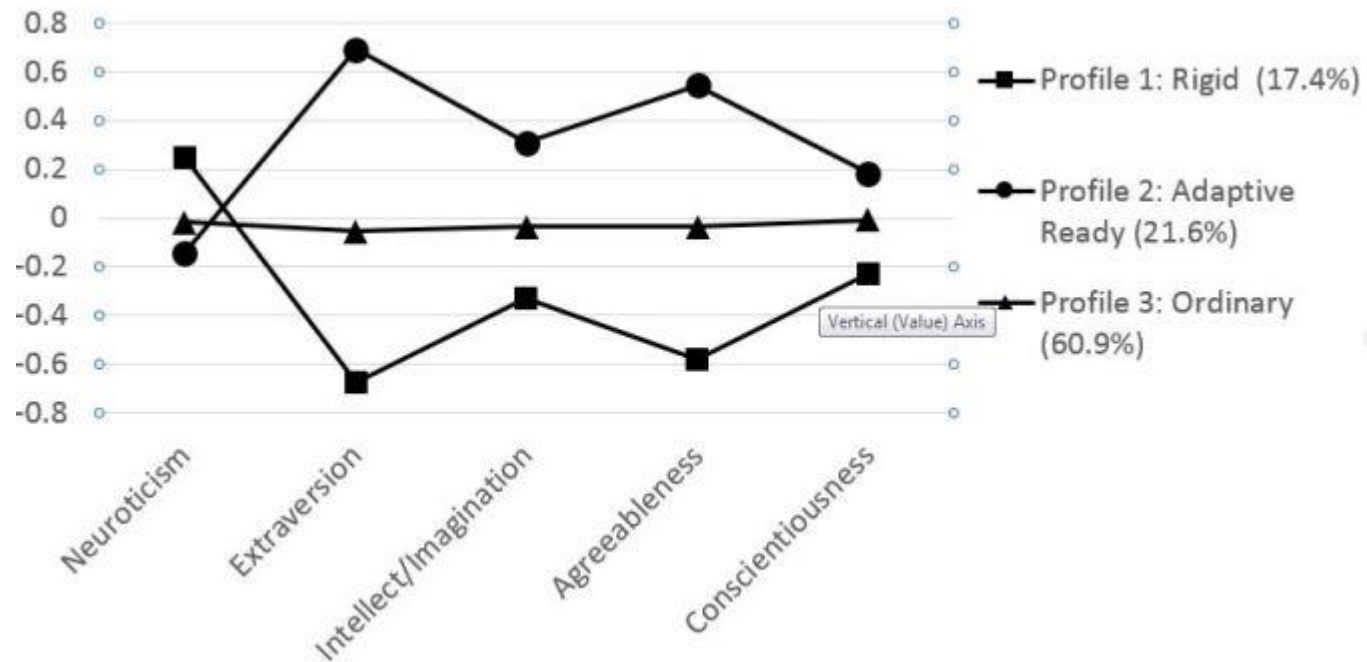
6.1 Einführung Latent Profile Analysis

Grundgedanke Latent Profile Analysis

Latent Profile Analysis (LPA) ist von der Grundidee vergleichbar mit Clusteranalysen

Hauptunterschied ist, dass die Berechnung der Klassenzugehörigkeit nicht auf Distanzmetrik sondern auf Wahrscheinlichkeiten beruht

Zudem besteht für LPA die Möglichkeit, die Anzahl der Klassen anhand objektiver Kriterien zu bestimmen



6.1 Einführung Latent Profile Analysis

Bestimmung der Klassenanzahl

Die Anzahl der latenten Klassen wird durch Modellvergleiche bestimmt.

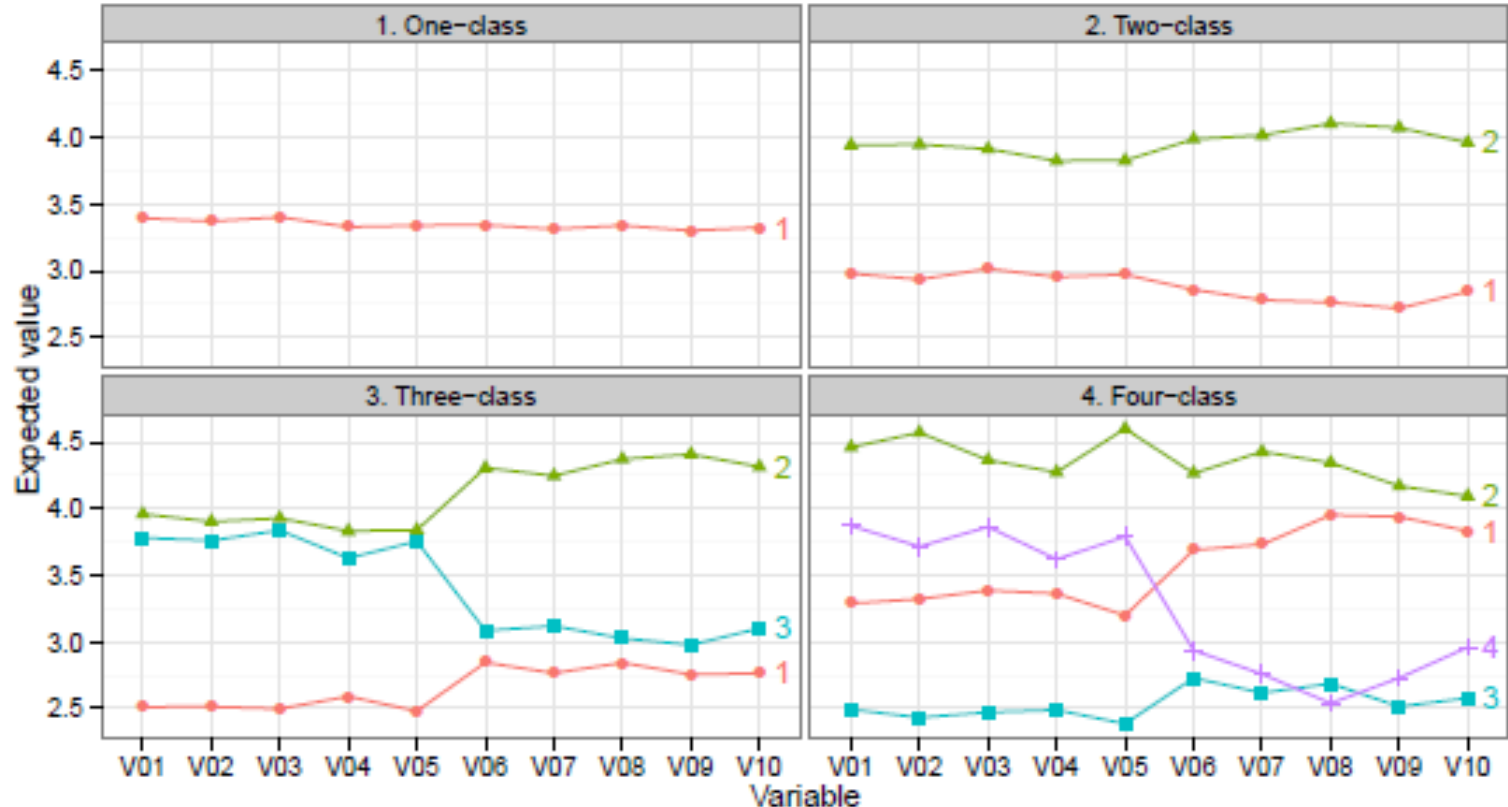
Im ersten Schritt werden die Modelle mit einer unterschiedlichen Anzahl von Klassen (z. B. 1 bis 5 Klassen) berechnet.

In einem weiteren Schritt werden verschiedene Kennwerte und Informationskriterien genutzt, um die unterschiedlichen Modelle miteinander zu vergleichen.

- AIC, BIC
- Likelihood-Ratio-Test (LRT)
- Bootstrap LRT (BLRT): Berechnung von mehrerer Differenztests via Bootstrapping
 - Signifikante LRT und BLRT indizieren, dass ein Modell mit k Klassen einen besseren Fit als ein Modell mit $k-1$ Klassen hat
 - *Empfehlung*: In Simulationsstudien haben sich BLRT und BIC den anderen Kriterien als überlegen erwiesen

6.1 Einführung Latent Profile Analysis

Bestimmung der Klassenanzahl



Quelle: Nylund, Asparouhov & Muthén (2007)



Multivariate Datenanalyse

6 Latent Profile Analysis

6.1 Einführung Latent Profile Analysis

6.2 Anwendungsbeispiel



Lehrstuhl
für Arbeits-,
Organisations- und
Wirtschaftspsychologie



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

SchumpeterSchool
of Business and Economics



6.2 Anwendungsbeispiel

Beispiel: Meyer, J. P., Stanley, L. J., & Parfyonova, N. M. (2012). Employee commitment in context: The nature and implication of commitment profiles. *Journal of Vocational Behavior*, 80(1), 1-16.

Ziel der Studie war es, Profile auf Grundlage der Ausprägungen in den Commitment-Dimensionen (normativ, affektiv, kalkulatorisch) in Bezug auf Unterschiede in Basic Need Satisfaction zu untersuchen

Table 4
Model fit statistics.

	SABIC	BOOTLRT (log-likelihood)
2-Profile	4168.17	270.8
3-Profile	4073.64	105.83
4-Profile	4044.89	40.04*
5-Profile	4039.30	16.88*
6-Profile	4036.40	14.19*

SABIC = Sample-adjusted Bayesian Information Criterion;
BOOTLRT = Bootstrapped Likelihood Ratio Test.
* $p < .05$.

6.2 Anwendungsbeispiel

Beispiel: Meyer, J. P., Stanley, L. J., & Parfyonova, N. M. (2012). Employee commitment in context: The nature and implication of commitment profiles. *Journal of Vocational Behavior*, 80(1), 1-16.

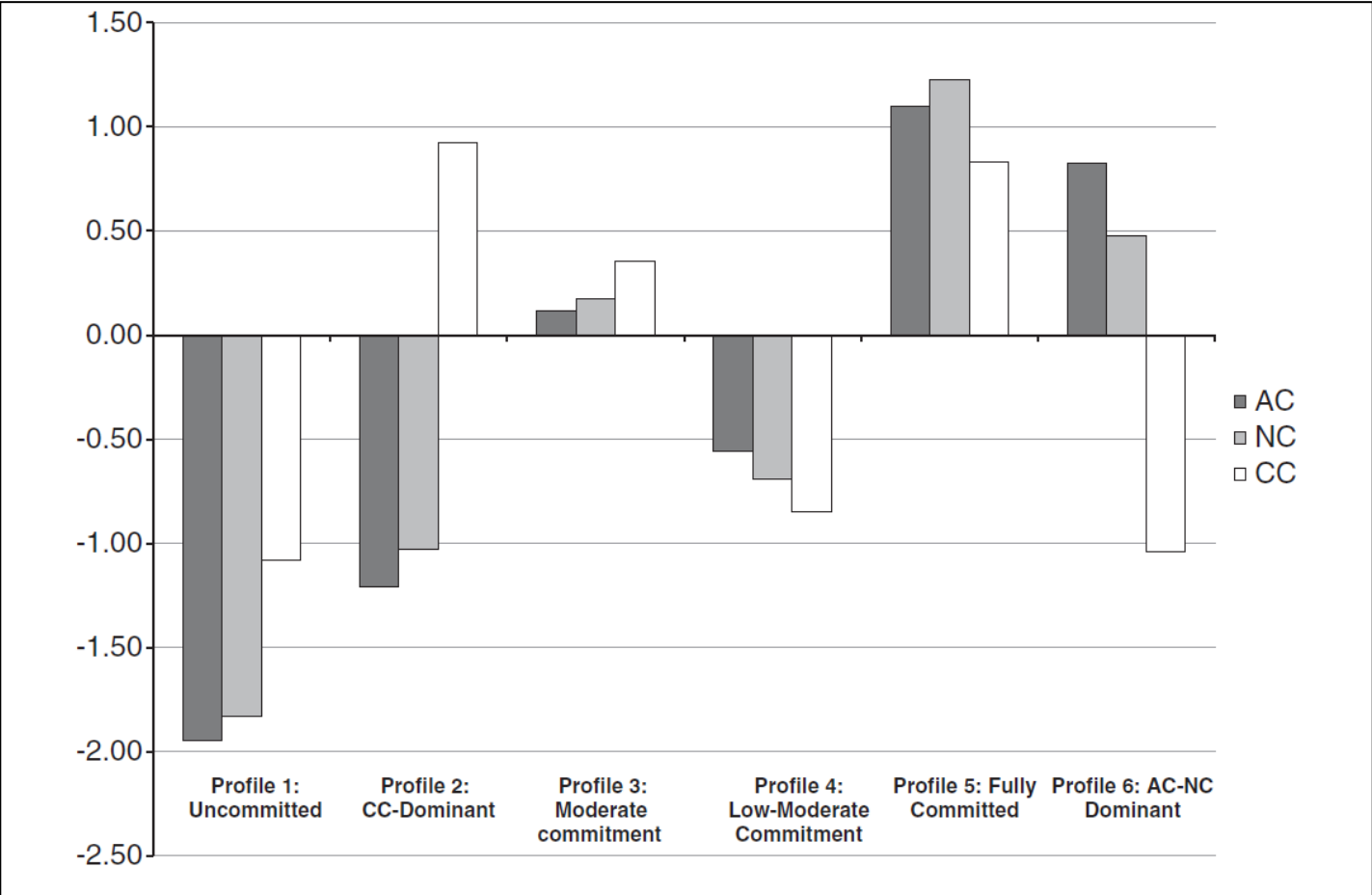


Fig. 1. Characteristics of the latent profiles on the indicators. Standard scores are reported to aid interpretation.

6.2 Anwendungsbeispiel

Beispiel: Meyer, J. P., Stanley, L. J., & Parfyonova, N. M. (2012). Employee commitment in context: The nature and implication of commitment profiles. *Journal of Vocational Behavior*, 80(1), 1-16.

Table 8
Means associated with the 6-profile model.

Profile	n	Sat.—need for autonomy	Sat.—need for competence	Sat.—need for relatedness	Autonomous regulation	In-role performance ^a	OCBI ^a
1—Uncommitted	27	4.24	5.06	4.07	1.27	6.23	5.53
2—Continuance dominant	44	4.61	5.41	3.75	1.29	6.41	5.68
3—Moderate commitment	123	5.05	5.68	5.09	2.90	6.59	6.16
4—Low-moderate commitment	74	4.96	5.35	4.92	2.58	6.57	6.19
5—Fully committed	78	5.80	5.96	6.01	3.52	6.59	6.23
6—AC—NC-dominant	56	5.88	6.19	5.75	4.46	6.63	6.20
Post-hoc comparisons ^b		6,5>3>4>1 5,6>2	6,5>2,4,1 6>3>4,1	5,6>3>4>1,2	6>5>3>4>2,1		4,5,6<2,1 3>2
Profile	n	OCBO ^a	Positive affect	Negative affect	General health complaints	Work engagement	
1—Uncommitted	27	4.86	2.77	2.16	2.05	2.78	
2—Continuance dominant	44	5.14	2.90	2.08	2.28	3.40	
3—Moderate commitment	123	5.66	3.45	1.77	1.99	4.49	
4—Low-moderate commitment	74	5.39	3.24	1.70	1.94	3.95	
5—Fully committed	78	6.00	3.81	1.52	1.79	5.00	
6—AC—NC-dominant	56	5.93	4.03	1.51	1.76	4.98	
Post-hoc comparisons ^b		5,6,3>1 5,6>2	6,5>3>4>2,1	1,2>3,4,5,6 3>4,6	2>1,3,4>5,6 3>4	5,6>3>4>2>1	

Note. AC = affective commitment; NC = normative commitment; CC = continuance commitment.
^a For in-role performance, OCBI, and OCBO, n = 180; Profile membership is: Pr. 1 = 12, Pr. 2 = 20, Pr. 3 = 60, Pr. 4 = 25, Pr. 5 = 41, Pr. 6 = 22.
^b Post-hoc comparisons indicate which profile means differ significantly at p < .05.

6.2 Anwendungsbeispiel

Beispiel: Stanley, L., Vandenberghe, C., Vandenberg, R., & Bentein, K. (2013). Commitment profiles and employee turnover. *Journal of Vocational Behavior*, 82(3), 176-187.

Table 2
Model fit statistics.

	SABIC	BLRT
1-class	7651.34	–
2-class	7447.20	221.11*
3-class	7313.87	150.29*
4-class	7272.94	57.93*
5-class	7209.69	80.22*
6-class	7177.78	34.32*

Note. SABIC = sample-adjusted Bayesian information criterion. SABIC is a predictive fit index used to select the model that has the best fit and fewer parameters. Values represent the distance between the current and true model. BLRT = bootstrapped likelihood ratio test. BLRT is a log likelihood difference test. A value of $p < 0.05$ indicates that a k-1 class model provides better fit than a k-class model.

* $p < .05$.

6.2 Anwendungsbeispiel

Beispiel: Stanley, L., Vandenberghe, C., Vandenberg, R., & Bentein, K. (2013). Commitment profiles and employee turnover. *Journal of Vocational Behavior*, 82(3), 176-187.

Table 5
Means associated with the 6-class model.

Class	<i>n</i>	AC ^a	NC ^a	PS ^a	FA ^a	Turnover intention ^a	Turnover
1: Not Committed	98	2.35	1.39	1.86	1.19	3.39	21.4%
2: Committed	52	3.51	3.63	3.37	2.96	2.22	7.7%
3: AC-NC Dominant	145	3.77	3.77	2.64	1.29	1.97	7.6%
4: Continuance Dominant	40	2.63	1.70	3.29	4.04	2.90	7.5%
5: Moderately Committed	161	2.90	1.72	2.84	2.52	2.95	9.3%
6: AC Dominant	216	3.52	2.07	2.89	1.32	2.36	11.6%
Post hoc comparisons ^a		2,3,6 > 1,4,5	2,3 > 6 > 4,5 > 1	2,4 > 3,5,6 > 1	4 > 2 > 5 > 1,3,6	1,4,5 > 2,3,6	

Note. AC = affective commitment; NC = normative commitment; PS = perceived sacrifice commitment; FA = few alternatives commitment.
^a Post hoc comparisons (using Tukey tests) indicate which profile means differ significantly at $p < .05$, except Profile 4 > Profile 6 and Profile 4 > Profile 2 at $p < .10$.

Teil 7: Sequentialanalyse

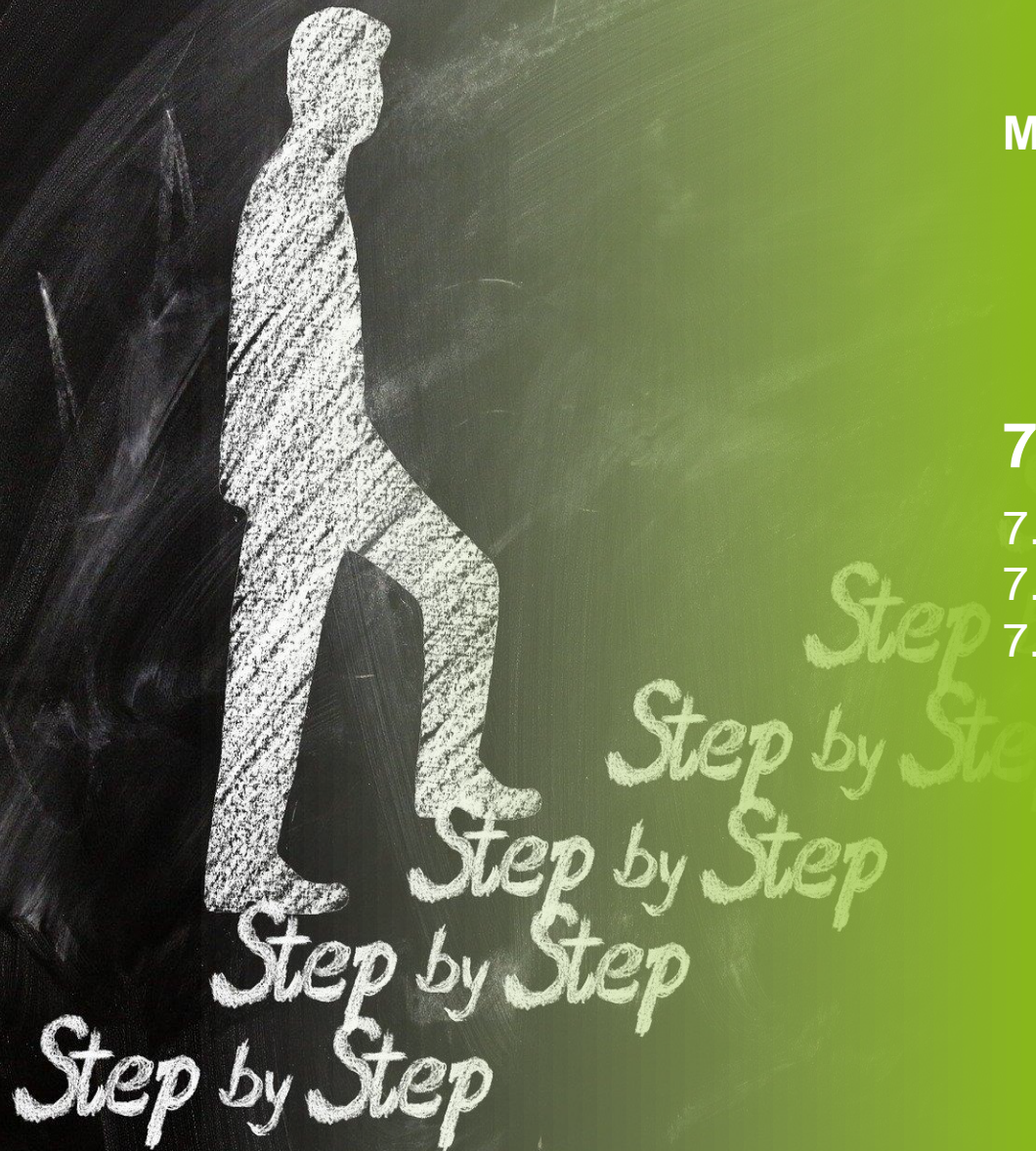
Multivariate Datenanalyse

7 Sequentialanalyse

7.1 Sequentialanalyse nach Wald

7.2 Prozedur

7.3 Stärken und Schwächen



Lehrstuhl
für Arbeits-,
Organisations- und
Wirtschaftspsychologie



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

Schumpeter School
of Business and Economics



7.1 Sequentialanalyse nach Wald

Grundlagen

- Als Alternative zum üblichen Signifikanztest wurde in den 40er Jahren des 20. Jahrhunderts der Sequentialtest von dem jüdischen Mathematiker Abraham Wald entwickelt
- Auch dabei handelt es sich um ein Entscheidungsverfahren zwischen einer Nullhypothese und ihrer konkurrierenden Alternativhypothese
- Dieses Verfahren berücksichtigt neben dem α -Fehler auch die anderen bedeutsamen inferenzstatistischen Maße (β -Fehler, Effektgröße), die beim klassischen Signifikanztest kaum Beachtung finden.
- Im Gegensatz zum klassischen Signifikanztest liegt diesem Entscheidungsverfahren keine zuvor fixierte Stichprobengröße zu Grunde
→ sequentiell: Die Datenerhebung erfolgt schrittweise



7.1 Sequentialanalyse nach Wald

Grundlagen

Testkriterien

Analog zum klassischen Signifikanztest werden auch hier die Bedingungen, unter denen man sich für oder gegen die Nullhypothese entscheidet, *a priori*, also vor der Datenerhebung festgelegt:

1. α -Fehlerwahrscheinlichkeit

- Wenn in der Population die Nullhypothese gilt, soll man sich maximal mit einer Wahrscheinlichkeit von α für die Alternativhypothese entscheiden
- Die α -Fehlerwahrscheinlichkeit ist üblicherweise auf 0.05, 0.01 oder 0.001 limitiert

2. β -Fehlerwahrscheinlichkeit

- Wenn in der Population die Alternativhypothese gilt, soll man sich maximal mit einer Wahrscheinlichkeit von β für die Nullhypothese entscheiden
- Die β -Fehlerwahrscheinlichkeit wird üblicherweise auf 0.20, 0.10 oder 0.05 begrenzt


3. Effektstärke δ

- Effektstärken machen vergleichbare Aussagen über die Größe von Unterschieden oder Zusammenhängen

7.1 Sequentialanalyse nach Wald

Grundlagen

Die „Stichprobe“

- Die Daten der Stichprobe nacheinander erhoben und verrechnet
- Nach jedem Datum fällt eine Entscheidung zwischen drei Handlungsalternativen:
 - Erhebung eines weitere Datums
 - Entscheidung für die Nullhypothese
 - Entscheidung gegen die Nullhypothese

**Beendigung
der Erhebung**
- Die Entscheidungsregeln werden aus den zuvor festgelegten Testkriterien hergeleitet
- Eine Konsequenz ist, dass bei sequentialstatistischen Verfahren im Vergleich zum Signifikanztest deutliche geringere Stichprobengrößen benötigt werden

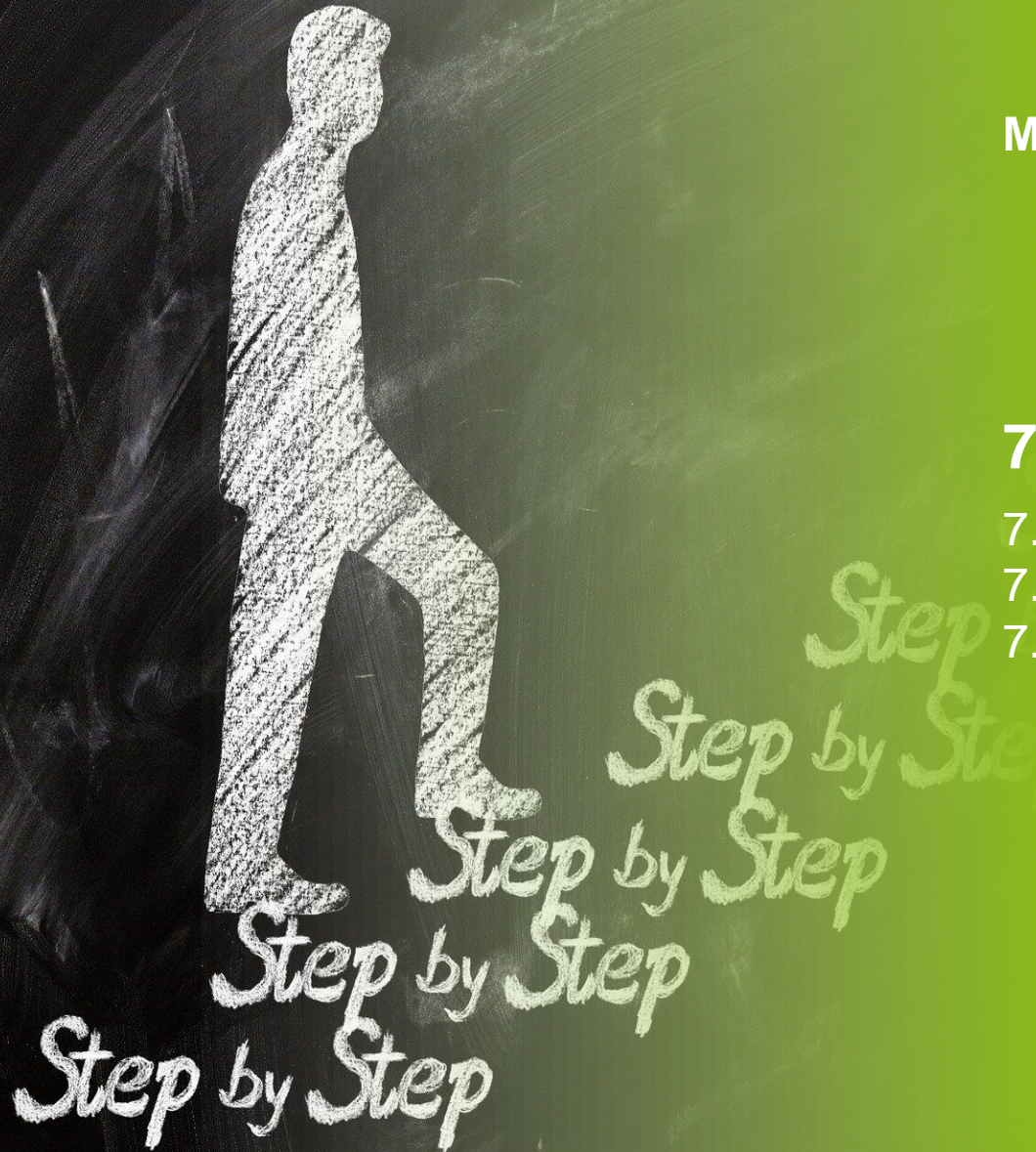
Multivariate Datenanalyse

7 Sequentialanalyse

7.1 Sequentialanalyse nach Wald

7.2 Prozedur

7.3 Stärken und Schwächen



Lehrstuhl
für Arbeits-,
Organisations- und
Wirtschaftspsychologie



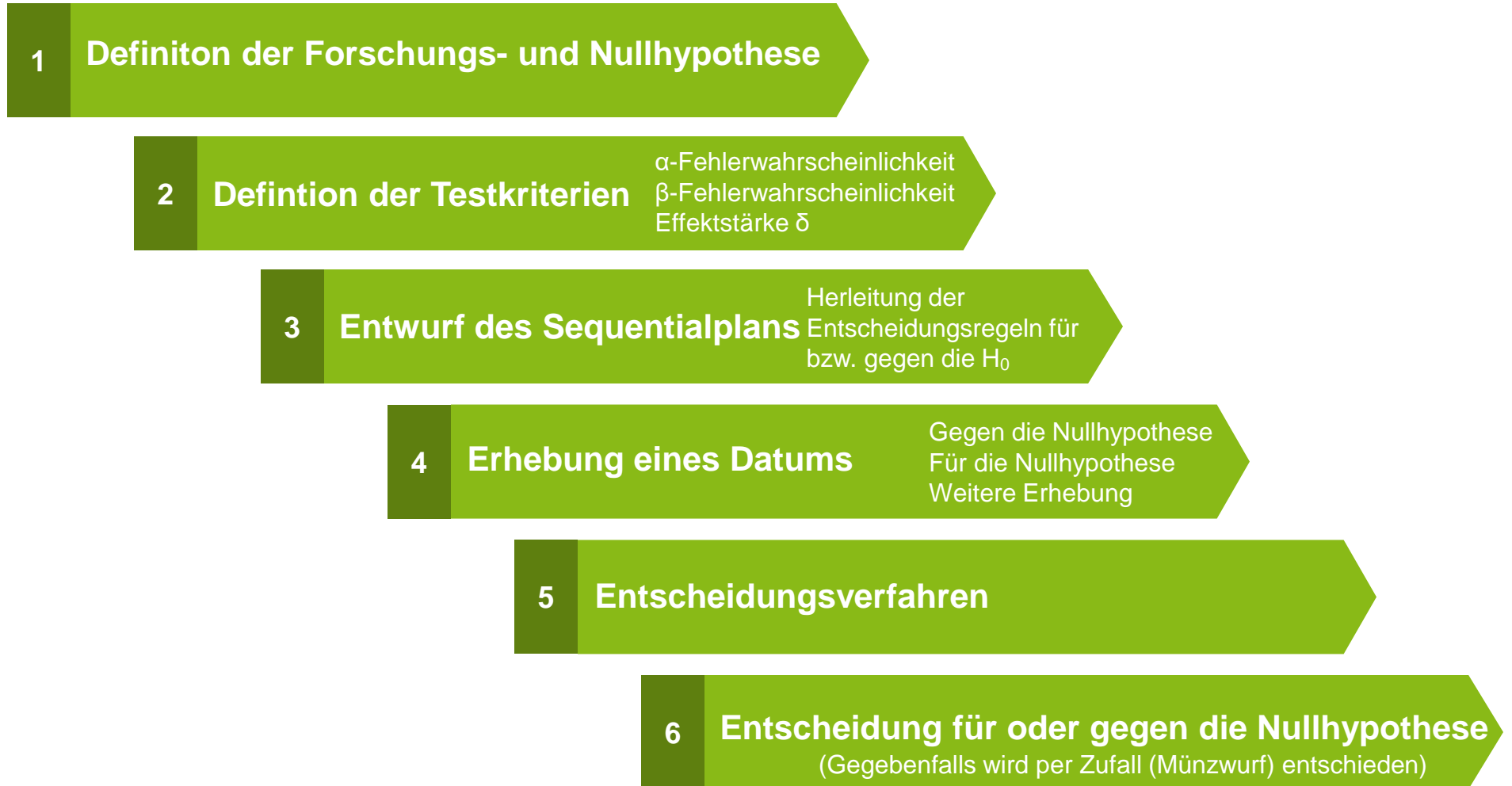
BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

Schumpeter School
of Business and Economics



7.2 Prozedur

Prozessschritte



7.2 Prozedur

Schritt 1: Definition der Hypothesen



- Die höhere Zielerreichungsquote, die durch den Einsatz von Coaches bewirkt werden soll, wird sequential-analytisch getestet
- Das Führungscoaching verheißt eine Zielerreichungsquote von mindestens 70%
- Bisher betrug die Zielerreichungswahrscheinlichkeit genau 50%
- Daraus ergeben sich für die Untersuchung zwei Hypothesen:
 - **Alternativhypothese:** Nach einem Jahr liegt die Zielerreichungswahrscheinlichkeit von mindestens 70%
→ $H_1: p_1(\text{„Zielerreichungsquote“}) \geq .70$
 - **Nullhypothese:** Nach einem Jahr hat sich die Zielerreichungsquote nicht verändert
→ $H_0: p_0(\text{„Zielerreichungsquote“}) = .50$

7.2 Prozedur

Schritt 2: Definition der Testkriterien

- **α -Fehlerwahrscheinlichkeit**

- Wird in dieser Untersuchung standardmäßig auf 5% limitiert
- Wenn die „wahre“ Zielerreichungsquote bei p_0 (50%) liegt, soll Coaching höchstens mit der Wahrscheinlichkeit von α (5%) auch in Zukunft für neu-eingestellten Manager eingesetzt werden

- **β -Fehlerwahrscheinlichkeit**

- Wird in diesem Fall auf 20% limitiert
- Wenn die „wahre“ Zielerreichungsquote bei p_1 (70%) liegt, soll Coaching höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von β (20%) in Zukunft nicht mehr angewandt werden.

- **δ -Effektstärke**

- Die Effektstärke ergibt sich aus der Differenz zwischen den postulierten Zielerreichungsquoten der Alternativ- und der Nullhypothese

$$p(H_1) - p(H_0) = \delta$$

$$0,70 - 0,50 = \underline{\underline{0,20}}$$

7.2 Prozedur

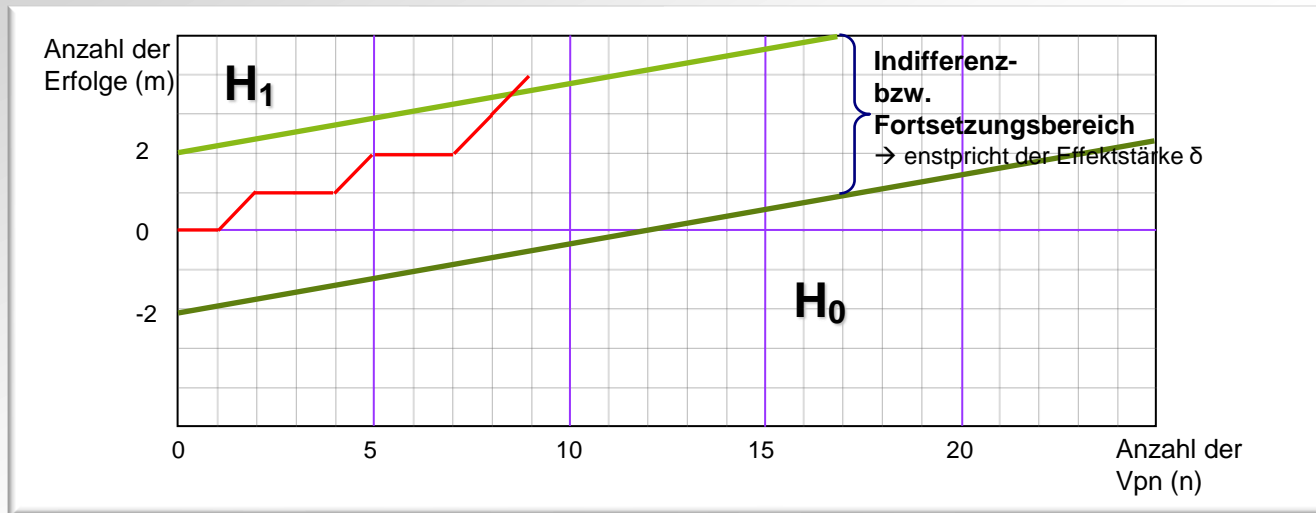
Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

- Wie schon oben erwähnt, entscheidet man sich nach jedem Datum für oder gegen die Nullhypothese
 - Wenn die Datenlage keine Entscheidung zulässt, wird ein weiteres Datum erhoben
- Bevor die Datenerhebung erfolgt, wird ein sogenannter Sequentialplan entworfen, der die aus den Testkriterien und den Hypothesen hergeleiteten Entscheidungsregeln enthält
- Dieser Plan lässt sich in einem Koordinatensystem grafisch darstellen
 - Auf der Abszisse (X-Achse) wird der Stichprobenumfang (n) aufgetragen
 - Auf der Ordinate (Y-Achse) wird die Anzahl der Erfolge (m) aufgetragen, die bei dem auf der Abszisse abgetragenen Stichprobenumfang beobachtet wurden.

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

Offener Sequentialplan:



- Die **blaue** Gerade definiert den Bereich, in dem man sich für die Alternativhypothese entscheidet
- Die **orange** Gerade grenzt den Bereich ab, in dem man sich für die Nullhypothese entscheidet
- Sukzessiv werden nun die Daten in den Sequentialplan eingetragen bis der **rote** Stichproben-Pfad eine der Geraden überschreitet

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

- Dem Sequentialplan liegt der sogenannte sequentielle Likelihood-Quotienten-Test zugrunde
→ sequential probability ratio test (SPRT)
- Der Likelihood-Quotient stellt in dem SPRT die Prüfgröße dar:

$$LR_m = \frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m; \theta_1)}{f(x_1, x_2, \dots, x_m; \theta_0)}$$

- Die Beobachtungswerte $x_1, x_2 \dots x_m$ sind Realisierungen identisch verteilter Zufallsgrößen
→ Also die einzelnen, erhobenen Daten, welche aus derselben Population stammen
 - θ (Theta) repräsentiert den wahren, unbekanntem Populationsparameter
→ θ_1 : in der Population gilt die H_1 ; θ_0 : in der Population gilt die H_0
- Der Quotient setzt die Wahrscheinlichkeit der erhaltenen Daten unter der einen Hypothese (H_1) in das Verhältnis zur Wahrscheinlichkeit der erhaltenen Daten unter der anderen Hypothese (H_0)

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

- Der Quotient LR_m wird nach jedem erhobenen Datum neu berechnet
- Nach jeder Neuberechnung wird dann eine der drei Handlungsalternativen gewählt: Annahme der H_0 oder Annahme der H_1 oder Erhebung eines weiteren Datums
- Die dazu notwendigen Entscheidungskriterien stellen die Entscheidungs-grenzen A und B dar
→ Diese Entscheidungsgrenzen sind so zu wählen, dass die vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten α und β eingehalten werden

$$A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

$$B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

- Wenn der Quotient LR_m zwischen den Werten A und B liegt, so wird ein weiteres Datum erhoben: $B < LR_m < A$
- Wenn der Quotient LR_m mindestens den Wert A annimmt, so entscheidet man sich für die Alternativhypothese: „ H_1 “: $LR_m \geq A$
- Wenn der Quotient LR_m höchstens den Wert B annimmt, so entscheidet man sich für die Nullhypothese: „ H_0 “: $LR_m \leq B$

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

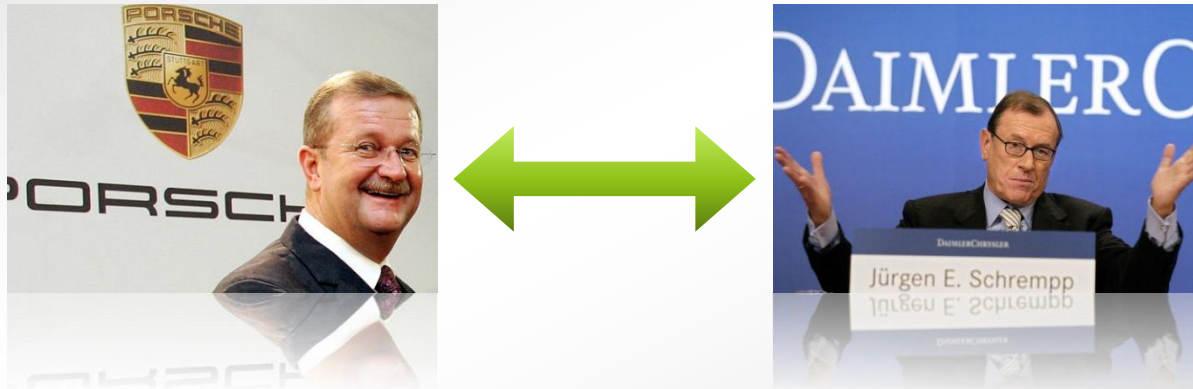
- Der SPRT hat folgende Eigenschaften:
 1. Das Verfahren führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 nach endlich vielen Schritten zu einer Entscheidung (entscheidungsdefinit)
 2. Das Verfahren besitzt bei Gültigkeit einer Hypothese in der Population unter allen vergleichbaren Verfahren minimalen durchschnittlichen Stichprobenumfang
- Dieser Test stellt die Grundlage für eine Reihe von inferenzstatistischen Auswertungs-verfahren dar
 - So lässt sich bspw. der t-Test ebenfalls sequentiell durchführen

Die bisherigen Ausführung bezogen sich auf die grundlegende Vorgehensweise beim SPRT – im Folgenden wird nun der SPRT auf die konkrete Untersuchungsfragestellung angewendet

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

- Für den Entwurf des Sequentialplans müssen nun die Grenzen (also die Geraden im Koordinatensystem) bestimmt werden, die den Annahme-Bereich für die Null- & Alternativhypothese definieren.
- Im Falle der vorliegenden Untersuchung handelt es sich um *binäre* Daten



- Entweder führt Coaching bei einem Manager zum Erfolg (1) oder nicht (0)

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

- Zu testen ist die Nullhypothese ($p_0=.50$) gegen die Alternativhypothese ($p_1 \geq .70$) mit den vorgebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten α (.05) und β (.20)
- Für 1-Stichprobenvergleich mit binären Daten ergibt sich bei n Daten und m Erfolgen folgender Likelihood-Quotient:

$$LR_n = \frac{\left(p_1^m \cdot (1 - p_1)^{n-m} \right)}{\left(p_0^m \cdot (1 - p_0)^{n-m} \right)}$$

- Der Quotient beinhaltet die von den Hypothesen postulierten Heilungswahrscheinlichkeiten p_1 und p_0
- m : Anzahl der Coaching-Erfolge(1)
- $n-m$: Anzahl der neu-eingestellten Manager, die nach dem Coaching *nicht* ihre vereinbarten Ziele erreichen(0)

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

- Den Indifferenzbereich mit seinen Grenzen (Geraden) erhält man durch die Linearisierung der multiplikativen bzw. exponentiellen Beziehungen mittels Logarithmieren des Quotienten:

$$\ln(B) < m \cdot \ln \left(\frac{(p_1 \cdot (1 - p_0))}{(p_0 \cdot (1 - p_1))} \right) + n \cdot \ln \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right) < \ln(A)$$
$$\Rightarrow a_0 + b \cdot n < m < a_1 + b \cdot n$$

- Daraus leiten sich nun die Grenzgeraden im Koordinatensystem s/m ab, welche die Annahme-Bereiche der Hypothesen definieren:

$$H_1: M = b \cdot n + a_1 \quad \rightarrow \text{obere Grenze}$$

$$H_0: M = b \cdot n + a_0 \quad \rightarrow \text{untere Grenze}$$

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln

Berechnung des Ordinaten-Abschnitts der Geraden:

$$a_0 = \frac{\ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)}{\ln\left(\frac{p_1 \cdot (1-p_0)}{p_0 \cdot (1-p_1)}\right)} \quad a_1 = \frac{\ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{\ln\left(\frac{p_1 \cdot (1-p_0)}{p_0 \cdot (1-p_1)}\right)}$$

Mit den entsprechenden Werten:

$$a_0 = \frac{\ln\left(\frac{.20}{1-.05}\right)}{\ln\left(\frac{.70 \cdot (1-.50)}{.50 \cdot (1-.70)}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{4}{19}\right)}{\ln\left(\frac{.70}{.30}\right)} = \underline{\underline{-1,8394}}$$

$$a_1 = \frac{\ln\left(\frac{1-.20}{.05}\right)}{\ln\left(\frac{.70 \cdot (1-.50)}{.50 \cdot (1-.70)}\right)} = \frac{\ln 16}{\ln\left(\frac{.70}{.30}\right)} = \underline{\underline{3,2727}}$$

Berechnung der Steigung der Geraden:

$$b = \frac{\ln\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)}{\ln\left(\frac{p_1 \cdot (1-p_0)}{p_0 \cdot (1-p_1)}\right)}$$

Mit den entsprechenden Werten

$$b = \frac{\ln\left(\frac{1-.50}{1-.70}\right)}{\ln\left(\frac{.70 \cdot (1-.50)}{.50 \cdot (1-.70)}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{.50}{.30}\right)}{\ln\left(\frac{.70}{.30}\right)} = \underline{\underline{0,6021}}$$

Daraus ergeben sich nun folgende Grenzgeraden:

$$H_1: M = 0,6 \cdot n + 3,27$$

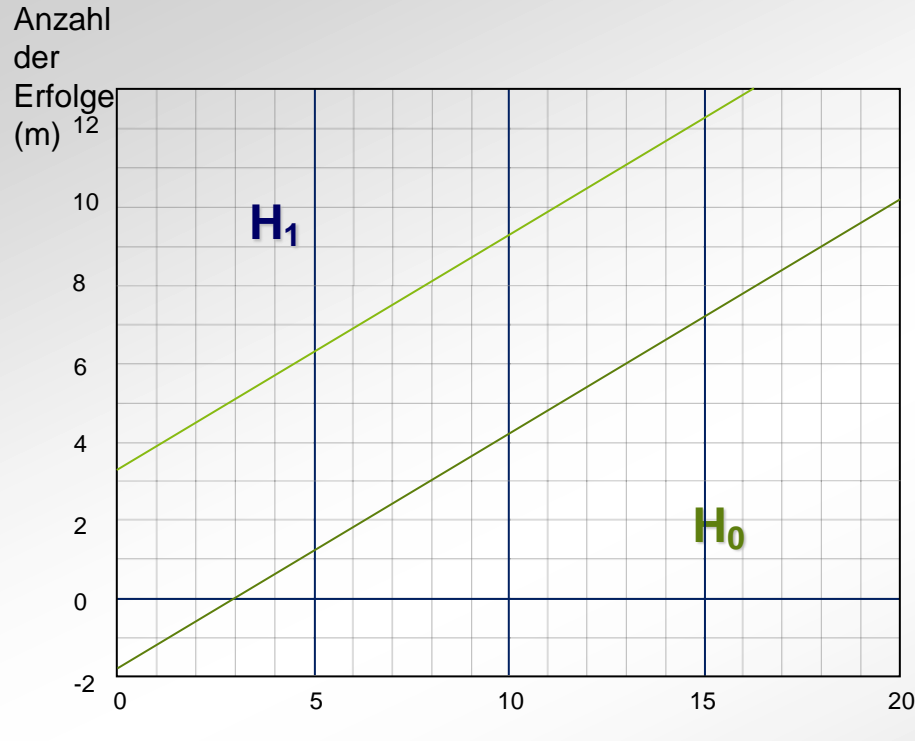
→ **obere Grenze**

$$H_0: M = 0,6 \cdot n - 1,84$$

→ **untere Grenze**

7.2 Prozedur

Schritt 3: Ableitung der Entscheidungsregeln



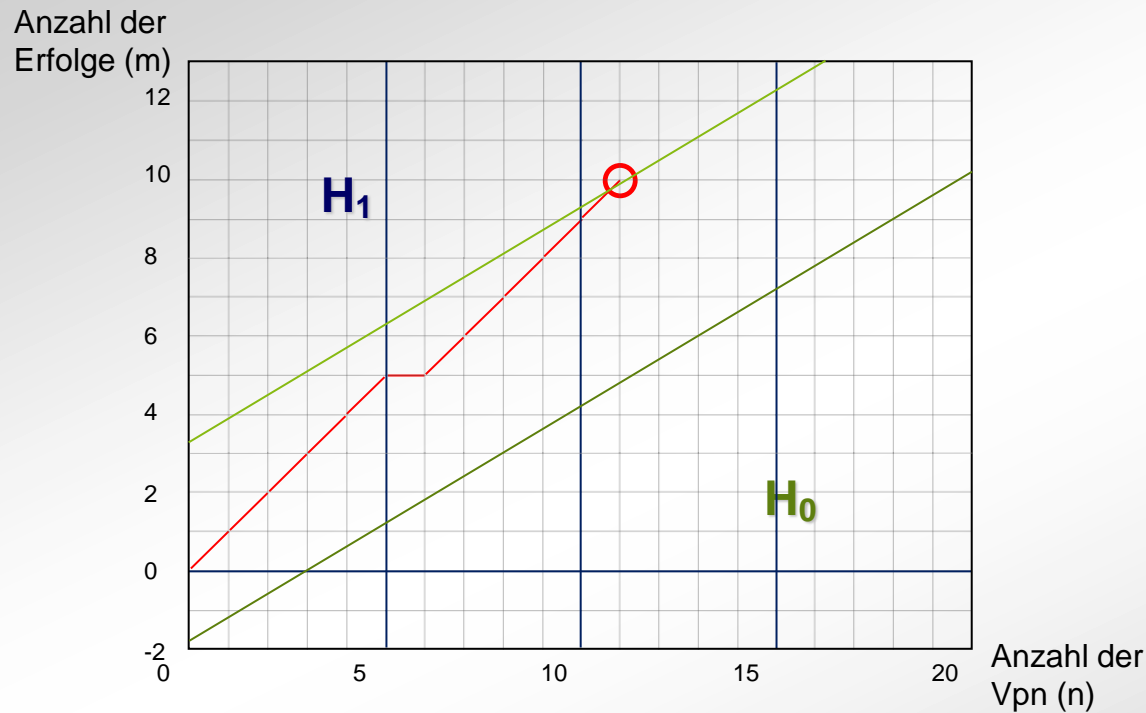
Die Entscheidungsregeln:

- Entscheidung für die Nullhypothese:
 $m \leq b \cdot n + a_0$
- Entscheidung für die Alternativhypothese:
 $m \geq b \cdot n + a_1$
- Fortsetzung der Beobachtungen:
 $b \cdot n + a_0 < m < b \cdot n + a_1$

7.2 Prozedur

Schritt 4 und 5: Erhebung & Entscheidungsverfahren

Darstellung im Koordinatensystem:



<i>Coachingklient</i>	<i>Ergebnis</i>
Bereichsleiter	1
Abteilungsleiter I	1
Key Account Mng	1
Finanzvorstand	1
Einkaufsleiter	1
Produktionsleiter	0
Abteilungsleiter II	1
Vertriebsleiter	1
Controller	1
Leiter HR	1
Leiter Marketing I	1
Leiter Marketing II	
Personalvorstand	

7.2 Prozedur

Schritt 6: Entscheidung

Entscheidung für oder gegen die Nullhypothese

- Nach 10 Erfolgen (m) und 11 Beobachtungen (n) erfolgt die Entscheidung für die Alternativhypothese:

$$10 \geq 0,6 \cdot 11 + 3,27$$

$$10 \geq 9,87$$

- Schlussfolgerung:
 - Die Wahrscheinlichkeit, dass 10 von 11 gecoachten Managern ihre Ziele nach einem Jahr erreicht haben, unter der Bedingung, dass in der Population die Nullhypothese gilt ($p_0=.50$), ist geringer als 5% (α)

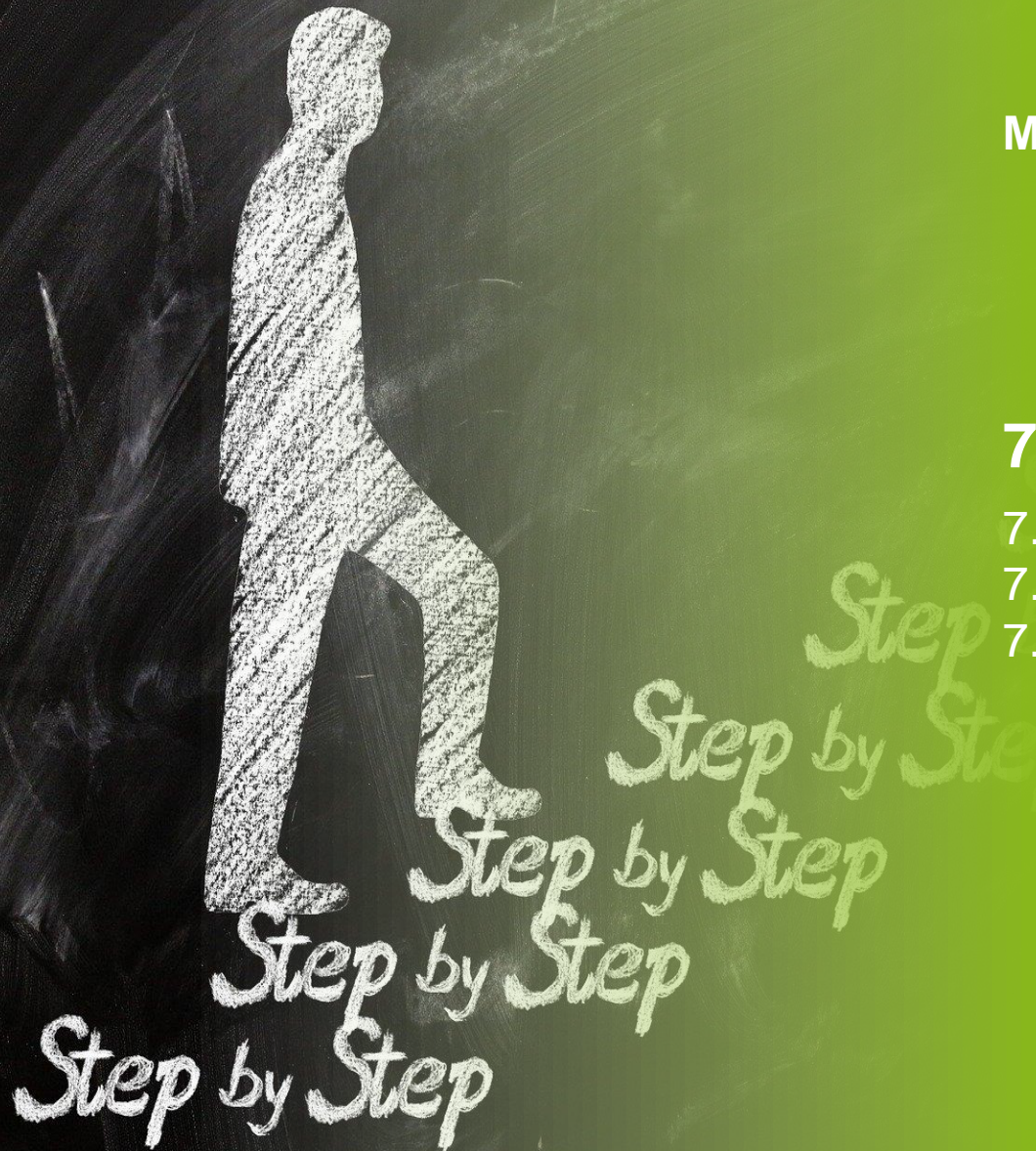
Multivariate Datenanalyse

7 Sequentialanalyse

7.1 Sequentialanalyse nach Wald

7.2 Prozedur

7.3 Stärken und Schwächen



Lehrstuhl
für Arbeits-,
Organisations- und
Wirtschaftspsychologie



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

Schumpeter School
of Business and Economics



7.3 Stärken und Schwächen

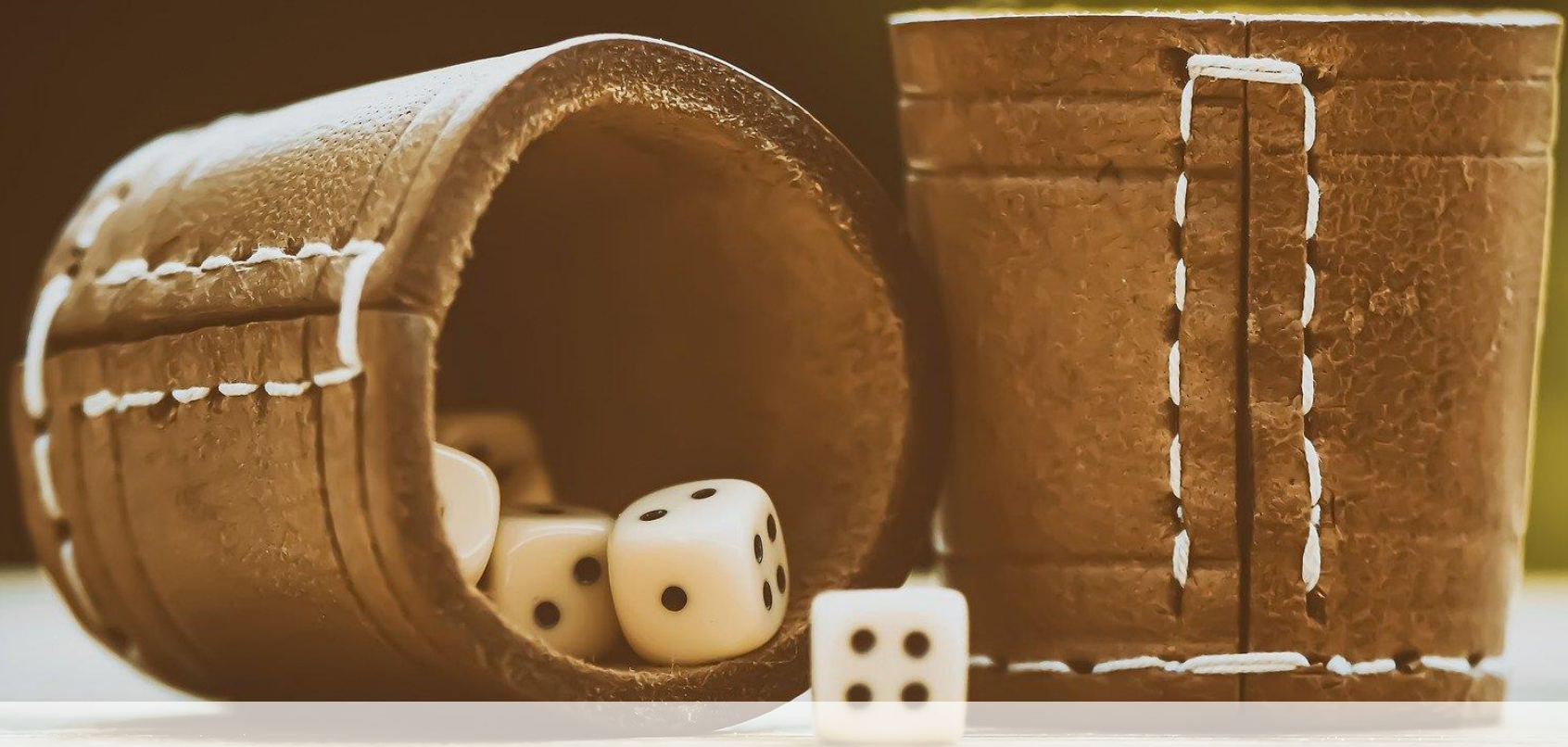
Sequentialanalyse

- Der β -Fehler und die Effektstärke lassen sich relativ einfach bestimmen
- Geringe Stichprobengrößen reichen aus
- Kosten- und Zeitersparnis
- Keine Manipulierbarkeit der Stichprobengröße

Stärken der Sequentialanalyse

Schwächen der Sequentialanalyse

- Der α - und β -Fehler, sowie die δ -Effektstärke können willkürlich festgelegt werden
- Hoher und schwieriger Rechenaufwand



Teil 8: Einführung in Bayes-Statistik

8.1 Einführung Bayes-Statistik

Bayes-Theorem

- Grundlage für die Bayes-Statistik stellt das Bayes-Theorem des engl. Mathematikers Thomas Bayes (1701 – 1761)

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- Für zwei Ereignisse A und B lässt sich die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B , durch die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A errechnen
- $P(A | B)$ → Bedingte Wahrscheinlichkeit für A , unter der Bedingung, dass B eingetreten ist
 - $P(B | A)$ → Bedingte Wahrscheinlichkeit für B , unter der Bedingung, dass A eingetreten ist
 - $P(A)$ → A-Priori-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
 - $P(B)$ → A-Priori-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B

8.1 Einführung Bayes-Statistik

Bayes-Theorem

Die Bayes-Statistik nutzt dieses Theorem, um die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese unter der Bedingung der (empirischen) Daten zu berechnen

$$P(H | D) = \frac{P(D | H) \cdot P(H)}{P(D)}$$

Die Bayes-Statistik ist somit eine Alternative zum frequentistischen Ansatz (*null-hypothesis significant testing, NHST*), der die Wahrscheinlichkeit der Daten unter der Bedingung einer Hypothese $P(D | H)$ testet

- Definition p -Wert: Der p -Wert ist die Wahrscheinlichkeit unter Gültigkeit der Nullhypothese ein empirisches Ergebnis zu finden. Je kleiner der p -Wert ist, desto stärker spricht das empirische Ergebnis gegen die Nullhypothese

Die Bayes-Statistik gibt die Schätzungen von Parametern in Form von Verteilungen und nicht als diskreten Wert an. Zudem kann Vorwissen (theoretische Annahmen oder empirische Ergebnisse aus früheren Studien) in die Berechnung der Verteilung mit einfließen

Posterior-Verteilung = Prior*Daten

8.1 Einführung Bayes-Statistik

Beispiel Bayes-Theorem

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die bei der Mammographie ein positives Ergebnis erhalten hat, tatsächlich Brustkrebs hat?
 - Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die untersucht wird, Brustkrebs hat, liegt bei 1%.
 - Wenn eine Frau, die *tatsächlich* Brustkrebs hat, untersucht wird, ist die Wahrscheinlichkeit für ein positives Ergebnis 90%.
 - Wenn eine Frau, die *keinen* Brustkrebs hat, untersucht wird, ist die Wahrscheinlichkeit für ein positives Ergebnis 10%.

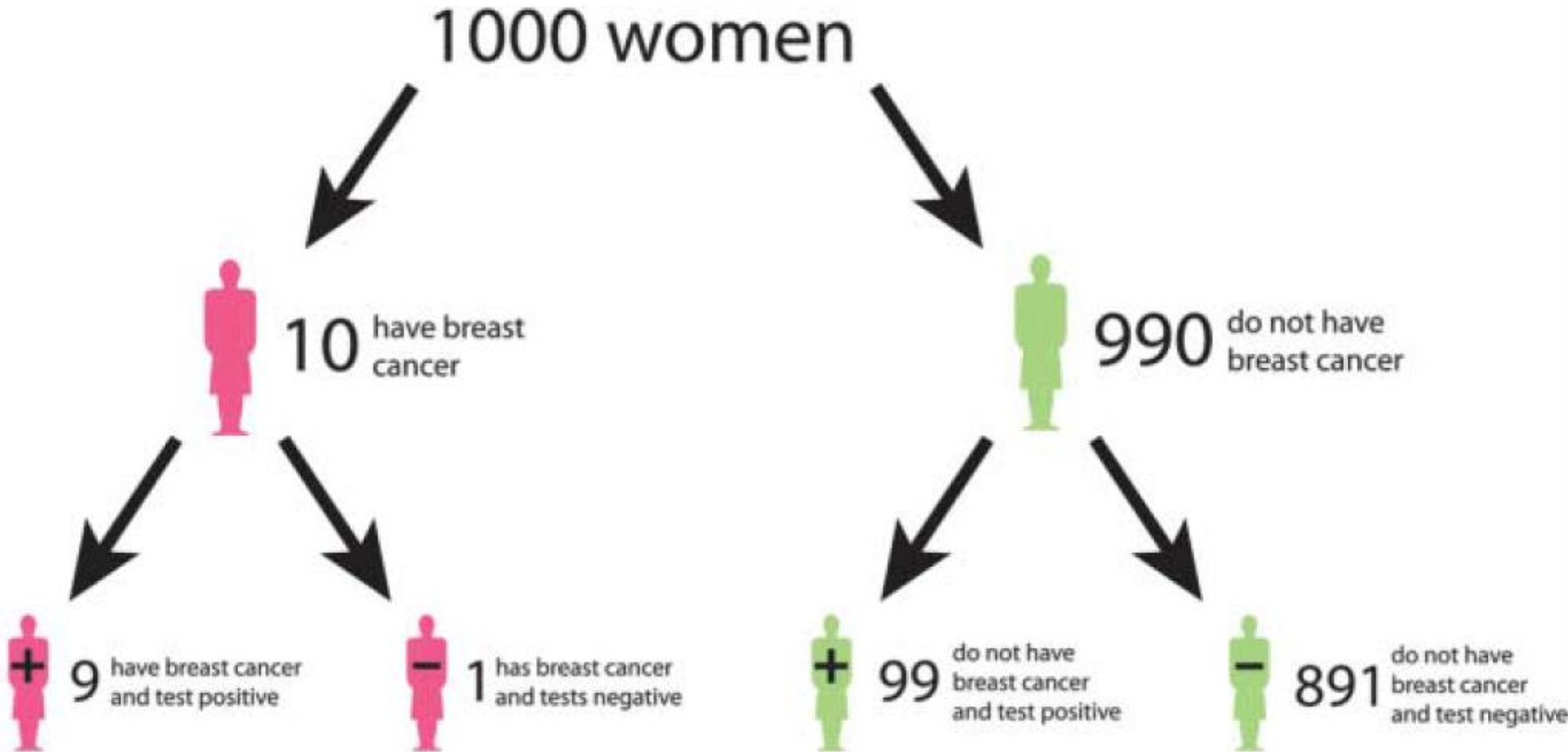
- $P(H) = 1\%$; Gegenwahrscheinlichkeit $P(\bar{H}) = 99\%$

$$P(H | D) = \frac{P(D | H) \cdot P(H)}{P(H) \cdot P(D|H) + P(\bar{H}) \cdot P(D|\bar{H})} = \frac{0.01 \cdot 0.9}{0.01 \cdot 0.9 + 0.99 \cdot 0.1} = 0.08\bar{3}$$

→ Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 8.3%

8.1 Einführung Bayes-Statistik

Beispiel Bayes-Theorem



Quelle: Spiegelhalter, Pearson & Short (2011)

8.1 Einführung Bayes-Statistik

Posterior-Verteilung

Die Posterior-Verteilung ist die Integration von Vorannahmen (Prior) und den Daten

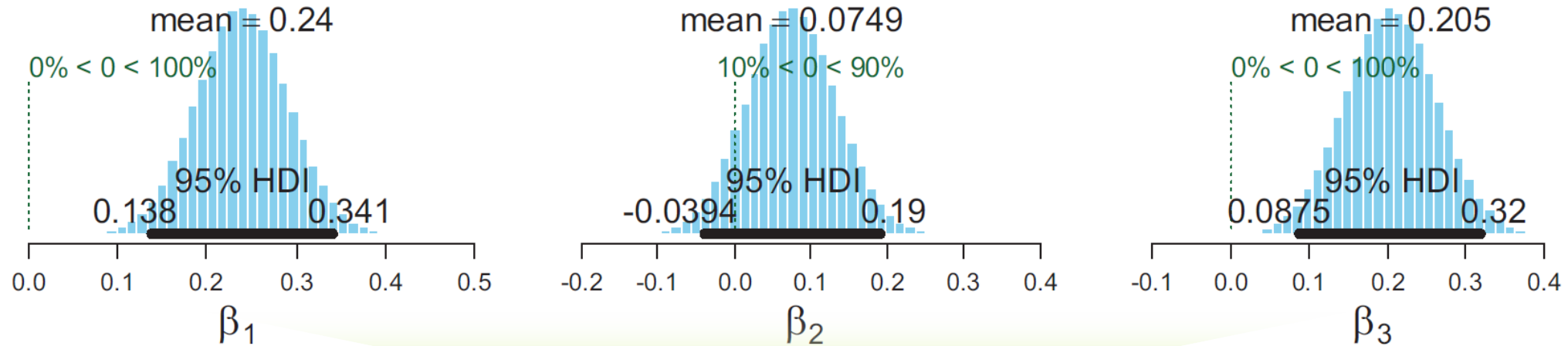
Posterior-Verteilung = Prior * Daten

Die Integration erfolgt anhand von sogn. Markov-Chain-Monte-Carlo (MCMC)-Algorithmen

MCMC ist ein iterativer Algorithmus. Der Grundgedanke ist, dass die Posterior-Verteilung anhand einer sehr großen Zufallsstichprobe der Parameterschätzer (z. B. 250.000) approximiert wird. Die Algorithmus konvergiert, wenn mehrere voneinander unabhängige Markov-Chains zu äquivalenten Ergebnissen kommen.

8.1 Einführung Bayes-Statistik

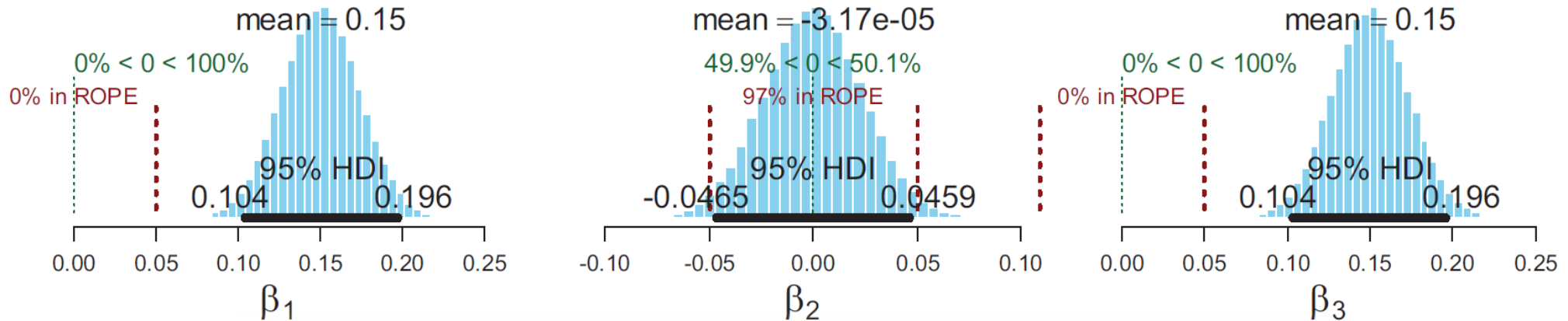
Posterior-Verteilung



- Aus der Verteilung lassen sich Mittelwert, Varianz und Quantile bestimmen
- Die Varianz/Streuung der Parameterschätzer quantifiziert die Unsicherheit in der Schätzung
- High Density Interval (HDI): Gibt die Verteilung der möglichen bzw. plausiblen Werte an. Schließt das Intervall die Null mit ein, zählt diese zu den möglichen Ausprägungen für den Parameterschätzer

8.1 Einführung Bayes-Statistik

Posterior-Verteilung

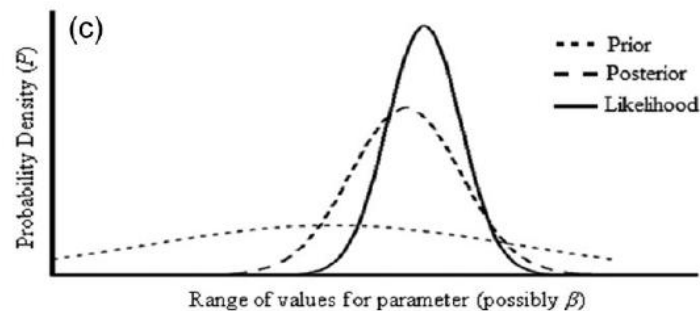
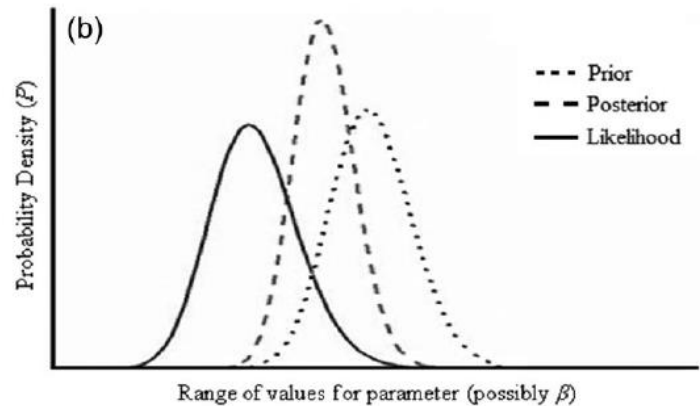
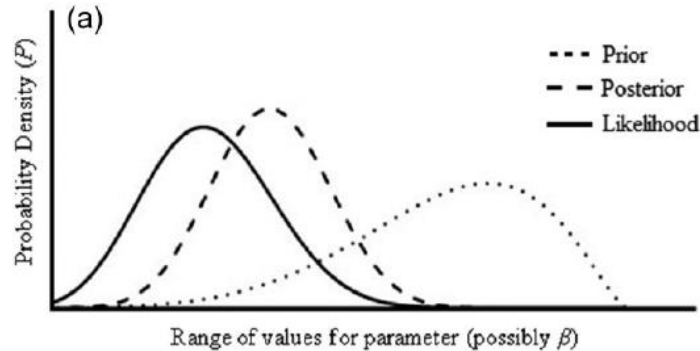


Testung der Nullhypothese

- Festlegung einer *region of practical equivalence (ROPE)* um einen bestimmten Wert (z. B. Null \pm 0.05)
- Ablehnung der Nullhypothese, wenn das HDI komplett außerhalb des ROPE liegt
- Beibehaltung der Nullhypothese, wenn das HDI komplett innerhalb des ROPE liegt, da 95% der simulierten Parameter äquivalent zu Null sind

8.1 Einführung Bayes-Statistik

Posterior-Verteilung: Einfluss der Priors



- Die Wahl der Priors beeinflusst zusammen mit den Daten (hier Likelihood) die Posterior-Verteilung; dabei werden Mittelwert und Varianz des Priors festgelegt
- Uninformativer Prior: Wenn wenig Sicherheit über den Prior besteht, resultiert dies in einer hohen Varianz (c)
- Informativer Prior: Besteht eine hohe Sicherheit über den Prior, resultiert dies in einer geringen Varianz (b)

8.1 Einführung Bayes-Statistik

Vergleich NHST und Bayes-Ansatz

	NHST	Bayes
1. Einbeziehung von Vorwissen	Keine Einbeziehung von Vorwissen; nur vorhandene Daten werden analysiert	Vorwissen kann in Form eines Priors in die Parameterschätzung mit einfließen
2. Testung der Nullhypothese	Eine Nullhypothese kann nicht akzeptiert, sondern nur verworfen werden	Wirkliche Testung der Nullhypothese möglich
3. Möglichkeit komplexe Modelle zu testen	Parameterschätzung oft schwierig, da Modelltestung an viele Voraussetzungen geknüpft ist	Flexible Anpassung der Modelle an unterschiedliche Datenstrukturen und Verteilungen (z. B. nicht-normalverteilt und nicht-linear)
4. Unbalancierte oder kleine Stichproben	p -Werte bei kleinen Stichproben oder unbalanciertem Design häufig verzerrt	Kleine Stichproben oder unbalancierte Designs werden durch höhere Unsicherheit in Posterior-Verteilung berücksichtigt
5. Multiple Vergleiche	Korrektoren der p -Werte nötig	Keine Korrekturen nötig



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!