HELMUT HASSE

ÜBER DIE KLASSENZAHL ABELSCHER ZAHLKÖRPER

MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

HERAUSGEGEBEN VON DER

DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATHEMATIK

II. ABTEILUNG

MATHEMATISCHE MONOGRAPHIEN

BAND I

ÜBER DIE KLASSENZAHL ABELSCHER ZAHLKÖRPER

VON

DR. HELMUT HASSE

O. PROF. AN DER UNIVERSITÄT HAMBURG

1 9 5 2

AKADEMIE-VERLAG BERLIN

ÜBER DIE KLASSENZAHL ABELSCHER ZAHLKÖRPER

VON

DR. HELMUT HASSE

O. PROF. AN DER UNIVERSITÄT HAMBURG

1952

AKADEMIE-VERLAG BERLIN

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19
Lizenz-Nr. 202 · 100/31/51
Satz und Druck: Buchdruckerei Oswald Schmidt GmbH., Leipzig III-18-65
Bestell- und Verlagsnummer: 5062
Printed in Germany

VORWORT

Die algebraische Zahlentheorie hat sich aus den ersten Ansätzen bei Gauß unter den Händen der großen Meister des vergangenen und dieses Jahrhunderts zu einem gewaltigen Lehrgebäude entwickelt, das heute überreich an allgemeinen Sätzen, beherrschenden methodischen Gesichtspunkten und tiefen strukturellen Einsichten im wesentlichen abgeschlossen dasteht. Die erste Phase dieser Entwicklung hat Hilbert [2] in seinem berühmten Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper[1]) zusammenfassend dargestellt. Dieser Bericht bringt in seinen ersten beiden Teilen die allgemeinen Grundlagen der Theorie und geht dann in weiteren drei Teilen auf drei spezielle Typen algebraischer Zahlkörper des näheren ein, nämlich auf die quadratischen Zahlkörper, die Kreiskörper und die Kummerschen Zahlkörper. Vom heutigen Standpunkt aus gesehen führen diese letzten drei Teile des Hilbertschen Zahlberichts Spezialfälle der allgemeinen Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper durch. Sie leiten die zweite Phase der Entwicklung ein, zu der Hilbert selbst mit seiner kühnen Konzeption des Klassenkörperbegriffs und der Hauptsätze der Klassenkörpertheorie den Anstoß gab. Diese zweite Phase, die Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper, in der die Klassenkörpertheorie in voller Allgemeinheit entwickelt und auf die Herleitung des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes angewandt wird, habe ich [1] im Anschluß an Hilberts Zahlbericht in einem dreiteiligen Bericht[2]) zusammenfassend dargestellt.

Bei dieser ganzen Entwicklung, die von allgemeinen theoretischen, strukturellen, methodischen und systematischen Gesichtspunkten geleitet wurde, ist nun aber das jedem echten Zahlentheoretiker eigene Bedürfnis nach expliziter Beherrschung des behandelten Gegenstandes bis zur Durchführung numerischer Beispiele stark in den Hintergrund getreten. Fragt man heute einen Zahlentheoretiker, für welche Typen algebraischer Zahlkörper er in der Lage ist, die Gesetzlichkeiten der allgemeinen Theorie durch explizite Aufstellung der allgemeinen Strukturinvarianten für den betreffenden Körpertypus zu erläutern oder auch als Vorbereitung dazu nur etwa eine Ganzheitsbasis, die Diskriminante, ein Grundeinheitensystem und die Klassenzahl nach einem systematischen strukturinvarianten Verfahren zu gewinnen, so wird, wenn er ehrlich ist, die Antwort im allgemeinen

[1]) Im folgenden kurz als „Zahlbericht" zitiert.

[2]) Im folgenden kurz als „Klassenkörperbericht" zitiert.

lauten: nur für die quadratischen Zahlkörper. Nur in diesen Körpern fühlt sich heute jeder Zahlentheoretiker und wohl auch mancher andere Mathematiker so zu Hause, daß er in ihnen mit den Begriffen der allgemeinen Theorie nach Belieben schalten und walten kann, während in höheren Körpertypen selbst bei völliger und souveräner Beherrschung der allgemeinen Theorie die Bewegungsfreiheit zum mindesten stark eingeschränkt ist. Zwar mangelt es nicht an Ansätzen zu einer entsprechenden Beherrschung auch anderer als quadratischer Zahlkörper und an numerischen Beispielen, die zur Erläuterung allgemeiner Gesetzlichkeiten hier und dort angefügt sind. Jedoch fehlt es den meisten solchen Ansätzen an Einheitlichkeit, an Systematik und vor allem an dem Gefühl dafür, daß man den zu behandelnden Körpertypus nicht durch zufällige Bestimmungsstücke — wie etwa die Koeffizienten einer erzeugenden Gleichung, sei diese willkürlich gewählt oder durch irgendwelche Reduktionsbedingungen normiert —, sondern durch Strukturinvarianten, wie Diskriminante, zugeordnete Klassengruppe, Führer, Charaktere, beschreiben sollte, und in den numerischen Beispielen herrschen ad hoc geschaffene Kunstgriffe und mehr oder weniger tastendes Erraten gegenüber systematischen Berechnungsverfahren vor. So kann man etwa für einen vorgelegten Körpertypus, sagen wir die absolut-zyklischen Zahlkörper, das konstruktive Verfahren der allgemeinen Theorie zur Gewinnung einer Ganzheitsbasis ablaufen lassen, jedoch erhält man auf diese Weise im allgemeinen nicht eine ausgezeichnete, aus strukturinvarianten Bestimmungsstücken dieses Körpertypus gebildete Ganzheitsbasis. Mit einer *complete list of all cases*, wie sie für solche und ähnliche Fälle in zahlreichen nordamerikanischen Arbeiten als Endziel registriert wird, ist das Bedürfnis des tiefer strebenden Zahlentheoretikers durchaus nicht befriedigt. Diesen uns oft reichlich flach erscheinenden *complete solutions* mangelt es meistens an der Eingliederung des betrachteten Gegenstandes in eine allgemeine Theorie und an dem sinnvollen Beherrschtsein des Spezialfalles von den in dieser Theorie maßgebenden Strukturinvarianten. Man wird an den Typus gewisser Arbeiten aus den beschreibenden Naturwissenschaften oder aus der Vorgeschichte erinnert, die zwar getreulichst alles Material sammeln und registrieren, aber versäumen, in diese Sammlung Ordnung und System zu bringen, sie nach allgemeinen Gesichtspunkten zu deuten und das Wesentliche vom Unwesentlichen, das Gesetzliche vom Zufälligen abzuheben.

Was die vorstehend mehrfach berührte Durchführung numerischer Beispiele betrifft, so möchte ich hier dem Mißverständnis vorbeugen, daß ich solchen Beispielen gegenüber allgemeinen Sätzen eine unberechtigte Bedeutung beimesse. Manche zahlentheoretischen Lehrbücher, Arbeiten oder Vorträge sind mit numerischen Beispielen geradezu gespickt, und es wird gar an ihnen die allgemeine Untersuchung fortgeführt. Die Erfahrung lehrt, daß der Leser oder Hörer, wenn er nicht übertrieben gewissenhaft ist, diese Beispiele einfach übergeht und dem allgemeinen Faden der Untersuchung nachstrebt. Er wird sich lieber selbst Beispiele suchen und diese durchführen, und das mit Recht. Denn der Sinn eines Zahlenbeispiels liegt doch keinesfalls in der formvollendet mitgeteilten Rechnung und ihrem Ergebnis, sondern in der Aktivität, die zu seiner Durchführung erforderlich ist. Das Studium einer allgemeinen Theorie entwickelt ein Potential von Können, von geistiger Kraft und von Macht über die behandelte Materie. Die Durchführung eines Beispiels ist der Prüfstein dafür, daß man sich die Theorie innerlich zu eigen gemacht hat und sie souverän beherrscht, ist die Probe auf die gewonnene Kraft und Macht. Die Ausübung dieses Könnens, das Spielenlassen dieser Kraft, die Anwendung dieser Macht löst bei dem, der das Beispiel selber rechnet, ein Vollgefühl von Freude und Befriedigung aus, nicht aber auch bei dem, der es fertig vorgesetzt bekommt. Die Frage, inwieweit Entsprechendes ganz allgemein für jede Art mathematischer Betätigung, also auch für das Entwickeln mathematischer Theorien gilt, will ich hier nur aufwerfen. es ließe sich viel dazu sagen. Mit vollem Recht tritt in der Physik neben die Vorlesung über Experimentalphysik das physikalische Praktikum, in dem das rezeptiv Erlernte in eigener Aktivität befestigt werden soll. Eine ganz entsprechende Rolle hat in der Zahlentheorie die Durchführung numerischer Beispiele. Darüber hinaus sind sie in der Hand des forschenden Mathematikers genau das, was für den Physiker das Experiment ist, nämlich eines der Hauptmittel zur Auffindung neuer Gesetzlichkeiten. Hiernach ist klar, aus welchen Gründen und aus welchen nicht ich Wert auf die explizite Beherrschung der allgemeinen Theorie bis zur Durchführung numerischer Beispiele lege, aber in meiner Arbeit selbst solche nur dort bringe, wo es aus sachlichen Gründen geboten erscheint.

Der Sinn dafür, daß die explizite Beherrschung des Gegenstandes bis in alle Einzelheiten mit der allgemeinen Fortentwicklung der Theorie Schritt halten sollte, war bei Gauß und später vor allem noch bei Kummer in ganz ausgeprägter Weise vorhanden. Gerade bei Kummer findet sich eine Fülle von in dieser Richtung liegenden ergänzenden Untersuchungen zu seiner allgemeinen Theorie der idealen Zahlen. Unter dem beherrschenden Einfluß, den Hilbert auf die weitere Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie ausgeübt hat, ist jedoch dieser Sinn mehr und mehr verlorengegangen. Es ist typisch für Hilberts ganz auf das Allgemeine und Begriffliche, auf Existenz und Struktur gerichtete Einstellung, daß er in seinem Zahlbericht alle mit der expliziten Beherrschung des Gegenstandes sich befassenden Untersuchungen und Ergebnisse von Kummer und anderen durch kurze Hinweise oder Andeutungen abtut, ohne sich mit ihnen im einzelnen zu beschäftigen, wie er ja auch die mehr rechnerischen, konstruktiven und daher der expliziten Durchführung leicht zugänglichen Beweismethoden Kummers systematisch und folgerichtig durch mehr begriffliche, numerisch schwerer zugängliche und kaum kontrollierbare Schlußweisen ersetzt hat. Auch Dedekind mit seiner stark begrifflichen, schon tief ins Axiomatische vorstoßenden Methodik hat an dieser Entwicklung entscheidenden Anteil, während auf der anderen Seite die mehr konstruktiven Methoden von Kronecker und Hensel die Kummersche Tradition weiterführen, sich aber gegenüber dem beherrschenden Einfluß Hilberts nur schwer durchsetzen, bis dann allerdings in letzter Zeit entscheidende Erfolge gerade dieser Methodik den Boden für die Rückkehr zu einem organischen Gleichgewicht beider Richtungen bereitet haben. Es soll selbstverständlich nicht das große Verdienst verkannt oder geschmälert werden, das sich Hilbert gerade durch sein unbeirrbares, konsequentes Festhalten an der geschilderten Einstellung um die Aufwärtsentwicklung der Theorie der algebraischen Zahlen zu eindrucksvoller Allgemeinheit, begrifflicher Klarheit und formvollendeter Einfachheit erworben hat. Seine großen Erfolge und all das, was nach ihm Kommende in seinem Geiste und mit seinen Methoden zur Vollendung des von ihm begonnenen Bauwerks beitragen konnten, sprechen für sich. Nur ist mir im Laufe meiner eigenen Teilnahme an der Endphase dieser Entwicklung immer deutlicher und eindringlicher bewußt geworden, daß bei aller blendenden Schönheit und imponierenden Größe doch noch etwas Wesentliches fehlt, damit man sich in dem errichteten Bau auch so recht zu Hause fühlen kann. Man muß seine einzelnen Stockwerke, seine einzelnen Räume in ihrer besonderen Eigenart und in ihrer Beziehung zum Ganzen genauestens kennenlernen, und man muß lernen, sich in ihnen frei zu bewegen. Dazu erscheint es mir, vom Bilde zum Gegenstand zurückkehrend, geboten, die der Hilbertschen entgegengesetzte Einstellung auf das Explizite und auf das Detail bis zum Numerischen wieder mehr zu ihrem natürlichen Recht kommen zu lassen. Von diesem Gesichtspunkt geleitet, hatte ich schon im zweiten Teil meines Klassenkörperberichts, der sich mit dem allgemeinsten Reziprozitätsgesetz befaßt, den expliziten Formeln zu diesem Gesetz, anknüpfend an vorhilbertsche Untersuchungen, einen verhältnismäßig breiten Raum gegeben. Mit der vorliegenden größeren Arbeit greife ich diesen Gesichtspunkt an einem anderen Gegenstand erneut auf.

Ich habe mir zum Ziel gesetzt, wenn möglich die Klasse der absolut-abelschen Zahlkörper, zum mindesten aber die Klasse der absolut-zyklischen Zahlkörper in systematischer und strukturinvarianter Weise so weitgehend zu erschließen, daß man sich in ihnen ebenso frei bewegen kann wie in den quadratischen Zahlkörpern. Als Prüfstein für die Erreichung dieses Zieles mag gelten, daß es auf Grund der zu entwickelnden Methoden, Formeln und Ergebnisse gelingt, für diese Körper nach einem schematischen Verfahren ebensolche Tafeln zu berechnen, wie sie Sommer [1] für die quadratischen Zahlkörper seinem bekannten Lehrbuch beigegeben hat. Derartige Tafeln würden für jeden Zahlentheoretiker, der sich für die schon gewonnenen allgemeinen Gesetzlichkeiten aus der algebraischen Zahlentheorie und für etwaige weitere solche Gesetzlichkeiten numerische Beispiele bilden will, sei es um sich die Theorie innerlich nahezubringen, sei es um auf experimentellem Wege neuen Gesetzen und Zusammenhängen auf die Spur zu kommen, ein äußerst wertvolles Handinstrument bilden, so wie es die Sommerschen Tafeln schon heute sind. Bisher liegen in dieser Richtung nur die nach Kummers Angaben berechneten Tafeln komplexer Primzahlen von Reuschle [1] vor, die aber trotz der Fülle des in ihnen zusammengetragenen Zahlenmaterials unbefriedigend sind, weil sie gerade die wesentlichen Dinge, nämlich Grundeinheiten, Klassenzahl und Klassengruppe, nicht enthalten.

Die vorliegende Arbeit soll als ersten Beitrag zu der genannten umfassenden Zielsetzung die Grundlagen für die systematische Berechnung der Klassenzahl absolut-abelscher Zahlkörper entwickeln. Darüber hinaus ist sie als eine Ergänzung des Hilbertschen Zahlberichts und meines Klassenkörperberichts gedacht. Neben den Gesichtspunkt der Ausnutzung der allgemeinen Klassenzahlformel zur wirklichen Berechnung der Klassenzahl wird demgemäß der Gesichtspunkt treten, über die von Kummer und anderen gewonnenen Ergebnisse für die Klassenzahl der Kreiskörper und einiger anderer Körpertypen zu berichten, diese Ergebnisse auf beliebige absolut-abelsche Zahlkörper zu verallgemeinern und sie vom Standpunkt der allgemeinen Klassenkörpertheorie aus zu beleuchten.

Neben den eigentlichen Ergebnissen über die Klassenzahl absolut-abelscher Zahlkörper enthält die Arbeit eine Fülle von auch an sich reizvollem algebraischem und zahlentheoretischem Detail, teils in die Beweise eingearbeitet, teils besonders hervorgehoben, so eine eigenartige Verallgemeinerung der bekannten Zerlegung der Gruppendeterminante einer abelschen Gruppe in Linearfaktoren, Sätze über das Verzweigungsverhalten eines absolut-abelschen Zahlkörpers über seinem größten reellen Teilkörper sowie ein neuartiges Seitenstück zum Gaußschen Lemma über quadratische Reste. Entgegen mancher Äußerung von anderer Seite bin ich immer der Auffassung gewesen, daß die klassische Zahlentheorie mit ihrer auf die Wirklichkeit der natürlichen Zahlen gerichteten Zielsetzung und Methodik heute durchaus noch einer lebendigen und fruchtbaren Weiterentwicklung auf dem ihr ureigenen Boden fähig ist, auch ohne daß man in abstrakten algebraischen Gefilden oder in Topologie, Mengenlehre, Axiomatik neue Nahrung für den arithmetischen Betätigungsdrang zu suchen braucht. Wie man sich in der Musik nach der in heroischen und dämonischen Werken und in kühnsten Phantasien schwelgenden romantischen und nachromantischen Epoche heute bei aller Freude an diesem Schaffen doch auch wieder stärker auf den Urquell reiner und schlichter Musikalität der alten Meister besinnt, so scheint mir auch in der Zahlentheorie, die ja wie kaum eine andere mathematische Disziplin von dem Gesetz der Harmonie beherrscht wird, eine Rückbesinnung auf das geboten, was den großen Meistern, die sie begründet haben, als ihr wahres Gesicht vorgeschwebt hat. Die vorliegende Arbeit mag ein lebendiges Zeugnis für diese meine Auffassung sein und weiteren Untersuchungen auf dem betretenen Felde den Weg weisen.

Göttingen, im August 1945.

Zu großem Dank verpflichtet bin ich Frl. G. Beyer, Herrn H. W. Leopoldt und Herrn C. Meyer für viele wertvolle Hinweise bei der Durchsicht des Manuskripts und der Korrekturen, Herrn R. Schwarzenberger für seine Hilfe bei der Durchführung einiger besonders komplizierter Rechnungen zu den Tabellen, und dem Verlag für sein bereitwilliges Eingehen auf meine mannigfachen Wünsche bei der Drucklegung.

Hamburg, im November 1951.

INHALT

Verzeichnis der Sätze

---

[1]) Die in diesem Literaturverzeichnis angeführten Arbeiten werden im Text durch Angabe der entsprechenden Ziffern in eckigen Klammern hinter den Autorennamen zitiert.

EINLEITUNG

Es ist grundsätzlich bekannt, daß sich für die allgemeinen abelschen Zahlkörper[1]) eine entsprechende Klassenzahlformel herleiten läßt, wie sie Dirichlet [1, 2][2]) für die quadratischen Formen (quadratischen Zahlkörper) und danach Kummer [1, 4, 6, 7][3]) für die Kreiskörper[4]) gewonnen hat. In der Literatur findet sich diese allgemeine Formel, von einem kurzen Hinweis auf ihr Bestehen bei Kummer [1], S. 111ff., abgesehen, bei Fuchs [1], Beeger [1, 2, 3] und bei Gut [1] vor. Ich leite sie in I unter Anwendung der modernen zahlentheoretischen Methodik und Rechentechnik kurz her. Dabei darf ich die dieser Herleitung zugrunde liegende, in Hilberts Zahlbericht ausführlich begründete Residuenformel für die Dedekindsche Zetafunktion, sowie die in meinem Klassenkörperbericht behandelte Produktformel für die Dirichletschen L-Funktionen voraussetzen.

Man hat sich bisher immer auf den Standpunkt gestellt, daß diese zwar aus analytischer Quelle fließende, aber doch wesentlich arithmetische Klassenzahlformel ein Endziel ist und daß daher mit ihrer Herleitung alles getan sei. Schon das einfache Beispiel der quadratischen Zahlkörper zeigt jedoch, daß die Formel in der zunächst erhaltenen Gestalt für die tatsächliche arithmetische Berechnung der Klassenzahl wenig oder gar nicht geeignet ist, einmal weil diese Berechnung in gegebenen Fällen unverhältnismäßig große numerische Rechnungen erfordern würde, und dann weil die Formel noch von ihrer Ableitung herrührende analytische Elemente enthält, die den numerischen Rechenmethoden der Zahlentheorie fremd sind. Ein Verfahren, bei dem man die Logarithmentafel und trigonometrische Tafeln heranzuziehen hat, kann nicht als eine im eigentlichen Sinne arithmetische Berechnung der Klassenzahl angesehen werden. Daher hat man auf die Anwendung der Formel zur wirklichen Berechnung der Klassenzahl verzichtet und statt dessen das für beliebige algebraische Zahlkörper anwendbare tastende Probierverfahren empfohlen, das sich auf den bekannten Satz stützt: In jeder Divisorenklasse eines algebraischen Zahlkörpers vom Grade n, mit r_2 Paaren konjugiert-komplexer Konjugierter und mit dem Diskriminantenbetrag d, kommt ein ganzer Divisor $\mathfrak{a}$ mit $N(\mathfrak{a}) \leqq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} \sqrt{d}$ vor[5]). Da hat man nun mit viel Mühe eine wunderschöne explizite Formel für die Klassenzahl gewonnen und verzichtet

---

[1]) Unter abelschen Zahlkörpern verstehe ich in dieser Arbeit durchweg solche, die über dem rationalen Zahlkörper abelsch sind, also sogenannte absolut-abelsche Zahlkörper.

[2]) Siehe hierzu auch Zahlbericht, §§ 79, 86, und Hasse [6], § 18.

[3]) Siehe hierzu auch Zahlbericht, §§ 117, 118, und Hasse [6], § 18.

[4]) Unter Kreiskörpern verstehe ich in dieser Arbeit durchweg nur die vollen aus den Einheitswurzeln einer festen Ordnung erzeugten Zahlkörper, nicht auch ihre Teilkörper, die abelschen Zahlkörper.

[5]) Siehe etwa Hasse [5], § 30, c), III′.

dann resigniert auf ihre wirkliche Anwendung; welch ein trauriger Standpunkt für den sich seiner Kraft bewußten Zahlentheoretiker! Für ihn beginnt doch hier, nach Abstreifen des ihm fremdartigen, zur Herleitung bisher unentbehrlichen Rüstzeuges, erst die eigentliche Aufgabe, nämlich die Formel in eine der arithmetischen Rechnung zugängliche Gestalt zu setzen. Wie diese Aufgabe anzupacken und zu bewältigen ist, habe ich [3] kürzlich am Beispiel der reell-quadratischen Zahlkörper von Primzahldiskriminante zeigen können. Im Anschluß daran ist es meinem Schüler Bergström [1] gelungen, diese Methode auf alle reell-quadratischen Zahlkörper auszudehnen. Darüber hinaus konnte ich die Lösung jener Aufgabe vorerst einmal auch für die reellen zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörper geben, was ich an anderer Stelle darlegen werde [7].

Neben dem eben besprochenen praktischen Gesichtspunkt der tatsächlichen arithmetischen Berechnung der Klassenzahl ist es auch ein theoretischer Gesichtspunkt, der in jedem echten Zahlentheoretiker gebieterisch die Forderung nach weiteren arithmetischen Untersuchungen über die gewonnene Klassenzahlformel wachruft. Die Formel gibt den Wert einer Anzahl, also einer ganzrationalen positiven Zahl mit einer bestimmten begrifflichen Bedeutung. Sie läßt jedoch in ihrer zunächst resultierenden Gestalt weder die Ganzzahligkeit noch die Positivität des gefundenen Ausdrucks in Augenschein treten, geschweige denn auf rein arithmetische Art erkennen, daß dieser Ausdruck die Anzahl der Divisorenklassen des betrachteten abelschen Zahlkörpers ist oder auch nur irgendwie mit dieser Anzahl zu tun hat. Für den Zahlentheoretiker entsteht daher die Aufgabe, möglichst tief in die arithmetische Struktur der Klassenzahlformel einzudringen, um diesen Fragen nachzugehen. Von einer Lösung der letzteren umfassenden Fragestellung, nach einem direkten rein arithmetischen Beweis der allgemeinen Klassenzahlformel, sind wir heute noch ebenso weit entfernt wie von einem rein arithmetischen Beweis des Dirichletschen Satzes über die Primzahlen in primen Restklassen[1]). Von den ersteren eingeschränkten Fragestellungen dagegen werden wir die Frage nach einem direkten Beweis der Ganzzahligkeit des gewonnenen Ausdrucks für die Klassenzahl (bei dem in **II** behandelten Faktor wenigstens im zyklischen Falle und bei dem in **III** behandelten Faktor vollständig), wenn auch mit einiger Mühe, lösen und die Frage nach seiner Positivität leicht auf die Restfrage nach der Positivität für den Spezialfall der quadratischen Zahlkörper zurückführen können; diese Restfrage allerdings, die schon in der bisherigen Literatur hervorgehoben und als sehr tiefliegend bezeichnet wird, müssen auch wir ungelöst lassen.

In **II** und **III** befassen wir uns ausführlich mit arithmetischen Untersuchungen der vorstehend geschilderten Art und Zielsetzung über die beiden schon von Kummer hervorgehobenen Faktoren des analytisch gewonnenen Ausdrucks für die Klassenzahl. Solche arithmetischen Untersuchungen hat bereits Kummer [1, 2, 4, 5, 7, 8] in dem von ihm behandelten Spezialfall der Kreiskörper seiner analytischen Herleitung der Klassenzahlformel angeschlossen. An diesen Untersuchungen hat sich damals auch Kronecker [1, 2] beteiligt. Später hat Weber [1, 2] auf entsprechende Weise interessante Sätze über die Klassenzahl und die Einheiten der Kreiskörper der Einheitswurzeln von 2-Potenzordnung bewiesen. Schließlich

---

[1]) Zusatz bei der Korrektur (1951): Inzwischen gaben unabhängig voneinander A. Selberg und H. Zassenhaus elementare Beweise dieses Satzes: An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression, Ann. of Math. (2) **50** (1949); Über die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen, Comm. Math. Helvetici **22** (1949).

gehört hierher noch der bekannte Satz von Dirichlet [3][1]) über die Klassenzahl spezieller bizyklischer biquadratischer Zahlkörper in ihrer Beziehung zu den Klassenzahlen der quadratischen Teilkörper, den später Hilbert [1] sogar rein arithmetisch beweisen konnte, sowie die von Bachmann [1], Amberg [1] und Herglotz [1] gegebene Verallgemeinerung dieses Satzes auf beliebige solche Zahlkörper[2]). Alle diese Ergebnisse sind, wie schon im Vorwort bemerkt, in Hilberts Zahlbericht nur ganz kurz und ohne jede Andeutung der Beweise erwähnt. Ein Zusammensuchen der Beweise aus den Originalarbeiten ist ungewöhnlich mühsam, einmal wegen deren Verstreutheit, dann weil nicht immer derselbe Klassenbegriff zugrunde liegt, ferner weil einige Schlußweisen unvollständig, inkorrekt oder gar fehlerhaft sind, und schließlich weil bei dem damaligen Entwicklungsstand der algebraischen Zahlentheorie noch nicht genügend allgemeine, systematisierende und vereinfachende Begriffe und Methoden zur Verfügung standen, wie wir sie heute etwa in Gestalt der Körpertheorie, der Theorie der abelschen Gruppen und ihrer Charaktere, der Galoisschen Theorie, der Hilbertschen Theorie des galoisschen Zahlkörpers und der Klassenkörpertheorie zur Hand haben. Ich nehme daher die hier im Vordergrund stehende Verallgemeinerung auf beliebige abelsche Zahlkörper und die Durchdringung mit der modernen zahlentheoretischen Methodik zum willkommenen Anlaß, auf diese vom rein zahlentheoretischen Standpunkt reizvollen älteren Untersuchungen in berichtender Form jeweils an gegebener Stelle etwas ausführlicher zurückzukommen, als es der eigentliche Gang der Untersuchung erfordern würde. Um einen vollständigen Bericht über alle in diese Richtung fallenden Untersuchungen auch nur von Kummer handelt es sich dabei allerdings nicht. Vielmehr greife ich nur diejenigen Untersuchungen heraus, bei denen ich die Möglichkeit einer Verallgemeinerung auf beliebige abelsche Zahlkörper oder zum mindesten auf bestimmte Typen abelscher Zahlkörper sehe.

[1]) Siehe hierzu auch Zahlbericht, § 87.

[2]) Siehe hierzu auch die noch weitergehenden Untersuchungen in dieser Richtung von Vårmon [1], auf die ich in dieser Arbeit nicht eingehen werde.

I. DIE ALLGEMEINE KLASSENZAHLFORMEL

1. Abelsche Zahlkörper als Klassenkörper

Ich beginne mit einer kurzen Zusammenstellung der für alles Folgende wesentlichen klassenkörpertheoretischen Tatsachen über abelsche Zahlkörper, wie sie größtenteils in meinem Klassenkörperbericht ausführlich begründet sind oder sich durch Spezialisierung auf den abelschen Fall aus den allgemeinen Klassenkörpersätzen ergeben. Dabei beschränke ich mich hier auf die Hauptzüge. Einige mehr in die Einzelheiten gehende Tatsachen führe ich im weiteren Verlauf der Arbeit an gegebener Stelle an. Die in dieser Zusammenstellung eingeführten Bezeichnungen sowie einige weitere bei der anschließenden Herleitung der allgemeinen Klassenzahlformel einzuführende Bezeichnungen wende ich dann weiterhin ohne jedesmalige neue Erklärung an.

Es sei K ein abelscher Zahlkörper vom Grade n über dem rationalen Zahlkörper P. Er ist Klassenkörper zu einer rationalen Kongruenzgruppe H vom Index n. Es sei f der Führer von H, auch der Führer von K genannt. Dann besteht H aus allen Zahlen einer Gruppe von primen Restklassen mod. f, die n Klassen nach H bestehen aus den Zahlen ihrer n Nebengruppen in der Gruppe aller primen Restklassen mod. f, und diese Klasseneinteilung läßt sich nicht schon im Bereich der primen Restklassen nach einem echten Teiler von f beschreiben. Die Klassenkörpereigenschaft von K besagt, daß der Typus der Zerlegung einer Primzahl p in Primdivisoren von K in der durch das Klassenkörperzerlegungsgesetz bestimmten Weise nur von der Klasse abhängt, der p nach H angehört. Es kommt also für diese Klassenkörpereigenschaft von K nicht so sehr auf die Kongruenzgruppe H selbst, die Hauptklasse, als vielmehr auf die Klassengruppe nach H an.

K ist ein Teilkörper des Kreiskörpers P_f der f-ten Einheitswurzeln ζ_f^x, und zwar der Invariantenkörper zur Gruppe der Automorphismen $\zeta_f \to \zeta_f^a$ mit a aus H. Demnach besteht K aus allen rationalzahligen rationalen symmetrischen Funktionen der ζ_f^a, wo ζ_f eine feste primitive f-te Einheitswurzel ist und a ein Vertretersystem der Restklassen mod. f aus H durchläuft. Zur Erzeugung von K genügt, wie man zeigen kann, die Gaußsche Kreisteilungsperiode $\sum\limits_{\substack{a \bmod f \\ a \text{ in } H}} \zeta_f^a$. Die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von K ist isomorph zur Klassengruppe nach H. Dieser Isomorphismus wird durch die Darstellung $\zeta_f \to \zeta_f^s$ der Automorphismen S aus $\mathfrak{G}$ gegeben, wo s ein Vertretersystem der Klassen nach H durchläuft. Wir haben ferner die zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe X der Charaktere χ von $\mathfrak{G}$ zu betrachten, die auch die Charaktere von K genannt werden. Diese Charaktere werden vermöge des angegebenen Isomorphismus als Charaktere der Klassengruppe nach H und damit als Restklassencharaktere mod. f aufgefaßt. Es seien $f(\chi)$ ihre Führer, so daß die χ eigentliche Charaktere mod. $f(\chi)$ sind. Dann ist f das kleinste gemeinsame Vielfache der $f(\chi)$, während das Produkt der $f(\chi)$ der Diskriminantenbetrag d von K ist.

Wir werden im folgenden zwei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem K reell oder imaginär ist. Ist K imaginär, so ist $n = 2n_0$ gerade, und K ist vom Grade 2 über seinem größten reellen Teilkörper K_0 vom Grade n_0, dem Invariantenkörper zum Automorphismus $\zeta_f \to \bar{\zeta}_f = \zeta_f^{-1}$ (Übergang zum Konjugiert-Komplexen). Die Galoisgruppe $\mathfrak{G}_0$ von K_0 ist die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach der durch diesen Automorphismus erzeugten Untergruppe. Die Gruppe X der n Charaktere χ von $\mathfrak{G}$ zerfällt in 2 Klassen von je n_0 Charakteren, nämlich die Untergruppe X_0 der Charaktere χ_0 von $\mathfrak{G}_0$, gekennzeichnet durch $\chi_0(-1) = 1$, und ihre Nebengruppe, bestehend aus den Charakteren χ_1 mit $\chi_1(-1) = -1$. Die χ_0 sind die Charaktere von K_0. Die χ_1 sind diejenigen Charaktere von K, die nicht schon Charaktere von K_0 sind; wir nennen sie kurz die *Charaktere von* K/K_0. Die Kongruenzgruppe H enthält -1 nicht und geht durch Hinzunahme der Klasse von -1 und damit der Klassen der $-a$ in die K_0 zugeordnete Kongruenzgruppe H_0 über. Die Klassen nach H_0 entstehen aus den Klassen nach H durch Vereinigung der Klassen entgegengesetzter $\pm s$. Ist K reell, also $\mathsf{K} = \mathsf{K}_0$, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0$, $\mathsf{X} = \mathsf{X}_0$, also durchweg $\chi(-1) = 1$, und $H = H_0$, also -1 in H enthalten und $\pm s$ in derselben Klasse nach H gelegen.

Es entspricht dem in dieser Arbeit verfolgten Ziel der arithmetischen Bestimmung der Klassenzahl h von K bis zur numerischen Durchführung, daß wir die vorkommenden Eigenschaften von K und Aussagen über K, soweit das möglich ist, vermöge der vorstehend umrissenen klassenkörpertheoretischen Tatsachen auf die K charakterisierende rationale Kongruenzgruppe H oder vielmehr auf die Klassengruppe nach H zurückführen. Diese Klassengruppe können wir dabei ebensogut durch die zugeordneten Restklassencharaktere χ aus der Charaktergruppe X von K beschreiben, durch die die ihr zugrunde liegende Kongruenzgruppe H selbst als die Gesamtheit aller a mit $\chi(a) = 1$ für alle χ aus X gekennzeichnet ist. Die Beziehung auf die Charaktere statt der Klassen ist aus folgenden Gründen bequemer. Einmal entsprechen nach dem Anordnungssatz der Klassenkörpertheorie die Teilkörper $\mathsf{K}', \mathsf{K}'', \ldots$ von K den Kongruenzgruppen $H', H'', \ldots$ über H unter Umkehrung der Anordnungsbeziehung – $\mathsf{K}' \leqq \mathsf{K}''$ ist gleichbedeutend mit $H' \geqq H''$ –; dagegen besteht für die zugeordneten Untergruppen $\mathsf{X}', \mathsf{X}'', \ldots$ von X, d. h. für die Charaktergruppen der $\mathsf{K}', \mathsf{K}'', \ldots$, die direkte Anordnungsbeziehung $\mathsf{X}' \leqq \mathsf{X}''$. Der Übergang von K' zu K'' beschreibt sich demgemäß durch die Klassengruppen als die gruppentheoretische Aufspaltung der Klassen nach H' in die Klassen nach H'', dagegen durch die Charaktere viel einfacher als die Hinzunahme der in X' noch nicht enthaltenen Charaktere aus X''. Und dann handhaben sich überhaupt die Charaktere χ als Funktionen in der vollen primen Restklassengruppe mod. f bequemer als die einzelnen Klassen nach H, die jeweils nur aus bestimmten primen Restklassen mof. f zusammengesetzt sind. Diese abrundende und vereinfachende Wirkung der Einführung der Charaktere statt der Klassen tritt ja schon bei dem klassischen Beweis des bekannten Dirichletschen Satzes über die Primzahlen in primen Restklassen hervor.

Das Klassenkörperzerlegungsgesetz für K beschreibt sich durch die Charaktergruppe X in folgender Weise. Für den Trägheitskörper K_T von p besteht die Charaktergruppe X_T aus den Charakteren χ aus X mit $p \nmid f(\chi)$, oder also mit $\chi(p) \neq 0$, wenn wie üblich allgemein $\chi(x) = 0$ für zu $f(\chi)$ nicht prime x festgesetzt wird. Für den Zerlegungskörper K_Z von p besteht die Charaktergruppe X_Z aus den Charakteren χ aus X mit $\chi(p) = 1$. Hiernach bestimmen sich die den Zerlegungstypus von p in K kennzeichnenden Zahlen, nämlich die Verzweigungsordnung $e_p = [\mathsf{K} : \mathsf{K}_T]$, der Grad $n_p = [\mathsf{K}_T : \mathsf{K}_Z]$ und die Anzahl $r_p = [\mathsf{K}_Z : \mathsf{P}]$ der Primteiler von p in K, als die Gruppenindizes $e_p = [\mathsf{X} : \mathsf{X}_T]$, $n_p = [\mathsf{X}_T : \mathsf{X}_Z]$ und $r_p = [\mathsf{X}_Z : 1]$ in der Charaktergruppe X.

2. Die analytische Klassenzahlformel

Ausgangspunkt für die analytische Bestimmung der Klassenzahl h von K ist einerseits die Formel[1])

$$\zeta_{\mathsf{K}}(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi), \tag{1}$$

durch die die Dedekindsche Zetafunktion von K als das Produkt der Dirichletschen L-Funktionen zu den Charakteren χ von K dargestellt wird, andrerseits die Formel[2])

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\, \zeta_{\mathsf{K}}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2^n h R}{w \sqrt{d}} = \dfrac{2^{n-1} h R}{\sqrt{d}}, & \text{wenn } \mathsf{K} \text{ reell} \\ \dfrac{(2\pi)^{n_0} h R}{w \sqrt{d}}, & \text{wenn } \mathsf{K} \text{ imaginär} \end{array} \right\} \tag{2}$$

für das Residuum bei $s = 1$ der Dedekindschen Zetafunktion von K. Hierin bedeutet R den Regulator von K, also wenn K reell ist, den aus einem Grundeinheitensystem $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ von K gebildeten Determinantenbetrag

$$R = \left\| \log |\varepsilon_\nu^S| \right\| \quad \begin{pmatrix} \text{Zeilenindex } S \neq 1 \text{ in } \mathfrak{G} \\ \text{Spaltenindex } \nu = 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}, \tag{3a}$$

und wenn K imaginär ist, den aus einem Grundeinheitensystem $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_0-1}$ von K gebildeten Determinantenbetrag

$$R = \left\| \log |\varepsilon_{\nu_0}^{S_0}|^2 \right\| = \left\| 2 \log |\varepsilon_{\nu_0}^{S_0}| \right\| \quad \begin{pmatrix} \text{Zeilenindex } S_0 \neq 1 \text{ in } \mathfrak{G}_0 \\ \text{Spaltenindex } \nu_0 = 1, \ldots, n_0 - 1 \end{pmatrix}. \tag{3b}$$

Ferner bedeutet w die Anzahl der Einheitswurzeln aus K. Sie ist klassenkörpertheoretisch folgendermaßen gekennzeichnet: für gerades f ist w der größte Teiler v von f derart, daß $a \equiv 1 \bmod. v$ für alle a aus H gilt; für ungerades f gilt entsprechendes für $\frac{w}{2}$. Da K stets die zweiten Einheitswurzeln ± 1 enthält, ist w stets gerade; ist K reell, so ist $w = 2$.

Geht man in (1) zu $s = 1$ über und beachtet, daß $L(s, 1) = \zeta(s)$ (Riemannsche Zetafunktion) bei $s = 1$ das Residuum 1 hat, so erhält man

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\, \zeta_{\mathsf{K}}(s) = \prod_{\chi \neq 1} L(1, \chi)$$

---

[1]) Siehe Klassenkörperbericht, Teil I, § 8, Satz 14.

[2]) Siehe Zahlbericht, §§ 25, 26.

und damit nach (2) die analytische Klassenzahlformel

$$h\,R = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{d}}{2^{n-1}} \prod\limits_{\chi \neq 1} L(1,\chi), & \text{wenn } \mathsf{K} \text{ reell} \\ \dfrac{w\sqrt{d}}{(2\pi)^{n_0}} \prod\limits_{\chi \neq 1} L(1,\chi), & \text{wenn } \mathsf{K} \text{ imaginär} \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Durch diese Formel wird die Bestimmung der Klassenzahl h, oder vielmehr des Produkts hR aus Klassenzahl und Regulator, auf die Berechnung des Produkts der Dirichletschen L-Funktionen mit $\chi \neq 1$ für $s = 1$ zurückgeführt. Diese Funktionswerte sind die in der natürlichen Summationsfolge zu nehmenden bedingt-konvergenten unendlichen Reihen

$$L(1,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(m)}{m}, \tag{5}$$

die sogenannten Dirichletschen L-Reihen

3. Produktformeln für die Führer und für die Gaußschen Summen

Bei der Berechnung des Produkts der L-Reihen $L(1,\chi)$ wird neben der bereits in **1** erwähnten Produktformel für die Führer $f(\chi)$ der Charaktere χ von K eine entsprechende Produktformel für die ihnen zugeordneten Gaußschen Summen

$$\tau(\chi) = \sum_{x \bmod f(\chi)}{}' \chi(x)\,\zeta_{f(\chi)}^{x} \tag{1}$$

gebraucht, wo wie im folgenden stets

$$\zeta_{f(\chi)} = e^{\frac{2\pi i}{f(\chi)}}$$

die analytisch normierte primitive $f(\chi)$-te Einheitswurzel bezeichnet. Beide Produktformeln lassen sich, wenn man Wert darauf legt, rein-arithmetisch beweisen[1]). Jedoch erscheint mir in dem hier vorliegenden Rahmen, wo die analytischen Methoden sowieso den Kernpunkt bilden, ihr von Hecke [1, 2] gegebener eleganter analytischer Beweis bestens am Platze. Er ergibt sich aus der Produktformel (**2**, 1) durch Vergleich der Funktionalgleichungen für $\zeta_{\mathsf{K}}(s)$ und die $L(s,\chi)$ und ist in meinem Klassenkörperbericht für beliebige relativ-abelsche Zahlkörper mitgeteilt[2]). Für den einfacheren Spezialfall der absolut-abelschen Zahlkörper sei er nachstehend noch einmal kurz ausgeführt.

Die Funktionalgleichung von $\zeta_{\mathsf{K}}(s)$ sagt aus, daß bei $s \to 1 - s$ die Funktion

$$\left\{\begin{array}{ll} d^{\frac{s}{2}}\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{n}\zeta_{\mathsf{K}}(s), & \text{wenn } \mathsf{K} \text{ reell} \\ d^{\frac{s}{2}}\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{n_0}\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\right)^{n_0}\zeta_{\mathsf{K}}(s), & \text{wenn } \mathsf{K} \text{ imaginär} \end{array}\right\} \text{ den Faktor 1}$$

---

[1]) Bezüglich der Führer siehe Hasse [2]; bezüglich der Gaußschen Summen siehe etwa Bergström [1].

[2]) Siehe Klassenkörperbericht, Teil I, § 9.

annimmt (invariant ist). Die Funktionalgleichung von $L(s, \chi)$ sagt aus, daß bei $s \to 1 - s$ und $\chi \to \bar{\chi}$ die Funktion

$$\left.\begin{cases} f(\chi)^{\frac{s}{2}}\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)L(s,\chi), & \text{wenn } \chi(-1) = 1 \\ f(\chi)^{\frac{s}{2}}\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\right)L(s,\chi), & \text{wenn } \chi(-1) = -1 \end{cases}\right\} \text{den Faktor } \frac{\sqrt{\chi(-1)f(\chi)}}{\tau(\chi)}$$

(vom absoluten Betrage 1) mit positiv-reeller bzw. positiv-imaginärer Quadratwurzel annimmt. Dividiert man gemäß der Produktformel (**2**, 1) die Funktionalgleichung von $\zeta_{\mathsf{K}}(s)$ durch das Produkt der Funktionalgleichungen der $L(s, \chi)$, so springt bei unserer Schreibweise dieser Funktionalgleichungen sofort in die Augen, daß die Funktion

$$\left(\frac{d}{\prod\limits_{\chi} f(\chi)}\right)^{\frac{s}{2}} \quad \text{bei } s \to 1 - s \text{ den Faktor } \quad \frac{\prod\limits_{\chi} \tau(\chi)}{\prod\limits_{\chi} \sqrt{\chi(-1)f(\chi)}}$$

annimmt. Das geht aber nur, wenn die Basis der Exponentialfunktion und der Faktor beide den Wert 1 haben. So erhält man die beiden Produktformeln

$$\prod_{\chi} f(\chi) = d, \tag{2}$$

$$\prod_{\chi} \tau(\chi) = \left\{\begin{array}{ll} \left(\prod\limits_{\chi} f(\chi)\right)^{\frac{1}{2}} = d^{\frac{1}{2}}, & \text{wenn } \mathsf{K} \text{ reell} \\ \mathrm{i}^{n_0}\left(\prod\limits_{\chi} f(\chi)\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{i}^{n_0} d^{\frac{1}{2}}, & \text{wenn } \mathsf{K} \text{ imaginär} \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Hierbei kann man die Produkte auf $\chi \neq 1$ beschränken, weil $f(1) = 1$, $\tau(1) = 1$ ist.

4. Berechnung der L-Reihen

Zur Berechnung des Produkts der L-Reihen (**2**, 5) für $s = 1$ werden zunächst die einzelnen Faktoren $L(s, \chi)$ $(\chi \neq 1)$ für $s > 1$ elementar umgeformt[1]). Solange wir nur einen einzelnen Faktor $L(s, \chi)$ behandeln, schreiben wir dabei zur Abkürzung f statt $f(\chi)$ und ζ statt $\zeta_{f(\chi)}$. Unter $\sum\limits_{x \bmod f}$ sei hier, wie schon in der Definition (**3**, 1) der Gaußschen Summen und im folgenden durchweg, die Summation über irgendein primes Restsystem $x \bmod. f$ verstanden, unter $\sum\limits_{\pm x \bmod. f}$ die Summation über irgendein primes Halbsystem mod. f, d. h. ein System derart, daß die $\pm x$ mod. f ein volles primes Restsystem bilden[2]). Die Angabe $(x, f) = 1$ kann dabei auf Grund der schon getroffenen allgemeinen Festsetzung $\chi(x) = 0$ für $(x, f) \neq 1$ durchweg unterdrückt werden.

[1]) Siehe dazu auch Hasse [6], §18, **2**.

[2]) Man beachte, daß der Fall $f = 2$, in dem diese Definition sinnlos wird, nicht vorkommt. Der Führer $f(\chi)$ eines Charakters χ enthält nämlich die Primzahl 2 entweder gar nicht oder mindestens zur Potenz 2^2, weil für ungerades f_0 die prime Restklassengruppe mod. $2f_0$ mit der mod. f_0 zusammenfällt. Diese letztere Bemerkung hat man im Verlauf der Arbeit an zahlreichen Stellen vor Augen zu haben.

Es ist

$$L(s,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^s}=\sum_{z\bmod.f}\chi(z)\sum_{\substack{n\equiv z\bmod.f\\ n\geqq 1}}\frac{1}{n^s}$$

$$=\sum_{z\bmod.f}\chi(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\frac{1}{f}\sum_{x\bmod.f}\zeta^{(z-n)x}$$

$$=\frac{1}{f}\sum_{x\bmod.f}\sum_{z\bmod.f}\chi(z)\zeta^{zx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^{-nx}}{n^s}.$$

Nach dem Abelschen Stetigkeitssatz für Dirichletsche Reihen folgt daraus

$$L(1,\chi)=-\frac{1}{f}\sum_{x\bmod.f}\tau_x(\chi)\log(1-\zeta^{-x})=-\frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{x\bmod.f}\bar\chi(x)\log(1-\zeta^{-x}),$$

wobei die Bezeichnung

$$\tau_x(\chi)=\sum_{z\bmod.f}\chi(z)\zeta^{zx}$$

und die Beziehung $\tau_x(\chi)=\bar\chi(x)\tau(\chi)$ aus der elementaren Theorie der Gaußschen Summmen[1]) verwendet wurde; der Logarithmus ist der Hauptwert, mit imaginärem Teil zwischen $-\pi\mathrm{i}$ und $\pi\mathrm{i}$ $\left(\text{hier sogar zwischen } -\frac{\pi\mathrm{i}}{2} \text{ und } \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right)$. Für die weitere Ausrechnung der Summen

$$S(\chi)=\sum_{x\bmod.f}\chi(x)\log(1-\zeta^{-x})=\frac{1}{2}\sum_{x\bmod f}\chi(x)\left[\log(1-\zeta^{-x})+\chi(-1)\log(1-\zeta^{x})\right]$$

sind die beiden Fälle $\chi(-1)=1$ und $\chi(-1)=-1$ zu unterscheiden.

a) $\chi(-1)=1$.

Da $1-\zeta^x$ und $1-\zeta^{-x}$ konjugiert-komplex sind, sind auch die Hauptwerte ihrer Logarithmen konjugiert-komplex. Damit ergibt sich

$$S(\chi)=\frac{1}{2}\sum_{x\bmod.f}\chi(x)\left[\log(1-\zeta^{-x})+\log(1-\zeta^{x})\right]=\frac{1}{2}\sum_{x\bmod f}\chi(x)\log|1-\zeta^x|^2$$

$$=\sum_{x\bmod.f}\chi(x)\log|1-\zeta^x|=2\sum_{\pm x\bmod.f}\chi(x)\log|1-\zeta^x|,$$

also

$$L(1,\chi)=2\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{\pm x\bmod.f(\chi)}\left(-\chi(x)\log\left|1-\zeta_{f(\chi)}^{x}\right|\right). \tag{1a}$$

---

[1]) Siehe dazu Hasse [6], § 20, 1.