

Hilbertsche Zerlegungen eingebetteter Prozessräume  
und ihre Anwendung auf die Vorhersage von Zeitreihen

Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

dem  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg  
vorgelegt von

Ralf K. Jäger  
aus Marburg

Marburg/Lahn 2003

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg  
als Dissertation am 29.01.2004 angenommen.

Erstgutachter: Prof. Dr. C. Portenier  
Zweitgutachter: Prof. Dr. J. Steinebach  
Tag der mündlichen Prüfung: 09.02.2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>ii</b>
<b>Vorwort</b>	<b>iv</b>
<b>Aufbau und Notationen</b>	<b>vii</b>
<b>Einleitung</b>	<b>ix</b>
<b>1 Abschließbare Kerne und Testräume</b>	<b>1</b>
1.1 Einführung zu hilbertschen Unterräumen . . . . .	2
1.2 Bildzerlegung eines hilbertschen Unterraums . . . . .	8
1.3 Abschließbarkeit von Kernen . . . . .	11
1.4 Zum Abschluss äquivalente Operatoren . . . . .	14
1.5 Spektralzerlegung von $\mathcal{G}$ . . . . .	19
1.6 Testräume und $\mu$ -Funktionen . . . . .	23
1.7 Abschließende Bemerkungen . . . . .	28
<b>2 Einbettbare Prozesse</b>	<b>30</b>
2.1 Kovarianzfunktion eines Prozesses . . . . .	31
2.2 Einbettbare Prozesse . . . . .	34
2.3 Der hilbertsche Unterraum eines Prozesses . . . . .	38
2.4 Abschließbarkeit eines Prozesskerns . . . . .	42

2.5	Vorbemerkungen zu Zerlegungen . . . . .	48
2.6	Abschließende Bemerkungen . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Zerlegungen von Prozessräumen</b>	<b>54</b>
3.1	Endliche Prozesse . . . . .	55
3.2	Normal quadratisch integrierbare Prozesse . . . . .	59
3.3	Stationäre Zeitreihen auf $\mathbb{Z}^n$ . . . . .	66
3.4	Stationäre Prozesse auf $\mathbb{R}^n$ . . . . .	73
3.5	Selbstähnliche Prozesse . . . . .	78
3.6	Abschließende Bemerkungen . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Vorhersage von Prozessen</b>	<b>90</b>
4.1	Prädiktion, Strukturhaltung und Prädiktorformel . . . . .	91
4.2	Vorhersage endlicher Prozesse . . . . .	97
4.3	Stationäre Zeitreihen auf $\mathbb{Z}$ . . . . .	100
4.4	Stationäre Prozesse auf $\mathbb{R}$ . . . . .	105
4.5	Selbstähnliche Prozesse . . . . .	109
4.6	Abschließende Bemerkungen . . . . .	112
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>113</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>117</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>118</b>

# Vorwort

Die Theorie zur Analyse von Zeitreihen oder stochastischen Prozessen ist teilweise funktionalanalytisch geprägt. Dies gilt z. B. für Arbeiten über reproduzierende Kern-Hilbert-Räume, die man zu Prozessen definieren kann. Ähnlich geprägt ist der Aufbau der sogenannten Karhunen-Loève-Zerlegung, die Spektraltheorie stationärer Prozesse und das Konzept der orthogonalen Projektion als (im quadratischen Mittel) beste Vorhersage. Die vorliegende Arbeit möchte diesen Charakter der Theorie vertiefen, indem sie moderne Methoden der Funktionalanalysis auf das Gebiet der stochastischen Prozesse überträgt und somit neue bzw. erweiterte Ergebnisse erzielt.

Die eingangs erwähnten Themen stellen nur eine kleine Auswahl aus dem weiten Feld der Zeitreihenanalyse dar. Dennoch skizzieren sie sehr gut die Schnittfläche zwischen stochastischer Prozesstheorie und Analysis, auf welcher sich die vorliegende Arbeit bewegt. Dass es sich dabei um ein durchaus bedeutungsvolles und aktuelles Gebiet handelt, sieht man an der Vielzahl von Veröffentlichungen, die sich damit beschäftigen.

Die Anzahl allein an Lehrbüchern zum Thema Zeitreihenanalyse ist beachtlich, die Referenzen [18], [5], [40], [6], [50], [16] seien als repräsentative Auswahl aufgeführt. Innerhalb der Lehrbücher nimmt die Theorie zu stationären Prozessen wohl den größten Teil ein, oftmals wird sogar von noch spezifischeren Annahmen über die Struktur der Prozesse ausgegangen (Stichwort: 'ARMA-Modelle'). Stationarität vorausgesetzt, wird das Werkzeug der Fourier-Analyse eingesetzt, um eine umfassende Untersuchung der entsprechenden Zeitreihen durchzuführen. Ohne Stationarität scheinen die sehr spezifischen Struktur- bzw. Modellannahmen unerlässlich zu sein, um ähnliche Ergebnisse zu erzielen. Hier wird schon die Bedeutung von alternativen allgemeinen Zeitbereichsmethoden ersichtlich, d. h. von Methoden, die allein über den Indexbereich (Zeit) des Prozesses beschrieben werden können.

Im Prinzip ist das Ziel der Analysen immer, die zugrundegelegte Struktur so gut es geht herauszuarbeiten und nutzbar zu machen. Im Konkreten kann dies zum Beispiel bedeuten, dass das Spektrum des Prozesses in einen geeigneten Filter zur Signalerkennung eingeht. Oder dass aus einer Datenreihe die Parameter des angenommenen Modells geschätzt und darüber zukünftige Werte der Zeitreihe vorhergesagt werden.

Die Anfänge der stationären Vorhersage- bzw. Filtertheorie sind durch Wiener (1949, [48]) und Kolmogorov (1941, [23]) geprägt. Daneben hat Cramér (1961, [9] und dortige Referenzen) zur entsprechenden Strukturanalyse (und möglichen Verallgemeinerungen) veröffentlicht. Die Zugänge waren dabei stets von abstrakter, (Fourier-)analytischer Natur und drängten die stochastischen Aspekte in den Hintergrund, ohne dass die erzielten Resultate an Aussagekraft verloren. Verallgemeinerungen zur Herlei-

tung entsprechender Resultate ohne Stationaritätsvoraussetzungen sind bis heute von großem Interesse. Dies sieht man z. B. an dem etwas jüngeren Begriff 'harmonisierbarer Prozesse' (vgl. z. B. Houdré (1990, [20])) und deren 'Spektralbereich' (vgl. z. B. Michálek und Rüschemdorf (1994, [31])), mit denen versucht wird, das Werkzeug der Fourier-Analyse auf nicht-stationäre Prozesse und ihre Vorhersage auszuweiten. Das Fehlen einer auf diese Weise erweiterten, lückenlosen Theorie lässt die angesprochene Nachfrage nach Zeitbereichsmethoden weiter bestehen.

Eine ähnliche Situation zeigt sich auch auf dem damit verbundenen Feld der Darstellungstheorie stochastischer Prozesse, dessen Ursprung den Arbeiten von Karhunen (1947, [22]) und Loève (1978, [28] und dortige Referenzen) zugeschrieben werden kann. Die entwickelte Theorie, die auch in Lehrbüchern (z. B. [18], [50]) zu finden ist, verläuft meist über elementare Isometrien zwischen dem Prozessraum und einem Raum von quadratisch integrierbaren Funktionen<sup>1</sup>. Konkreter findet man die Ausführungen für stetige Prozesse auf einem kompakten Intervall, bei welchen sich die Verbindung zu Eigenvektorbasen entsprechender Integraloperatoren eröffnet (Mercers Theorem). Der Einfluss dieser Spektraltheorie positiver Operatoren auf die Darstellung stochastischer Prozesse wurde jedoch nicht ausgeweitet. Im Gegenteil: Die Abzählbarkeit der Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und die resultierende Entwicklung des Prozesses in eine Reihe blieb bis heute zentral, z. B. in den Arbeiten von Kakihara (1988, [21]) oder Pycke (2001, [41] und dortige Referenzen) und in vielen aktuellen Artikeln, die sich darüber die Möglichkeit zur Dimensionsreduktion oder Simulation zu Nutze machen.

Im Zusammenhang mit der Darstellungstheorie steht auch die Verwandtschaft zwischen Prozessen und den zugehörigen hilbertschen Unterräumen. Dieser analytisch abstrakte Zugang wurde durch Parzens Arbeiten (1967, [37]) publiziert, in denen er einem stochastischen Prozess einen Kern-Hilbert-Raum (im Sinne von Aronszajn) zuordnete. Dieser Raum von Funktionen auf der Zeitmenge erlaubt wiederum eine isometrisch isomorphe Beschreibung des Prozessraums. Diese Theorie hat weniger Einzug in die Lehrbücher gehalten, findet sich aber z. B. bei Adler (1990, [1])<sup>2</sup> wieder. Die zugrundeliegende Assoziation eines Prozesses mit seiner Kovarianzfunktion und somit des Prozessraums mit seinem reproduzierenden Kern-Hilbert-Raum gestaltet sich elementar, da jegliche topologische Struktur auf der Indexmenge ignoriert wird<sup>3</sup>. Dieses Vorgehen ist bis heute in der Forschung üblich.

In das oben gezeichnete Bild des Forschungsgebietes fügen sich schließlich noch die Veröffentlichungen von Nuzman und Poor (2000, [33] und 2001, [34]) ein, in denen Vorhersagetechniken und ein Zugang über Kern-Hilbert-Räume auf selbstähnliche Prozesse übertragen werden.

Die angesprochenen Probleme und offenen Fragen lassen sich wie folgt (in umgekehrter Reihenfolge) zusammenfassen:

**(1)** Wann immer ein zu einem Prozess gehöriger hilbertscher Unterraum untersucht wurde, spielte die topologische Struktur der Indexmenge keine Rolle, da stets die diskrete Topologie angenommen wurde. Dies hat zur Konsequenz, dass der zugehörige Prozessraum als reproduzierender Kern-Hilbert-Raum im Sinne von Aronszajn untersucht wurde. Die vorliegende Arbeit analysiert, inwieweit ein Festhalten an der topologischen Struktur des Indexbereichs eines Prozesses möglich ist, und welche Auswirkungen dies auf die Konstruktion und die Eigenschaften des Prozessraums hat.

<sup>1</sup> Dieser wird meist Spektralbereich genannt.

<sup>2</sup> Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern finden sich in anderer Form auch im Zusammenhang mit dem Gesetz vom Iterierten Logarithmus (vgl. Ledoux und Talagrand (1991, [27])).

<sup>3</sup> Die Arbeit von Meidan (1979, [29]) scheint die einzige Ausnahme zu sein.

Die zentrale Rolle des Indexbereichs wird in Form eines hilbertschen Pivotraums topologisch berücksichtigt und eine neue Interpretation einer Kovarianzfunktion als verallgemeinerte Funktion wird erforderlich. Die dann entwickelte, allgemeine Einbettungstheorie konstruiert in diesem erweiterten Rahmen den zu einem Prozess gehörigen hilbertschen Unterraum. Es kann gezeigt werden, dass eine 'reproduzierende Eigenschaft' weiterhin besteht.

**(2)** An die Angabe von hilbertschen Prozessräumen schließen sich unmittelbar Fragen nach (hilbertschen) Basen für diese Räume sowie nach entsprechenden Konstruktionsverfahren an. In den meisten Artikeln wird diese Problemstellung auf die Darstellung des Prozesses mittels eines abzählbaren Orthonormalsystems reduziert. Die entsprechenden Konstruktionsverfahren laufen über elementare Isometrien innerhalb der Hilberträume. Die vorliegende Arbeit untersucht, wie durch moderne Zerlegungstechniken für hilbertsche Unterräume Basen und Konstruktionen neuerer (insbesondere kontinuierlicher) Art für den gesamten Prozessraum hergeleitet werden können.

Im Ergebnis werden zwei allgemeine Zerlegungsverfahren angegeben: Bildzerlegungen und Spektralzerlegungen. Beide unterliegen keiner Abzählbarkeitsbedingung, erweitern das übliche Vorgehen und ermöglichen eine Darstellung des Prozesses. Es zeigt sich jedoch, dass die Bestimmung der Koeffizienten für die Prozessdarstellung im Kontinuierlichen um ein Vielfaches schwieriger ist als im Diskreten.

**(3)** Die lang bekannte Karhunen-Loève-Entwicklung bezieht sich im Prinzip auf das übliche Verfahren mittels Isometrien und ist von ähnlich abzählbarem Charakter, wie oben beschrieben. Allerdings wird die Entwicklung über die Spektraltheorie spezieller, positiver Kernoperatoren hergeleitet. Die vorliegende Arbeit klärt, inwiefern eine verallgemeinerte Fassung mittels unbeschränkter Operatoren möglich ist.

Die entwickelte, allgemeinere Theorie charakterisiert den (hinreichenden) Einfluss der Spektraltheorie positiver Operatoren auf das entsprechende (Spektral-)Zerlegungsverfahren und übernimmt damit die Rolle von Mercers Theorem in den bisherigen Arbeiten. Darüber hinaus offenbart der beschriebene Zugang (natürliche,) notwendige Bedingungen, um die Spektralzerlegung in diesem Sinne im allgemeineren Rahmen vollständig zu formalisieren.

**(4)** Schließlich spielen Zerlegungen in der Vorhersage stochastischer Prozesse eine wichtige Rolle. Meist wird hierbei durch einen Fourier-analytischen Aufbau der Zeitbereich nicht klar in Verbindung mit der Zerlegung gebracht. Die vorliegende Arbeit analysiert, wie durch eine Interpretation innerhalb des Zeitbereichs eine Vorhersagezerlegung allgemein charakterisiert werden kann, um damit diesen Zugang auf weitere Prozesse (ohne Spektralformalismus) anwendbar zu machen.

Die gefundenen Prediktionsverfahren offenbaren ein allgemein zugrundeliegendes 'Gram-Schmidt-Prinzip'. Formeln in der entsprechenden Zerlegung werden hergeleitet und in Verbindung mit bisherigen Ergebnissen gebracht. Darüber hinaus werden Bedingungen untersucht, unter denen diese Formeln in Linearkombinationen des Prozesses umgewandelt werden können. Eine enge Verwandtschaft mit der Cholesky-Faktorisierung zur Lösung von linearen Gleichungen wird gefunden.

# Aufbau und Notationen

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Kapitel mit Unterabschnitten. Im ersten Kapitel werden die erforderlichen analytischen Begriffe und Werkzeuge zur Zerlegung von hilbertschen Unterräumen aufgeführt bzw. entwickelt. Die Fragestellung, wie stochastische Prozesse in diesen analytischen Rahmen eingebettet werden können, wird im zweiten Kapitel diskutiert. Gegenstand des dritten Kapitels sind dann die Ausführungen zur Zerlegungstheorie für unterschiedliche Klassen von Prozessen. Im abschließenden Kapitel 4 wird die Anwendungsrelevanz der entwickelten Theorie spezifisch für die Vorhersageproblematik von Zeitreihen untersucht. Detailliertere Beschreibungen der jeweiligen Inhalte finden sich zu Beginn jedes Kapitels.

Bei Verweisen über Abschnittsgrenzen hinweg werden alle Nummerierungen angegeben. So verweist 'Hauptsatz 1.5' auf den (einen) Hauptsatz aus Abschnitt 5 des ersten Kapitels. Bestehen mehrere Ausführungen gleicher Art in einem Abschnitt, so werden sie innerhalb dieses Abschnitts nummeriert, und diese letzte Referenzzahl wird bei Verweisen mit angegeben. 'Lemma 3.4.2' verweist demnach auf das zweite Lemma in Abschnitt 4 des dritten Kapitels.

Bei Referenzen innerhalb eines Abschnitts wird auf Angabe von Kapitel und Abschnitt verzichtet. Innerhalb eines Abschnitts mit nur einem Satz aber mehreren Beispielen wird darauf durch 'Satz' oder 'Beispiel 2' verwiesen.

Die Notationen in der vorliegenden Arbeit orientieren sich im Wesentlichen an denen von Portenier (2002, [38]). Einige häufiger benötigte Bezeichnungen sollen nun zusammengefasst werden:

*Prozesse* werden in der vorliegenden Arbeit mit großen griechischen Buchstaben (meist  $\Xi$ ) bezeichnet. Gelegentlich wird auch der Buchstabe  $X$ , bei der Brownschen Bewegung der Buchstabe  $B$  gewählt. Als *Indextmengen (Zeitbereiche)* für Prozesse werden *lokal kompakte* (topologische) Räume zugelassen. Diese sollen stets *hausdorffsch* sein und werden mit Schrifttyp 'Bold' ( $\mathbf{T}$  oder  $\mathbf{X}$ ) notiert.  $\mathfrak{K}(\mathbf{T})$  steht für das System aller kompakten Mengen in  $\mathbf{T}$ . Funktionen auf diesen Räumen werden meist mit  $f$  bezeichnet - der Platzhalter  $\diamond$  kennzeichnet den Einsatz von Variablen. So steht z. B.  $f \cdot \Xi_\diamond$  als Abkürzung für die Abbildung

$$t \longmapsto f(t) \cdot \Xi_t .$$

Die topologische Betrachtungsweise erlaubt *Radon-Integrale (Pivotmaße)* darauf zu wählen, die hier meist mit kleinen griechischen Buchstaben ( $\mu$ ,  $\nu$ , oder  $\sigma$ ) bezeichnet werden.  $\lambda$  steht für das *Lebesgue-Integral*,  $\varepsilon_t$  oder  $\delta_x$  für *Dirac-Maße*. Der Ausdruck 'fast-überall' wird durch *f.ü.* abgekürzt, 'fast alle' durch *f.a.*. Räume von quadratisch



integrierbaren Funktionen werden durch  $\mathbf{L}^2(\mu)$  oder - falls das Maß klar ist - durch  $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$  notiert.  $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$  steht für den Vektorraum aller lokal  $\mu$ -integrierbaren Funktionen.

Allen *Vektorräumen* der vorliegenden Arbeit liegt stets der *Körper*  $\mathbb{K}$  zugrunde, der repräsentativ für die reellen bzw. komplexen Zahlen  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  steht. *Lokal konvexe Hausdorff-Räume* werden mit  $F$  (oder  $E$ ) bezeichnet und ihr topologischer *(Semi-)Dualraum*, d. h. der Raum aller stetigen (Semi-)Linearformen auf  $F$ , mit  $F^\dagger$ . Die *Semidualität* zwischen  $F$  und  $F^\dagger$  schreiben wir durch Klammern  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  in der Form

$$F \times F^\dagger \longrightarrow \mathbb{K} : (\psi, \Psi) \longmapsto \langle \psi | \Psi \rangle := \Psi(\psi) .$$

Sofern nichts Anderes angemerkt wird, sei auf  $F^\dagger$  stets die *schwache Topologie*  $\sigma(F^\dagger, F)$  angenommen. Soll dies verdeutlicht werden, schreiben wir  $F_\sigma^\dagger$ .

Typische lokal konvexe Räume sind  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ , der Raum aller  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ -Funktionen  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } \varphi = \overline{\{t \in \mathbb{R}_+^* \mid \varphi(t) \neq 0\}}$ ,  $\mathcal{K}(\mathbf{T})$ , der Raum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger<sup>4</sup>, oder auch  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , der Schwartz-Raum der rasch fallenden  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen. Der Dualraum von  $\mathcal{K}(\mathbf{T})$  ist  $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ , der Raum aller Radon-Maße auf  $\mathbf{T}$ , und die entsprechende Semidualität ist

$$\mathcal{K}(\mathbf{T}) \times \mathcal{M}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \mu \rangle := \int_{\mathbf{T}} \overline{\varphi(t)} d\mu(t) .$$

Mit  $\mathcal{L}(F, E)$  wird der Vektorraum aller stetigen *linearen Abbildungen* von  $F$  nach  $E$  bezeichnet und  $\text{Ker } L$  steht für den Kern  $\{\varphi \in F \mid L\varphi = 0\}$  einer solchen Abbildung  $L \in \mathcal{L}(F, E)$ . Die zu einer solchen Abbildung  $L$  gehörige *Adjungierte* wird mit  $L^\dagger$ , die Einschränkung auf einen Unterraum  $U \subset F$  wird durch  $L|_U$  gekennzeichnet.

*Hilbert-Räume* schreiben wir in calligrafischen Buchstaben wie  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{V}$  oder  $\mathcal{X}$ . Bei *Adjungierten* von *unbeschränkten Operatoren* in Hilbert-Räumen wird  $^\dagger$  durch  $^*$  ersetzt, so dass  $G^* : D(G^*) \longrightarrow \mathcal{H}$  für die Adjungierte eines Operators

$$G : D(G) \longrightarrow \mathcal{G}$$

(mit Definitionsbereich  $D(G) \subset \mathcal{H}$ ) steht. Hilbert-Räume sind in kanonischer Semidualität zu sich selbst vermöge des Skalarprodukts

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K} : (\xi, \eta) \longmapsto (\xi | \eta)_{\mathcal{H}}$$

und können darüber ebenfalls mit einer schwachen Topologie versehen werden - wir schreiben  $\mathcal{H}_\sigma$  dafür. *Orthogonale Komplemente* von Teilmengen  $U \subset \mathcal{H}$  sind durch

$$U^{\perp\mathcal{H}} := \{\xi \in \mathcal{H} \mid (\xi | \eta) = 0 \text{ für alle } \eta \in U\}$$

definiert. Für *orthogonale Zerlegungen* von Räumen nutzen wir  $\overset{2}{\oplus}$  oder das quadratische Summensymbol  $\boxplus$ .

Bei *hilbertschen Unterräumen* präzisiert man den Oberraum oft durch Angabe der kanonischen Injektion  $h^\dagger : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$  oder  $v^\dagger : \mathcal{V} \hookrightarrow E^\dagger$ , die zu hilbertschen Unterräumen gehörigen *Kerne* werden mit Kleinbuchstaben (wie  $h$ ,  $g$ ,  $k$  oder  $v$ ) notiert. Die Menge solcher Kerne ist gerade der konvexe Kegel  $\mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$  der hermitesch-positiven, stetigen und linearen Abbildungen von  $F$  in seinen (topologischen Semi-)Dualraum  $F^\dagger$ . Ausführlichere, bei Portenier (2002, [38]) vorgestellte Informationen zu hilbertschen Unterräumen findet man auch in Abschnitt 1.1 zusammengefasst.

<sup>4</sup> Trägt  $\mathbf{T}$  die diskrete Topologie, so schreiben wir  $\mathbb{K}^{(\mathbf{T})}$  statt  $\mathcal{K}(\mathbf{T})$  für den Raum aller Funktionen auf  $\mathbf{T}$  mit endlichem Träger.

# Einleitung

Zur Motivation und auch zur Gewöhnung an die Notationen soll nun das Beispiel der Brownschen Bewegung diskutiert werden, welches sehr gut die eingangs erwähnte Schnittfläche analytischer und stochastischer Prozesstheorie verdeutlicht. Der Aufbau orientiert sich an dem der eigentlichen Theorie.

## Einbettung der Brownschen Bewegung

und ihr (reproduzierender) hilbertscher Unterraum

Der vorliegende Zugang sieht die Brownsche Bewegung  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$  als eine Familie von quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen. Man könnte also  $B_t \in \mathbf{L}^2(\mathbf{P})$  schreiben und mit  $\mathbf{P}$  das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnen. Da jedoch genau dieser Wahrscheinlichkeitsraum praktisch immer verborgen bleibt, und zur Entwicklung der Theorie einzig die Kovarianzstruktur wesentlich ist, abstrahieren wir zu einer Familie  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*} \subset \mathcal{X}$  mit einem Hilbert-Raum  $\mathcal{X}$ . Die Kovarianzfunktion der Brownschen Bewegung ist dann durch das Skalarprodukt

$$c : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : (s, t) \longmapsto (B_s | B_t) = E(\overline{B_s} \cdot B_t) = \min(s, t)$$

als Minimumfunktion gegeben. Durch praktische Gründe motiviert und fundamental für die vorliegende Arbeit ist, dass der Prozess nur durch seine Kovarianzstruktur 'modelliert' wird, d. h. durch die stetigen Funktionen

$$(B_\diamond | \eta) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{K} : t \longmapsto (B_t | \eta) \quad , \eta \in \mathcal{X} .$$

Um einen geeigneten Rahmen zu finden, in welchem diese 'Modellierung' sinnvoll eingebettet werden kann, wählen wir das Lebesgue-Integral  $\lambda_{\mathbb{R}_+^*}$  als Radon-Integral (Pivotmaß) auf  $\mathbb{R}_+^*$  und betrachten  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ , den Raum aller (komplexwertigen)  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ -Funktionen  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } \varphi$ . Für  $\eta \in \mathcal{X}$  ist durch  $(B_\diamond | \eta) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*}$  ein Maß mit (stetiger) Dichte wohldefiniert, welches mittels

$$\varphi \longmapsto \left\langle \varphi \left| (B_\diamond | \eta) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*} \right. \right\rangle := \int_{\mathbb{R}_+^*} \overline{\varphi}(t) \cdot (B_t | \eta) \cdot dt$$

als stetige (Semi-)Linearform auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  aufgefasst werden soll. Die Abbildung

$$|\diamond] : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' : \eta \longmapsto (B_\diamond | \eta) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*}$$

ist somit wohldefiniert und wegen

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+^*} \bar{\varphi}(t) \cdot (B_t | \eta) \cdot dt \right| \leq \|\eta\|_{\mathcal{X}} \cdot \|\varphi\|_{\infty} \cdot \int_{\text{supp } \varphi} \sqrt{t} dt$$

stetig. Als Bild von  $\mathcal{X}$  unter der Modellierung  $|\diamond|$  erhält man nun Zufallsvariablen als Elemente des hilbertschen Unterraums

$$\mathcal{G} := |\mathcal{X}'| \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

mit Kern

$$g^\dagger g := |\diamond| \circ |\diamond|^\dagger : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

$$\varphi \longmapsto \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} (B_\diamond | B_t) \cdot \varphi(t) dt \right) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*} = \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} \min(\diamond, t) \cdot \varphi(t) dt \right) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*} .$$

Man kennt die Elemente von  $\mathcal{G}$  apriori nur in dem Sinne, dass sie im Wesentlichen durch Maße mit Dichten der Gestalt  $(B_\diamond | \eta)$  gegeben sind. Nach Konstruktion ist

$$B_t := |B_t| = (B_\diamond | B_t) = \min(\diamond, t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+^* .$$

Als Fazit stellt der Oberraum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  der stetigen (Semi-)Linearformen auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  einen sinnvollen Rahmen zur Definition der Elemente  $B_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , als verallgemeinerte Funktionen dar. In diesem Sinne ist die reproduzierende Eigenschaft  $\gamma = (B_\diamond | \gamma)_{\mathcal{G}}$  für alle  $\gamma \in \mathcal{G}$  natürlich.

### Darstellung und Bildzerlegung des Brownschen Prozessraums

Man findet nun, dass durch

$$w : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) : \varphi \longmapsto \int_{\diamond}^{\infty} \varphi(t) dt$$

ein schwach stetiger Operator in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*})$  definiert wird, dessen Adjungierte durch

$$w^\dagger : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' : \eta \longmapsto \int_0^\diamond \eta(x) dx$$

bzw. durch

$$w^* : \mathcal{D}(w^*) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*}) : \eta \longmapsto \int_0^\diamond \eta(x) dx$$

auf  $\mathcal{D}(w^*) = \left\{ \eta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \mid \int_0^\diamond \eta(x) dx \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*}) \right\}$  gegeben ist. Nun besitzt  $w$  nur Bilder in  $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ , dem Raum aller stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}_+$  mit kompaktem Träger. Für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  und alle Maße  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+) = \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)'$  gilt außerdem

$$\left| \langle \mu | w\varphi \rangle_{\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_x^\infty \varphi \right) d\bar{\mu}(x) \right| \leq \|\varphi\|_{\infty} \cdot |\mu|([0, \sup(\text{supp } \varphi)]) ,$$

so dass

$$V : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}_+) : \varphi \longmapsto w\varphi$$

wohldefiniert und (schwach) stetig ist. Üblicherweise unterscheiden wir nicht zwischen einer Funktion (z. B.  $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ ) und ihrer zugehörigen Klasse (z. B.  $[\varphi] \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ ),

sondern schreiben

$$v : \mathcal{K}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) : \varphi \longmapsto v\varphi$$

für den kanonischen Kern des hilbertschen Unterraums  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ . Es gilt nun (mit Fubini) für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$

$$\begin{aligned} \langle \varphi | V^\dagger v^\dagger v V \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)} &= \left( v \left( \int_{\diamond}^{\infty} \varphi \right) \middle| v \left( \int_{\diamond}^{\infty} \varphi \right) \right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \overline{\left( \int_x^{\infty} \varphi \right)} \left( \int_x^{\infty} \varphi \right) dx = \int \int \left( \int_0^{\min(s,t)} 1 dx \right) \overline{\varphi(s)} \cdot \varphi(t) dt ds = \\ &= \int \overline{\varphi(s)} \cdot \left( \int \min(s,t) \cdot \varphi(t) dt \right) ds = \langle \varphi | g^\dagger g \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)} . \end{aligned}$$

Die Gleichheit  $V^\dagger v^\dagger v V = g^\dagger g$  zeigt, dass  $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  das Bild von

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$$

unter

$$V^\dagger : \mathcal{M}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' : \mu \longmapsto \mu([0, \diamond]) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*}$$

ist, d. h.

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = V^\dagger(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)) &= \left\{ \int_0^{\diamond} \xi \in \mathcal{AC}(\mathbb{R}_+^*) \middle| \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \right\} = \\ &= \{ \gamma \in \mathcal{AC}(\mathbb{R}_+^*) \mid \gamma(0) = 0 \text{ und } \partial\gamma \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) \} \end{aligned}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(\theta | \gamma)_{\mathcal{G}} = \int_{\mathbb{R}_+} \overline{\partial\theta} \cdot \partial\gamma .$$

Die reproduzierende Eigenschaft zeigt sich wieder durch die einfache Rechnung

$$(B_{\diamond} | \gamma)_{\mathcal{G}} = \int_{\mathbb{R}_+} \overline{\partial B_{\diamond}} \cdot \partial\gamma = \int_{\mathbb{R}_+} 1_{]0, \diamond]} \cdot \partial\gamma = \gamma .$$

Insbesondere kann man die triviale, direkte und eindimensionale Zerlegung

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+) = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \varepsilon_x dx \quad \text{in } \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$$

mittels der Dirac-Integrale (Punktmaße)  $\varepsilon_x$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , unter  $V^\dagger$  zu

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot V^\dagger \varepsilon_x dx \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

abbilden. Dabei bleibt die Direktheit erhalten, da  $V^\dagger$  injektiv ist. Man kann sogar  $V^\dagger$  in den Dirac-Maßen auswerten und erhält

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

mit

$$\Theta_x := V^\dagger \varepsilon_x = 1_{[x, \infty[} \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^* .$$

In dieser Zerlegung bestimmen sich die Koeffizienten<sup>5</sup> von  $B_s$ ,  $s \in \mathbb{R}_+^*$ , mit Hilfe von Fubini und der reproduzierenden Eigenschaft gemäß

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi \left| \int_{\mathbb{R}_+^*} 1_{]0,s[}(x) \cdot \Theta_x dx \right. \right\rangle &= \int 1_{]0,s[}(x) \cdot \langle V\varphi | \varepsilon_x \rangle dx = \int 1_{]0,s[}(x) \cdot \left( \int_x^\infty \overline{\varphi} \right) dx = \\ &= \int \int 1_{]0,s[}(x) \cdot 1_{]0,t[}(x) \cdot \overline{\varphi}(t) dt dx = \int \overline{\varphi}(t) \cdot \min(s, t) dt = \overline{g\varphi}(s) = \\ &= (g\varphi | B_s) = \langle \varphi | B_s \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

zu  $\widehat{B}_s = 1_{]0,s[}$ .

### Abschließung des Brownschen Prozesskerns

Das neben Bildzerlegungen erarbeitete Konzept der Spektralzerlegung stellt den Pivotraum

$$h^\dagger h : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*}) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' : \varphi \longmapsto \varphi \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*}$$

in den Mittelpunkt und greift im konkreten Fall der Brownschen Bewegung z. B. auf den oben angeführten adjungierten Operator

$$w^* : \mathcal{D}(w^*) = \left\{ \eta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \mid \int_0^\diamond \eta \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*}) \right\} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*}) : \eta \longmapsto \int_0^\diamond \eta(x) dx$$

zurück.  $w^*$  ist der inverse Operator zum abgeschlossenen Ableitungsoperator

$$\partial : \mathcal{H}_0^{(1)}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \partial(\mathcal{H}_0^{(1)}(\mathbb{R}_+^*)) : \xi \longmapsto \partial\xi,$$

welcher dicht in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*})$  auf dem Sobolev-Teilraum

$$\mathcal{H}_0^{(1)}(\mathbb{R}_+^*) := \{ \xi \in \mathcal{AC}(\mathbb{R}_+^*) \mid \xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \text{ und } \xi(0) = 0 \}$$

definiert ist. Insbesondere ist  $w^*$  dicht definiert, injektiv und mit dichtem Bild  $\mathcal{H}_0^{(1)}(\mathbb{R}_+^*)$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*})$ . Es folgt, dass  $w$  abschließbar ist mit injektivem Abschluss  $W := \overline{w} = w^{**}$ . Dessen Inverse ist durch den auf dem gesamten Sobolev-Raum

$$\mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}_+^*) := \{ \xi \in \mathcal{AC}(\mathbb{R}_+^*) \mid \xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \} \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$$

definierten und zu  $\partial$  adjungierten Operator

$$\partial^* : \mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \partial^*(\mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}_+^*)) : \eta \longmapsto \partial^*\eta$$

gegeben. Damit erhält man die Charakterisierung des Definitionsbereich von  $W$  als Bild

$$\begin{aligned} D(W) &= \partial^*(\mathcal{H}^{(1)}(\mathbb{R}_+^*)) = \\ &= \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*}) \mid \xi \text{ uneigentlich integrierbar mit } \int_\diamond^{\infty-} \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \right\} = \\ &= \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*}) \mid \exists c \in \mathbb{K} : \left( c + \int_0^\diamond \xi \right) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \right\}, \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Man sagt auch Parseval-Repräsentant.

sowie die Abbildungsvorschrift<sup>6</sup>

$$W\xi = \int_{\diamond}^{\infty-} \xi \quad \text{bzw.} \quad W\xi = - \left( c + \int_0^{\diamond} \xi \right) .$$

Offensichtlich ist  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) = D(w)$  dichter Teilraum von  $\mathcal{D}(W)$  und es gilt  $Wh = w$ . Insbesondere ist  $Wh$  schwach stetig mit  $(Wh)^\dagger(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*)) = \mathcal{G}$ . Über diese Gleichung, die man auch in der Form  $w^\dagger w = g^\dagger g$  schreibt, lässt sich die Abschließbarkeit von  $w$  auf die von  $g$  zu einem Operator  $G$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*})$  mit Werten in  $\mathcal{G}$  übertragen. Darüber hinaus gilt  $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(W)$  - oder äquivalent dazu  $G^*G = W^*W$  - aufgrund der Dichtheit von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  in  $\mathcal{D}(W)$ .

### Spektralzerlegung des Brownschen Prozessraums

Die Spektralzerlegung (siehe z. B. Portenier (2002, [38]))

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot 2 \sin(2\pi\lambda\diamond) \, d\lambda \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

des 'Dirichlet-Operators'  $\partial^*\partial = 4\pi^2 \cdot \mathbb{A}_D$  als Multiplikationsoperator  $Z_{4\pi^2 \cdot |\text{id}|^2}$  liefert sofort die zur Inversen  $G^*G = W^*W$  gehörige Spektralzerlegung

$$G^*G = Z_{\frac{1}{4\pi^2 \cdot |\text{id}|^2}} : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{4\pi^2 \cdot |\lambda|^2} \cdot \widehat{\xi}(\lambda) \cdot 2 \sin(2\pi\lambda\diamond) \, d\lambda ,$$

wenn dabei  $\widehat{\xi}$  den Parseval-Repräsentanten von  $\xi$  bezeichnet. Die vorliegende Arbeit wird zeigen, dass allgemein in einer solchen Situation der zugehörige Prozessraum ebenfalls direkt in

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \frac{1}{4\pi^2 \cdot |\lambda|^2} \cdot \left( \mathbb{C} \cdot 2 \sin(2\pi\lambda\diamond) \right) \, d\lambda$$

zerlegt wird. Für die Koeffizienten bzw. den Parseval-Repräsentanten von  $B_s$ ,  $s \in \mathbb{R}_+^*$ , wertet man  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  mit dem Integral von  $\frac{2 \sin(2\pi\diamond s)}{2\pi \cdot |\diamond|} \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*})$  mittels Fubini und reproduzierender Eigenschaft aus

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi \left| \int_0^\infty \frac{2 \sin(2\pi\lambda s) \cdot 2 \sin(2\pi\lambda\diamond)}{4\pi^2 \cdot |\lambda|^2} \, d\lambda \right. \right\rangle &= \int_0^\infty \frac{2 \sin(2\pi\lambda s) \cdot \langle \varphi | 2 \sin(2\pi\lambda\diamond) \rangle}{4\pi^2 \cdot |\lambda|^2} \, d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \frac{2 \sin(2\pi\lambda s)}{4\pi^2 \cdot |\lambda|^2} \cdot \int_0^\infty \overline{\varphi(t)} \cdot 2 \sin(2\pi\lambda t) \, dt \, d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \overline{\varphi(t)} \cdot \int_0^\infty \frac{2 \sin(2\pi\lambda s)}{2\pi\lambda} \cdot \frac{2 \sin(2\pi\lambda t)}{2\pi\lambda} \, d\lambda \, dt = \\ &= \int_0^\infty \overline{\varphi(t)} \cdot \min(s, t) \, dt = \overline{g\varphi(s)} = (g\varphi | B_s) = \langle \varphi | B_s \rangle \end{aligned}$$

und erhält  $\widehat{B}_s = \frac{2 \sin(2\pi\diamond s)}{2\pi \cdot |\diamond|}$ . Man vergleiche diese Ausführungen mit den entsprechenden von Karhunen (1947, [22], Abschnitt 30, 3°).

<sup>6</sup> Die Bezeichnung  $\int_{\diamond}^{\infty-} \xi$  soll dabei darauf hinweisen, dass es sich um ein uneigentliches Integral handelt.

## Vorhersage der Brownschen Bewegung

Von den vorgestellten Zerlegungen des Brownschen Prozessraums bietet sich die Erstgenannte zu Vorhersagezwecken sehr gut an. Man findet nämlich für beliebiges  $\alpha > 0$ , dass das abgeschlossene lineare Erzeugnis aller  $B_\beta$ ,  $\beta \in ]0, \alpha]$ , durch

$$\overline{\text{lin}}(B_{]0, \alpha]}) = \int_{]0, \alpha]} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

zerlegt ist. Die Inklusion  $\overline{\text{lin}}(B_{]0, \alpha]}) \subset \int_{]0, \alpha]} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx$  ist dabei eine unmittelbare Konsequenz aus  $1_{]0, \beta[} \in \mathbf{L}^2(]0, \alpha])$  für alle  $\beta \in ]0, \alpha]$ . Umgekehrt gibt es zu einer Funktion  $f \in \mathbf{L}^2(]0, \alpha]) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$  eine Folge von Treppenfunktionen  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit Trägern in  $]0, \alpha]$  derart, dass  $\lim_k f_k = f$  in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ . Genau wie jedes einzelne  $f_k$  endliche Linearkombination von Funktionen der Gestalt  $1_{]0, \beta[}$  mit  $0 < \beta \leq \alpha$  ist, ist  $\int f_k(x) \cdot \Theta_x dx$  endliche Linearkombination von  $B_\beta$  mit  $0 < \beta \leq \alpha$ . Danach muss der Grenzwert  $\int f(x) \cdot \Theta_x dx$  ebenfalls in  $\overline{\text{lin}}(B_{]0, \alpha]})$  liegen.

Als Vorhersage der Brownschen Bewegung  $B_\tau$  zu einem Zeitpunkt  $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ , gegeben ein Zeitbereich  $]0, \alpha]$ , dient wie üblich die im quadratischen Mittel beste Approximation von  $B_\tau$  durch den erzeugten Raum  $\overline{\text{lin}}(B_{]0, \alpha]})$ . Diese lineare Projektion von  $B_\tau$  auf  $\overline{\text{lin}}(B_{]0, \alpha]})$  ist nun trivialerweise durch

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{]0, \alpha]} B_\tau &= \int_{]0, \alpha]} \widehat{B}_\tau(x) \cdot \Theta_x dx = \int_{]0, \alpha]} 1_{]0, \tau[}(x) \cdot \Theta_x dx = \\ &= \int 1_{]0, \min(\alpha, \tau)[}(x) \cdot \Theta_x dx = B_{\min(\alpha, \tau)} \end{aligned}$$

gegeben. Dasselbe Ergebnis stellt sich natürlich auch durch eine kurze Argumentation über die Unabhängigkeit der Zuwächse ein, die obige Konstruktion greift darauf jedoch nicht zurück.

# Kapitel 1

## Abschließbare Kerne und Testräume

Ziel dieses Kapitels ist es, die funktionalanalytischen Grundlagen und Methoden bereitzustellen bzw. zu entwickeln, die später zu Ergebnissen in der Theorie von (stochastischen) Prozessen führen werden.

Zentral ist dabei die Theorie der hilbertschen Unterräume, insbesondere ihrer Zerlegungen. In einem einführenden Abschnitt werden die wichtigsten Begriffe zusammengestellt. Die Formulierung ist dabei, wie auch im gesamten Kapitel, im Wesentlichen an die von Portenier (2002, [38]) angelehnt.

Ein Konzept, welches die vorliegende Arbeit verwendet, ist das der Bildzerlegung. Hierbei wird der zu untersuchende Raum mittels eines beliebigen, bereits zerlegten Bezugsraums wiederum zerlegt.

Die Rolle des Bezugsraums wird daraufhin weiter ausgebaut. Unter Berücksichtigung dieses sogenannten 'Pivotraums' wird eine zweite Methode zur Zerlegung eines hilbertschen Unterraums spezifiziert: die Spektralzerlegung. Am Anfang der Entwicklung steht dabei das Problem der Abschließbarkeit des zugehörigen Kerns bzgl. des 'Pivotkerns'.

Schließlich werden die Begriffe 'Testraum' und 'verallgemeinerte Funktionen' zur Verfügung gestellt, die fundamental für die Übertragung der entwickelten Theorie auf Prozesse sein werden.

In diesem Kapitel seien  $E$  und  $F$  lokal konvexe Hausdorff-Räume.



## 1.1 Einführung zu hilbertschen Unterräumen

Die Inhalte dieses Abschnitts sind aus Portenier (2002, [38]) entnommen.

**DEFINITION 1** Sei  $\mathcal{H}$  ein Untervektorraum von  $F^\dagger$ , der mit einer Hilbert-Raumstruktur versehen ist. Wir schreiben  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$  und bezeichnen dies als einen *hilbertschen Unterraum* von  $F^\dagger$ , falls die kanonische Injektion  $j : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$  stetig ist. Die stetige lineare Abbildung

$$h := jj^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma \hookrightarrow F^\dagger$$

heißt dann *Kern* von  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ .

Da  $j$  nur die kanonische Injektion von  $\mathcal{H}$  in  $F^\dagger$  ist, bezeichnet man mit  $h$  auch die stetige lineare Abbildung

$$h := j^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$$

und nennt diese ebenfalls Kern von  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ . Dann ist  $j = h^\dagger$  und der Kern als Abbildung von  $F$  nach  $F^\dagger$  ist  $h^\dagger h$ .

Mit  $\text{Hilb}(F^\dagger)$  wird die Menge der hilbertschen Unterräume in  $F^\dagger$  bezeichnet.

**LEMMA 1** Sei  $\mathcal{H}$  ein Untervektorraum von  $F^\dagger$ , der mit einer Hilbert-Raumstruktur versehen ist.  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$  ist genau dann ein hilbertscher Unterraum, wenn eine Abbildung  $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$  derart existiert, dass

$$\langle \varphi | \xi \rangle_F = (h\varphi | \xi)_\mathcal{H} \quad \text{für alle } \varphi \in F \text{ und } \xi \in \mathcal{H}$$

gilt. In diesem Fall ist  $h$  der Kern von  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ .

Der folgende Satz kann als Eindeigkeitssatz für hilbertsche Unterräume interpretiert werden.

**SATZ 1** Sei  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$  ein hilbertscher Unterraum mit Kern  $h$ .

(i) Der Untervektorraum  $h(F)$  ist dicht in  $\mathcal{H}$ , und  $\mathcal{H}$  ist die Vervollständigung von  $h(F)$  bzgl. des Skalarprodukts  $(h\varphi | h\psi)_{h(F)} := \langle \varphi | h\psi \rangle_F$ ,  $\psi, \varphi \in F$ .

(ii) Sei  $\xi \in F^\dagger$ . Genau dann ist  $\xi \in \mathcal{H}$ , wenn eine Konstante  $c \in \mathbb{R}_+$  mit

$$|\langle \varphi | \xi \rangle| \leq c \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } \varphi \in F$$

existiert. In diesem Fall ist  $\|\xi\|_\mathcal{H} = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leq 1} |\langle \varphi | \xi \rangle|$  die kleinste Konstante mit dieser Eigenschaft.

**KOROLLAR 1** *Ein hilbertscher Unterraum ist eindeutig durch seinen Kern bestimmt. Für Kerne  $h$  und  $g$  der hilbertschen Unterräume  $\mathcal{H}, \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  gilt genau dann  $\|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \|g\varphi\|_{\mathcal{G}}$  für alle  $\varphi \in F$ , wenn  $\mathcal{H} = \mathcal{G}$  gilt.*

**DEFINITION 2** Seien  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$  und  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  hilbertsche Unterräume mit Kernen  $h$  bzw.  $g$ . Wir schreiben  $\mathcal{G} \leq \mathcal{H}$ , falls gilt:

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \quad \text{und} \quad \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} \text{ ist stetig mit Norm } \leq 1 .$$

**SATZ 2** *Seien  $\mathcal{H}, \mathcal{G} \in \text{Hilb}(F^\dagger)$ . Genau dann ist  $\mathcal{G} \leq \mathcal{H}$ , wenn  $g \leq h$  gilt, d. h. wenn*

$$\langle \varphi | g\varphi \rangle \leq \langle \varphi | h\varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in F$$

*gilt.*

**BEMERKUNG 1** Ist  $\Phi \in \mathcal{L}(E^\dagger, F^\dagger)$  und  $\mathcal{V} \hookrightarrow E^\dagger$  ein hilbertscher Unterraum in  $E^\dagger$  mit Kern  $v$ , dann ist

$$\Phi|_{\mathcal{V}} = \Phi v^\dagger : \mathcal{V} \longrightarrow F^\dagger$$

eine Bijektion zwischen

$$\text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{V}})^{\perp \mathcal{V}} = (\mathcal{V} \cap \text{Ker} \Phi)^{\perp \mathcal{V}}$$

und  $\Phi(\mathcal{V})$ . Man versieht diesen Bildraum mit dem transportierten Skalarprodukt

$$(\Phi\xi | \Phi\eta)_{\Phi(\mathcal{V})} := (\xi | \eta)_{\mathcal{V}} \quad \text{für alle } \xi, \eta \in \text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{V}})^{\perp \mathcal{V}} .$$

Ein  $\xi \in \mathcal{V}$  mit  $\Phi\xi = \zeta$  heißt *Repräsentant* von  $\zeta \in \Phi(\mathcal{V})$ . Der eindeutige Repräsentant  $\xi \in \text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{V}})^{\perp \mathcal{V}}$  wird mit  $\Phi|_{\mathcal{V}}^{-1}\zeta$  notiert und heißt *Parseval-Repräsentant* von  $\zeta$ . Die Abbildung

$$\Phi|_{\mathcal{V}}^{-1} : \zeta \longmapsto \Phi|_{\mathcal{V}}^{-1}\zeta : \Phi(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$$

heißt dementsprechend *Parseval-Abbildung*.

**HAUPTSATZ 1** *Es gelten die Notationen aus Bemerkung 1.*

(i)  $\Phi(\mathcal{V}) \hookrightarrow F^\dagger$  ist ein hilbertscher Unterraum mit Kern  $\Phi v \Phi^\dagger$ . Genauer gilt:

$$\|\zeta\|_{\Phi(\mathcal{V})} = \min_{\xi \in \mathcal{V}, \Phi\xi = \zeta} \|\xi\|_{\mathcal{V}} = \left\| \Phi|_{\mathcal{V}}^{-1}\zeta \right\|_{\mathcal{V}}$$

für alle  $\zeta \in \Phi(\mathcal{V})$ , die Parseval-Abbildung ist eine Isometrie, und  $\Phi|_{\mathcal{V}}^{-1}\Phi|_{\mathcal{V}}$  ist die Orthogonalprojektion auf  $\text{Ker}(\Phi|_{\mathcal{V}})^{\perp \mathcal{V}}$ .

(ii) Für alle  $\psi \in E$  ist  $v\Phi^\dagger\psi \in \mathcal{V}$  der Parseval-Repräsentant von  $\Phi v \Phi^\dagger\psi$ . Weiterhin gilt für  $\xi, \eta \in \mathcal{V}$

$$(\Phi\xi | \Phi\eta)_{\Phi(\mathcal{V})} = (\xi | \eta)_{\mathcal{V}} ,$$

sofern eines der Elemente  $\xi, \eta$  ein Parseval-Repräsentant ist.

**BEMERKUNG 2** Über dieses Verfahren lassen sich viele hilbertsche Unterräume konstruieren, wie z. B. Summen von hilbertschen Unterräumen oder gestreckte hilbertsche Unterräume<sup>7</sup>.

Auch der Existenzbeweis von Schwartz basiert auf Bildern von hilbertschen Unterräumen, was im Folgenden kurz skizziert werden soll.

Für einen Kern  $k \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$  versehen wir den Quotientenraum  $F_k := F / \text{Ker}(k)$  mit dem Skalarprodukt, das von der quadratischen Form

$$k : F \times F \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi | k\psi \rangle_F = (k\varphi | k\psi)_\mathcal{K}$$

induziert wird. Mit  $\widehat{F}_k$  sei die Vervollständigung von  $F_k$  bezeichnet. Ist die kanonische Abbildung

$$\Psi_k : \varphi \longmapsto \varphi + \{\psi \mid \langle \psi | k\psi \rangle = 0\} : F \longrightarrow F_k \hookrightarrow \widehat{F}_k$$

stetig (bzgl. der Mackey-Topologie auf  $F$ ) mit dichtem Bild, so ist  $\mathcal{K} := \Psi_k^\dagger \left( \left( \widehat{F}_k \right)_\beta^\dagger \right)$

ein hilbertscher Unterraum in  $F^\dagger$  mit Kern  $k$  und der Operator  $\Psi_k^\dagger : \left( \widehat{F}_k \right)_\beta^\dagger \longrightarrow \mathcal{K}$  ist unitär. Der Index an  $\Psi$  wird ausgelassen, wenn sich der Kern aus dem Zusammenhang klar erschließen lässt.

An diese Bemerkung schließt sich der folgende Existenzsatz für hilbertsche Unterräume an.

**HAUPTSATZ 2** Zu jedem hermitesch positiven Kern  $h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$ , für den  $\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$  stetig ist, existiert genau ein hilbertscher Unterraum  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$  mit Kern  $h$ .

Die Abbildung  $\ker : \mathcal{H} \longmapsto h$  ist ein wachsender, injektiver Morphismus von  $\text{Hilb}(F^\dagger)$  in den geordneten Kegel  $\mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$ . Ist  $F$  tonneliert, so ist  $\ker$  ein Isomorphismus.

Des Weiteren ist für  $\Phi \in \mathcal{L}(E_\sigma^\dagger, F_\sigma^\dagger)$  durch

$$\Phi : \text{Hilb}(E^\dagger) \longrightarrow \text{Hilb}(F^\dagger) : \mathcal{V} \longmapsto \Phi(\mathcal{V})$$

eine wachsende lineare Abbildung wohldefiniert.

Zerlegungen von hilbertschen Unterräumen werden bzgl. eines positiven Radon-Integrals  $\sigma \in \mathcal{M}_+(\Lambda)$  über einem topologischen Hausdorff-Raum  $\Lambda$  konstruiert. Dazu sei eine Familie  $\widehat{\mathcal{H}} : \Lambda \longrightarrow \text{Hilb}(F^\dagger)$  hilbertscher Unterräume in  $F^\dagger$  gegeben mit zugehörigen Kernen  $\widehat{h} : \Lambda \longrightarrow L_s(F, F^\dagger)$ . Die Norm und das Skalarprodukt auf  $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$  sei durch  $\|\cdot\|_\lambda = \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)}$  und  $(\cdot | \cdot)_\lambda = (\cdot | \cdot)_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)}$  notiert.

**DEFINITION 3** Für alle Abbildungen  $\zeta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$  definiert man

$$\|\zeta\|_\diamond = \|\zeta\|_{\widehat{\mathcal{H}}} : \lambda \longmapsto \|\zeta(\lambda)\|_\lambda = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | \widehat{h}(\lambda)\varphi \rangle \leq 1} |\langle \varphi | \zeta(\lambda) \rangle| : \Lambda \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

<sup>7</sup> Mit Letzteren zeigt man, dass es auf einem Untervektorraum von  $F^\dagger$  höchstens eine Hilbert-Raum Topologie gibt, bzgl. welcher die kanonische Injektion stetig ist.

und

$$\|\zeta\|_2 := \|\|\zeta\|_\diamond\|_{2,\sigma} = \left( \int^* \|\zeta(\lambda)\|_\lambda^2 d\sigma(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\zeta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$  heißt ein *Feld* (mit Werten in  $\widehat{\mathcal{H}}$ ), falls

$$\zeta(\lambda) \in \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) \quad \text{für } \sigma\text{-fast alle } \lambda \in \Lambda$$

gilt. Für Felder  $\zeta, \tilde{\zeta}$  setzt man

$$\left( \tilde{\zeta} \middle| \zeta \right)_\diamond : \lambda \longmapsto \left( \tilde{\zeta}(\lambda) \middle| \zeta(\lambda) \right)_\lambda : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}.$$

In den ( $\sigma$ -vernachlässigbaren) Punkten, in denen dies nicht wohldefiniert ist, setze man  $\left( \tilde{\zeta}(\lambda) \middle| \zeta(\lambda) \right)_\lambda := 0$ .

Mit  $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  wird der Vektorraum der Klassen<sup>8</sup> (modulo Gleichheit  $\sigma$ -f.ü.) von skalar  $\sigma$ -messbaren Feldern  $\zeta$  mit  $\|\zeta\|_2 < \infty$  bezeichnet. Darauf ist durch  $\|\cdot\|_2$  eine Norm definiert.

**BEMERKUNG 3**  $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  ist ein Banach-Raum und es gilt der Satz von Riesz-Fischer, wonach man zu jeder Cauchy-Folge in  $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  eine entsprechend konvergente Teilfolge finden kann. Die Einführung des eigentlich interessanten Raums von Feldern setzt die *skalare Integrierbarkeit von  $\widehat{h}$*  voraus. Diese ist gleichbedeutend mit der Bedingung

$$\|\widehat{h}\varphi\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma) \quad \text{für alle } \varphi \in F$$

und führt zu folgender Definition.

**DEFINITION 4** Ist  $\widehat{h}$  skalar  $\sigma$ -integrierbar, so induziert

$$(\varphi, f) \longmapsto \overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi : F \times \mathbf{L}^\infty(\sigma) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$$

eine lineare Abbildung  $|F\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)| \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  mit Bild  $|\widehat{h}(F)\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)|$ .

$\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  bezeichne den Abschluss von  $|\widehat{h}(F)\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)|$  in  $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$

**SATZ 3** Ist  $\widehat{h}$  skalar  $\sigma$ -integrierbar, so ist der Banach-Raum  $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  ein Hilbert-Raum. Genauer sind für alle  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  und  $\tilde{\zeta} \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  die Funktionen

$$\left( \tilde{\zeta} \middle| \zeta \right)_\diamond : \lambda \longmapsto \left( \tilde{\zeta}(\lambda) \middle| \zeta(\lambda) \right)_\lambda, \quad \|\zeta\|_\diamond : \lambda \longmapsto \|\zeta(\lambda)\|_\lambda$$

<sup>8</sup> Wie immer unterscheidet man nicht zwischen Klasse und zugehörigen Repräsentanten.

$\sigma$ -messbar mit  $(\tilde{\zeta}|\zeta)_{\diamond} \in \mathbf{L}^1(\sigma)$  und  $\|\zeta\|_{\diamond} \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ . Das Skalarprodukt auf  $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  ist durch

$$(\tilde{\zeta}|\zeta)_{\mathbf{L}^2} = \int (\tilde{\zeta}|\zeta)_{\diamond} d\sigma \quad \text{für alle } \zeta, \tilde{\zeta} \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$$

gegeben.

**HAUPTSATZ 3** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gilt

$$\|\widehat{h}\varphi\|_{\diamond} \in \mathbf{L}^2(\sigma) \quad \text{für alle } \varphi \in F$$

und  $\varphi \mapsto \|\widehat{h}\varphi\|_2$  ist eine Mackey-Halbnorm auf  $F$ .

(ii)  $\widehat{h}$  ist skalar  $\sigma$ -integrierbar und es gibt einen hilbertschen Unterraum  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$  mit Kern  $h$  derart, dass

$$\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma \quad \text{bzw.} \quad \|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \|\widehat{h}\varphi\|_2 \quad \text{für alle } \varphi \in F$$

gilt.

In diesem Fall heißt  $(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  eine Zerlegung des hilbertschen Unterraums  $\mathcal{H}$  in  $F^{\dagger}$  und wir schreiben

$$\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma \quad \text{in } F^{\dagger}.$$

Darüber hinaus ist dann jedes Feld  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$   $\sigma$ -integrierbar in  $F^{\dagger}$  und die lineare Abbildung

$$\int \diamond d\sigma : \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow F^{\dagger} : \zeta \longmapsto \int \zeta d\sigma$$

ist stetig mit Bild  $\mathcal{H}$ .

**BEMERKUNG 4**  $\int \diamond d\sigma$  ist eine Isometrie von

$$\left( \text{Ker} \left( \int \diamond d\sigma \right) \right)^{\perp \mathbf{L}^2} = \overline{\widehat{h}(F)}^{\mathbf{L}^2}$$

auf  $\mathcal{H}$ . Der Parseval-Repräsentant  $\widehat{\xi}$  von  $\xi \in \mathcal{H}$  ist die eindeutige Zerlegung  $\zeta$  von  $\xi$  im Abschluss von  $\widehat{h}(F)$ . So ist z. B.  $\widehat{h}\varphi$  die Parseval-Zerlegung  $\widehat{h}\varphi$  von  $h\varphi$ . Schließlich ist

$$(\xi|\eta)_{\mathcal{H}} = \int (\zeta|\widehat{\eta})_{\diamond} d\sigma,$$

für  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  und jede beliebige Zerlegung  $\zeta$  von  $\xi$ . Insbesondere ist

$$\xi \longmapsto \widehat{\xi} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$$

die Adjungierte zu  $\int \diamond d\sigma$ .

**DEFINITION 5** Eine Zerlegung  $(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  von  $\mathcal{H}$  heißt *nicht-degeneriert*, falls jede  $\sigma$ -messbare Menge  $A$  mit

$$1_A \cdot \widehat{h} = 0 \quad \text{skalar } \sigma\text{-f.ü.}$$

lokal  $\sigma$ -vernachlässigbar sein muss.

Die Zerlegung heißt *direkt*, falls sie nicht-degeneriert ist und

$$\int \diamond d\sigma : \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

injektiv ist. In diesem Fall sind  $\int \diamond d\sigma$  und die *Parseval-Abbildung*

$$\xi \longmapsto \widehat{\xi} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$$

unitär und wir schreiben

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \widehat{\mathcal{H}} d\sigma \quad \text{in } F^{\dagger} .$$

**BEMERKUNG 5** Für eine  $\sigma$ -messbare Menge  $A$  in  $\Lambda$  schreibt man kurz  $\mathcal{H}_A$  für  $\int 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$ , den hilbertschen Unterraum in  $F^{\dagger}$  mit Kern  $h_A := \int 1_A \cdot \widehat{h} d\sigma$ . Es gilt

$$\mathcal{H}_A = \int \left( \mathbf{L}^2(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}) \right) d\sigma = \int \left( 1_A \cdot \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \right) d\sigma$$

und Nicht-Degeneriertheit ist äquivalent zu folgender Eigenschaft: Für jede  $\sigma$ -messbare Menge  $A$ , die nicht lokal  $\sigma$ -vernachlässigbar ist, gilt  $\mathcal{H}_A \neq \{0\}$ .

Für Beweise zu obigen Aussagen und weitere Charakterisierungen der aufgeführten Begriffe siehe Portenier (2002, [38]).

## 1.2 Bildzerlegung eines hilbertschen Unterraums

Für das Konzept der Bildzerlegung eines hilbertschen Unterraums bedarf es nur einer kurzen Definition. Die aufgeführten Begriffe und Folgerungen greifen jedoch schon recht tief in die Theorie der hilbertschen Unterräume. Stark vereinfacht ausgedrückt formalisieren Lemma und Satz, inwiefern Bilder von Basen wieder Basen liefern.

**LEMMA**    Seien  $g$  bzw.  $v$  Kerne der hilbertschen Unterräume  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  bzw.  $\mathcal{V} \hookrightarrow E^\dagger$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)     $\mathcal{G}$  ist das Bild von  $\mathcal{V}$  unter einer Abbildung  $\Phi \in \mathcal{L}(E^\dagger, F^\dagger)$ .
- (ii)    Es gibt eine schwach stetige lineare Abbildung  $V : F \longrightarrow E$  derart, dass

$$g^\dagger g = V^\dagger v^\dagger v V .$$

- (iii)    Es gibt eine schwach stetige lineare Abbildung  $V : F \longrightarrow E$  mit

$$\|g\varphi\|_{\mathcal{G}}^2 = \|vV\varphi\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \text{für alle } \varphi \in F .$$

In diesem Fall gilt  $\Phi = V^\dagger$  und wir schreiben  $V^\dagger(\mathcal{V}) = \mathcal{G}$ .

**SATZ**    Seien  $g$  bzw.  $v$  Kerne der hilbertschen Unterräume  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  bzw.  $\mathcal{V} \hookrightarrow E^\dagger$ , für die die Bedingungen des Lemmas erfüllt sind. Man nehme an,  $\mathcal{V}$  sei in  $E^\dagger$  zerlegt:

$$E \xrightarrow{v} \mathcal{V} = \int_{\mathbf{x}} \widehat{\nu}(x) \, d\nu(x) \xrightarrow{v^\dagger} E^\dagger .$$

- (i)    Das Bild der Zerlegung unter  $V^\dagger$  ist eine Zerlegung von  $\mathcal{G}$  in  $F^\dagger$ :

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{x}} V^\dagger \left( \widehat{\nu}(x) \right) \, d\nu(x) \hookrightarrow F^\dagger .$$

(ii)    Die Nicht-Degeneriertheit der Zerlegung von  $\mathcal{V}$  ist notwendig für die Nicht-Degeneriertheit der Zerlegung von  $\mathcal{G}$ . Ist  $V^\dagger$  injektiv auf  $\mathcal{V}$ , so ist sie auch hinreichend.

(iii)    Ist  $V^\dagger$  injektiv auf  $E^\dagger$ , so gilt die Eigenschaft 'direkt' für beide oder für keine Zerlegung.

**Beweis**    Da  $\mathcal{V}$  mittels  $\widehat{\nu}$  zerlegt wird und  $\widehat{\nu}V\varphi$  für jedes  $\varphi \in F$  der Parseval-Repräsentant von  $V^\dagger \widehat{\nu}V\varphi$  ist, gilt

$$\|V^\dagger \widehat{\nu}(\diamond) V\varphi\|_{V^\dagger(\widehat{\nu}(\diamond))} = \|\widehat{\nu}(\diamond) (V\varphi)\|_{\widehat{\nu}(\diamond)} \in \mathbf{L}^2(\nu)$$

mit

$$\int \|V^\dagger \widehat{\nu}(x) V\varphi\|^2 \, d\nu(x) = \int \|\widehat{\nu}(x) (V\varphi)\|^2 \, d\nu(x) = \|vV\varphi\|_{\mathcal{V}}^2 = \|g\varphi\|_{\mathcal{G}}^2 ,$$

was für (i) zu zeigen war.

Man beachte nun, dass allgemein  $V^\dagger(\mathcal{V}_A) = (V^\dagger(\mathcal{V}))_A = \mathcal{G}_A$  sowie die Implikation  $V^\dagger(\mathcal{V}_A) \neq \{0\} \implies \mathcal{V}_A \neq \{0\}$  trivial für jedes  $\nu$ -messbare  $A$  gültig sind. Ist  $V^\dagger$  injektiv auf  $\mathcal{V}$ , so gilt auch die Umkehrung. Dies liefert (ii).

Weiterhin wird durch

$$\zeta \longmapsto V^\dagger \zeta : \mathbf{L}^2(\nu, \widehat{\mathcal{V}}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\nu, V^\dagger(\widehat{\mathcal{V}}))$$

eine Norm-verkleinernde lineare Abbildung wohldefiniert. Unter Injektivität von  $V^\dagger$  ist diese Abbildung sogar eine Isometrie und bildet  $|\widehat{v}(V(F))\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\nu)|$  (bzw.  $\widehat{v}(V(F))$ ) isometrisch auf den Raum  $|V^\dagger \widehat{v}V(F)\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\nu)|$  (bzw.  $V^\dagger \widehat{v}V(F)$ ) ab. Da äquivalent zur Injektivität von  $V^\dagger$ , können wir die Dichtheit von  $V(F)$  in  $E_\sigma$  (oder  $E$ ) ausnutzen, wonach  $|\widehat{v}(V(F))\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\nu)|$  dicht in  $|\widehat{v}(E)\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\nu)|$  und  $\widehat{v}(V(F))$  dicht in  $\widehat{v}(E)$  ist :

$$\mathbf{L}^2(\nu, \widehat{\mathcal{V}}) = \overline{|\widehat{v}(V(F))\rangle \langle \mathbf{L}^\infty(\nu)|}^{\mathbf{L}^2(\nu, \widehat{\mathcal{V}})} \quad \text{und} \quad \overline{\widehat{v}(E)} = \overline{\widehat{v}(V(F))}.$$

Somit wird eine surjektive Isometrie zwischen  $\mathbf{L}^2(\nu, \widehat{\mathcal{V}})$  und  $\mathbf{L}^2(\nu, V^\dagger(\widehat{\mathcal{V}}))$  induziert, die  $\widehat{v}(V(F))$  auf  $V^\dagger \widehat{v}V(F)$  abbildet. Ist nun  $\widehat{v}(E)$  dicht in  $\mathbf{L}^2(\nu, \widehat{\mathcal{V}})$ , so gilt das Gleiche für  $\widehat{v}(V(F))$ ,  $V^\dagger \widehat{v}V(F)$  muss dann dicht in  $\mathbf{L}^2(\nu, V^\dagger(\widehat{\mathcal{V}}))$  sein. Der entsprechende Schluss in umgekehrter Richtung verläuft analog und (iii) ist bewiesen.

**DEFINITION**    Seien  $g$  bzw.  $v$  Kerne der hilbertschen Unterräume  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  bzw.  $\mathcal{V} \hookrightarrow E^\dagger$ . Man sagt, dass der Kern  $g$  bzgl. des Kerns  $v$  (vermöge des Faktors  $V$ ) faktorisiert, wenn die Aussagen des Lemmas erfüllt sind. Liegt  $\mathcal{V}$  im Falle einer solchen Faktorisierung durch  $\int_{\mathbf{X}}^\oplus \widehat{\mathcal{V}} d\nu$  direkt zerlegt vor, so geben wir das Faktorisierungspaar in der Form

$$\left( v^\dagger : \int_{\mathbf{X}}^\oplus \widehat{\mathcal{V}} d\nu \hookrightarrow E^\dagger, V^\dagger \right)$$

an. Das Bild

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{X}} V^\dagger(\widehat{\mathcal{V}}) d\nu \hookrightarrow F^\dagger$$

(gemäß des Satzes) nennen wir eine *Bildzerlegung von  $\mathcal{G}$  (unter  $V^\dagger$ )* oder auch *Abbildung der Faktorisierung*. Eigenschaften wie Nicht-Degeneriertheit, Direktheit oder Eindimensionalität werden meist in Bezug auf diese Zerlegung verstanden.

Das folgende Korollar gibt noch einmal eine eindimensionale Fassung von Bildzerlegungen wieder.

**KOROLLAR**    Seien  $g$  bzw.  $v$  Kerne der hilbertschen Unterräume  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  bzw.  $\mathcal{V} \hookrightarrow E^\dagger$  derart, dass  $g$  bzgl.  $v$  vermöge  $V$  faktorisiert. Man nehme an,  $\mathcal{V}$  sei eindimensional zerlegt, d. h.

$$\mathcal{V} = \int_{\mathbf{X}}^\oplus \mathbb{K} \cdot v_x d\nu(x) \hookrightarrow E^\dagger$$

für eine Familie  $(v_x)_{x \in \mathbf{X}} \subset E^\dagger$ .



Dann ist auch die Bildzerlegung eindimensional vermöge  $\Theta_x := V^\dagger v_x$ ,  $x \in \mathbf{X}$ , zerlegt:

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{K} \cdot V^\dagger(v_x) d\nu(x) = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\nu(x) \hookrightarrow F^\dagger .$$

**Beweis** Dies ist nur die eindimensionale Fassung der Aussage (i) des Satzes.

**BEISPIEL 1** Die triviale Faktorisierung liegt vor, wenn man  $g$  bzgl.  $g$  vermöge  $\text{Id} : F \longrightarrow F$  faktorisiert. Ist  $\mathcal{G}$  in  $F^\dagger$  zerlegt, so könnte man diese Zerlegung als Bildzerlegung unter  $\text{Id}^\dagger$  interpretieren.

**BEISPIEL 2** Ohne die Injektivität von  $V^\dagger$  auf  $\mathcal{V}$  kann es zu Degeneriertheiten kommen. Als positiven Kern  $g$  wählen wir z. B.

$$g : \mathbb{K}^{\{0,1\}} \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{K}^{\{0,1\}} : \varphi \longmapsto \varphi(1) \cdot 1_{\{1\}} .$$

Für die Bildzerlegung starten wir mit

$$\mathbb{K}^{\{0,1\}} \xrightarrow{v} \mathcal{V} := \ell^2(\{0,1\}) = \mathbb{K} \cdot 1_{\{0\}} \boxplus \mathbb{K} \cdot 1_{\{1\}} \xrightarrow{v^\dagger} \mathbb{K}^{\{0,1\}}$$

und geben die Adjungierte des Faktors an:

$$V^\dagger : \mathbb{K}^{\{0,1\}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\{0,1\}} : \xi \longmapsto \xi(1) \cdot 1_{\{1\}} .$$

Damit prüft man schnell nach, dass  $g$  bzgl.  $v$  vermöge  $V$  faktorisiert, aber die Bildzerlegung  $\mathcal{G} = \{0\} \boxplus \mathbb{K} \cdot 1_{\{1\}}$  ist degeneriert.

**BEMERKUNG 1** Die übliche Verwendung von Bildzerlegungen ist die Folgende: Der hilbertsche Unterraum  $\mathcal{V} \hookrightarrow E^\dagger$  und die Abbildung  $\Phi$  sind gegeben und das Bild  $\Phi(\mathcal{V}) \hookrightarrow F^\dagger$  wird konstruiert und analysiert. In der vorliegenden Arbeit besteht das Problem jedoch meist darin, zu einem gegebenen hilbertschen Unterraum  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  eine entsprechende Faktorisierung bzgl. eines geeigneten hilbertschen Unterraums  $\mathcal{V} \hookrightarrow E^\dagger$  zu finden.

**BEMERKUNG 2** Bildzerlegungen sind in einigen Variationen denkbar. Zum einen ist man relativ frei in der Wahl der Faktorisierung  $g^\dagger g = V^\dagger v^\dagger v V$  des Kerns bzgl.  $v$  vermöge  $V$ . Zum anderen sind auch unterschiedliche Ausgangszerlegungen des Hilbert-Raums  $\mathcal{V}$  denkbar.

Die vorliegende Arbeit wird zeigen wie das hier aufgeführte allgemeine Konzept der Bildzerlegung in der Theorie der stochastischen Prozesse interessante Anwendungen findet. Dort dient es als Abschwächung der bisher üblichen Forderung der Gleichheit von Skalarprodukten. Dies wird sich deutlicher im Zusammenhang mit konkreten Prozessen in Kapitel 3 zeigen.

### 1.3 Abschließbarkeit von Kernen

Das folgende Konzept der abschließbaren Kerne ist aus der Operatortheorie motiviert und schafft eine Verbindung zwischen Kernen und (unbeschränkten) Operatoren. Grob gesprochen geht es dabei darum, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G} \\ & g & \\ & \nearrow & \\ F & \xrightarrow{h} & \mathcal{H} \end{array}$$

bestehend aus zwei Kernen  $g, h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$  durch einen abgeschlossenen Operator  $G$  kommutativ zu erweitern:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G} \\ & g & \\ & \nearrow & \uparrow G \\ F & \xrightarrow{h} & \mathcal{D}(G) \subset \mathcal{H} \end{array}$$

Wir erinnern nochmals an die kanonische Abbildung

$$\Psi : \varphi \mapsto \varphi + \{\psi \mid \langle \psi \mid (h + g)\psi \rangle = 0\} : F \longrightarrow F_{h+g} := F / \text{Ker}(h + g) \hookrightarrow \widehat{F_{h+g}}$$

aus Bemerkung 1.1.2, die wir nun für den Kern  $h + g \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$  der Summe der hilbertschen Unterräume betrachten.

**SATZ** Seien  $g$  und  $h$  Kerne der hilbertschen Unterräume  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  bzw.  $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ .

(i)  $h + g$  ist Kern des hilbertschen Unterraums  $\mathcal{H} + \mathcal{G} = \Psi^\dagger \left( \left( \widehat{F_{h+g}} \right)_\beta^\dagger \right) \hookrightarrow F^\dagger$ .

(ii)  $h$  faktorisiert bezüglich  $\Psi : F \longrightarrow \widehat{F_{h+g}}$  zu einer stetigen linearen Abbildung  $\widehat{h} : \widehat{F_{h+g}} \longrightarrow \mathcal{H}$  und es gilt  $\Psi^\dagger \widehat{h}^\dagger = h^\dagger$ .

**BEMERKUNG 1** Die entsprechende Version von (ii) des Satzes für  $g$  statt  $h$  ist ebenfalls gültig. In der Tat ist das Skalarprodukt auf  $\widehat{F_{h+g}}$  damit durch

$$\widehat{F_{h+g}} \times \widehat{F_{h+g}} \longrightarrow \mathbb{K} : (\xi, \eta) \longmapsto \left( \widehat{h}\xi \mid \widehat{h}\eta \right)_\mathcal{H} + \left( \widehat{g}\xi \mid \widehat{g}\eta \right)_\mathcal{G}$$

gegeben. Ziel ist es nun, die Fälle genauer zu untersuchen, in denen  $\widehat{h}$  injektiv ist. Aufgrund der zentralen Rolle von  $\mathcal{H}$  bzw.  $h$  werden sie gelegentlich mit *Pivotraum* bzw. *Pivotkern* bezeichnet.

**HAUPTSATZ** Seien  $g, h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$  Kerne der hilbertschen Unterräume  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  in  $F^\dagger$ . Mit den Notationen des obigen Satzes sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$  ist dicht in  $\mathcal{G}$ .
- (ii)  $\mathcal{H}$  ist dicht in  $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ .
- (iii) Die Abbildung  $\widehat{h} : \widehat{F_{h+g}} \rightarrow \mathcal{H}$  ist injektiv.

In diesem Fall faktorisiert  $\widehat{g} : \widehat{F_{h+g}} \rightarrow \mathcal{G}$  bzgl.  $\widehat{h}$  zu einem eindeutigen abgeschlossenen Operator  $G$  mit Definitionsbereich  $\mathcal{D}(G) = \widehat{h}(\widehat{F_{h+g}})$  in  $\mathcal{H}$  und Werten in  $\mathcal{G}$ . Die kanonischen Injektionen

$$\mathcal{D}(G) \hookrightarrow \mathcal{H} \quad \text{und} \quad \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$$

sind stetig mit dichten Bildern. Insbesondere ist  $h(F)$  ein dichter Teilraum von allen drei Hilbert-Räumen  $\mathcal{D}(G)$ ,  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ .

**Beweis** Nach Portenier (2002, [38], Theorem 6.7 und Proposition 6.9) ist  $\mathcal{H}^{\perp_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}} = \text{Ker}(p_{\mathcal{H}}) = (\mathcal{H} \cap \mathcal{G})^{\perp_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}}$ , also ist (i) äquivalent zu (ii). Wegen  $h^\dagger = \Psi^\dagger \widehat{h}^\dagger$  ist  $\mathcal{H}$  genau dann dicht in  $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ , wenn  $\widehat{h}^\dagger$  ein dichtes Bild hat. Letzteres ist äquivalent zu (iii), womit (ii)  $\iff$  (iii) bewiesen ist.

Im Falle der Injektivität von  $\widehat{h}$  ist  $\widehat{g} = G\widehat{h}$  eine wohldefinierende Gleichung für den (dicht definierten) Operator  $G$ . Umgekehrt gelte diese Gleichung und es sei  $\xi \in \widehat{F_{h+g}}$  mit  $\widehat{h}\xi = 0$ . Dann folgt  $\widehat{g}\xi = G\widehat{h}\xi = 0$  und somit (vgl. Bemerkung 1)

$$\|\xi\|_{\widehat{F_{h+g}}}^2 = \|\widehat{h}\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\widehat{g}\xi\|_{\mathcal{G}}^2 = 0.$$

Die weiteren Aussagen sind leicht nachzuprüfen.

**DEFINITION** Gilt eine der äquivalenten Bedingungen des Hauptsatzes, so nennen wir  $g$  *abschließbar bzgl.  $h$* . Der abgeschlossene Operator  $G$  mit  $\mathcal{D}(G) = \widehat{h}(\widehat{F_{h+g}})$  wird *Abschluss von  $g$  (bzgl.  $h$ )* genannt.

Wir definieren ferner die *Semidualität*  $\langle \mathcal{D}(G) | \mathcal{H} + \mathcal{G} \rangle$  durch

$$(\xi, \nu) \longmapsto \langle \xi | \nu \rangle_{\mathcal{D}(G)} := \left\langle \widehat{h}^{-1}(\xi) \middle| (\Psi^\dagger)^{-1}(\nu) \right\rangle_{\widehat{F_{h+g}}}.$$

**KOROLLAR** Man nehme an,  $g$  sei abschließbar bzgl.  $h$  mit Abschluss  $G$ .

- (i) Die Semidualität  $\langle \mathcal{D}(G) | \mathcal{H} + \mathcal{G} \rangle$  ist nicht entartet und es gilt:
  - (a)  $\langle \varphi | \eta \rangle_F = \overline{\langle \eta | h\varphi \rangle_{\mathcal{D}(G)}}$  für alle  $\varphi \in F$  und jedes  $\eta \in \mathcal{D}(G)$ .
  - (b)  $\langle \varphi | \nu \rangle_F = \langle h\varphi | \nu \rangle_{\mathcal{D}(G)}$  für alle  $\varphi \in F$  und jedes  $\nu \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ .
  - (c)  $\langle \eta | \xi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \eta | \xi \rangle_{\mathcal{D}(G)}$  für alle  $\eta \in \mathcal{D}(G)$  und jedes  $\xi \in \mathcal{H}$ .
  - (d)  $\mathcal{D}(G)^\dagger_\beta = \mathcal{H} + \mathcal{G}$  mit Riesz-Abbildung

$$Q := \Psi^\dagger \circ |\diamond\rangle_{\widehat{F_{h+g}}} \circ \widehat{h}^{-1} : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}.$$

(ii)  $G^*$  ist die kanonische Injektion  $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ . Insbesondere ist  $\mathcal{D}(G^*) = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$  und es gilt:

- (a)  $G$  ist genau dann injektiv, wenn  $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist.
- (b)  $G$  ist genau dann stetig, wenn  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ , d. h. wenn ein  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  mit  $\mathcal{G} \leq \alpha \cdot \mathcal{H}$  existiert.

**Beweis** Die erste Aussage von (i) ist klar. Sei  $\eta \in \mathcal{D}(G)$  und  $\nu \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ . Die Formel in (a) folgt aus dem Satz, wonach

$$\overline{\langle \eta | h\varphi \rangle_{\mathcal{D}(G)}} = \overline{\langle \widehat{h}^{-1}(\eta) | \widehat{h}^\dagger(h\varphi) \rangle_{\widehat{F}_{h+g}}} = \overline{\langle \eta | h\varphi \rangle_{\mathcal{H}}}$$

für alle  $\varphi \in F$  gilt. Die zweite Gleichung folgt ähnlich, da für alle  $\varphi \in F$

$$\langle h\varphi | \nu \rangle_{\mathcal{D}(G)} = \langle \widehat{h}^{-1}h\varphi | (\Psi^\dagger)^{-1}\nu \rangle_{\widehat{F}_{h+g}} = \langle \Psi\varphi | (\Psi^\dagger)^{-1}\nu \rangle_{\widehat{F}_{h+g}}$$

gilt. Speziell für  $\nu = \xi \in \mathcal{H}$  ist also

$$\langle h\varphi | \xi \rangle_{\mathcal{D}(G)} = \langle \varphi | \xi \rangle_F = \langle h\varphi | \xi \rangle_{\mathcal{H}} \quad (*)$$

für alle  $\varphi \in F$  richtig. Nun sind die Semilinearformen

$$|\xi \rangle_{\mathcal{D}(G)} : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{und} \quad |\xi \rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{D}(G) \hookrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und die Gleichung (\*) lässt sich auf  $\mathcal{D}(G)$  fortsetzen, womit (c) bewiesen ist. Schließlich sind die Eigenschaften der Riesz-Abbildung für obiges  $Q$  direkt nachzurechnen.

Für (ii) ist zu beachten, dass die identische Abbildung  $\iota : \mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$  nach Voraussetzung ein dicht definierter Operator in  $\mathcal{G}$  mit Werten in  $\mathcal{H}$  ist. Nach Definition ist  $\mathcal{D}(\iota) = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$  ein Hilbert-Raum, d. h.  $\iota$  ist ein abgeschlossener Operator. Genau dann ist  $\gamma \in \mathcal{D}(G^*)$ , wenn ein  $\xi \in \mathcal{H}$  mit

$$\langle \eta | \gamma \rangle_{\mathcal{D}(G)} = \langle \widehat{h}^{-1}\eta | \widehat{g}^\dagger\gamma \rangle_{\widehat{F}_{h+g}} = \langle G\eta | \gamma \rangle_{\mathcal{G}} = \langle \eta | \xi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \eta | \xi \rangle_{\mathcal{D}(G)} \quad \forall \eta \in \mathcal{D}(G)$$

existiert. Dies zeigt  $\mathcal{D}(G^*) = \mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \mathcal{D}(\iota)$  sowie  $G^* = \iota$  und  $\iota^* = G$ . (a) ist damit klar.  $G$  ist genau dann überall definiert (d. h. stetig), wenn  $G^*$  überall definiert ist, also wenn  $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \mathcal{D}(G^*) = \mathcal{G}$ . Dies entspricht dem in (b) Gesagten.

**BEMERKUNG 2** Das Nachprüfen der Abschließbarkeit kann sehr schwer sein. Das Kriterium  $g(F) \subset \mathcal{H}$  zum Beispiel ist hinreichend für die Abschließbarkeit, ohne gleichbedeutend mit der Bedingung  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$  aus dem obigen Korollar (ii) zu sein.

**BEMERKUNG 3** Ist  $\mathcal{V}$  ein Hilbert-Raum und  $w : F \longrightarrow \mathcal{V}$  schwach stetig, so ist  $w^\dagger w : F \longrightarrow F^\dagger$  der Kern des hilbertschen Unterraums  $w^\dagger(\mathcal{V})$  von  $F^\dagger$ . Insofern lässt sich das in dieser Arbeit für Kerne Erarbeitete auch auf beliebige schwach stetige Operatoren  $w : F \longrightarrow \mathcal{V}$  übertragen.

Insbesondere hängt die Abschließbarkeit der Kerne nur von deren Eigenschaften als Abbildung von  $F$  nach  $F^\dagger$  ab. Dies wird im nächsten Abschnitt weiter ausgebaut.

## 1.4 Zum Abschluss äquivalente Operatoren

Seien  $g, h \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$  Kerne der hilbertschen Unterräume  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ .  
 Es gelten die Notationen des vorigen Abschnitts.

Der Begriff der Abschließbarkeit eines Kerns  $g$  hängt nur von dessen Eigenschaften als Abbildung  $g^\dagger g$  von  $F$  nach  $F^\dagger$  ab. Dementsprechend lassen sich über  $w^\dagger w = g^\dagger g$  weitere zum Abschluss  $G$  äquivalente Operatoren  $W$  konstruieren und das Diagramm des vorigen Abschnitts erweitern:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{G} & & \\
 & g & & g^\dagger & \\
 & \nearrow & \uparrow G & \searrow & \\
 F & \longrightarrow & \mathcal{D}(G) & & F^\dagger \\
 & \searrow & \downarrow W & \nearrow & \\
 & w & \mathcal{V} & w^\dagger & 
 \end{array}$$

Der vorliegende Abschnitt soll diese Erweiterung formalisieren.

**HAUPTSATZ** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i)  $g$  ist abschließbar bzgl.  $h$ .
- (ii) Es gibt einen abgeschlossenen Operator  $W$  in  $\mathcal{H}$  mit Werten in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{V}$  derart, dass  $h(F)$  im Definitionsbereich von  $W$  enthalten ist,

$$Wh : F \longrightarrow \mathcal{V} : \varphi \longmapsto Wh\varphi$$

schwach stetig ist und  $(Wh)^\dagger(\mathcal{V}) = \mathcal{G}$  gilt.

- (iii) Es gibt einen schwach stetigen Operator  $w$  auf  $F$  mit Werten in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{V}$ , der bzgl.  $h$  abschließbar ist und  $w^\dagger(\mathcal{V}) = \mathcal{G}$  erfüllt.

Bezeichnet in diesem Fall  $G$  den Abschluss von  $g$  bzgl.  $h$ , so ist  $\mathcal{D}(G) \sqsubset \mathcal{D}(W)$  und die folgenden Aussagen sind zueinander äquivalent:

- (a)  $h(F)$  ist wesentlicher Definitionsbereich von  $W$ .
- (b)  $\mathcal{D}(W) = \mathcal{D}(G)$ .
- (c)  $W^*W = G^*G$ .
- (d) Es gibt eine Isometrie  $I \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{V})$  mit  $W = IG$ .

**Beweis** Die Äquivalenz der ersten drei Aussagen beweisen wir durch Ringschluss und starten mit (i). Nach Voraussetzung existiert der Abschluss  $G$  von  $g$  bzgl.  $h$ . Sowohl  $W := G$  (mit  $\mathcal{V} := \mathcal{G}$ ) als auch  $W := \sqrt{G^*G}$  (mit  $\mathcal{V} := \mathcal{H}$ ) erfüllen das Verlangte. Beide besitzen auch die zusätzlichen Eigenschaften.

Für  $W$  gemäß (ii) ist der Operator  $w := Wh : F \longrightarrow \mathcal{V}$  schwach stetig und erfüllt  $\mathcal{G} = w^\dagger(\mathcal{V})$ . Man zeigt, dass  $h : F \longrightarrow \mathcal{D}(W)$  zu einer Isometrie  $h_w$  auf dem Quotientenraum  $F_{h+w}$  faktorisiert, deren Bild gerade  $h(F)$  ist.  $h_w$  lässt sich eindeutig zu einer (nicht notwendig surjektiven) Isometrie

$$\widehat{h}_w : \widehat{F_{h+w}} \longrightarrow \mathcal{D}(W)$$

fortsetzen. Die Injektivität von  $\widehat{h}_w$  ist die Abschließbarkeit von  $w$  bzgl.  $h$ , die wir für (iii) noch zu zeigen hatten.

Unter Voraussetzung von (iii) gilt  $g^\dagger g = w^\dagger w$  und die Abschließbarkeit hängt nur von den Eigenschaften der Kerne als Abbildungen von  $F$  nach  $F^\dagger$  ab. Dies beweist (i) und schließt somit den Ringschluss.

Sei nun  $W$  ein beliebiger abgeschlossener Operator gemäß (ii). Das von  $\mathcal{D}(W)$  auf  $h(F)$  induzierte Skalarprodukt lässt sich in den folgenden drei Formen schreiben:

$$\begin{aligned} (h\varphi, h\psi) &\longmapsto (h\varphi|h\psi)_{\mathcal{H}} + (Wh\varphi|Wh\psi)_{\mathcal{V}}, \\ (h\varphi, h\psi) &\longmapsto (h\varphi|h\psi)_{\mathcal{H}} + (g\varphi|g\psi)_{\mathcal{G}}, \\ (h\varphi, h\psi) &\longmapsto (h\varphi|h\psi)_{\mathcal{H}} + (Gh\varphi|Gh\psi)_{\mathcal{G}}, \end{aligned}$$

wobei  $G$  den Abschluss von  $g$  bezeichnet. Man erhält  $\mathcal{D}(G) \sqsubset \mathcal{D}(W)$ , da  $h(F)$  dicht in  $\mathcal{D}(G)$  ist. Ist  $h(F)$  wesentlicher Definitionsbereich von  $W$ , so folgt  $\mathcal{D}(W) = \mathcal{D}(G)$  mit symmetrischen Argumenten und durch Eindeutigkeit der Vervollständigung.  $\mathcal{D}(W) = \mathcal{D}(G)$  ist (nach Portenier (2002, [38], Theorem 7.8)) äquivalent zur Gleichheit  $(\text{Id} + W^*W)^{-1} = (\text{Id} + G^*G)^{-1}$  der zugehörigen Kerne, also äquivalent zu  $W^*W = G^*G$ . Aus  $W^*W = G^*G$  lässt sich über die eindeutigen Polarzerlegungen  $W = I_1\sqrt{W^*W} = I_1\sqrt{G^*G}$  bzw.  $G = I_2\sqrt{G^*G}$  eine für (vii) geeignete Isometrie  $I := I_1I_2^{-1}$  definieren. Aus  $W = IG$  mit Isometrie  $I \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{V})$  folgt, dass  $h(F)$  wesentlicher Definitionsbereich von  $W$  ist.

**BEMERKUNG 1** Es soll die Verbindung zwischen Operatoren  $W$  gemäß (ii) des Hauptsatzes und Operatoren  $w$  gemäß (iii) des Hauptsatzes weiter untersucht werden.

Zum einen erfüllt für jeden Operator  $w$  gemäß (iii) der Abschluss  $\overline{w} := \overline{w}$  die Forderungen in (ii) und hat zusätzlich noch  $h(F)$  als wesentlichen Definitionsbereich (vgl. (iv)).

Zum anderen zeigt der Beweis zu (ii) $\implies$ (iii), dass aus jedem Operator  $W$  gemäß (ii) durch  $w := Wh$  ein Operator gemäß (iii) wohldefiniert wird. Man kann dafür nun zeigen, dass  $W \supset \overline{w}$  gilt, wobei Gleichheit äquivalent zur Dichtheit von  $h(F)$  in  $\mathcal{D}(W)$  ist. In der Tat sei  $\widehat{w} : \widehat{F_{h+w}} \longrightarrow \mathcal{V}$  die stetige Faktorabbildung von  $w = Wh$  gemäß Satz 1.3. Der Definitionsbereich von  $\overline{w}$  ist

$$\mathcal{D}(\overline{w}) = \widehat{h}_w \left( \widehat{F_{h+w}} \right) \sqsubset \mathcal{D}(W) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{D}(\overline{w}) = \overline{h(F)}^{\mathcal{D}(W)}$$

und  $\overline{w}$  ist durch  $\widehat{w} = \overline{w} \circ \widehat{h}_w$  darauf eindeutig bestimmt. Nun ist  $W\widehat{h}_w : \widehat{F_{h+w}} \longrightarrow \mathcal{V}$  stetig und stimmt mit  $\widehat{w}$  auf  $F_{h+w}$  überein, woraus  $W\widehat{h}_w = \widehat{w} = \overline{w}\widehat{h}_w$ , also  $W \supset \overline{w}$  folgt. Genau dann ist  $\overline{w} = W$ , wenn  $h(F)$  dicht in  $\mathcal{D}(W)$  ist.

Im Ergebnis entsprechen die Operatoren  $W$  gemäß (ii) des Hauptsatzes, welche  $h(F)$  als wesentlichen Definitionsbereich besitzen, genau den Abschlüssen  $\overline{w}$  von Operatoren  $w$  gemäß (iii) des Hauptsatzes. Diese sind im Weiteren interessant.

**DEFINITION** Ein Operator  $W$  gemäß der Bedingung (ii) des Hauptsatzes, der  $h(F)$  als wesentlichen Definitionsbereich besitzt (vgl. Bedingung (iv) des Hauptsatzes), nennen wir *partiell unitär äquivalent zu  $G$* . Hat  $W$  zusätzlich ein dichtes Bild, so heißt  $W$  *unitär äquivalent zu  $G$* .

**BEMERKUNG 2** Es sollte nochmals betont werden, dass die Forderungen (iv) - (vii) keine zusätzlichen Hürden der Theorie darstellen. Für jeden Operator  $W$  gemäß (ii) des Hauptsatzes ist der eingeschränkte Operator  $W|_{h(F)}$  abschließbar. Der Abschluss  $\overline{W|_{h(F)}}$  erfüllt wie  $W$  alle Eigenschaften aus (ii), hat aber zusätzlich noch  $h(F)$  als wesentlichen Definitionsbereich. Allerdings kann das Finden von  $\overline{W|_{h(F)}}$  in der Praxis durchaus schwierig sein.

Ebenso kann man in der Theorie  $W$  stets mit dichtem Bild annehmen, indem man von  $\mathcal{V}$  zum Abschluss  $\overline{W(\mathcal{D}(W))}^{\mathcal{V}}$  des Bildes übergeht. Dann, und nur dann, ist die Isometrie  $I$  aus (vii) des Hauptsatzes surjektiv, also unitär. Jeder zu  $G$  unitär äquivalente Operator  $W$  ist also der Form  $W = I\sqrt{G^*G}$  mit einer Isometrie  $I$  von  $\overline{\sqrt{G^*G}(\mathcal{D}(\sqrt{G^*G}))}^{\mathcal{H}}$  auf  $\overline{W(\mathcal{D}(W))}^{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$ . Insbesondere ist  $G : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathcal{G}$  unitär äquivalent zu  $G$ .

**KOROLLAR** Man nehme an,  $G$  sei der Abschluss von  $g$  bzgl.  $h$ .

(i) Bezeichnet  $Q : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$  die Riesz-Abbildung, so sind

$$Q^{-1}h : F \rightarrow \mathcal{D}(G) : \varphi \mapsto Q^{-1}(h\varphi) \quad \text{bzw.} \quad Qh : F \rightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} : \varphi \mapsto Q(h\varphi)$$

die Kerne der hilbertschen Unterräume

$$j_+ : \mathcal{D}(G) \hookrightarrow F^\dagger \quad \text{bzw.} \quad j_- : \mathcal{H} + \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger .$$

(ii) Die Adjungierten (bzgl.  $(\mathcal{H}|\mathcal{H})$  bzw.  $(\mathcal{G}|\mathcal{G})$  und  $\langle \mathcal{D}(G)|\mathcal{H} + \mathcal{G} \rangle$ ) der kanonischen Injektionen  $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$  bzw.  $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$  sind  $\text{Id}$  bzw.  $G$ . Mit anderen Worten sind

$$\text{Id} : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{bzw.} \quad G : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathcal{G}$$

die Kerne von

$$\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} .$$

(iii) Ist  $W$  partiell unitär äquivalent zu  $G$ , so wird  $\mathcal{G}$  durch  $W^\dagger$  dargestellt, d. h.  $W^\dagger(\mathcal{V}) = \mathcal{G}$  als hilbertsche Unterräume in  $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ . Insbesondere ist  $W^*(\mathcal{D}(W^*)) = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ .

**Beweis** Die erste Aussage ist Portenier (2002, [38], Abschnitt 6.17) entnommen. Nach Korollar 1.3 gilt für alle  $\eta \in \mathcal{D}(G)$  und  $\xi \in \mathcal{H}$  bzw.  $\gamma \in \mathcal{G}$

$$\langle \eta | \xi \rangle_{\mathcal{D}(G)} = \left\langle \widehat{h}^{-1}(\eta) \left| \widehat{h}^\dagger(\xi) \right. \right\rangle_{\widehat{F}_{h+g}} = (\eta | \xi)_{\mathcal{H}}$$

bzw. (nach Hauptsatz 1.3 und Satz 1.3)

$$\langle \eta | \gamma \rangle_{\mathcal{D}(G)} = \left\langle \widehat{h}^{-1}(\eta) \left| \widehat{g}^\dagger(\gamma) \right. \right\rangle_{\widehat{F}_{h+g}} = \left( \widehat{g}\widehat{h}^{-1}\eta \left| \gamma \right. \right)_{\mathcal{G}} = (G\eta | \gamma)_{\mathcal{G}}$$

und die zweite Behauptung ist bewiesen. Die letzte Aussage folgt aus (ii), denn für alle  $\eta, \zeta \in \mathcal{D}(G)$  gilt nach (v) des Hauptsatzes

$$\langle \eta | W^\dagger W \zeta \rangle_{\mathcal{D}(G)} = (W\eta | W\zeta)_{\mathcal{V}} = (G\eta | G\zeta)_{\mathcal{G}} = \langle \eta | G\zeta \rangle_{\mathcal{D}(G)} .$$

Portenier (2002, [38], Theorem 7.4) liefert damit  $W^*(\mathcal{D}(W^*)) = \mathcal{H} \cap W^\dagger(\mathcal{V}) = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$  und der Beweis ist beendet.

**BEMERKUNG 3** Erfüllen

$$\begin{array}{l} g : F \longrightarrow \mathcal{G} \\ h : F \longrightarrow \mathcal{H} \\ w : F \longrightarrow \mathcal{V} \end{array} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \hookrightarrow F^\dagger \\ \hookrightarrow F^\dagger \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} \hookrightarrow F^\dagger \\ \hookrightarrow F^\dagger \end{array} \right] \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} G : D(G) \longrightarrow \mathcal{G} \\ W : D(W) \longrightarrow \mathcal{V} \end{array}$$

die Eigenschaften des Hauptsatzes, so auch

$$\begin{array}{l} G : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{G} \\ \text{Id} : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{H} \\ W : \mathcal{D}(W) \longrightarrow \mathcal{V} \end{array} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} \\ \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{l} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} \\ \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} \end{array} \right] \end{array} \quad \text{mit den Abschlüssen} \quad \begin{array}{l} G : D(G) \longrightarrow \mathcal{G} \\ W : D(W) \longrightarrow \mathcal{V} \end{array} .$$

Dies zeigt, dass durch zweifache Durchführung einer entsprechenden Konstruktion der Abschlüsse nichts gewonnen wird.

Allerdings gelten die folgenden Aussagen<sup>9</sup> dieses Kapitels, egal welche der obigen Kernsysteme man zu Grunde legt. In der Semidualität  $\langle \mathcal{D}(G) | \mathcal{H} + \mathcal{G} \rangle$  sind die Voraussetzungen der Sätze jedoch schwerer nachprüfbar, so dass wir in den Formulierungen die Semidualität  $\langle F | F^\dagger \rangle$  beibehalten.

**BEISPIEL** Gegeben sei eine Faktorisierung  $(v^\dagger : \mathcal{V} = \int_{\mathbf{X}}^\oplus \widehat{\mathcal{V}} d\nu \hookrightarrow E^\dagger, V^\dagger)$  des Kerns  $g$  gemäß Abschnitt 1.2.

Genau dann ist  $g$  abschließbar bzgl.  $h$ , wenn  $w := vV : F \longrightarrow \mathcal{V}$  bzgl.  $h$  abschließbar ist. In diesem Fall ist der Abschluss  $W := \overline{vV}$  partiell unitär äquivalent zu  $G = \overline{g}$ .

Handelt es sich um eine eindimensionale Zerlegung mittels  $\widehat{\mathcal{V}}(x) = \mathbb{K} \cdot v_x$ ,  $x \in \mathbf{X}$ , und ist die resultierende Bildzerlegung

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{X}}^\oplus \mathbb{K} \cdot \Theta_\diamond d\nu \hookrightarrow E^\dagger$$

mittels  $\Theta_x = V^\dagger v_x$ ,  $x \in \mathbf{X}$ , ebenfalls direkt, dann lassen sich  $W$  bzw.  $G$  mit den entsprechenden Parseval-Abbildungen  $\widehat{\diamond}$  zu Abbildungen

$$\widehat{W} : \mathcal{D}(W) \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\nu) : \xi \longmapsto \widehat{W}\xi$$

bzw.

$$\widehat{G} : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\nu) : \xi \longmapsto \widehat{G}\xi$$

verknüpfen. Ist  $\xi \in \mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(W)$ , so gilt für alle  $\varphi \in F$

$$\left( \widehat{Wh\varphi} \middle| \widehat{W\xi} \right)_{\mathbf{L}^2(\nu)} = (Wh\varphi | W\xi)_{\mathcal{V}} = (Gh\varphi | G\xi)_{\mathcal{G}} = \langle \varphi | G\xi \rangle_F =$$

<sup>9</sup> Auf Ausnahmen wird explizit hingewiesen.



$$= \int \widehat{G\xi} \cdot \langle \varphi | \Theta \rangle_F d\nu = \int \widehat{G\xi} \cdot \langle V\varphi | v_\diamond \rangle_E d\nu = \int \overline{\widehat{Wh\varphi}} \cdot \widehat{G\xi} d\nu = \left( \widehat{Wh\varphi} \middle| \widehat{G\xi} \right)_{\mathbf{L}^2(\nu)},$$

denn  $\langle V\varphi | v_\diamond \rangle_E = \overline{\widehat{Wh\varphi}}$ . Danach ist  $\widehat{Wh(F)} = \overline{\widehat{Gh(F)}}$  dicht in  $\mathbf{L}^2(\nu)$  und es gilt Gleichheit  $\widehat{W} = \widehat{G}$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich  $\mathcal{D}(W) = \mathcal{D}(G)$ , was man auch als unitäre Äquivalenz zwischen  $W$  und  $G$  interpretieren kann.

## 1.5 Spektralzerlegung von $\mathcal{G}$

Mit den Notationen des Abschnitts 1.4 nehme man an,  
 $g$  sei abschließbar bzgl.  $h$  mit Abschluss  $G$ .

**BEMERKUNG 1** Geht man von einer Diagonalisierung  $(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  des positiven Operators  $G^*G$  in  $F^\dagger$  aus, so liegt der Gedanke an die folgende 'formale Bildzerlegung' nahe. Es existiere eine Abbildung  $\Phi : F^\dagger \longrightarrow F^\dagger$ , die auf dem zum Eigenwert  $\kappa(\lambda)$  gehörenden verallgemeinerten Eigenraum  $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda) \hookrightarrow F^\dagger$  als Multiplikation mit  $\sqrt{\kappa(\lambda)}$  wirkt. Als Bild der zur Diagonalisierung gehörenden Spektralzerlegung ergibt sich dann die Zerlegung von  $\mathcal{G}$  mittels  $\Phi(\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)) = \kappa(\lambda) \cdot \widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ . Sie wird in diesem Abschnitt genauer entwickelt und soll ebenfalls Spektralzerlegung genannt werden.

**HAUPTSATZ** Man nehme an,  $G^*G$  sei in  $F^\dagger$  diagonalisierbar, d. h. es gibt eine direkte Zerlegung des Pivotraums

$$\mathcal{H} = \int_{\Lambda}^{\oplus} \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) d\sigma(\lambda) \hookrightarrow F^\dagger,$$

in welcher  $G^*G = Z_\kappa : \xi \longmapsto \int \kappa \cdot \widehat{\xi} d\sigma$  multiplikativ mit positiver  $\sigma$ -messbarer Dichte  $\kappa$  operiert.

Dann gilt:

$$\mathcal{G} = \int^{\oplus} \kappa(\lambda) \cdot \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma)(\lambda).$$

Diese Zerlegung ist direkt und es gilt  $\widehat{g\varphi} = (\kappa \cdot \widehat{h})\varphi$ , insbesondere

$$\mathcal{G} \ni g\varphi = \int (\kappa \cdot \widehat{h})(\lambda) \varphi d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma)(\lambda) \quad \text{für alle } \varphi \in F.$$

**Beweis** Zum Nachweis greifen wir auf Portenier (2002, [38], Theorem 6.13, Lemma und Korollar 6.12) zurück. Für jede beliebige  $\sigma$ -messbare Funktion  $\rho$  mit  $\kappa = |\rho|^2$  kann man  $\kappa(\lambda) \cdot \widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$  als das Bild von  $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$  unter der Abbildung  $F^\dagger \longrightarrow F^\dagger : \mu \longmapsto \rho(\lambda) \cdot \mu$  auffassen - der zugehörige Kern ist  $|\rho(\lambda)|^2 \cdot \widehat{h}(\lambda) = \kappa(\lambda) \cdot \widehat{h}(\lambda)$ . Diese Unabhängigkeit von der Wahl von  $\rho$  setzt sich im Folgenden fort. Zum Beispiel ist  $Z_\rho$  für jedes solche  $\rho$  partiell unitär äquivalent zu  $G$ .

In der Zerlegung von  $\mathcal{H}$  gilt  $h\varphi = \int \widehat{h\varphi}(\lambda) d\sigma(\lambda) = \int \widehat{h}(\lambda) \varphi d\sigma(\lambda)$ .  $h\varphi$  ist ein Element von  $\mathcal{D}(Z_\rho)$ , so dass  $\rho \cdot \widehat{h\varphi} \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  folgt. Aufgrund der direkten Zerlegung von  $\mathcal{H}$  ist  $\rho \cdot \widehat{h\varphi}$  sogar der Parseval-Repräsentant von  $Z_\rho(h\varphi) \in \mathcal{H}$  und es

gilt  $\left\| \rho \cdot \widehat{h}\varphi \right\|_{\diamond} \in \mathbf{L}^2(\sigma)$  mit

$$\int \left\| \left( \rho \cdot \widehat{h}\varphi \right) (\lambda) \right\|_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)}^2 d\sigma(\lambda) = \|Z_{\rho}h\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|g\varphi\|_{\mathcal{G}}^2 .$$

Man erhält wegen  $\left\| \left( \kappa \cdot \widehat{h} \right) (\lambda) \varphi \right\|_{\kappa(\lambda) \cdot \widehat{\mathcal{H}}(\lambda)} = \left\| \left( \rho \cdot \widehat{h}\varphi \right) (\lambda) \right\|_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)}$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ , dass  $\kappa \cdot \widehat{h}$  skalar  $1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma$ -integrierbar ist mit  $\left\| \kappa \cdot \widehat{h} \right\|_{2, 1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma}^2 = \|g\varphi\|_{\mathcal{G}}^2$ . Damit ist die Zerlegung nachgewiesen.

Um Nicht-Degeneriertheit der Zerlegung nachzuweisen, ist für eine  $1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma$ -messbare Menge  $A$  die Implikation

$$1_A \cdot \kappa \cdot \widehat{h} = 0 \text{ skalar } 1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma\text{-f.ü.} \implies A \text{ ist lokale } 1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma\text{-Nullmenge}$$

zu zeigen. Erfüllt ein solches  $A$  die Prämisse der Implikation, so gilt  $1_{\{\kappa \neq 0\} \cap A} \cdot \widehat{h} = 0$  skalar  $\sigma$ -fast überall für die  $\sigma$ -messbare Menge  $\{\kappa \neq 0\} \cap A$ . Mit der Nicht-Degeneriertheit von  $\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$  sieht man, dass  $\{\kappa \neq 0\} \cap A$  eine lokale  $\sigma$ -Nullmenge ist. Somit ist  $A$  eine lokale  $1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma$ -Nullmenge, was zu zeigen war.

Um Direktheit nachzuweisen, muss jeder (elementare) Tensor

$$\overline{f} \cdot \kappa \cdot \widehat{h}\varphi \in \left| \left( \kappa \cdot \widehat{h} \right) (F) \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^{\infty} \left( 1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma \right) \right|$$

mit einem Element der Gestalt  $\kappa \cdot \widehat{h}\psi \in \left( \kappa \cdot \widehat{h} \right) (F)$  in  $\mathbf{L}^2 \left( 1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma, \kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}} \right)$  approximiert werden. Ist Ersterer gegeben, so ist  $1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot f \in \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$  und somit  $\overline{1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot f} \cdot \widehat{h}\varphi \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  sowie  $\overline{f} \cdot \rho \cdot \widehat{h}\varphi = \overline{1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot f} \cdot \rho \cdot \widehat{h}\varphi \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$ , da  $\widehat{h}\varphi$  bzw.  $\rho \cdot \widehat{h}\varphi$  als Parseval-Repräsentanten von  $h\varphi$  bzw.  $Z_{\rho}h\varphi$  aus  $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  sind. Damit ist  $\overline{1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot f} \cdot \widehat{h}\varphi$  (bzw.  $\int \overline{1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot f} \cdot \widehat{h}\varphi d\sigma$ ) aus  $\mathbf{L}^2_{\rho}(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  (bzw.  $\mathcal{D}(Z_{\rho})$ ), in welchem  $\widehat{h}(F)$  (bzw.  $h(F)$ ) dicht ist. Für jede beliebige Distanz  $\varepsilon > 0$  existiert dazu folglich ein  $\psi \in F$  mit

$$\begin{aligned} & \int^* \left\| \overline{f} \cdot \kappa \cdot \widehat{h}\varphi - \kappa \cdot \widehat{h}\psi \right\|_{\kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}}}^2 d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma) = \int^* \left\| \overline{f} \cdot \rho \cdot \widehat{h}\varphi - \rho \cdot \widehat{h}\psi \right\|_{\widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \\ & = \left\| Z_{\rho} \left( \int \overline{1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot f} \cdot \widehat{h}\varphi d\sigma \right) - Z_{\rho}h\psi \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \left\| \left( \int \overline{1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot f} \cdot \widehat{h}\varphi d\sigma \right) - h\psi \right\|_{\mathcal{D}(Z_{\rho})}^2 \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

Für die Parseval-Repräsentanten beachte man zunächst, dass es sich um Felder aus  $\widehat{g}(F)$  handelt (mit dem entsprechenden  $\widehat{g}$ ). Danach ist nur noch zu bemerken, dass für  $\varphi, \psi \in F$  der Wert  $\left\langle \psi \left| \int \kappa \cdot \widehat{h}\varphi d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma) \right. \right\rangle_F$  mit

$$\int \kappa \cdot \left\langle \psi \left| \widehat{h}\varphi \right. \right\rangle_F d\sigma = \int \left( \rho \cdot \widehat{h}\psi \left| \rho \cdot \widehat{h}\varphi \right. \right)_{\widehat{\mathcal{H}}(\diamond)} d\sigma = (Z_{\rho}h\psi | Z_{\rho}h\varphi)_{\mathcal{H}} = \langle \psi | g\varphi \rangle_F$$

übereinstimmt.

**BEMERKUNG 2** In der Theorie der stochastischen Prozesse wird sich die Spektralzerlegung als verwandt zur bekannten Karhunen-Loève-Entwicklung erweisen.

**BEMERKUNG 3** Wir wollen noch notwendige Kriterien für die Existenz der angegebenen Zerlegung untersuchen. Seien also

$$\mathcal{H} = \int_{\Lambda}^{\oplus} \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) d\sigma(\lambda) \hookrightarrow F^{\dagger} \quad \text{und} \quad \mathcal{G} = \int_{\Lambda}^{\oplus} \kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma)(\lambda) \hookrightarrow F^{\dagger}$$

direkt zerlegt, wobei  $\kappa$  eine positive  $\sigma$ -messbare Dichte bezeichne. Die erste Zerlegung definiert einen positiven Operator in  $\mathcal{H}$

$$Z_{\sqrt{\kappa}} : \mathcal{D}(\sqrt{\kappa}) \longrightarrow \mathcal{H} : \xi \longmapsto \int \sqrt{\kappa}(\lambda) \cdot \widehat{\xi}(\lambda) d\sigma(\lambda)$$

mit dem Definitionsbereich  $\left\{ \xi \in \mathcal{H} \mid \widehat{\xi} \in \mathbf{L}^2_{\sqrt{\kappa}}(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}) \right\}$ . In der zweiten Zerlegung gilt  $\widehat{g\varphi} = (\kappa \cdot \widehat{h}) \varphi$  für alle  $\varphi \in F$ . Da  $(\kappa \cdot \widehat{h})(F) \subset \mathbf{L}^2(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma, \kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}})$ , erhält man  $\widehat{h}(F) \subset \mathcal{D}(\sqrt{\kappa})$ . Damit lässt sich ein Operator

$$w := Z_{\sqrt{\kappa}} h : F \longrightarrow \mathcal{H}$$

definieren, der die Abbildung

$$\mathcal{H} \longrightarrow F^{\dagger} : \xi \longmapsto \int \sqrt{\kappa} \cdot \widehat{\xi} d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma)$$

als Adjungierte besitzt. In der Tat gilt

$$\sqrt{\kappa} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma, \kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}}) \quad \text{sowie} \quad \int \sqrt{\kappa} \cdot \zeta d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma) \in \mathcal{G} \subset F^{\dagger}$$

für alle  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  und weiter mit  $\varphi \in F$

$$\left\langle \varphi \left| \int \sqrt{\kappa} \cdot \zeta d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma) \right\rangle_F = \left( Z_{\sqrt{\kappa}} h \varphi \left| \int \zeta d\sigma \right\rangle_{\mathcal{H}} \right)_{\mathcal{H}}.$$

Daraus folgt nun, dass  $w$  schwach stetig ist,

$$\langle \varphi | w^{\dagger} w \varphi \rangle = (Z_{\sqrt{\kappa}} h \varphi | Z_{\sqrt{\kappa}} h \varphi)_{\mathcal{H}} = \int \left\| \sqrt{\kappa} \cdot \widehat{h} \varphi \right\|_{\diamond}^2 d\sigma = \int \left\| (\kappa \cdot \widehat{h}) \varphi \right\|_{\kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \|g\varphi\|_{\mathcal{G}}^2$$

für alle  $\varphi \in F$  gilt und somit  $w^{\dagger}(\mathcal{H}) = \mathcal{G}$  erfüllt ist. Schließlich ist der adjungierte Operator  $w^*$  auf

$$D(w^*) = \left\{ \xi \in \mathcal{H} \mid \int \sqrt{\kappa} \cdot \widehat{\xi} d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma) \in \mathcal{H} \right\}$$

definiert. Dieser Raum ist dicht in  $\mathcal{H}$ , weil er den Definitionsbereich  $\mathcal{D}(\sqrt{\kappa})$  enthält. Insgesamt ist die Abschließbarkeit von  $g$  bzgl.  $h$  nachgewiesen mit  $\overline{w} \subset Z_{\sqrt{\kappa}} \subset w^*$ .

Sei  $G$  der Abschluss von  $g$  und  $\xi \in D(G)$ . Dann existiert eine Folge  $(\varphi_k)_k \subset F$  derart, dass  $\widehat{h}\varphi_k$  in  $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  gegen  $\widehat{\xi}$  und  $\widehat{g}\varphi_k = (\kappa \cdot \widehat{h}) \varphi_k$  in  $\mathbf{L}^2(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma, \kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}})$  gegen  $\widehat{G}\xi$  konvergieren. Nach Übergang zu geeigneten Teilfolgen erhält man durch Vergleich der punktweisen Grenzwerte

$$\widehat{G}\xi = \kappa \cdot \widehat{\xi} \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^2(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma, \kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}}),$$

insbesondere  $\xi \in \mathcal{D}(\sqrt{\kappa})$ .

Unter der Bedingung, dass  $h(F)$  dicht in  $\mathcal{D}(\sqrt{\kappa})$  ist, folgt  $Z_\kappa = G^*G$ , d. h. die Zerlegung von  $\mathcal{H}$  wäre eine Diagonalisierung dieses Operators. Ansonsten bietet sich eine Argumentation über den Definitionsbereich  $\mathcal{D}(G^*G) = \{\xi \in \mathcal{D}(G) \mid G\xi \in \mathcal{H}\}$  an. Für  $\xi \in \mathcal{D}(G^*G)$  existiert nämlich ein  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  mit

$$\int \kappa \cdot \widehat{\xi} d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma) = \int \zeta d\sigma \quad \text{in } F^\dagger$$

bzw.

$$\int \kappa \cdot \langle \varphi | \widehat{\xi} \rangle d\sigma = \int \langle \varphi | \zeta \rangle d\sigma \quad \text{für alle } \varphi \in F^\dagger,$$

d. h. mit

$$\int \left( \widehat{h\varphi} \Big|_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)} \kappa \cdot \widehat{\xi} - \zeta \right) d\sigma(\lambda) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in F^\dagger.$$

Wir formulieren das abstrakte Kriterium, nach welchem die Schlussfolgerung  $\kappa \cdot \widehat{\xi} = \zeta$  und somit  $\kappa \cdot \widehat{\xi} \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  bzw.  $\xi \in \mathcal{D}(\kappa)$  gezogen werden darf.

**SATZ** Seien

$$\mathcal{H} = \int_{\Lambda}^{\oplus} \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) d\sigma(\lambda) \hookrightarrow F^\dagger \quad \text{und} \quad \mathcal{G} = \int_{\Lambda}^{\oplus} \kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) d(1_{\{\kappa \neq 0\}} \cdot \sigma)(\lambda) \hookrightarrow F^\dagger$$

direkt zerlegt, wobei  $\kappa$  eine positive  $\sigma$ -messbare Dichte bezeichne. Dann ist  $g$  bzgl.  $h$  abschließbar.

Man nehme zusätzlich an, für jedes beliebige Feld  $\zeta$  gelte

$$\int \left( \widehat{h\varphi} \Big|_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)} \zeta \right) d\sigma(\lambda) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in F \quad \implies \quad \zeta = 0 \quad \sigma\text{-fast überall.}$$

Für den Abschluss  $G$  ist dann  $G^*G = Z_\kappa$  diagonal in der Zerlegung von  $\mathcal{H}$ .

**Beweis** Der erste Teil ist nach Bemerkung 3 klar. Wie dort gezeigt, gibt es zu  $\xi \in \mathcal{D}(G^*G)$  ein  $\zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  mit

$$\int \left( \widehat{h\varphi} \Big|_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)} \kappa \cdot \widehat{\xi} - \zeta \right) d\sigma(\lambda) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in F^\dagger.$$

Nach der Zusatzannahme folgt  $\kappa \cdot \widehat{\xi} = \zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  und somit  $\xi \in \mathcal{D}(\kappa)$ . Über die Enthaltensrelation  $\mathcal{D}(G^*G) \subset \mathcal{D}(\kappa)$  hinaus gilt  $G^*G\xi = Z_\kappa\xi$ , da  $\widehat{G\xi} = \kappa \cdot \widehat{\xi}$  gilt und  $G^*$  die kanonische Injektion  $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$  ist. Insgesamt folgt  $G^*G \subset Z_\kappa$  was nur durch  $G^*G = Z_\kappa$  möglich ist.

**BEMERKUNG 4** Das im Satz gegebene Zusatzkriterium soll im nächsten Abschnitt detaillierter für den skalaren Fall, d. h. für Funktionen diskutiert werden.

## 1.6 Testräume und $\mu$ -Funktionen

Im folgenden sei  $\mathbf{T}$  ein lokal kompakter Raum und  $\mu$  ein positives Radon-Integral auf  $\mathbf{T}$ .

Man nehme an,  $\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\mu)$  sei ein hilbertscher Unterraum in  $F^\dagger$ , und der Kern von  $\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow F^\dagger$  sei mit  $h$  bezeichnet.

Dieser Abschnitt stellt den fundamentalen Begriff von Testräumen bzw. verallgemeinerten Funktionen bereit, mit dessen Hilfe später Prozesse in den analytischen Rahmen eingebettet werden können.

**SATZ** Die folgenden Bedingungen an eine Funktion  $f : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{K}$  sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist  $\mu$ -messbar und  $\int^\bullet |h\varphi \cdot f| d\mu < \infty$  für alle  $\varphi \in F$ .
- (ii)  $\overline{h\varphi} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$  für alle  $\varphi \in F$ .
- (iii)  $h\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$  für alle  $\varphi \in F$ .
- (iv)  $f$  ist bzgl. des vektorwertigen Integrals  $h^\dagger [ ]_\mu : \mathcal{K}(\mathbf{T}) \longrightarrow F^\dagger : a \longmapsto h^\dagger [a]_\mu$  integrierbar.

In diesem Fall definiert  $f$  durch

$$f \cdot \mu := \int f d \left( h^\dagger [ ]_\mu \right) : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \int \overline{h\varphi} \cdot f d\mu$$

eine Semilinearform auf  $F$ .

**Beweis** (i) $\implies$ (ii) und (ii) $\implies$ (iii) sind klar.

(iii) $\implies$ (i): Da  $h(F)$  dicht in  $\mathbf{L}^2(\mu)$  ist, gibt es zu jeder kompakten Teilmenge  $K \subset \mathbf{T}$  eine Folge  $(\varphi_k)_k \subset F$ , so dass  $(h\varphi_k)_k$  sowohl in  $\mathbf{L}^2(\mu)$  wie auch punktweise  $\mu$ -f.ü. gegen  $1_K$  konvergiert. Erfüllt eine Funktion  $f$  auf  $\mathbf{T}$  die Bedingung  $h\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$  für alle  $\varphi \in F$ , so folgt die  $\mu$ -Messbarkeit von  $1_K \cdot f = \lim_k h\varphi_k \cdot f$  für alle kompakten Mengen  $K \subset \mathbf{T}$  und somit auch die von  $f$ .

Der Beweis zu (i)  $\iff$  (iv) nutzt die natürliche Verbindung zur vektorwertigen Integration und verdient, in einer eigenen Bemerkung behandelt zu werden.

**BEMERKUNG 1** Die im Satz auftauchende Verbindung zur vektorwertigen Integration entsteht ganz natürlich. Da  $h : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  schwach stetig ist, ist

$$F \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T}) : \varphi \longmapsto h\varphi \cdot \mu$$

eine wohldefinierte, stetige und lineare Abbildung. Ihre Adjungierte ist

$$h^\dagger [ ]_\mu : \mathcal{K}(\mathbf{T}) \longrightarrow F^\dagger : a \longmapsto h^\dagger [a]_\mu .$$

Als Komposition des Radon-Integrals

$$[ ]_\mu : \mathcal{K}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : a \longmapsto [a]_\mu = a$$

mit  $h^\dagger$  ist sie auch ein Radon-Integral und es gilt

$$\mathcal{M}(\mathbf{T}) \ni \left\langle \varphi \left| h^\dagger [\ ]_\mu \right. \right\rangle = \left( h\varphi \left| [\ ]_\mu \right. \right) = \overline{h\varphi} \cdot \mu \quad \text{für alle } \varphi \in F .$$

Weiterhin gilt  $\|\xi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \sup_{\langle \varphi | h\varphi \rangle \leq 1} |(h\varphi | \xi)|$  für alle  $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ . Aufgrund von Thomas (1970, [47], 3.5 bzw. 3.7) ist somit  $f$  genau dann  $h^\dagger [\ ]_\mu$ -messbar (bzw.  $h^\dagger [\ ]_\mu$ -vernachlässigbar), wenn  $f$   $\mu$ -messbar (bzw. lokal  $\mu$ -vernachlässigbar) ist. Daneben (mittels Thomas (1970, [47], 1.28)) ist  $f \in \mathcal{L}^{1,\bullet} \left( h^\dagger [\ ]_\mu \right)$  äquivalent zu

$$f \in \mathcal{L}^{1,\bullet} \left( \overline{h\varphi} \cdot \mu \right) \quad \text{für alle } \varphi \in F ,$$

d. h. zu  $\mu^\bullet(|h\varphi \cdot f|) < \infty$  für alle  $\varphi \in F$ .

**HAUPTSATZ** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Abbildung  $f \diamond d \left( h^\dagger [\ ]_\mu \right) : \mathbf{L}^1 \left( h^\dagger [\ ]_\mu \right) \longrightarrow F^{\otimes} : f \longmapsto f \cdot \mu$  ist injektiv.
- (ii) Erfüllt eine Funktion  $f$  für alle  $\varphi \in F$  die Bedingung  $\overline{h\varphi} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$  und

$$\int \overline{h\varphi} \cdot f \, d\mu = 0 ,$$

so ist  $f$  lokal  $\mu$ -vernachlässigbar.

**Beweis** Eine Funktion  $f$  ist genau dann in  $\mathbf{L}^1 \left( h^\dagger [\ ]_\mu \right)$ , wenn sie  $\overline{h\varphi} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$  für alle  $\varphi \in F$  erfüllt. In diesem Fall ist die Implikation

$$\left\langle \varphi \left| \int f \, dh^\dagger [\ ]_\mu \right. \right\rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in F \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \quad h^\dagger [\ ]_\mu\text{-fast überall}$$

äquivalent zu

$$\int \overline{h\varphi} \cdot f \, d\mu = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in F \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \quad \text{lokal } \mu\text{-fast überall} .$$

**DEFINITION** Man sagt, der hilbertsche Unterraum  $\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow F^\dagger$  oder auch sein Kern besitzen die *Trennungseigenschaft*, wenn eine der beiden Bedingungen des Hauptsatzes erfüllt ist. In diesem Fall heißen die Elemente in  $F^\dagger$  (bzgl.  $\mu$ ) *verallgemeinerte Funktionen (auf  $T$ )* und wir nennen  $F$  einen  $\mu$ -Testraum.

Sei  $F$  ein  $\mu$ -Testraum. Eine Funktion  $f \in \mathbf{L}^1 \left( h^\dagger [\ ]_\mu \right)$  mit der Eigenschaft

$$(\mathbf{L}^\infty(\mu) \cdot f) \cdot \mu \subset F^\dagger$$

bezeichnen wir als  $\mu$ -Funktion (in  $F^\dagger$ ). Den Vektorraum der  $\mu$ -Funktionen (modulo Gleichheit lokal  $\mu$ -fast überall) bezeichnen wir mit  $\mathbf{L}_{\text{loc},F}^1(\mu)$ .

**BEMERKUNG 2** Die Trennungseigenschaft<sup>10</sup> wird von uns eigentlich immer vorausgesetzt. Dadurch braucht man nicht zwischen der Funktion  $f \in \mathbf{L}^1 \left( h^\dagger [ ]_\mu \right)$  und der zugehörigen Semilinearform  $f \cdot \mu \in F^\otimes$  zu unterscheiden.

Im Wesentlichen wird sich die vorliegende Arbeit auf  $\mu$ -Funktionen konzentrieren und - wie üblich - nicht zwischen  $\mu$ -Funktionen unterscheiden, die lokal  $\mu$ -fast überall gleich sind. Insofern gelten Formeln für Klassen, auch wenn sie mit Repräsentanten formuliert sind.

In der Praxis wird eine Funktion  $f$  als  $\mu$ -Funktion nachgewiesen, indem man  $\mu$ -Integrierbarkeit von  $\overline{h\varphi} \cdot f$  für alle  $\varphi \in F$  nachweist und Stetigkeit der Semilinearform  $\varphi \mapsto \int \overline{h\varphi} \cdot \mathfrak{b} \cdot f \, d\mu$  auf  $F$  für alle  $\mathfrak{b} \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$  zeigt.

$\mu$ -Funktionen definieren stetige Semilinearformen auf  $F$  und jedes  $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$  ist eine  $\mu$ -Funktion mit  $\xi \cdot \mu = h^\dagger \xi$ .

**BEMERKUNG 3** Ist  $F$  tonneliert, so ist die Stetigkeit von  $f \cdot \mu$  automatisch für jedes  $f \in \mathbf{L}^1 \left( h^\dagger [ ]_\mu \right)$  erfüllt. Zum Nachweis einer  $\mu$ -Funktion bei tonneliertem Testraum  $F$  genügt es somit, die Integrierbarkeit nachzuprüfen.

In der Tat ist die Halbnorm  $\varphi \mapsto \|h\varphi\|_{2,\mu}$  stetig auf tonneliertem  $F$ . Ist nun  $f \in \mathbf{L}^1 \left( h^\dagger [ ]_\mu \right)$ , so gilt  $1_{K \cap \{|f| \leq k\}} \cdot f \in \mathbf{L}^2(\mu)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und jedes kompakte  $K \subset \mathbf{T}$ , insbesondere

$$\int 1_{K \cap \{|f| \leq k\}} \cdot |\overline{h\varphi} \cdot f| \, d\mu \leq \|h\varphi\|_{2,\mu} \cdot \|1_{K \cap \{|f| \leq k\}} \cdot f\|_{2,\mu} \quad \text{für alle } \varphi \in F.$$

Danach sind

$$\varphi \mapsto \int 1_{K \cap \{|f| \leq k\}} \cdot |\overline{h\varphi} \cdot f| \, d\mu$$

stetige Halbnormen auf  $F$ . Da für alle  $\varphi \in F$

$$\infty > \int |\overline{h\varphi} \cdot f| \, d\mu = \sup_{K \in \mathfrak{K}(\mathbf{T})} \int 1_K \cdot |\overline{h\varphi} \cdot f| \, d\mu = \sup_{K \in \mathfrak{K}(\mathbf{T})} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int 1_{K \cap \{|f| \leq k\}} \cdot |\overline{h\varphi} \cdot f| \, d\mu$$

und  $|\langle \varphi | f \cdot \mu \rangle| \leq \int |\overline{h\varphi} \cdot f| \, d\mu$  gilt, erhält man die Stetigkeit von  $\varphi \mapsto \langle \varphi | f \cdot \mu \rangle$  aufgrund der Tonneliertheit von  $F$ .

### BEISPIEL 1 ( $\mathbf{L}^2(\mu)$ als Testraum)

$\mathbf{L}^2(\mu)$  ist ein hilbertscher Unterraum in sich selbst (mit Id als Kern) und die Trennungseigenschaft ist offensichtlich erfüllt. Die  $\mu$ -Funktionen sind gerade alle Funktionen aus  $\mathbf{L}^2(\mu)$ .

### BEISPIEL 2 ( $\mathcal{K}(\mathbf{T})$ als Testraum)

Sei wie üblich  $\mathcal{K}(\mathbf{T})$  der Vektorraum aller stetigen Funktionen  $\varphi$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } \varphi = \overline{\{t \in \mathbf{T} \mid \varphi(t) \neq 0\}}$ .  $\mathbf{L}^2(\mu)$  ist ein hilbertscher Unterraum in

<sup>10</sup> Die Trennungseigenschaft könnte man mit dem Begriff vollständiger Verteilungsklassen aus der mathematischen Statistik in Verbindung bringen.



$\mathcal{M}(\mathbf{T}) = \mathcal{K}(\mathbf{T})'$  mit Kern

$$h := [\ ]_{\mu} : \mathcal{K}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \varphi \longmapsto [\varphi]_{\mu} = \varphi .$$

Die Trennungseigenschaft ist nach Portenier (2002, [38], Abschnitt 3.10) gegeben. Da  $\mathcal{K}(\mathbf{T})$  tonneliert ist, erhält man  $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$  mittels obiger Bemerkung 3 als Raum der  $\mu$ -Funktionen in  $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ .

Analog ist  $\mathcal{D}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  ein  $\mu$ -Testraum, wenn  $\mathbf{T}$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\mu$  ein Radon-Integral darauf bezeichnet.

### BEISPIEL 3 ( $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ als Testraum)

Für dieses Beispiel siehe Dieudonné (1976, [12], Abschnitt 22.19). Es sei  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  der Vektorraum aller Familien  $\varphi = (\varphi(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ , die für alle  $l \in \mathbb{N}$

$$p_l(\varphi) := \left\| (1 + |\text{id}|)^l \cdot \varphi \right\|_{\infty} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^l \cdot |\varphi(k)| < \infty$$

erfüllen. Wir versehen  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  mit der lokal konvexen Topologie, die von allen  $p_l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , erzeugt wird. Der Untervektorraum  $\mathbb{K}^{(\mathbb{Z}^n)}$  aller Familien mit endlichem Träger ist dann dicht in  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ .

Der Dualraum  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  lässt sich mit dem Vektorraum aller Abbildungen  $S = (S(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$  mit (höchstens) polynomielltem Wachstum identifizieren. Dies sind solche Familien  $S$ , für die ein  $l \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{|S(k)|}{(1 + |k|)^l} < \infty ;$$

z. B. ist jede beschränkte Folge von dieser Art. Die Semidualität ist dann durch

$$\langle \varphi | S \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{\varphi}(k) \cdot S(k)$$

gegeben.

Es bezeichne

$$h := \text{Id} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$$

den Kern des Pivotraums<sup>11</sup>  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ .  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  ist ein #-Testraum, wie man nach obigem Beispiel 2 aufgrund der Inklusion  $\mathbb{K}^{(\mathbb{Z}^n)} \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  erkennt. Der Beweis zur Charakterisierung von  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  als Folgenraum liefert auch, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  gerade der Raum aller #-Funktionen in  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  ist.

### BEISPIEL 4 ( $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ als Testraum)

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist ein geeigneter  $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ -Testraum, denn  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  ist ein hilbertscher Unterraum mit Kern

$$h := [\diamond] : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) : \varphi \longmapsto [\varphi] = \varphi .$$

Die Trennungseigenschaft ist erfüllt, da sie schon durch den in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  enthaltenen Raum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gewährleistet ist (s. Portenier (2002, [38], Abschnitt 3.10)).

Die genaue Charakterisierung aller  $\mu$ -Funktionen in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  ist ein eigenständiges Problem, dessen Untersuchung in der vorliegenden Arbeit unnötig ist. Für sehr viele

<sup>11</sup>  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  lässt sich auch als  $\mathbf{L}^2(\#)$  mit Zählmaß  $\#$  auf  $\mathbb{Z}^n$  auffassen.

Funktionen kann man nämlich die nötigen Eigenschaften einfach nachprüfen. Alle Funktionen aus  $\mathbf{L}_{\text{mod}}^1(\lambda_{\mathbb{R}^n})$  (z. B. alle  $f \in \mathbf{L}^\infty(\lambda_{\mathbb{R}^n})$ ) sind  $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ -Funktionen (s. Portenier (2002, [38], Abschnitt 4.3)).

**BEISPIEL 5** ( $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n})$  als Testraum)

Mit Standardkenntnissen der Funktionalanalysis (z. B. Portenier (2002, [38])) lässt sich der Dualraum des Banach-Raums  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n})$  (mit Norm  $\|\diamond\|_\infty + \|\diamond\|_2$ ) mit der Summe  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$  identifizieren. Die nicht entartete Semidualität

$$\langle \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \mid \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) \rangle$$

ist durch

$$\langle \xi \mid \eta + \vartheta \rangle := (\xi \mid \eta)_{\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n})} + \langle \xi \mid \vartheta \rangle_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)} = \int \bar{\xi} \cdot \eta d\lambda_{\mathbb{R}^n} + \int \bar{\xi} d\vartheta$$

wohldefiniert. Die kanonische Injektion

$$h : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) : a \longmapsto [a] = a$$

ist stetig und hat als Adjungierte die kanonische Injektion

$$h^\dagger : \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) : \xi \longmapsto \xi + 0 = \xi .$$

Insbesondere ist  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$  ein hilbertscher Unterraum mit diesem Kern.

Die kanonische Injektion  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n})$  ist klar stetig und hat ein dichtes Bild, insbesondere ist die Trennungseigenschaft vorhanden. Aufgrund der Dichtheit von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  folgt die Gültigkeit einer analogen Aussage für  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , wie auch für  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Man erhält die folgende Kette von kanonischen Injektionen, die alle stetig sind und dichte Bilder haben:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' .$$

Analog bildet  $\mathbf{L}^1(\lambda_{\mathbf{T}}) \cap \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbf{T}}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbf{T}})$  einen  $\lambda_{\mathbf{T}}$ -Testraum, wenn  $\mathbf{T}$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

**BEISPIEL 6** Ein Beispiel für einen hilbertschen Unterraum ohne Trennungseigenschaft erhält man durch folgende Konstruktion (vgl. Portenier (2002, [38], Beispiel 3.10.4)).

Sei  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ , die nicht quadratisch summierbar ist - z. B. die konstante 1-Folge. Auf  $\mathcal{K}(\mathbb{N})$  wählen wir die  $\|\diamond\|_2$ -Norm. Die Linearform

$$\mathcal{K}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{c}_k \cdot \varphi(k)$$

ist nicht stetig, so dass ihr Kern  $F$  dicht in  $(\mathcal{K}(\mathbb{N}), \|\diamond\|_2)$  wie auch in  $\ell^2(\mathbb{N})$  ist.

$$h : F \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) : \varphi \longmapsto \varphi$$

ist eine Isometrie mit dichtem Bild.  $\ell^2(\mathbb{N}) \hookrightarrow F^\dagger$  lässt sich somit als hilbertscher Unterraum mit Kern  $h^\dagger h$  auffassen. In diesem Rahmen erfüllt  $c : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : k \longmapsto c_k$  die Bedingungen  $\bar{\varphi} \cdot c \in \ell^1(\mathbb{N})$  und  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(k) \cdot c_k = 0$  für alle  $\varphi \in F$ , obwohl  $c \neq 0$ .

## 1.7 Abschließende Bemerkungen

**BEMERKUNG 1** Für die Inhalte dieses Kapitels wurde meist auf Portenier (2002, [38]) zurückgegriffen. Insbesondere die dortige Formulierung der Theorie hilbertscher Unterräume stellt das Fundament für die in diesem Kapitel hergeleiteten Aussagen dar. Wesentliche Elemente dieser Theorie finden sich auch bei Speyer (1987, [46]). Als frühe Arbeiten zu hilbertschen Unterräumen lassen sich die Arbeiten von Aronszajn (1950, [2]) und Schwartz (1964, [45]) nennen. Speyer (1987, [46]) verweist in diesem Zusammenhang auch noch auf einen Report von Thomas aus dem Jahre 1972.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Formulierung lässt nicht beliebige lokal konvexe Oberräume zu - wie es bei Schwartz (1964, [45]) und Thomas (nach Speyers (1987, [46], Kap. I, §1) Schilderung) der Fall ist. Stattdessen sehen wir stets schwache Semidualräume  $F^\dagger$  als Oberräume vor. Es zeigt sich jedoch, dass dies den Rahmen der Anwendbarkeit nicht wirklich einschränkt.

**BEMERKUNG 2** Der in Abschnitt 1.2 bzw. 1.3 auftretende Operator  $G^*G$  ist von zentraler Bedeutung und wird in dieser Arbeit oft in Erscheinung treten. In Verbindung mit der Theorie der stochastischen Prozesse wird ihm die Rolle des sogenannten Kovarianzoperators zukommen.

**BEMERKUNG 3** Man beachte, dass die formale Beziehung zwischen Spektralzerlegung und Bildzerlegung (vgl. Bemerkung 1.5.1) nicht über deren Unterschiede hinwegtäuschen sollte.

Es gibt die Problematik der Faktorisierung, die in Abschnitt 1.5 nicht auftaucht, aber in konkreten Fällen das Vorgehen gemäß Abschnitt 1.2 stark erschweren kann. Im Gegenzug dazu hat man bei den Bildzerlegungen aus Abschnitt 1.2 größeren Spielraum.

Die Spektralzerlegung von  $\mathcal{G}$  scheint sehr schnell und ohne starke Zusatzvoraussetzungen erreicht worden zu sein. Allerdings setzt Abschnitt 1.5 die Abschließbarkeit voraus und der Hauptsatz 1.5 stellt Bedingungen an den Testraum. In der Tat liefert der Spektralsatz für den selbstadjungierten, positiven Operator  $G^*G$  stets eine Zerlegung, in welcher dieser 'diagonalisiert' wird (vgl. Portenier (2002, [38])). Der entscheidende Punkt ist jedoch, dass die Zerlegung in dem Testdual  $F^\dagger$  vorgenommen werden soll (für Kriterien dazu, siehe Speyer (1987, [46])).

Schließlich ist die Tatsache, dass das Zerlegungsmaß manipuliert wird dafür verantwortlich, dass die Spektralzerlegung stets direkt ist - eine Eigenschaft, deren Nachweis bei Bildzerlegungen erst erbracht werden muss.

**BEMERKUNG 4** Der Begriff des Testraums motiviert sich aus der Theorie der Distributionen (vgl. Portenier (2002, [38]) oder Gelfand und Schilow (1962, [17])). Die kurz verwendete Integrationstheorie bzgl. vektorwertigen Integralen wurde aus

Thomas (1970, [47]) entnommen. Testräume werden für das weitere Vorgehen insoweit wichtig sein, dass sie den Rahmen vorgeben, in dem sich die Theorie abspielt.

# Kapitel 2

## Einbettbare Prozesse

In der Praxis sind die Informationen über einen konkret vorliegenden stochastischen Prozess meistens beschränkt. Das mathematische Modell und die darauf aufbauende Theorie sollten also allgemein genug sein, um in der Praxis angewandt werden zu können. Die Theorie der vorliegenden Arbeit basiert einzig auf der Kovarianzstruktur von Prozessen. Diese Grundlage hat genügend Gehalt, um eine weitreichende Theorie aufzubauen und ist gleichzeitig in vielen Anwendungen gewährleistet.

Der Fokus dieses Kapitels liegt zunächst auf dem Aufbau der Theorie zur Einbettbarkeit eines Prozesses über dessen Kovarianzstruktur und in der Analyse des daraus resultierenden eingebetteten Prozessraums. Damit ist der Prozess der Theorie des ersten Kapitels zugänglich gemacht und Bildzerlegungen ließen sich anschließen.

Die Abschließbarkeit im Sinne des vorigen Kapitels wird danach ebenfalls im Rahmen der Prozesse formuliert und konkretisiert, so dass darauf aufbauend Spektralzerlegungen der Prozessräume zur Verfügung stehen.

Da eine Fassung der Bild- und Spektralzerlegungen in dem immer noch abstrakten Rahmen dieses Kapitels wenig Neues im Vergleich zu den Versionen des ersten Kapitels liefern würde, verschieben wir diese Zerlegungsdiskussion in das nächste Kapitel, wo unterschiedliche Klassen von Prozessen genauer analysiert werden.

In diesem Kapitel sei  $\mathbf{T}$  ein lokal kompakter Raum,  
 $\mu$  ein positives Radon-Integral auf  $\mathbf{T}$  und  
 $F$  ein  $\mu$ -Testraum.  
 $h$  bezeichne den Kern des Pivotraums  $\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow F^\dagger$   
und es gelten die entsprechenden Notationen des ersten Kapitels,  
insbesondere des Abschnitts 1.6.

## 2.1 Kovarianzfunktion eines Prozesses

Dieser Abschnitt soll den Begriff des Prozesses und dessen Kovarianzfunktion einführen und einen ersten Eindruck davon geben, auf welcher Betrachtungsweise der analytische Charakter der Prozesstheorie beruht, die in den folgenden Abschnitten entwickelt wird.

**DEFINITION** Unter einem *Prozess* (in  $\mathcal{X}$ ) verstehen wir eine Familie oder eine Abbildung

$$\Xi = (\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}} : \mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{X} : t \longmapsto \Xi_t$$

in einen Hilbert-Raum  $\mathcal{X}$ . Weiterhin definieren wir die *Kovarianzfunktion* (von  $\Xi$ ) als

$$c : \mathbf{T} \times \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{K} : (s, t) \longmapsto (\Xi_s | \Xi_t)_{\mathcal{X}} .$$

**BEMERKUNG 1** In den Anwendungen werden wir eigentlich nur Familien  $(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  von quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  betrachten, d. h. es ist dann  $\Xi_t \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) =: \mathcal{X}$  für alle  $t \in \mathbf{T}$ .  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ist ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$(X, Y) \longmapsto E(\overline{X} \cdot Y) = \int_{\Omega} \overline{X}(\omega) \cdot Y(\omega) d\mathbf{P}(\omega) ,$$

so dass die Kovarianzfunktion durch die Erwartungswerte

$$c : \mathbf{T} \times \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{K} : (s, t) \longmapsto E(\overline{\Xi_s} \cdot \Xi_t)$$

der Produkte gegeben ist.

Daneben bilden die zentrierten<sup>12</sup> Variablen  $\Xi_t^{(0)} := \Xi_t - E\Xi_t$ ,  $t \in \mathbf{T}$ , einen stochastischen Prozess in  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Dessen Kovarianzfunktion ist dann

$$c^{(0)} : (s, t) \longmapsto Cov(\Xi_s, \Xi_t) := E(\overline{\Xi_s} \cdot \Xi_t) - \overline{E\Xi_s} \cdot E\Xi_t = c(s, t) - \overline{E\Xi_s} \cdot E\Xi_t ,$$

woraus sich auch der Name motiviert.

**LEMMA** Die Kovarianzfunktion  $c$  eines Prozesses  $(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  ist von positivem Typ, d. h.  $\sum_{s, t \in \mathbf{T}} \overline{z(s)} \cdot z(t) \cdot c(s, t) \geq 0$  für alle  $z \in \mathbb{K}^{(\mathbf{T})}$  und die folgenden Aussagen sind zueinander äquivalent:

(i) Die Abbildung  $t \longmapsto \Xi_t : \mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{X}$  ist stetig.

<sup>12</sup> Diese Zentrierung lässt sich nicht in die Definition des Skalarproduktes einarbeiten.

(ii)  $c$  ist stetig.

(iii)  $c$  ist separat in jeder Variablen stetig und  $t \mapsto \|\Xi_t\|$  ist stetig.

**Beweis** Die erste Aussage ist bekannt. Wir nehmen die Stetigkeit aus (i) an und geben uns  $\varepsilon > 0$  und  $(s', t') \in \mathbf{T} \times \mathbf{T}$  beliebig vor. Es gilt für  $(s, t) \in \mathbf{T} \times \mathbf{T}$

$$\begin{aligned} |c(s, t) - c(s', t')| &= |(\Xi_s - \Xi_{s'} | \Xi_t) + (\Xi_{s'} | \Xi_t) - (\Xi_{s'} | \Xi_{t'})| \leq \\ &\leq \|\Xi_s - \Xi_{s'}\| \cdot \|\Xi_t\| + \|\Xi_{s'}\| \cdot \|\Xi_t - \Xi_{t'}\|. \end{aligned}$$

Seien  $O_{s'}, O_{t'}$  Umgebungen von  $s'$  bzw.  $t'$  mit  $\|\Xi_s - \Xi_{s'}\| \leq \varepsilon$  und  $\|\Xi_t - \Xi_{t'}\| \leq \varepsilon$  für alle  $s \in O_{s'}$  und  $t \in O_{t'}$ . Diese existieren aufgrund der Voraussetzung. Für alle  $(s, t) \in O_{s'} \times O_{t'}$  gilt somit

$$|c(s, t) - c(s', t')| \leq \varepsilon \cdot \|\Xi_t\| + \|\Xi_{s'}\| \cdot \varepsilon \leq \varepsilon \cdot (\|\Xi_{t'}\| + \varepsilon) + \|\Xi_{s'}\| \cdot \varepsilon.$$

Dies beweist die Stetigkeit von  $c$  in  $(s', t')$ .

Die Implikation (ii)  $\implies$  (iii) ist trivial. Wir nehmen schließlich (iii) an und geben uns  $s' \in \mathbf{T}$  beliebig vor.  $c(s', s')$  ist eine positive reelle Zahl und es gilt

$$\|\Xi_s - \Xi_{s'}\|^2 = c(s, s) - c(s', s') - 2 \cdot \operatorname{Re} c(s, s') + 2 \cdot c(s', s')$$

für alle  $s \in \mathbf{T}$ . Nach Voraussetzung existieren Umgebungen  $O_1$  und  $O_2$  von  $s'$  mit  $|c(s, s') - c(s', s')| \leq \varepsilon$  für jedes  $s \in O_1$  und  $|c(s, s) - c(s', s')| \leq \varepsilon$  für alle  $s \in O_2$ . Für alle  $s \in O_1 \cap O_2$  folgt somit

$$\|\Xi_s - \Xi_{s'}\|^2 \leq |c(s, s) - c(s', s')| + 2 \cdot |\operatorname{Re}(c(s, s') - c(s', s'))| \leq 3 \cdot \varepsilon.$$

Dies beweist (i) und somit das Lemma durch Ringschluss.

**BEMERKUNG 2** Eine ähnliche Äquivalenz zeigte schon Karhunen (1947, [22]), insbesondere ist dort die Implikation (i)  $\implies$  (ii) analog bewiesen.

**SATZ** Genau dann ist ein Prozess  $t \mapsto \Xi_t : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{X}$  skalar  $\mu$ -messbar, wenn die zugehörige Kovarianzfunktion separat (in jeder Variablen)  $\mu$ -messbar ist, d. h. wenn  $c(s, \diamond) : t \mapsto c(s, t)$  für alle  $s \in \mathbf{T}$  bzgl.  $\mu$  messbar ist.

**Beweis** Siehe Karhunen (1947, [22], Satz 4).

**BEISPIEL 1** Ist  $\mathbf{T}$  diskret, so ist automatisch jeder Prozess  $(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  stetig und jede Kovarianzfunktion separat universell messbar. Wählt man das Zählmaß  $\#$  auf  $\mathbf{T}$ , so ist jeder Prozess  $\Xi$  auf  $\mathbf{T}$  skalar  $\#$ -messbar.

**BEISPIEL 2** Sei  $\Xi$  ein 'deterministischer' Prozess auf lokal kompaktem  $\mathbf{T}$  in dem Sinne, dass es sich bei jedem  $\Xi_t$ ,  $t \in \mathbf{T}$ , um eine Konstante handelt. Dann entspricht  $\Xi$  einer Funktion  $f \in \mathbb{K}^{\mathbf{T}}$  und die Kovarianzfunktion ist das Tensorprodukt  $c = \overline{f} \otimes f$  der Funktion mit ihrer konjugierten Funktion.  $\Xi$  ist genau dann stetig, wenn  $f$  stetig ist. Bezüglich eines positiven Radon-Integrals  $\mu$  auf  $\mathbf{T}$  ist  $\Xi$  genau dann skalar messbar, wenn  $f$   $\mu$ -messbar ist.

**BEISPIEL 3** Die Brownsche Bewegung  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  ist ein Prozess von zentrierten normalverteilten - und somit quadratisch integrierbaren - Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Die zugehörige Kovarianzfunktion lautet

$$c : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} : (s, t) \longmapsto E(B_s \cdot B_t) = \min(s, t)$$

und ist stetig. Insbesondere ist die Kovarianzfunktion separat universell messbar. Die Brownsche Bewegung ist also stetig und skalar  $\lambda_{\mathbb{R}_+^*}$ -messbar.

**BEISPIEL 4** Unter der Brownschen Brücke verstehen wir den Prozess

$$\Xi : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) : t \longmapsto \Xi_t := B_t - t \cdot B_1,$$

wobei  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  die Brownsche Bewegung und  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum aus obigem Beispiel 3 bezeichnet. Die Kovarianzfunktion von  $\Xi$  lautet

$$c : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : (s, t) \longmapsto E(\Xi_s \cdot \Xi_t) = \min(s, t) - st$$

und besitzt ähnliche Eigenschaften wie die der Brownschen Bewegung selbst. Also ist  $\Xi$  stetig und skalar  $\lambda_{[0, 1]}$ -messbar.

**BEISPIEL 5** Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein zentrierter stationärer Gauß-Prozess mit fast sicher stetigen Pfaden, welcher Markovsch ist - kurz: ein zentrierter stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (s. Bauer (1991, [3])). Die zugehörige Kovarianzfunktion ist dann der Gestalt  $(X_s | X_t) = \beta e^{-\alpha|s-t|}$ ,  $s, t \geq 0$ , mit Parametern  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ . Insbesondere ist  $X$  stetig und skalar  $\lambda_{\mathbb{R}_+}$ -messbar.

**BEISPIEL 6** Wir geben noch ein Beispiel eines vielleicht untypischen Prozesses. Sei  $N$  eine Menge in dem lokal kompakten Raum  $\mathbf{T}$ . Für zueinander orthogonale Vektoren  $\xi, \xi^\perp \neq 0$  eines Hilbert-Raums  $\mathcal{X}$  definiere

$$\Xi = \xi \cdot 1_{\mathbf{T} \setminus N} + \xi^\perp \cdot 1_N : t \longmapsto \Xi_t := \begin{cases} \xi & t \in \mathbf{T} \setminus N \\ \xi^\perp & t \in N \end{cases}.$$

Als Kovarianzfunktion besitzt dieser Prozess die Abbildung

$$c : \mathbf{T} \times \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (s, t) \longmapsto \begin{cases} \|\xi\|^2 & s, t \in \mathbf{T} \setminus N \\ \|\xi^\perp\|^2 & \text{falls } s, t \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Abhängig von der Topologie auf  $\mathbf{T}$ , von der Menge  $N$  und schließlich von der Wahl des Maßes  $\mu$  auf  $\mathbf{T}$  wird diese Kovarianzfunktion stetig bzw. separat messbar sein.

Sei z. B.  $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ ,  $\|\xi\|^2 = 1$  und  $\|\xi^\perp\|^2 = \frac{1}{2}$ . Im Falle von  $N = \mathbb{Q}$  ist  $\Xi$  unstetig, aber skalar  $\lambda_{\mathbb{R}}$ -messbar. Ist  $N$  hingegen die Cantor-Menge, die nicht  $\lambda_{\mathbb{R}}$ -messbar ist, so ist  $\Xi$  unstetig und nicht skalar  $\lambda_{\mathbb{R}}$ -messbar.



## 2.2 Einbettbare Prozesse

In diesem Abschnitt sei  $\Xi$  ein Prozess auf  $\mathbf{T}$   
in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{X}$ .

Der folgende Hauptsatz formalisiert den Zugang, den die vorliegende Arbeit zu Prozessen nimmt. Es handelt sich dabei um eine 'Modellierung der Zufallsvariablen', die die Übertragung der Methoden aus dem Bereich der hilbertschen Unterräume hin zu Prozessen ermöglicht. Die Modellierung ist durch (iv) des folgenden Hauptsatzes beschrieben, in dem den Elementen  $\eta \in \mathcal{X}$  die Interpretation eines 'Maßes mit Dichte  $(\Xi|\eta)$  bzgl.  $\mu$ ' - genauer einer  $\mu$ -Funktion in  $F^\dagger$  - gegeben wird.

**HAUPTSATZ** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

- (i) Für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  ist  $(\Xi|\eta) : t \mapsto (\Xi_t|\eta)_{\mathcal{X}}$  bzgl.  $h^\dagger[\cdot]_\mu$  integrierbar .  
(ii) Für alle  $\varphi \in F$  ist

$$h\varphi \cdot \Xi : \mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{X} : t \longmapsto h\varphi(t) \cdot \Xi_t$$

skalar  $\mu$ -integrierbar.

In diesem Fall ist durch

$$[\cdot|\cdot] : F \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \eta) \longmapsto [\varphi|\eta] := \int \overline{h\varphi} \cdot (\Xi|\eta) d\mu = \langle \varphi | (\Xi|\eta) \cdot \mu \rangle ,$$

eine Sesquilinearform wohldefiniert und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) Die Sesquilinearform  $[\cdot|\cdot]$  ist separat stetig.  
(b) Für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  ist  $(\Xi|\eta) \cdot \mu \in F^\dagger$  und die Abbildung

$$|\diamond| : \mathcal{X} \longrightarrow F^\dagger : \eta \longmapsto |\eta| = (\Xi|\eta) \cdot \mu$$

ist stetig.

- (c) Für alle  $\varphi \in F$  ist  $h\varphi \cdot \Xi$  skalar  $\mu$ -integrierbar in  $\mathcal{X}$  und die Abbildung

$$[\diamond] : F \longrightarrow \mathcal{X} : \varphi \longmapsto \int h\varphi \cdot \Xi d\mu$$

ist schwach stetig.

- (d) Für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  ist  $(\Xi|\eta) \cdot \mu \in F^\dagger$ , und für alle  $\varphi \in F$  ist  $h\varphi \cdot \Xi$  skalar  $\mu$ -integrierbar in  $\mathcal{X}$ .

In diesen Fällen gilt  $[\diamond]^\dagger = |\diamond|$ .

**Beweis** Die Aussagen (i) und (ii) bedeuten beide, dass  $\overline{h\varphi} \cdot (\Xi|\eta) \in \mathbf{L}^1(\mu)$  für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  und jedes  $\varphi \in F$  gilt (vgl. Satz 1.6). Sie sind also äquivalent.

Für die Äquivalenz (iii)  $\iff$  (iv) beachte man, dass  $[\cdot|\cdot]$  genau dann in der ersten Variablen stetig ist, wenn  $(\Xi|\eta) \cdot \mu$  für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  eine stetige Semilinearform auf

$F$  definiert. Die Stetigkeit in der zweiten Variablen ist offensichtlich äquivalent zur Stetigkeit von  $|\diamond|$ .

Genau dann ist  $[\cdot|\cdot]$  in der zweiten Variablen stetig, wenn für jedes  $\varphi \in F$

$$\left| \int h\varphi \cdot \Xi d\mu \right) : \eta \longmapsto \int h\varphi \cdot (\eta|\Xi) d\mu$$

eine stetige Semilinearform auf  $\mathcal{X}$  ist, d. h. wenn für jedes  $\varphi \in F$  das schwache Integral von  $h\varphi \cdot \Xi$  in  $\mathcal{X}$  liegt. Die schwache Stetigkeit von

$$|\diamond| : F \longrightarrow \mathcal{X} : \varphi \longmapsto \int h\varphi \cdot \Xi d\mu$$

ist dann äquivalent zur Stetigkeit von  $[\cdot|\cdot]$  in der ersten Variablen. Insgesamt beweist dies (iii)  $\iff$  (v).

Schließlich liest man die Äquivalenz (iii)  $\iff$  (vi) aus den obigen Beweisen ab.

**BEMERKUNG 1** Die Sesquilinearform bzw.  $|\diamond|$  ermöglicht  $\mathcal{X}$  linear in  $F^\dagger$  einzubetten. Im Hinblick auf spätere Anwendungen ist es jedoch sinnvoll die Bedingungen des Hauptsatzes nicht nur für den konkreten Prozess  $\Xi$  zu fordern, sondern auch für geeignete Manipulationen von  $\Xi$ . Im Wesentlichen wird es sich um Multiplikation mit Indikatorfunktionen  $1_A$  handeln. Dies motiviert die folgende Definition.

**DEFINITION** Ein Prozess  $\Xi$  heiße (bzgl.  $\mu$ ) in  $F^\dagger$  einbettbar, wenn für jedes  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$  der Prozess  $f \cdot \Xi$  die Bedingungen des Hauptsatzes erfüllt.

**KOROLLAR** Ein Prozess  $\Xi$  ist genau dann (bzgl.  $\mu$ ) in  $F^\dagger$  einbettbar, wenn  $(\Xi|\eta)$  für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  eine  $\mu$ -Funktion ist, und für alle  $\varphi \in F$  die Abbildung  $h\varphi \cdot \Xi$  (i.S.v. Pettis)  $\mu$ -integrierbar in  $\mathcal{X}$  ist.

**BEMERKUNG 2**  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$  bezeichne den von allen  $\Xi_t$ ,  $t \in \mathbf{T}$ , erzeugten abgeschlossenen Unterraum. Für die Einbettbarkeit genügt es, die Eigenschaften für  $\eta \in \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$  nachzuweisen, da nur die Skalarprodukte mit  $\Xi$  eine Rolle spielen. In der Tat gilt  $(\Xi|\eta) = 0$  für alle  $\eta \in (\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}))^\perp$  und die Bilder von  $\mathcal{X}$  und  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$  unter  $|\diamond|$  stimmen überein. Analog genügt es, die skalare Integrierbarkeit in  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$  zu untersuchen, denn nur dort nimmt  $|\diamond|$  Werte an.

**BEMERKUNG 3** In der Praxis ist eher der Prozess (sowie das Maß  $\mu$  auf dem Parameterraum) vorgegeben und man muss einen geeigneten Testraum finden, so dass der Prozess einbettbar wird. Die üblichen Testräume (vgl. Abschnitt 1.6) stellen gute erste Kandidaten dar, in deren Dualräume vielfältige Prozesse einbettbar sind.

**BEISPIEL 1** Wie in Beispiel 1 des vorigen Abschnitts sei  $\mathbf{T}$  diskret mit Zählmaß  $\#$  darauf. Wählt man  $\mathbb{K}^{(\mathbf{T})}$  als Testraum (vgl. Beispiel 1.6.2), so ist jeder Prozess  $\Xi$

bzgl.  $\#$  in  $\mathbb{K}^{\mathbf{T}}$  einbettbar. Ein Element  $\eta \in \mathcal{X}$  entspricht eingebettet  $(\Xi|\eta) \cdot \#$ , einem Zählmaß mit Dichte auf  $\mathbf{T}$ .

**BEISPIEL 2** Sei  $h : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  ein  $\mu$ -Testraum. Ein wie in Beispiel 2.1.2 durch eine Funktion  $f \in \mathbb{K}^{\mathbf{T}}$  gegebener 'deterministischer' Prozess  $\Xi = f$  ist genau dann bzgl.  $\mu$  in  $F^\dagger$  einbettbar, wenn  $f$  eine  $\mu$ -Funktion (in  $F^\dagger$ ) ist.

**BEISPIEL 3** Gegeben der Testraum  $h : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ . Die Brownsche Bewegung  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  (vgl. Beispiel 3 des vorigen Abschnitts) liefert für eine Zufallsvariable  $\eta$  eine stetige  $\lambda_{\mathbb{R}_+^*}$ -Funktion  $(B_\diamond|\eta)$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$ . Mit dieser Dichte bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}_+^*}$  lassen sich unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  integrieren, wie schon in der Einleitung dargelegt. Die Stetigkeit und der kompakte Träger von  $\varphi \cdot B_\diamond$  (als vektorwertige Abbildung) sorgt auch für die verlangte Pettis-Integrierbarkeit im vektorwertigen Sinn. Somit ist  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$  bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}_+^*}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  einbettbar<sup>13</sup>.

Man beachte jedoch, dass  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$  nicht bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}_+^*}$  in

$$(\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+^*) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*))^\dagger = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) + \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$$

einbettbar ist, obwohl alle eingebetteten  $B_t = \min(\diamond, t)$  Elemente von  $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$  sind. In der Tat ist durch  $\eta := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2} \cdot B_k$  ein Element im erzeugten Teilraum von  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  wohldefiniert, welches für alle großen  $s \in \mathbb{R}_+^*$  der Ungleichung

$$(B_s|\eta) \geq \sum_{0 < k \leq \lfloor s \rfloor} \frac{1}{k} \geq \int_1^s \frac{1}{x} dx = \ln(s)$$

genügt. Darüber zeigt sich, dass mit

$$\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+^*) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \ni \varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ : t \longmapsto 1_{[e, \infty[}(t) \cdot \frac{1}{(\ln t)^2 \cdot t}$$

nicht mal die Integrierbarkeitsbedingung  $\varphi \cdot (B_\diamond|\eta) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$  aus dem Hauptsatz (ii) erfüllt ist.

**BEISPIEL 4** Man wähle den Testraum  $\mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]})$  gemäß Beispiel 1.6.1. Die im Beispiel 2.1.4 eingeführte Brownsche Brücke  $\Xi_t = B_t - t \cdot B_1$ ,  $t \in [0, 1]$ , ist in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]})$  bzgl.  $\lambda_{[0,1]}$  einbettbar<sup>14</sup>. In der Tat ist für jedes  $\eta \in \overline{\text{lin}}(\Xi_{[0,1]}) \subset \overline{\text{lin}}(B_{[0,1]})$  die Funktion  $(\Xi_\diamond|\eta)$  stetig, also in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]})$ . Für alle  $\varphi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]})$  ist  $\varphi \cdot \Xi_\diamond$  Pettis-integrierbar, da

$$\int |f \cdot \varphi \cdot (\Xi_\diamond|\eta)| d\lambda_{[0,1]} \leq \|f\|_\infty \cdot \|\varphi\|_2 \cdot 1 \cdot \|\eta\|$$

für alle  $\eta \in \overline{\text{lin}}(\Xi_{[0,1]})$  und  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$  gilt. Die Einbettbarkeit folgt mit dem Korollar.

<sup>13</sup> Siehe auch die Ausführungen zur Einbettbarkeit der Brownschen Bewegung in der Einleitung.

<sup>14</sup> Eine passende allgemeine Theorie für Einbettbarkeit in  $\mathcal{M}(\mathbf{T})$  wird im dritten Kapitel aufgebaut.

**BEISPIEL 5** Sei  $X$  der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess auf  $\mathbb{R}_+$  aus Beispiel 2.1.5 und  $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+})$  der Testraum aus Beispiel 1.6.2. Der Prozess lässt sich in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$  bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}_+}$  einbetten. Für jedes  $\eta$  und jede Funktion  $f \in \mathbf{L}^\infty(\lambda_{\mathbb{R}_+})$  ist die Funktion  $(\Xi|\eta)$  nämlich stetig und es gilt  $f \cdot (\Xi|\eta) \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\lambda_{\mathbb{R}_+})$ , also  $f \cdot (\Xi|\eta) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ . Weiterhin gilt für  $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$

$$\left| \int \bar{\varphi}(t) \cdot f(t) \cdot (\Xi_t|\eta) dt \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\varphi\|_1 \cdot \|\Xi_0\| \cdot \|\eta\| ,$$

was die separate Stetigkeit der Sesquilinearform  $[\cdot|\cdot]$  aus dem Hauptsatz beweist.

**BEISPIEL 6** Sei  $h : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  ein  $\mu$ -Testraum,  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge in  $\mathbf{T}$  und

$$\Xi = \xi \cdot 1_{\mathbf{T} \setminus N} + \xi^\perp \cdot 1_N : t \longmapsto \Xi_t := \begin{cases} \xi & t \in \mathbf{T} \setminus N \\ \xi^\perp & t \in N \end{cases}$$

der Prozess aus Beispiel 2.1.6 mit zueinander orthogonalen Vektoren  $\xi, \xi^\perp \neq 0$  eines Hilbert-Raums  $\mathcal{X}$ .  $\Xi$  ist in  $F^\dagger$  bzgl.  $\mu$  genau dann einbettbar, wenn  $h(F) \subset \mathbf{L}^1(\mu)$  und die Stetigkeit von  $\varphi \longmapsto \int h\varphi d\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$  gegeben sind. Ist  $F$  tonneliert, so ist die Einbettbarkeit von  $\Xi$  äquivalent zu  $h(F) \subset \mathbf{L}^1(\mu)$ . Der erste Teil entspricht dem Korollar im konstanten Fall, der zweite Teil folgt mit der Bemerkung 1.6.3.

**BEMERKUNG 4** Im Prinzip vollzieht die vorliegende Arbeit den Übergang von einem Prozess zu Maßen mit Dichten:

$$\Xi_t \longrightarrow (\Xi_\diamond|\Xi_t) \longrightarrow (\Xi_\diamond|\Xi_t) \cdot \mu .$$

Der erste Schritt ist dabei noch punktweise und untopologisch zu verstehen und wurde schon von Parzen (1967, [37]) in seine Theorie eingebaut. Der zweite, topologische Schritt erfordert die Untersuchung von Kriterien gemäß dem Hauptsatz.

## 2.3 Der hilbertsche Unterraum eines Prozesses

In diesem Abschnitt sei  $\Xi$  wieder ein Prozess in  $\mathcal{X}$ .

Man nehme an,  $\Xi$  ist mittels  $|\diamond|$  bzgl.  $\mu$  in  $F^\dagger$  einbettbar.

Insbesondere gelten die Notationen des vorigen Abschnitts.

Ähnlich wie man im vorigen Abschnitt einzelne Elemente  $\eta \in \mathcal{X}$  als Semilinearformen modelliert hat, kann man nun den gesamten Raum in  $F^\dagger$  einbetten. In diesem Abschnitt untersuchen wir diesen eingebetteten Raum und zeigen seine reproduzierende Eigenschaft.

### HAUPTSATZ

(i) Für jedes  $\varphi \in F$  ist  $\int (\Xi_\diamond | \Xi_t) \cdot h\varphi(t) d\mu(t)$  eine  $\mu$ -Funktion.

(ii) Das Bild von  $\mathcal{X}$  unter der Abbildung  $|\diamond|$  definiert den hilbertschen Unterraum  $|\mathcal{X}| \hookrightarrow F^\dagger$  mit Kern

$$|\diamond| \circ |\diamond|^\dagger : F \longrightarrow |\mathcal{X}| \hookrightarrow F^\dagger : \varphi \longmapsto \int (\Xi_\diamond | \Xi_t) \cdot h\varphi(t) d\mu(t) .$$

**Beweis** Zunächst ist  $|\diamond|$  nach Voraussetzung stetig, so dass  $|\mathcal{X}| \hookrightarrow F^\dagger$  wohldefiniert ist. Ebenfalls aufgrund der Einbettbarkeit ist

$$\left( \Xi_\diamond \left| \left( \int h\varphi(t) \cdot \Xi_t d\mu(t) \right) \right. \right) = \int (\Xi_\diamond | \Xi_t) \cdot h\varphi(t) d\mu(t)$$

für jedes  $\varphi \in F$  eine  $\mu$ -Funktion. Diese Formel beweist ebenfalls die Aussage über den Kern.

**DEFINITION** Das Bild  $\mathcal{G} := |\mathcal{X}| \hookrightarrow F^\dagger$  des Hilbert-Raums  $\mathcal{X}$  unter  $|\diamond|$  nennen wir den zu  $\Xi$  gehörigen (eingebetteten) hilbertschen Unterraum (in  $F^\dagger$ ) - oder kürzer den zu  $\Xi$  gehörigen Prozessraum in  $F^\dagger$ . Dementsprechend heißt  $g = |\diamond| \circ |\diamond|^\dagger$  der Prozesskern. Den Bildprozess  $|\Xi| = (|\Xi_t|)_{t \in \mathbf{T}} \subset \mathcal{G}$  nennen wir (in  $F^\dagger$ ) eingebetteten Prozess.

**BEMERKUNG 1** Der Prozessraum  $\mathcal{G}$  ist ein Hilbert-Raum von (Klassen von)  $\mu$ -Funktionen auf  $\mathbf{T}$ . Das Skalarprodukt ist durch Fortsetzung von

$$(g\psi, g\varphi) \longmapsto (g\psi | g\varphi) := \langle \psi | \varphi \rangle = \int \overline{h\psi}(s) \int (\Xi_s | \Xi_t) \cdot h\varphi(t) d\mu(t) d\mu(s)$$

auf die Vervollständigung von  $g(F)$  gegeben (vgl. Satz 1.1.1).

Man beachte, dass  $\mathcal{G}$  im Allgemeinen nicht besser zu beschreiben ist. Selbst innerhalb einer relativ konkreten Klasse von Kernen ist eine einheitliche Charakterisierung

des eingebetteten Prozessraums nicht möglich, auch nicht im Fall<sup>15</sup> eines diskreten Indexraums  $\mathbf{T}$ . Man kann die durch die vorliegende Arbeit zur Verfügung gestellten Zerlegungsmethoden auch als Abhilfe für dieses Problem verstehen.

**KOROLLAR (Reproduzierende Eigenschaft)**

Für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  gilt

$$(|\Xi_\diamond| |\eta|)_{|\mathcal{X}|} = (\Xi_\diamond | \eta) \quad \text{lokal } \mu\text{-fast überall .}$$

Mit anderen Worten gilt für alle  $\gamma \in \mathcal{G}$

$$(|\Xi_\diamond| |\gamma|)_{|\mathcal{X}|} = \gamma \quad \text{lokal } \mu\text{-fast überall ,}$$

so dass stets ein Repräsentant existiert, der auf  $\{t \in \mathbf{T} \mid \Xi_t = 0\}$  verschwindet.

**Beweis** Sei  $\hat{\eta}$  der eindeutige Repräsentant von  $|\eta|$  in  $(\text{Ker } |\diamond|)^\perp$ . Dann gilt (siehe Hauptsatz 1.1.1 für die erste Gleichung)

$$(|\Xi_\diamond| |\eta|)_{|\mathcal{X}|} \cdot \mu = (\Xi_\diamond | \hat{\eta}) \cdot \mu = |\hat{\eta}| = |\eta| = (\Xi_\diamond | \eta) \cdot \mu \quad \text{in } F^\dagger ,$$

und die Behauptung folgt aufgrund der Trennungseigenschaft. Für die speziellere Aussage genügt es, den ersten Teil auf die  $\mu$ -Funktion  $\gamma$  (sagen wir  $\gamma = |\eta|$ ) anzuwenden. Der Rest ist klar.

**BEMERKUNG 2** Mit  $\Xi \subset \mathcal{X}$  ist auch der eingebettete Prozess  $|\Xi| \subset \mathcal{G}$  in  $F^\dagger$  einbettbar und man erhält wieder  $\mathcal{G}$  als eingebetteten Prozessraum. Prinzipiell werden wir uns im Folgenden auf den eingebetteten Prozess konzentrieren und z. B. die Einbettungsklammern weglassen. So ist  $h\varphi \cdot \Xi$  in  $\mathcal{G}$  Pettis-Integrierbar und wir schreiben

$$g : F \longrightarrow \mathcal{G} : \varphi \longmapsto \int h\varphi \cdot \Xi d\mu ,$$

sowie

$$g^\dagger : \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger : \gamma \longmapsto (\Xi | \gamma)_{\mathcal{G}} \cdot \mu = \gamma \cdot \mu .$$

Obwohl die wesentlichen Eigenschaften des Prozesses erhalten bleiben, könnte der Übergang zum eingebetteten Prozess mit Informationsverlust verbunden sein, was wir noch etwas beleuchten wollen.

$\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$  sei der von allen  $\Xi_t$ ,  $t \in \mathbf{T}$ , erzeugte abgeschlossene Unterraum in  $\mathcal{X}$ .

**LEMMA** Ein Vektor  $\eta \in \mathcal{X}$  ist genau dann im Kern von  $|\diamond|$ , wenn er für lokal  $\mu$ -fast alle  $t$  orthogonal zu  $\Xi_t$  steht. Insbesondere gilt  $(\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}))^\perp \subset \text{Ker } |\diamond|$ .

**Beweis** Genau dann gilt  $\eta \in \text{Ker } |\diamond|$ , wenn  $(\Xi | \eta) = 0$  lokal  $\mu$ -fast überall gilt.

**BEMERKUNG 3** Der folgende Satz gibt an, wann eine injektive Einbettung (von  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$  in  $F^\dagger$ ) vorliegt. In diesem Fall lassen sich Prozess und eingebetteter Prozess vollständig identifizieren:  $\Xi_t = (\Xi | \Xi_t) = |\Xi_t|$  für alle  $t \in \mathbf{T}$ .

<sup>15</sup> Die späteren Beispiele von endlichen Prozessen stellen also eher Sonderfälle dar.

**SATZ** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) Die Abbildung  $|\diamond|$  hat dichtes Bild in  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$ .
- (ii) Die Einbettung  $|\diamond|$  ist injektiv auf  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$ .
- (iii)  $(\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}))^{\perp} = \text{Ker } |\diamond|$ .
- (iv)  $|\diamond| : \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}) \longrightarrow |\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})|$  ist ein isometrischer Isomorphismus.
- (v) Die Familie  $(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  ist  $\mu$ -total (in  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$ ), d. h. für jede lokale  $\mu$ -Nullmenge  $N$  ist  $(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T} \setminus N}$  total in  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$ .

**Beweis** Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ist wegen  $|\diamond| = |\diamond|^{\dagger}$  klar.

Für die Implikation (ii) $\implies$ (iii) sei  $\text{Ker } |\diamond| \ni \eta = \xi + \xi^{\perp}$  gemäß der orthogonalen Zerlegung  $\mathcal{X} = \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}) \boxplus (\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}))^{\perp}$ . Mit (ii) folgt  $\{0\} = \text{Ker } |\diamond| \cap \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}) \ni \xi$  nach dem Lemma, also  $\eta = \xi^{\perp} \in (\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}))^{\perp}$ . Die Umkehrung (iii) $\implies$ (ii) ist klar.

Die Äquivalenz der Aussagen (iii) und (iv) folgt aus Portenier (2002, [38], Bemerkung 6.4).

Nach dem Lemma ist für  $\eta \in \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$  die Bedingung  $(\Xi|\eta) = 0 \in F^{\dagger}$  äquivalent zu  $(\Xi_t|\eta) = 0$  für lokal  $\mu$ -fast alle  $t \in \mathbf{T}$ . Daraus folgt die Äquivalenz der letzten beiden Aussagen.

**BEMERKUNG 4** Sei  $(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  ein einbettbarer Prozess, wobei das Radon-Integral  $\mu$  vollen Träger  $\text{supp}(\mu) = \mathbf{T}$  habe. Die Menge  $\mathcal{C}$  aller  $\eta \in \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$ , für die  $(\Xi_{\circ}|\eta)$  stetig ist, bildet einen Untervektorraum und die Einschränkung  $|\diamond|_{|\mathcal{C}}$  ist auf  $\mathcal{C}$  injektiv.

Aufgrund der Stetigkeit gilt für ein  $\eta \in \mathcal{C}$  genau dann  $(\Xi_t|\eta) = 0$  für lokal  $\mu$ -fast alle  $t \in \mathbf{T}$ , wenn  $(\Xi_t|\eta) = 0$  für alle  $t \in \mathbf{T}$  gilt. Dann ist aber  $\eta = 0$ , denn  $(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  ist total in  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$ .

**BEISPIEL 1** Bei diskretem  $\mathbf{T}$  mit Zählmaß  $\#$  und Testraum  $\mathbb{K}^{(\mathbf{T})}$  (vgl. Beispiel 1 in den vorigen Abschnitten) ist nach obiger Bemerkung 4 die Einbettung jedes Prozesses injektiv und

$$\varphi \longmapsto \sum_{t \in \mathbf{T}} c(\diamond, t) \cdot \varphi(t) : \mathbb{K}^{(\mathbf{T})} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbf{T}}$$

ist der Kern des eingebetteten Prozessraums zu  $\Xi$ . Letzterer ist gerade der reproduzierende Kern-Hilbert-Raum  $\mathcal{G} = \overline{\text{lin}}^{\mathcal{G}} \{c(\diamond, t) \mid t \in \mathbf{T}\}$  (i.S.v. Aronszajn) und die reproduzierende Eigenschaft gilt in jedem Punkt  $t \in \mathbf{T}$ .

**BEISPIEL 2** Sei  $h : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  ein  $\mu$ -Testraum und  $f \in \mathbb{K}^{\mathbf{T}}$  eine  $\mu$ -Funktion in  $F^{\dagger}$ . Der eingebettete Prozessraum des gemäß Beispiel 2.2.2 'deterministischen' Prozesses  $\Xi = f$  hat als Kern

$$g^{\dagger}g : F \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow F^{\dagger} : \varphi \longmapsto \left( \int h\varphi(t) \cdot f(t) \, d\mu(t) \right) \cdot \bar{f} \cdot \mu$$

und ist höchstens eindimensional. Genauer ist  $\mathcal{G} = \mathbb{K} \cdot (\bar{f} \cdot \mu)$  genau dann der Nullraum, wenn  $f = 0$  als  $\mu$ -Funktion gilt, d. h. wenn  $\{f \neq 0\}$  eine lokale  $\mu$ -Nullmenge ist. Die Injektivität der Einbettung  $\overline{\text{lin}}^{\mathbb{K}} \{f(\mathbf{T})\} \longrightarrow F^\dagger : \eta \longmapsto \eta \cdot \bar{f} \cdot \mu$  ist äquivalent zu:  $\{f \neq 0\}$  ist keine von  $\emptyset$  verschiedene lokale  $\mu$ -Nullmenge.

**BEISPIEL 3** Die Brownsche Bewegung  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  gemäß Beispiel 2.2.3 ist wegen ihrer Stetigkeit nach Bemerkung 4 injektiv bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}_+^*}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  einbettbar und man erhält

$$g^\dagger g : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' : \varphi \longmapsto \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} \min(\diamond, t) \cdot \varphi(t) dt \right) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+^*}$$

als Kern des eingebetteten hilbertschen Unterraums. Zur genaueren Charakterisierung des Raums  $\mathcal{G}$  sind weiterführende Darstellungen nötig (s. Einleitung der vorliegenden Arbeit), aus denen sich

$$\mathcal{G} = \left\{ \int_0^\diamond \xi \in \mathcal{AC}(\mathbb{R}_+^*) \mid \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \right\}$$

ergibt.

**BEISPIEL 4** Wiederum aufgrund von Stetigkeit ist die Brownsche Brücke  $\Xi_t = B_t - t \cdot B_1$ ,  $t \in [0, 1]$ , injektiv in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]})$  bzgl.  $\lambda_{[0,1]}$  einbettbar (vgl. Beispiel 4 der vorigen Abschnitte). Der Kern des eingebetteten Prozessraums lautet

$$g^\dagger g : \mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]}) \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]}) : \varphi \longmapsto \left( \int_0^1 (\min(\diamond, t) - \diamond \cdot t) \cdot \varphi(t) dt \right) \cdot \lambda_{[0,1]} .$$

**BEISPIEL 5** Sei  $X$  der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess auf  $\mathbb{R}_+$  aus Beispiel 2.1.5, der aufgrund des üblichen Stetigkeitsarguments injektiv in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$  bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}_+}$  einbettbar ist (vgl. Beispiel 2.2.5). Der Kern des eingebetteten Prozessraums ist

$$g^\dagger g : \mathcal{K}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}_+) : \varphi \longmapsto \beta \cdot \left( \int_0^\infty e^{-\alpha|\text{id}-t|} \cdot \varphi(t) dt \right) \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} ,$$

wenn dabei  $\alpha, \beta > 0$  die zu  $X$  gehörigen Parameter bezeichnen.

**BEISPIEL 6** Sei  $h : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  ein tonnelierter  $\mu$ -Testraum mit  $h(F) \subset \mathbf{L}^1(\mu)$  und  $N$  sei eine  $\mu$ -Nullmenge. Der zu dem (fast überall) konstanten Prozess  $\Xi = \xi \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{T} \setminus N} + \xi^\perp \cdot \mathbf{1}_N$  des Beispiels 2.2.6 gehörige eingebettete Prozessraum hat als Kern

$$F \longrightarrow |\mathcal{X}| \hookrightarrow F^\dagger : \varphi \longmapsto \left( \int h\varphi d(\|\xi\| \cdot \mu) \right) \cdot \|\xi\| \cdot \mu = \left( \int h\varphi d\mu \right) \cdot \|\xi\|^2 \cdot \mu ,$$

der Raum selbst ist also  $\mathbb{K} \cdot (\|\xi\| \cdot \mu) \hookrightarrow F^\dagger$ .

Allerdings ist die Einbettung von  $\Xi$  nicht immer injektiv. In der Tat ist  $\Xi$  genau dann  $\mu$ -total, wenn  $N$  die leere Menge ist! Durch Herausnehmen der Nullmenge  $N$  lässt sich nämlich nur  $\mathbb{K} \cdot \xi \sqsubset \mathcal{X}$  statt  $\mathbb{K} \cdot \xi \boxplus \mathbb{K} \cdot \xi^\perp$  erzeugen.



## 2.4 Abschließbarkeit eines Prozesskerns

In diesem Abschnitt sei  $\Xi$  ein bzgl.  $\mu$  in  $F^\dagger$  eingebetteter Prozess, also im eingebetteten Prozessraum  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  mit Kern  $g$  enthalten.

Es gelten die Notationen der vorigen Abschnitte.

### SATZ

(i) Die kanonischen Abbildungen

$$\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \delta \longmapsto \delta \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} : \delta \longmapsto \delta$$

sind wohldefiniert, stetig und linear. Ihre Adjungierten sind

$$|\diamond\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger : \xi \longmapsto |\xi\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)}$$

bzw.

$$|\diamond\rangle_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger : \gamma \longmapsto |\gamma\rangle_{\mathcal{G}}$$

und erfüllen

$$|\diamond\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} \circ h = |\diamond\rangle_{\mathcal{G}} \circ g .$$

(ii) Die Familie  $(\mathbb{K} \cdot |\Xi_t\rangle_{\mathcal{G}})_{t \in \mathbf{T}}$  von hilbertschen Unterräumen ist  $\mu$ -integrierbar in  $(\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger$  und das Integral stimmt mit dem Bild von  $\mathbf{L}^2(\mu)$  unter  $|\diamond\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)}$  überein:

$$|\mathbf{L}^2(\mu)\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int \mathbb{K} \cdot |\Xi_t\rangle_{\mathcal{G}} d\mu(t) \quad \text{in } (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger .$$

Der zugehörige Kern lautet

$$\int \left| |\Xi_\diamond\rangle_{\mathcal{G}} \right\rangle \left\langle |\Xi_\diamond\rangle_{\mathcal{G}} \right| d\mu = |\diamond\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}} |_{\mathbf{L}^2(\mu)} : \delta \longmapsto |\delta\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} .$$

(iii) Für alle  $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$  ist  $\xi \cdot |\Xi\rangle_{\mathcal{G}} : \mathbf{T} \longrightarrow (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger$  (i.S.v. Pettis)  $\mu$ -integrierbar in  $(\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger$  mit

$$\int \xi \cdot |\Xi\rangle_{\mathcal{G}} d\mu = |\xi\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} \quad \text{in } (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger .$$

**Beweis** Der erste Teil ist klar, sofern man mittels reproduzierender Eigenschaft

$$\langle \delta | |g\varphi\rangle_{\mathcal{G}} \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}} = (\delta | g\varphi\rangle_{\mathcal{G}} = \int h\varphi \cdot (\delta | \Xi_\diamond\rangle_{\mathcal{G}}) d\mu = \int \bar{\delta} \cdot h\varphi d\mu = \langle \delta | |h\varphi\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}}$$

für alle  $\varphi \in F$  und  $\delta \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}$  bemerkt.

Für (ii) genügt es,

$$\langle \delta | |\Xi_\diamond\rangle_{\mathcal{G}} \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}} = (\delta | \Xi_\diamond\rangle_{\mathcal{G}}) = \bar{\delta} \in \mathbf{L}^2(\mu)$$

und

$$\| |\Xi_\circ\rangle_{\mathcal{G}} \langle |\Xi_\circ\rangle_{\mathcal{G}} | \delta \|_2^2 = \int^* \| \langle |\Xi_t\rangle | \delta \rangle \cdot |\Xi_t\rangle \|_{\mathbb{K} \cdot |\Xi_t\rangle}^2 d\mu(t) = \int |\delta|^2 d\mu = \langle \delta | \delta \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} \Big|_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}}$$

für  $\delta \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}$  nachzurechnen.

Zu (iii) beachte man, dass für  $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ ,  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$  und  $\delta \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}$

$$\langle \delta | f \cdot \xi \cdot |\Xi_\circ\rangle_{\mathcal{G}} \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}} = f \cdot \xi \cdot (\delta | \Xi_\circ\rangle_{\mathcal{G}}) = f \cdot \xi \cdot \bar{\delta} \in \mathbf{L}^1(\mu)$$

mit

$$\left| \langle \delta | \int f \cdot \xi \cdot |\Xi_\circ\rangle_{\mathcal{G}} d\mu \rangle \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \int |\xi(t) \cdot \bar{\delta}(t)| d\mu(t) \leq \|f\|_\infty \cdot \|\xi\|_{2,\mu} \cdot \|\delta\|_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}}$$

sowie

$$\langle \delta | \int \xi \cdot |\Xi_\circ\rangle_{\mathcal{G}} d\mu \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}} = \int \xi(t) \cdot \bar{\delta}(t) d\mu(t) = (\delta | \xi)_{\mathbf{L}^2(\mu)}$$

gilt.

**BEMERKUNG 1** Das Bild von  $\mathcal{G}$  unter  $|\diamond\rangle_{\mathcal{G}}$  definiert ebenfalls einen hilbertschen Unterraum  $|\mathcal{G}\rangle_{\mathcal{G}}$  in  $(\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger$ , dessen Kern durch

$$|\diamond\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}} : \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G} \longrightarrow (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger : \delta \longmapsto |\delta\rangle_{\mathcal{G}}$$

gegeben ist.

**HAUPTSATZ** Durch

$$\Gamma : h(F) \longrightarrow \mathcal{G} : h\varphi \longmapsto \int h\varphi \cdot \Xi d\mu$$

wird ein (dicht definierter) Operator in  $\mathbf{L}^2(\mu)$  wohldefiniert.  $\Gamma^*$  ist die kanonische Injektion von  $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}$  nach  $\mathbf{L}^2(\mu)$  und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $g$  ist bzgl.  $h$  abschließbar (mit Abschluss  $G$ ).
- (ii)  $\Gamma$  ist abschließbar.
- (iii)  $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}$  ist dicht in  $\mathcal{G}$ .

In diesem Fall ist

$$G^{*\dagger} = |\diamond\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger : \xi \longmapsto |\xi\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int \xi \cdot \Xi d\mu$$

und die Abschlüsse sind durch

$$G = G^{**} = \Gamma^{**} = \bar{\Gamma} : D(G) \longrightarrow \mathcal{G} : \xi \longmapsto |\xi\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int \xi \cdot \Xi d\mu$$

auf

$$D(G) = \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid G^{*\dagger}\xi = |\xi\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int \xi \cdot \Xi d\mu \stackrel{!}{\in} \mathcal{G} \right\}$$

gegeben. Insbesondere gilt

$$\text{Ker } G = \text{Ker } G^{*\dagger} = (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^{\perp \mathbf{L}^2(\mu)} \quad \text{und} \quad \mathbf{L}^\infty(\mu) \cdot h(F) \subset D(G) .$$

**Beweis** Die Wohldefiniertheit ist klar, da  $h\varphi \cdot \Xi$  in  $\mathcal{G}$  Pettis-integrierbar ist. Für das Weitere bestimmen wir die Adjungierte von  $\Gamma$ .

$$D(\Gamma^*) = \{ \gamma \in \mathcal{G} \mid \exists \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) : (\Gamma h\varphi | \gamma)_{\mathcal{G}} = (h\varphi | \xi) \quad \forall \varphi \in F \}$$

ist ihr Definitionsbereich. Das in der Charakterisierung auftauchende Element  $\Gamma^*\gamma := \xi$  ist eindeutig durch die Gleichung

$$\langle \varphi | (\Xi | \gamma) \cdot \mu \rangle_F = \int \overline{h\varphi} \cdot (\Xi | \gamma) \, d\mu = (\Gamma h\varphi | \gamma)_{\mathcal{G}} = (h\varphi | \xi) = \langle \varphi | \xi \rangle_F \quad \forall \varphi \in F$$

bestimmt. Aufgrund der Trennungseigenschaft sowie der reproduzierenden Eigenschaft ist dies nur unter  $\gamma = \xi$  lokal  $\mu$ -fast überall möglich. Insgesamt findet man

$$D(\Gamma^*) = \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G} \quad \text{und} \quad \Gamma^*\gamma = \gamma \quad \text{für alle } \gamma \in D(\Gamma^*) .$$

Zusammen mit Hauptsatz 1.3 und Korollar 1.3.(ii) folgt der gesamte erste Teil.

Die Folgerungen ergeben sich nun unmittelbar aus dem Satz, wobei wir aufgrund der Injektivität von  $|\diamond\rangle_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow (\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger : \gamma \longmapsto |\gamma\rangle_{\mathcal{G}}$  auf die Klammern verzichten, die Räume also identifizieren. Man beachte aber, dass alle angegebenen Bild-elemente in erster Linie im Oberraum  $(\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G})^\dagger$  zu verstehen sind! Wir beweisen noch die abschließenden Mengenrelationen. Genau dann ist  $\xi \in \text{Ker } G^{*\dagger}$ , wenn  $0 = \left\langle \delta \left| \left| \xi \right|_{\mathbf{L}^2(\mu)} \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}} = (\delta | \xi)_{\mathbf{L}^2(\mu)}$  für alle  $\delta \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}$  gilt. Korollar 2.2 (inkl. Bemerkung 2.3.2) zeigt, dass für  $\varphi \in F$  und  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$  die (Pettis-)Integrierbarkeit von  $f \cdot h\varphi \cdot \Xi$  in  $\mathcal{G}$  mit  $G(f \cdot h\varphi) = \int f \cdot h\varphi \cdot \Xi \, d\mu$  gilt.

**DEFINITION** Ein einbettbarer Prozess  $\Xi$  heißt *abschließbar*, falls der zugehörige Prozesskern  $g : F \longrightarrow \mathcal{G}$  bzgl.  $h$  abschließbar (mit Abschluss  $G$ ) ist.

In diesem Fall wird der positive selbstadjungierte Operator  $G^*G = \Gamma^*\bar{\Gamma}$  in  $\mathbf{L}^2(\mu)$  als *Kovarianzoperator (von  $\Xi$ )* bezeichnet. Eine Funktion  $\xi \in \mathcal{D}(G)$  nennen wir ein  $\Xi$ -Koeffizient und  $G\xi = \int \xi \cdot \Xi \, d\mu$  heißt *Linearkombination* von  $\Xi$  mit Koeffizient  $\xi$ .

**BEMERKUNG 2** Das Kriterium  $\Xi_t \in \mathbf{L}^2(\mu)$  für alle  $t \in \mathbf{T}$  ist hinreichend für die Abschließbarkeit des Prozesses, ohne gleichbedeutend mit den Bedingungen  $\mathcal{G} \subset \mathbf{L}^2(\mu)$  oder  $g(F) \subset \mathbf{L}^2(\mu)$  zu sein (vgl. Bemerkung 1.3.2).

**BEISPIEL 1** Bei diskretem  $\mathbf{T}$  mit Zählmaß  $\#$  und Testraum  $\mathbb{K}^{(\mathbf{T})}$  (vgl. Beispiel 2.3.1 und dessen Vorgänger) sind nach obiger Bemerkung 2 das Kriterium  $c(\diamond, t) \in \ell^2(\mathbf{T})$  oder (hier äquivalent dazu)  $g(\mathbb{K}^{(\mathbf{T})}) \subset \ell^2(\mathbf{T})$  hinreichend für die Abschließbarkeit. Die Kenntnis über  $\mathcal{G}$  ist selbst in diesem Rahmen zu gering, um das notwendige Kriterium der Dichtheit von  $\ell^2(\mathbf{T}) \cap \mathcal{G}$  in  $\mathcal{G}$  (oder der Dichtheit von  $\ell^2(\mathbf{T})$  in  $\ell^2(\mathbf{T}) + \mathcal{G}$ ) zu konkretisieren.

**BEISPIEL 2** Sei  $h : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  ein  $\mu$ -Testraum und  $f \in \mathbb{K}^{\mathbf{T}}$  eine  $\mu$ -Funktion in  $F^{\dagger}$ . Der eingebettete 'deterministische' Prozess  $\Xi = f$  (vgl. Beispiel 2.3.2) ist genau dann abschließbar bzgl.  $h$ , wenn  $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$  gilt. In der Tat ist wegen  $\mathcal{G} = \mathbb{K} \cdot (\overline{f} \cdot \mu)$  entweder  $\mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu \cap \mathcal{G} = \{0\}$  oder  $\mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu \cap \mathcal{G} = \mathcal{G}$ , je nachdem ob  $\overline{f} \notin \mathbf{L}^2(\mu)$  oder  $\overline{f} \in \mathbf{L}^2(\mu)$  gilt.

**BEISPIEL 3** Die eingebettete Brownsche Bewegung  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$  aus Beispiel 2.3.3 ist abschließbar, wie in der Einleitung zu dieser Arbeit über Hauptsatz 1.4 gezeigt wurde.

**BEISPIEL 4** Die eingebettete Brownsche Brücke bzw. der zugehörige Kern  $g$  aus Beispiel 2.3.4 ist abschließbar bzgl.  $h = \text{Id} : \mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]})$  mit stetigem Abschluss  $G$ , wie man Korollar 1.3.(ii).(b) und Bemerkung 2 entnimmt.

**BEISPIEL 5** Um Abschließbarkeit eines gemäß Beispiel 2.3.5 eingebetteten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses  $X$  zu beweisen, genügt es  $g(\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)) \subset \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+}) \cap \mathcal{G}$  zu zeigen und auf Hauptsatz 1.3.(i) zu verweisen (s. Bemerkung 2). In der Tat ist für jedes  $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$  die Funktion  $g\varphi$  stetig und erfüllt

$$g\varphi(s) = \beta \cdot \left( \int_0^{S_\varphi} e^{\alpha t} \cdot \varphi(t) dt \right) \cdot e^{-\alpha s} \quad \text{für alle } s > S_\varphi := \sup(\text{supp } \varphi) .$$

Dies zeigt  $g\varphi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+})$ , da für den zu  $X$  gehörigen Parameter  $\alpha > 0$  gefordert ist.

**BEISPIEL 6** Sei  $h : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  ein tonnelierter  $\mu$ -Testraum,  $h(F) \subset \mathbf{L}^1(\mu)$  und  $\Xi$  der fast überall konstante Prozess des Beispiels 2.3.5 bzw. 2.2.5. Der zugehörige Operator (in  $\mathbf{L}^2(\mu)$  mit Werten in  $|\mathcal{X}|$ ) ist

$$\Gamma : h(F) \longrightarrow \mathbb{K} \cdot (\|\xi\| \cdot \mu) : \varphi \longmapsto \left( \|\xi\|_{\mathcal{X}} \cdot \int h\varphi d\mu \right) \cdot (\|\xi\| \cdot \mu) .$$

Dieser Operator  $\Gamma$  ist genau dann abschließbar, wenn  $\mu$  beschränkt ist.

In der Tat ist die Abschließbarkeit äquivalent zur Dichtheit von  $(\mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu) \cap (\mathbb{K} \cdot (\|\xi\| \cdot \mu))$  in  $(\mathbb{K} \cdot (\|\xi\| \cdot \mu))$ , was genau dann gilt, wenn der Schnitt nicht leer ist. Dies ist gleichbedeutend mit  $1 \in \mathbf{L}^2(\mu)$  bzw. mit der Beschränktheit von  $\mu$ . Die hinreichenden Kriterien der obigen Bemerkung 2 hätte man ebenfalls verwenden können.

**BEMERKUNG 3** Im Allgemeinen kann man für  $\xi \in D(G)$  und  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$  nicht  $f \cdot \xi \in D(G)$  folgern, wie das Beispiel der Brownschen Bewegung zeigt. In der Tat ist dort

$$D(G) = \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\lambda) \mid \xi \text{ uneigentlich integrierbar mit } \int_{\diamond}^{\infty-} \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \right\} ,$$

so dass z. B.  $\text{sinc} = \frac{\sin}{\text{id}} \in D(G)$ , aber  $\frac{|\sin|}{\text{id}} \in (\mathbf{L}^\infty(\mu) \cdot D(G)) \setminus D(G)$  gilt.

Dies ist gemäß der folgenden formalen Rechnung einzusehen:  $\int_{\diamond}^{\infty-} \frac{\sin}{\text{id}}$  ist auf  $\mathbb{R}_+$  stetig fortsetzbar und es ist

$$\int_{\diamond}^{\infty-} \frac{\sin}{\text{id}} = \left. \frac{-\cos}{\text{id}} \right|_{\diamond}^{\infty-} - \int_{\diamond}^{\infty-} \frac{\cos}{\text{id}^2} = \frac{\cos}{\text{id}} - \int_{\diamond}^{\infty} \frac{\cos}{\text{id}^2} \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^* .$$

Sowohl  $\frac{\cos}{\text{id}}$  als auch  $\int_{\diamond}^{\infty} \frac{\cos}{\text{id}^2}$  sind auf jedem in  $\mathbb{R}$  abgeschlossenen in  $\mathbb{R}_+^*$  enthaltenen Intervall quadratisch integrierbar, da  $\left| \frac{\cos}{\text{id}} \right|, \left| \int_{\diamond}^{\infty} \frac{\cos}{\text{id}^2} \right| \leq \frac{1}{\text{id}}$ .

**BEMERKUNG 4** Im Allgemeinen ist der eingebettete Prozessraum nicht durch

$$\mathcal{G} = \int \mathbb{K} \cdot \Xi_t d\mu(t) \hookrightarrow F^\dagger$$

zerlegbar. In der Tat ist bereits das Integral nicht wohldefiniert. Mit Hilfe von Kapitel 1 werden wir im nächsten Kapitel einige Zerlegungen von Prozessräumen herleiten.

**BEMERKUNG 5** Sei  $A$  eine  $\mu$ -messbare Menge. Ein Element von  $\overline{\text{lin}}(\Xi_t \mid t \in A)$  lässt sich meist nur als Limes von endlichen Linearkombinationen schreiben, wobei die Koeffizienten nur Träger in  $A$  haben dürfen. Übertragen auf allgemeinere Testräume könnte also  $1_A \cdot h(F)$  als entsprechende Menge von Koeffizienten dienen. Wir konkretisieren dies im folgenden Lemma.

**LEMMA** Sei  $A$  eine  $\mu$ -messbare Menge und  $G$  der Abschluss des Prozesskerns  $g$ .

(i)  $(G(1_A \cdot h(F)))^{\perp \mathcal{G}} = \{\gamma \in \mathcal{G} \mid 1_A \cdot (\gamma \mid \Xi_{\diamond}) = 0 \text{ lokal } \mu\text{-fast überall}\}$ .

(ii)  $\overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}} \subset \overline{\text{lin}}(\Xi_t \mid t \in A)$ .

(iii) Für alle  $\eta \in \mathcal{G}$  ist die orthogonale Projektion  $\gamma$  von  $\eta$  auf  $\overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}}$  eindeutig durch

$$\gamma \in \overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}} \quad \text{und} \quad \gamma = \eta \text{ lokal } \mu\text{-fast überall auf } A$$

festgelegt.

**Beweis** Für  $\gamma \in \mathcal{G}$  gilt genau dann  $\gamma \perp G(1_A \cdot h(F))$ , wenn

$$0 = (\gamma \mid G(1_A \cdot h\varphi))_{\mathcal{G}} = \left( \gamma \mid \int 1_A \cdot h\varphi \cdot \Xi d\mu \right)_{\mathcal{G}} = \int 1_A \cdot h\varphi \cdot (\gamma \mid \Xi_{\diamond})_{\mathcal{G}} d\mu$$

für alle  $\varphi \in F$  gilt. Die Bedingung ' $1_A \cdot (\gamma \mid \Xi_{\diamond}) = 0$  lokal  $\mu$ -fast überall' ist trivial hinreichend dafür. Die Notwendigkeit folgt aus der Trennungseigenschaft.

Die zweite Aussage folgt aus (i), denn jedes  $\gamma \in \overline{\text{lin}}(\Xi_t \mid t \in A)^{\perp}$  erfüllt  $1_A \cdot (\gamma \mid \Xi_{\diamond}) = 0$ , ist also aus  $(G(1_A \cdot h(F)))^{\perp \mathcal{G}}$ .

Schließlich sei  $\eta \in \mathcal{G}$ . Bezeichnet  $\gamma$  die orthogonale Projektion in  $\mathcal{G}$  von  $\eta$  auf  $\overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}}$ , so ist  $\gamma - \eta \in (G(1_A \cdot h(F)))^{\perp \mathcal{G}}$ . Dies entspricht der zweiten Eigenschaft mittels (i). Für die Eindeutigkeit seien  $\gamma_1, \gamma_2$  entsprechende Elemente zu  $\eta$ . Dann ist

$$\gamma_1 - \gamma_2 \in \overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}} \cap \left( \overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}} \right)^{\perp \mathcal{G}} = \{0\} ,$$

denn  $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$  lokal  $\mu$ -fast überall auf  $A$ .

**BEMERKUNG 6** Sei  $A$  eine  $\mu$ -messbare Teilmenge von  $\mathbf{T}$  und  $\mu_A$  das von  $\mu$  auf  $A$  induzierte Radon-Integral. Ist  $\Xi$  stetig und hat  $\mu_A$  ganz  $A$  als Träger, so erreicht man in (ii) sogar Gleichheit.

In der Tat gilt nämlich  $1_A \cdot (\Xi_\diamond | \gamma) = 0$  lokal  $\mu$ -fast überall für  $\gamma \in (G(1_A \cdot h(F)))^{\perp \mathcal{G}}$  und  $\mathcal{O} := \{ |(\Xi_\diamond | \gamma)| > 0 \}$  ist offen in  $\mathbf{T}$ , weil  $(\Xi_\diamond | \gamma)$  eine stetige Funktion ist. Damit ist die Menge  $A \cap \mathcal{O}$  eine offene Menge in  $A$ , lokal  $\mu$ -vernachlässigbar (denn  $A \cap \mathcal{O} \subset \{1_A \cdot (\Xi_\diamond | \gamma) \neq 0\}$ ) wie auch lokal  $\mu_A$ -vernachlässigbar. Eine offene lokal  $\mu_A$ -vernachlässigbare Menge in  $A$  muss jedoch nach Voraussetzung leer sein, woraus  $A \subset \mathbf{T} \setminus \mathcal{O} = \{(\Xi_\diamond | \gamma) = 0\}$  folgt, d. h.  $\gamma \in (\overline{\text{lin}}(\Xi_t | t \in A))^{\perp}$ .

Eine messbare Menge  $A$  ist z. B. Träger von  $\mu_A$ , wenn die diskrete Topologie und das Zählmaß  $\mu = \#$  auf  $\mathbf{T}$  gegeben ist - oder allgemeiner: wenn  $A$  eine in  $\mathbf{T}$  offene Teilmenge von  $\text{supp } \mu$  ist.

## 2.5 Vorbemerkungen zu Zerlegungen

In diesem Abschnitt sei  $\Xi$  ein bzgl.  $\mu$  in  $F^\dagger$  einbettbarer Prozess.

Insbesondere gelten die Notationen aus Abschnitt 2.3.

**BEMERKUNG 1** Den meisten Zerlegungen liegt eine 'Darstellungstheorie' zu Grunde. Das übliche und immer noch verwendete Verfahren beruht auf einer Isometrieannahme, die man durch Forderung von Skalarproduktgleichheiten der Art

$$(f_s | f_t) = (\Xi_s | \Xi_t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbf{T} \quad (*)$$

erzwingt, wobei  $(f_t)_{t \in \mathbf{T}}$  eine Familie in einem (evtl. besser bekannten) Hilbert-Raum bezeichnet<sup>16</sup>.

Meist werden dabei Funktionen  $f_t$  betrachtet. Aus dieser Betrachtung heraus lässt sich eine Darstellung mittels stochastischem Spektralintegral erreichen. Dies findet sich z. B. bei Karhunen (1947, [22], Satz 10), Parzen (1961, [36] bzw. 1967, [37]) und Priestley (1981, [40], Theorem 4.11.2). Der Einfluss dieses Zugangs entstammt vermutlich dem Satz von Mercer für stetige Prozesse auf kompakten Intervallen und dem Satz von Bochner für stationäre Prozesse auf  $\mathbb{Z}^n$  oder  $\mathbb{R}^n$ . Erst kürzlich griffen Girardin und Senoussi in ihrem Artikel '*Semigroup stationary processes and spectral representation*' (2003, [19]) über einen verallgemeinerten Satz von Bochner auf genau diesen Zugang zurück. Aus dieser Perspektive bildet der Satz von Bochner einen 'Hilfssatz' um die abstrakte Gleichheit (\*) und darüber die Darstellung des Prozesses zu bekommen.

Die (Bild-)Zerlegungen der vorliegenden Arbeit beruhen auf der Forderung, dass sich der Prozesskern gemäß

$$g^\dagger g = V^\dagger v^\dagger v V \quad (**)$$

(vgl. Abschnitt 1.2) bzw. gemäß  $g^\dagger g = w^\dagger w$  (vgl. Abschnitt 1.4) faktorisieren lässt. Diese Forderung (\*\*) ist ein 'schwächeres' Pendant zu (\*), wie man an den konkreten Beispielen aus Kapitel 3 erkennen kann. Die Beziehung zwischen den beiden Forderungen (\*) und (\*\*) lässt sich aber auch abstrakt fassen, wie durch folgendes Beispiel deutlich wird.

**BEISPIEL** Man gehe, wie z. B. Karhunen (1947, [22]), von der folgenden Situation aus:

Neben einem Prozess  $\Xi$  auf  $\mathbf{T}$  sei ein moderates Radon-Integral  $\nu$  auf lokal kompaktem  $\mathbf{X}$  gegeben. Im Raum  $\mathbf{L}^2(\nu)$  von quadratisch  $\nu$ -integrierbaren Funktionen existiere eine Familie  $(f_t)_{t \in \mathbf{T}}$  derart, dass (vgl. (\*))

$$(f_s | f_t) = (\Xi_s | \Xi_t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbf{T}$$

<sup>16</sup> Ist eine eindimensionale Zerlegung eines Prozessraums  $\mathcal{G} = \int_{\mathbf{X}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\nu(x)$  in irgendeinem Oberraum gegeben, so findet man offensichtlich die geforderte Skalarproduktgleichheit (\*) wieder mit  $f_t = \widehat{\Xi}_t$  vor.

erfüllt ist. Zusätzlich nehmen wir an, dass die Familie total in  $\mathbf{L}^2(\nu)$  ist<sup>17</sup> und dass  $\nu$  einen vollen Träger besitzt<sup>18</sup>.

Die Skalarproduktgleichheit liefert dann eine Isometrie

$$\Phi : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}) \quad \text{mit} \quad \Phi(f_t) = \Xi_t \text{ für alle } t \in \mathbf{T} .$$

Diese ist eine Fortsetzung des vektorwertigen Integrals

$$Z : \mathcal{K}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathcal{X} : f \longmapsto \Phi f ,$$

für welches man  $\mathbf{L}^1(Z) = \mathbf{L}^2(\nu)$  und  $\overline{Z(\mathcal{K}(\mathbf{X}))} = \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}})$  zeigen kann. Deswegen ist auch die Bezeichnung stochastisches (Spektral-)Integral und die Schreibweise

$$\Phi = Z = \int \diamond dZ \quad \text{mit} \quad \Xi_t = \int f_t dZ = \int f_t(x) dZ(x) \text{ für alle } t \in \mathbf{T} \quad (\#)$$

üblich<sup>19</sup>.

Aus der Perspektive der vorliegenden Arbeit würde man  $F := \Phi(\mathcal{K}(\mathbf{X}))$  (mit transportierter Topologie) und  $\mathcal{G} := \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbf{T}}) \sqsubset \mathcal{X}$  definieren. Durch

$$g : F \longrightarrow \mathcal{G} : \varphi \longmapsto \varphi$$

ist dann der Kern des hilbertschen Unterraums  $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$  gegeben und dieser faktorisiert bzgl. des kanonischen Kerns

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}) \xrightarrow{v} \mathbf{L}^2(\nu) \cdot \nu \xrightarrow{v^\dagger} \mathcal{M}(\mathbf{X})$$

mit isomorphem Faktor  $V := \Phi^{-1} : F \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbf{X})$ . In der Tat existiert zu jedem  $\varphi \in F$  genau ein  $f \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$  mit  $\varphi = \Phi(f)$ , woraus

$$(vV\varphi | vV\varphi)_{\mathbf{L}^2(\nu)} = (f | f)_{\mathbf{L}^2(\nu)} = (\Phi f | \Phi f)_{\mathcal{G}} = (g\varphi | g\varphi)_{\mathcal{G}}$$

folgt. Insgesamt ergibt sich (vgl. (\*\*))

$$g^\dagger g = V^\dagger v^\dagger v V .$$

Darüber hinaus liefert das Bild der direkten Zerlegung (mittels Dirac-Maßen  $\varepsilon_x$ )

$$\mathbf{L}^2(\nu) \cdot \nu = \int_{\mathbf{X}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \varepsilon_x d\nu(x) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{X})$$

unter (der Injektion)  $V^\dagger : \mathcal{M}(\mathbf{X}) \hookrightarrow F^\dagger$  nach Abschnitt 1.2 eine direkte Bildzerlegung

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{X}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\nu(x) \hookrightarrow F^\dagger$$

vermöge  $\Theta_x = V^\dagger \varepsilon_x$ ,  $x \in \mathbf{X}$ . Darin gilt das Analogon zu (#)

$$\Xi_t = \int f_t \cdot \Theta_\diamond d\nu \quad \text{oder} \quad \widehat{\Xi}_t = f_t \cdot \Theta_\diamond , \quad (\#\#)$$

denn  $f_t \in \mathbf{L}^2(\nu)$  und

$$\left\langle \varphi \left| \int f_t(x) \cdot \Theta_x d\nu(x) \right\rangle_F = \int f_t(x) \cdot \langle V\varphi | \varepsilon_x \rangle_{\mathcal{K}(\mathbf{X})} d\nu(x) =$$

<sup>17</sup> Durch eine Erweiterung der Familien (inkl. Indexmenge) und Anpassungen des Hilbert-Raums  $\mathcal{X}$  kann man dies immer annehmen (vgl. Karhunen (1947, [22], Satz 10)).

<sup>18</sup> Ansonsten schränke man sich auf den Träger ein.

<sup>19</sup> Dieses Integral sollte nicht mit dem Itô-Integral verwechselt werden.



$$= (\Phi^{-1}\varphi | f_t)_{\mathbf{L}^2(\nu)} = (g\varphi | \Xi_t)_{\mathcal{G}} = \langle \varphi | \Xi_t \rangle_F$$

für alle  $\varphi \in F$  .

**BEMERKUNG 2** Das Beispiel weist auf einen weiteren Unterschied der vorliegenden Herangehensweise zur bisherigen Darstellungstheorie stochastischer Prozesse hin. Die Darstellungen mittels 'stochastischem Spektralintegral' wird ersetzt durch eine Integration bzgl. eines skalaren Maßes mit vektorwertiger Dichte.

Wie schon in Abschnitt 1.2 angedeutet, wird der Pivotraum und das Maß  $\mu$  in der obigen Konstruktion der Bildzerlegung völlig ausgeblendet. Die Einbettbarkeit bzgl. eines Pivotmaßes eröffnet jedoch weitere Rahmen, in denen man Prozessräume betrachten und zerlegen kann. Die Spektralzerlegung ist dafür ein Beispiel.

**BEMERKUNG 3** In einer gegebenen eindimensionalen Zerlegung

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\nu(x) \hookrightarrow F^\dagger$$

würde man formal die Koeffizienten zur Darstellung von  $\Xi_t$  gemäß

$$\widehat{\Xi}_t(x) = (\Theta_x | \Xi_t) = \overline{\Theta_x(t)}$$

über die reproduzierende Eigenschaft bestimmen. In dieser Bemerkung wollen wir diese Rechnung und die damit verbundenen Schwierigkeiten beleuchten.

Dazu nehme man an, jedes  $\Theta_x$  sei eine  $\mu$ -Funktion auf  $\mathbf{T}$  und es gebe eine  $\mu \otimes \nu$ -messbare Funktion

$$\Theta : \mathbf{T} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$$

mit  $\Theta_x = \Theta(\diamond, x) \cdot \mu$  für alle  $x \in \mathbf{X}$  . Ist nun

$$(t, x) \longmapsto \overline{h\psi}(t) \cdot \Theta(t, x) \cdot \langle \Theta_x | \varphi \rangle$$

für alle  $\varphi, \psi \in F$  bzgl.  $\mu \otimes \nu$  integrierbar, so gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{T}} \overline{h\psi}(t) \cdot \left( \int_{\mathbf{X}} \Theta(t, x) \cdot \langle \Theta_x | \varphi \rangle d\nu(x) \right) d\mu(t) = \\ &= \int_{\mathbf{X}} \left( \int_{\mathbf{T}} \overline{h\psi}(t) \cdot \Theta(t, x) d\mu(t) \right) \cdot \langle \Theta_x | \varphi \rangle d\nu(x) = \int_{\mathbf{X}} \langle \psi | \Theta_x \rangle \cdot \langle \Theta_x | \varphi \rangle d\nu(x) = \\ &= \langle \psi | g\varphi \rangle = \int_{\mathbf{T}} \overline{h\psi}(t) \cdot g\varphi(t) d\mu(t) , \end{aligned}$$

also

$$g\varphi = \int_{\mathbf{X}} \Theta(\diamond, x) \cdot \langle \Theta_x | \varphi \rangle d\nu(x) \quad \text{lokal } \mu\text{-f.ü.}$$

aufgrund der Trennungseigenschaft.

Zum Beweis von

$$\Xi_t = \int_{\mathbf{X}} \overline{\Theta(t, x)} \cdot \Theta_x d\nu(x)$$

testet man mit  $\varphi \in F$ , wobei

$$\langle \Xi_t | \varphi \rangle = (\Xi_t | g\varphi)_{\mathcal{G}} = g\varphi(t) = \int_{\mathbf{X}} \Theta(t, x) \cdot \langle \Theta_x | \varphi \rangle d\nu(x)$$

bei jedem  $\varphi \in F$  nur für lokal fast alle  $t \in \mathbf{T}$  gilt. Diese Abhängigkeit der lokalen Nullmenge von  $\varphi$  ist nur mit Stetigkeitsbedingungen aufzuheben, die dann die Behauptung  $\Xi_t = \int \overline{\Theta(t, x)} \cdot \Theta_x d\nu(x)$  für jedes  $t \in \mathbf{T}$  liefern. Wir fassen zusammen:

**SATZ** Gegeben sei eine eindimensionale Zerlegung des zu  $\Xi$  gehörenden Prozessraums

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\nu(x) \hookrightarrow F^\dagger .$$

Man nehme an, jedes  $\Theta_x$  ist eine  $\mu$ -Funktion auf  $\mathbf{T}$  und es gebe eine  $\mu \otimes \nu$ -messbare Funktion

$$\Theta : \mathbf{T} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\Theta_x = \Theta(\diamond, x) \cdot \mu$  für alle  $x \in \mathbf{X}$ ,
- (ii)  $(t, x) \mapsto \overline{h\psi}(t) \cdot \Theta(t, x) \cdot \langle \Theta_x | \varphi \rangle$  ist  $\mu \otimes \nu$ -integrierbar für alle  $\varphi, \psi \in F$ ,
- (iii)  $\Theta(t, \diamond) \in \mathbf{L}^2(\nu)$  für alle  $t \in \mathbf{T}$ .

Sind dann  $t \mapsto \Xi_t$  und  $t \mapsto \Theta(t, \diamond)$  stetig in  $\mathcal{G}_\sigma$  bzw.  $\mathbf{L}^2(\nu)_\sigma$  und hat  $\mu$  vollen Träger, so gilt  $\Xi_t = \int \overline{\Theta(t, x)} \cdot \Theta_x d\nu(x)$  für alle  $t \in \mathbf{T}$ . Ist die Zerlegung direkt, so ist  $\overline{\Theta(t, \diamond)}$  sogar der Parseval-Repräsentant von  $\Xi_t$ .

**BEMERKUNG 4** An die Darstellung der einzelnen  $\Xi_t$ ,  $t \in \mathbf{T}$ , in der Zerlegungsbasis  $(\Theta_x)_{x \in \mathbf{X}}$  schließt sich die Frage nach der Darstellung für Linearkombinationen im Sinne von Definition 2.4 an. Die in diesem Zusammenhang stehende Gleichung

$$\int_{\mathbf{T}} \xi(t) \cdot \Xi_t d\mu(t) = \int_{\mathbf{X}} \theta(x) \cdot \Theta_x d\nu(x)$$

bzw. die entsprechende Operatorgleichung  $\widehat{G}\xi = \theta$  mit  $\theta \in \mathbf{L}^2(\nu)$  und  $\xi \in \mathcal{D}(G)$  wird uns bei Vorhersageproblemen noch häufiger begegnen.

## 2.6 Abschließende Bemerkungen

**BEMERKUNG 1** Wir haben stets die Kovarianzfunktion des Prozesses als gegeben vorausgesetzt. In der Praxis muss man sich diese meist erst beschaffen. Dies kann durchaus ein schwieriges Unterfangen sein, insbesondere wenn vorab keine Modellannahmen gemacht werden. In dieser Arbeit wird diese Problematik nicht behandelt, sondern auf die entsprechende Literatur verwiesen: z. B. von Brockwell und Davis (1987, [6]) oder Box und Jenkins (1976, [5]).

**BEMERKUNG 2** Das in diesem Kapitel erörterte Konzept einbettbarer Prozesse ist vom Grundprinzip schon länger bekannt, so zum Beispiel aus Parzen (1961, [36] bzw. 1967, [37]) oder Adler (1990, [1], Kap. III). Allerdings wird dort ausschließlich die diskrete Struktur auf dem Zeitraum  $\mathbf{T}$  gewählt bzw. keine Einbettung in einen beliebigen Oberraum  $F^\dagger$  untersucht. In diesem Rahmen, der sich eher an den reproduzierenden Kern-Hilbert-Räumen im Sinne von Aronszajn (1950, [2]) orientiert, sind viele Einbettungskriterien trivial erfüllt bzw. werden nicht berücksichtigt. Dieser Rahmen findet sich auch noch bei Nuzman und Poor (2001, [34]) und die Beispiele 2.2.1 und 2.3.1 zeigen, wie die Theorie der vorliegenden Arbeit ein solches Vorgehen umfasst.

Einzig Meidan (1979, [29]) verlässt die diskrete Struktur, indem er offene Teilmengen  $\mathbf{T}$  des  $\mathbb{R}^n$  zulässt, betrachtet aber ausschließlich den Testraum  $\mathcal{D}(\mathbf{T})$ . Er untersucht ebenfalls keine Einbettungskriterien, sondern setzt von vornherein eine Abbildung mit ähnlichen Eigenschaften wie  $[\diamond]$  voraus und verfährt damit in vergleichbarer Weise, wie man es schon von Parzen (1961, [36], bzw. 1967, [37]) her kennt.

**BEMERKUNG 3** Wir wollen noch kurz die Vorbemerkung zu Zerlegungen 2.5.1 rekapitulieren. Der theoretische Aufbau der Bildzerlegungen nach Abschnitt 1.2 ähnelt dem von Karhunen (1947, [22]), verwendet jedoch allgemeinere Voraussetzungen und der funktionalanalytische Rahmen der hilbertschen Unterräume strafft die Konstruktionen. Vergleichbares könnte man über die Inhalte des Abschnitts 2.1 und in Bezug auf die Integration eines Prozesses sagen.

Aus Sicht der vorliegenden Arbeit wirkt jedoch der von Karhunen (1947, [22]) aufgeführte und immer noch verwendete Begriff der 'Spektraldarstellung' irreführend und fehlplatziert.

Ausserdem verharren die bisherigen Veröffentlichungen zu diesem Thema mit der Argumentation über Isometrien stets innerhalb des Hilbert-Raums. Oft fehlt es an raumumfassenden ganz zu schweigen von kontinuierlichen Zerlegungsformalismen. In diesem Sinne sind die Zerlegungsmethoden der vorliegenden Arbeit neu hinzugewonnen worden.

**BEMERKUNG 4** Die auf die Einbettung aufbauende Abschließbarkeit des Prozesskerns wurde bislang in der Literatur noch nicht eingeführt bzw. analysiert. Es

werden sich jedoch interessante Verbindungen zu bereits existierenden Charakterisierungen von Prozessen ergeben. Das Gleiche gilt für den Kovarianzoperator, wie er hier eingeführt wurde. Auf diese Weise (durch die gegebene freie Wahl des Pivotraums bzw. des Maßes  $\mu$ ) gewinnt der operatortheoretische Aspekt größeren Einfluss. Damit lässt sich z. B. das Prinzip der Spektralzerlegung aus den Ausarbeitungen von Loève (1978, [28], Abschnitt 37.5 (B)) zur orthogonalen Eigenzerlegung von Prozessen auf kompakten Intervallen herauslesen und gemäß der vorliegenden Arbeit erweitern.

# Kapitel 3

## Zerlegungen von Prozessräumen

Ziel dieses Kapitels ist es, die vielfältige Anwendbarkeit der entwickelten Zerlegungstheorie aufzuzeigen. Dazu werden einige bereits bekannte Zerlegungen rekonstruiert, wobei der Fokus allein auf der Verbindung zur vorliegenden Arbeit liegt. Darüber hinaus werden einige bisher unveröffentlichte Zerlegungen aufgeführt, um den Gewinn des erweiterten Zugangs anzudeuten.

In den einzelnen Abschnitten, die jeweils eine Prozessklasse zum Gegenstand haben, wird zunächst ein theoretischer Rahmen im Sinne von Kapitel 1 geschaffen. Lokal kompakte Räume  $\mathbf{T}$ , positive Radon-Integrale  $\mu$  auf  $\mathbf{T}$  sowie  $\mu$ -Testräume  $F$  werden präzisiert, und der Pivotraum  $\mathcal{H} := \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow F^\dagger$  mit Kern  $h$  wird festgelegt.

In einem Hauptsatz werden dann Prozesse  $\Xi$  aus der jeweiligen Klasse auf Einbettbarkeit bzgl.  $\mu$  in  $F^\dagger$  und Abschließbarkeit untersucht, was die zentrale Voraussetzung für die Zerlegungen der Prozessräume gemäß des ersten Kapitels ist.

Im ersten Satz jedes Abschnitts folgt die Diskussion von (mehr oder weniger konkreten) Bildzerlegungen des jeweiligen Prozessraums. Ein solcher Satz kann nur als Kompromiss zwischen der gewünschten Allgemeingültigkeit und der gezielten Anwendung im Konkreten verstanden werden. Letzteres wird dann in einzelnen Beispielen ausgeführt.

In einem zweiten Satz wird die Spektralzerlegung für die Prozesse dargelegt, wodurch die erreichte Ausweitung der üblichen Karhunen-Loève-Entwicklung deutlich wird. In der Tat gestattet es der abstrakte operatortheoretische Aufbau eine entsprechende Zerlegung für alle folgenden Klassen von abschließbaren Prozessen zu konstruieren. Dies wird ebenfalls in konkreten Beispielen ausgeführt.

### 3.1 Endliche Prozesse

Man gehe von einer endlichen und somit diskreten Indexmenge  $\mathbf{T}$  aus und wähle das Zählmaß  $\mu = \#$  als Radon-Integral darauf. Auch wenn in diesem endlichen Rahmen alles isomorph in den  $\mathbb{K}^{\mathbf{T}}$  übertragbar ist, werden im Folgenden die entsprechenden Räume eher einheitlich zur allgemeinen Theorie bezeichnet.

Der *Pivotraum* sei also  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbf{T})$  mit dem üblichen Skalarprodukt und als *Testraum* möge  $F = \ell^2(\mathbf{T})$  dienen, so dass der zugehörige Kern durch die Identität

$$h = \text{Id} : \ell^2(\mathbf{T}) \longrightarrow \ell^2(\mathbf{T}) \hookrightarrow \ell^2(\mathbf{T})$$

gegeben ist. Alle Funktionen auf  $\mathbf{T}$  sind aus  $\ell^2(\mathbf{T})$ , also  $\#$ -Funktionen.

**DEFINITION** Ein *endlicher Prozess* ist eine durch  $\mathbf{T}$  parametrisierte Familie  $\Xi = (\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{X}$ .

Für endliche Prozesse ist die Theorie der Einbettung und Abschließung sehr elementar und ohne Schwierigkeiten nachzuvollziehen. Wir geben sie zusammenfassend im folgenden Hauptsatz wieder.

**HAUPTSATZ** *Endliche Prozesse sind stets injektiv bzgl.  $\#$  in  $\ell^2(\mathbf{T})$  einbettbar. Der eingebettete Prozessraum  $\mathcal{G}$  ist der von den Funktionen  $\Xi_t$ ,  $t \in \mathbf{T}$ , aufgespannte Raum, wobei  $\Xi_t$  mit  $(\Xi_\circ | \Xi_t)$  identifiziert wird. Der Kern von  $\mathcal{G} \subset \ell^2(\mathbf{T})$  ist stets abschließbar und lautet*

$$g : \ell^2(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \ell^2(\mathbf{T}) : \varphi \longmapsto \left( \Xi_\circ \left| \sum_{t \in \mathbf{T}} \Xi_t \cdot \varphi(t) \right. \right) = \sum_{t \in \mathbf{T}} (\Xi_\circ | \Xi_t) \cdot \varphi(t) .$$

*Je nach Wahl, stellt die obige Zuordnung auch den Abschluss  $G \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{T}), \mathcal{G})$  oder den Kovarianzoperator  $G^*G \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{T}), \ell^2(\mathbf{T}))$  dar.*

Für den Rest dieses Abschnitts sei

$\Xi$  ein endlicher Prozess (auf  $\mathbf{T}$ ),

$\mathcal{G}$  der Prozessraum und  $G$  der Abschluss des Prozesskerns

gemäß obigem Hauptsatz.

Bildzerlegungen des Prozessraums kann man ebenfalls vereinfachend zusammenfassen:

**SATZ 1** (i) Jede Matrixabbildung  $W = (w(x, t))_{(x, t) \in \{1, \dots, d\} \times \mathbf{T}}$  von  $\ell^2(\mathbf{T})$  nach  $\ell^2(\{1, \dots, d\})$  mit den Eigenschaften

(a)  $W$  ist surjektiv (bzw.  $w$  hat vollen Rang  $d$ ) und

(b)  $W^*W = G^*G$  (bzw.  $(\Xi_s | \Xi_t) = \sum_{x=1}^d \overline{w(x, s)} \cdot w(x, t)$  für alle  $s, t \in \mathbf{T}$ )

ist unitär äquivalent zu  $G$  und es gilt  $\mathcal{G} = W^*(\ell^2(\{1, \dots, d\}))$ . Insbesondere ist dann durch

$$\Theta_x := W^*1_{\{x\}} =: w^*(\diamond, x) \in \ell^2(\mathbf{T}) \quad , \quad x = 1, \dots, d \quad ,$$

eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{G}$  definiert und die Basiskoeffizienten von  $\Xi_t$  in dieser Basis sind

$$(\Theta_x | \Xi_t) = \overline{\Theta_x(t)} = W1_{\{t\}}(x) = w(x, t) \quad , \quad l = 1, \dots, d \quad .$$

(ii) Jede Orthonormalbasis von  $\mathcal{G}$  lässt sich auf die in (i) beschriebene Weise konstruieren, d. h. jede direkte Zerlegung von  $\mathcal{G}$  ist das Bild der Zerlegung

$$\ell^2(\{1, \dots, d\}) = \bigoplus_{x=1, \dots, d}^2 \mathbb{K} \cdot 1_{\{x\}}$$

unter  $W^*$  mit einer Matrixabbildung  $W$  gemäß (i).

**Beweis** Der erste Teil ist eine Zusammenfassung der Abschnitte 1.2 bis 1.4; nur für die Basiskoeffizienten<sup>20</sup> von  $\Xi_t$  ist zusätzlich die reproduzierende Eigenschaft nötig.

Für den zweiten Teil bezeichne  $\{\Theta_x \mid x = 1, \dots, d\}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{G}$  und  $U : \mathcal{G} \longrightarrow \ell^2(\{1, \dots, d\}) : \Theta_x \longmapsto 1_{\{x\}}$  die zugehörige unitäre Transformation. Der Operator  $W := UG$  ist unitär äquivalent zu  $G$  und von der in (i) beschriebenen Art. Für alle  $\varphi \in \ell^2(\mathbf{T})$  und  $x = 1, \dots, d$  gilt

$$\langle \varphi | W^*1_{\{x\}} \rangle_{\ell^2(\mathbf{T})} = \langle \varphi | G^*U^*1_{\{x\}} \rangle_{\ell^2(\mathbf{T})} = \langle \varphi | G^*\Theta_x \rangle_{\ell^2(\mathbf{T})} = \langle g\varphi | \Theta_x \rangle_{\mathcal{G}} = \langle \varphi | \Theta_x \rangle_{\ell^2(\mathbf{T})} \quad .$$

Die Basis  $\{\Theta_x \mid x = 1, \dots, d\}$  ist also das Bild der kanonischen Zerlegung unter  $W^*$ .

**BEMERKUNG 1** Die Operatoren bzw. Matrizen, die in (i) des Satzes 1 beschrieben sind, charakterisieren die unitär zu  $G$  äquivalenten Operatoren im Fall endlicher Prozesse ohne Einschränkung. Das Gleiche gilt für die Festlegung auf die kanonische Zerlegung des  $\ell^2(\{1, \dots, d\})$  zur Definition der  $\Theta_x$ .

Es ist eine extreme Ausnahme, dass sich das Konzept der Bildzerlegung innerhalb einer Prozessklasse einheitlich und gleichzeitig allumfassend formulieren lässt. Die Prozessklassen der folgenden Abschnitte werden zeigen, dass dies im allgemeinen nicht möglich ist.

**BEISPIEL 1** Der Kovarianzoperator  $G^*G$  lässt sich mittels einer Eigenvektorbasis  $\{\epsilon_l \mid l = 1, \dots, \#\mathbf{T}\}$  mit positiven Eigenwerten  $\{\kappa(l) \mid l = 1, \dots, \#\mathbf{T}\}$  diagonalisieren<sup>21</sup>. Diese Orthonormalbasis etabliert eine unitäre Transformation

$$U : \ell^2(\mathbf{T}) \longrightarrow \ell^2(\{1, \dots, \#\mathbf{T}\}) : \xi \longmapsto (\epsilon_\diamond | \xi)_{\ell^2(\mathbf{T})}$$

<sup>20</sup> Die Bezeichnung Parseval-Repräsentant wirkt in diesem elementaren Fall eher verwirrend.

<sup>21</sup> O.B.d.A. sei  $\kappa$  fallend.

derart, dass  $G^*G = U^*M_\kappa U$  mit Diagonaloperator

$$M_\kappa : \ell^2(\{1, \dots, \#\mathbf{T}\}) \longrightarrow \ell^2(\{1, \dots, \#\mathbf{T}\}) : v \longmapsto \kappa \cdot v = (\kappa(l) \cdot v(l))_{l=1, \dots, \#\mathbf{T}}$$

ist.

Für jedes beliebige  $\rho$  mit  $\kappa = |\rho|^2$  ist  $W := M_\rho U \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{T}), \ell^2(\{1, \dots, \#\mathbf{T}\}))$  partiell unitär äquivalent zu  $G$ . Hier ist  $\{\epsilon_l = 1_{\{l\}} \mid \kappa(l) \neq 0\}$  eine Orthonormalbasis des Bildraums von  $W$  (als Teilraum von  $\ell^2(\{1, \dots, \#\mathbf{T}\})$ ). Streicht man die Zeilen, in denen  $\rho = 0$  gilt aus der Matrixdarstellung von  $W$  heraus, so ist man in der Situation des obigen Satzes 1. Die zugehörige Orthonormalbasis für  $\mathcal{G}$  ist

$$\Theta_l := W^*1_{\{l\}} = \overline{\rho(l)} \cdot \epsilon_l \quad , \quad l \in \{\kappa \neq 0\} \quad .$$

**BEISPIEL 2** Mit den gleichen Notationen wie im obigen Beispiel 1 ist auch

$$W := Z_\rho = U^*M_\rho U \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{T}), \ell^2(\mathbf{T}))$$

partiell unitär äquivalent zu  $G^*G$ . Anstelle der Weiterverarbeitung gemäß Satz 1 verwenden wir die Orthonormalbasis  $\{\epsilon_l \mid \kappa(l) \neq 0\}$  des Bildes (als Teilraum von  $\ell^2(\mathbf{T})$ ) und greifen auf Abschnitt 1.2 zurück. Damit ist erneut das System der

$$\Theta_l := W^*\epsilon_l = \overline{\rho(l)} \cdot \epsilon_l \quad , \quad l \in \{\kappa \neq 0\} \quad ,$$

als Orthonormalbasis für  $\mathcal{G}$  nachgewiesen.

Die Beispiele motivieren die Spektralzerlegung, die in Hauptsatz 1.5 abstrakt angegeben ist. Als hilbertsche Unterräume sind  $\mathbb{K} \cdot \Theta_l$  und  $\kappa(l) \cdot (\mathbb{K} \cdot \epsilon_l)$  für alle  $l$  gleich und wir erhalten die folgende Spektralzerlegung<sup>22</sup>.

**SATZ 2** Sei  $(\epsilon_l)_{l=1, \dots, \#\mathbf{T}}$  die Orthonormalbasis von  $\ell^2(\mathbf{T})$ , bzgl. welcher  $G^*G$  diagonal ist und bezeichne  $(\kappa(l))_{l=1, \dots, \#\mathbf{T}}$  die Familie der (positiven) Eigenwerte. Für  $\rho$  mit  $\kappa = |\rho|^2$  bildet

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{l \in \{\kappa \neq 0\}}^2 \mathbb{K} \cdot (\overline{\rho(l)} \cdot \epsilon_l) \quad \text{in } \mathcal{G}$$

eine direkte Spektralzerlegung mit

$$\Xi_t = \sum_{l \in \{\kappa \neq 0\}} (\rho(l) \cdot \overline{\epsilon_l(t)}) \cdot (\overline{\rho(l)} \cdot \epsilon_l) \quad .$$

**BEMERKUNG 2** In der Literatur ist diese (endlichdimensionale) Spektralzerlegung unter dem Begriff der Karhunen-Loève-Zerlegung bekannt. Ihre Eigenschaften werden z. B. von Dür (1998, [13]) untersucht.

**BEISPIEL 3** Zu den Notationen der obigen Beispiele nehmen wir nun zusätzlich an, die Kovarianzmatrix sei injektiv (und somit regulär). Der Satz 1 in Verbindung mit  $W := Z_\rho = U^*M_\rho U \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{T}), \ell^2(\mathbf{T}))$  liefert als Bild der kanonischen Basis die

<sup>22</sup> Die Dichte  $\kappa$  ließe sich auf das Zerlegungsmaß multiplizieren.



Elemente  $\Theta_x = U^* M_\rho U 1_{\{x\}}$ . Diese stellen zwar eine Orthonormalbasis für  $\mathcal{G}$  dar, können aber beliebige Struktur haben.

**BEISPIEL 4** Sei  $(\Xi_t)_{t=1, \dots, T}$  ein endlicher Prozess mit injektivem (und somit bijektivem) Kovarianzoperator  $G^*G$ . Für diese positiv definite Kovarianzmatrix existiert eine eindeutige Cholesky-Zerlegung  $W^*W$ . Die Spalten  $\Theta_1, \dots, \Theta_T$  von  $W^*$  bilden ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{G}$ . Darin gilt:

$$\Xi_t = \sum_{x=1}^T w(x, t) \cdot \Theta_x = \sum_{x=1}^t w(x, t) \cdot \Theta_x \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T.$$

**BEMERKUNG 3** Das Beispiel 4 verdeutlicht, dass die zu  $G$  unitär äquivalenten Operatoren nur teilweise durch  $W = Z_\rho$  oder  $W = M_\rho U$  erreicht werden können. In der Tat ist die Cholesky-Faktorisierung nur in trivialen Fällen (von diagonalen Kovarianzmatrizen) von dieser Art. Dementsprechend ist die Basis des Beispiels 4 fast nie über das Vorgehen des Beispiels 3 zu konstruieren.

**BEMERKUNG 4** Natürlich hat die Theorie in diesem Rahmen eher elementaren Charakter und ist schon länger in dieser oder ähnlicher Form bekannt. Bei Parzen (1961, [36]) findet man im Wesentlichen alles zum hilbertschen Unterraum der obigen Form, Orthonormalisierungsverfahren (nach Gram-Schmidt) sind in diesem Zusammenhang (aber ohne die Verbindung zur Cholesky-Zerlegung) bei Loève (1978, [28]) aufgeführt.

Trotzdem stoßen Orthonormalisierungsverfahren, die wie die obigen keinen sequentiellen Charakter haben, nach wie vor auf Interesse in den Naturwissenschaften (vgl. Chaturvedi et. al. (1998, [7])).

### 3.2 Normal quadratisch integrierbare Prozesse

Wir gehen von einem lokal kompakten  $\mathbf{T}$  mit beliebigem (positiven) Radon-Integral  $\mu$  darauf aus. Der *Pivotraum* ist  $\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\mu)$  mit dem üblichen Skalarprodukt und als *Testraum* möge  $F = \mathcal{K}(\mathbf{T})$  dienen, so dass der zugehörige Kern durch die identische Abbildung

$$h = \text{Id} : \mathcal{K}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T})$$

gegeben ist. Die lokal  $\mu$ -integrierbaren Funktionen auf  $\mathbf{T}$  sind die  $\mu$ -Funktionen.

**DEFINITION** Wir sagen, ein skalar  $\mu$ -messbarer Prozess  $\Xi = (\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}} \subset \mathcal{X}$  in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{X}$ , dessen Kovarianzfunktion  $\mu \otimes \mu$ -messbar ist, sei *normal quadratisch integrierbar* (bzgl.  $\mu$ ), falls die Funktion  $\|\Xi\| : t \longmapsto \|\Xi_t\|$  bzgl.  $\mu$  quadratisch integrierbar ist.

Die Theorie der Einbettung und Abschließung ist problemlos auf die Klasse von normal quadratisch integrierbaren Prozessen anzuwenden, wie der folgende Hauptsatz zeigt.

**HAUPTSATZ** Ein normal quadratisch integrierbarer Prozess  $\Xi$  ist stets bzgl.  $\mu$  in  $\mathcal{M}(\mathbf{T})$  einbettbar, der Kern des eingebetteten Prozessraums  $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}(\mathbf{T})$  ist

$$g : \mathcal{K}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{T}) : \varphi \longmapsto \left( \int (\Xi_\diamond | \Xi_t) \cdot \varphi(t) d\mu(t) \right) \cdot \mu .$$

Ferner gilt:

- (i) Die Kovarianzfunktion  $c : (s, t) \longmapsto (\Xi_s | \Xi_t)$  ist ein Element von  $\mathbf{L}^2(\mu \otimes \mu)$ .
- (ii)  $\mathcal{G} \leq \|c\|_{2, \mu \otimes \mu} \cdot \mathbf{L}^2(\mu)$ .
- (iii)  $g$  ist bzgl.  $h$  abschließbar mit stetigem Abschluss

$$G : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathcal{G} : \xi \longmapsto \int (\Xi_\diamond | \Xi_t) \cdot \xi(t) d\mu(t) .$$

(iv) Der Kovarianzoperator

$$G^*G : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \xi \longmapsto \int c(\diamond, t) \cdot \xi(t) d\mu(t)$$

ist ein positiver selbstadjungierter Hilbert-Schmidt-Operator. Insbesondere ist  $G^*G$  kompakt,  $Sp(G^*G) \setminus \{0\}$  ist eine abzählbare, diskrete Teilmenge von  $\mathbb{R}_+$ ; evtl. ist 0 Häufungspunkt.

**Beweis** Wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt nicht nur (i), sondern auch  $(\Xi_\diamond | \eta) \in \mathbf{L}^2(\mu) \subset \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mu)$  für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  und es folgt

$$\left| \int \bar{\xi} \cdot (f \cdot \Xi_\diamond | \eta) d\mu \right| \leq \|\eta\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \int |\xi| \cdot \|\Xi\| d\mu \leq \|\eta\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \|\xi\|_{2, \mu} \cdot \|\|\Xi\|\|_{2, \mu}$$

für  $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$  und  $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ . Dies beweist die Einbettbarkeit. Aus (i) folgt (ii) aufgrund der Ungleichung

$$\langle \varphi | g\varphi \rangle = \int c \cdot (\overline{\varphi} \otimes \varphi) d(\mu \otimes \mu) \leq \| \overline{\varphi} \otimes \varphi \|_{2, \mu \otimes \mu} \cdot \| c \|_{2, \mu \otimes \mu} = \langle \varphi | h\varphi \rangle \cdot \| c \|_{2, \mu \otimes \mu}$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbf{T})$ . Aus (ii) folgt die Abschließbarkeit, die Formel für den Abschluss  $G$ , sowie dessen Stetigkeit - insgesamt also (iii) (vgl. Hauptsatz 1.3 und Korollar 1.3). Die Aussage (iv) ist dann klar.

Für den Rest dieses Abschnitts sei

$\Xi$  ein normal quadratisch integrierbarer Prozess (auf  $\mathbf{T}$ ),  
 $\mathcal{G}$  der Prozessraum und  $G$  der Abschluss des Prozesskerns  
 gemäß obigem Hauptsatz.

**BEMERKUNG 1** Die Theorie der Bildzerlegungen formuliert sich in dieser Klasse von normal quadratisch integrierbaren Prozessen schon sehr situationspezifisch, kann also nicht wie im endlichen Fall zusammengefasst werden, ohne dass Allgemeingültigkeit im Vergleich zu Abschnitt 1.2 verloren geht. Der folgende Satz 1 zeigt eine mögliche Vorgehensweise bei Bildzerlegungen innerhalb dieser Prozessklasse.

**SATZ 1** Sei  $\mathbf{T}$   $\sigma$ -kompakt. Man nehme an  $G^*G$  sei injektiv und von Spurklasse, d. h. in der Diagonalisierung

$$G^*G = Z_\kappa = \sum_{\lambda \in \Lambda} \kappa(\lambda) \cdot |\epsilon_\lambda\rangle \langle \epsilon_\lambda|$$

sei  $\kappa \in \ell^1(\Lambda)$  mit  $\kappa \neq 0$  auf  $\Lambda$ . Ferner sei die hilbertsche Basis der Eigenfunktionen  $(\epsilon_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine beschränkte Menge des Fréchet-Raums  $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu)$ .

Dann erhält man für jedes  $\rho$  mit  $|\rho|^2 = \kappa$  vermöge

$$\Theta_x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \overline{\rho(\lambda)} \cdot \overline{\epsilon_\lambda(x)} \cdot \epsilon_\lambda \quad , \quad x \in \mathbf{T} \quad ,$$

eine direkte Zerlegung

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{T}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\mu(x) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

als Bildzerlegung der kanonischen Zerlegung des  $\mathbf{L}^2(\mu)$ .

Ist  $\Xi$  stetig und hat das Maß  $\mu$  vollen Träger, so gilt in dieser Zerlegung für  $t \in \mathbf{T}$

$$\widehat{\Xi}_t = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \cdot \overline{\epsilon_\lambda(t)} \cdot \epsilon_\lambda \quad .$$

**Beweis** Da  $\mathbf{T}$   $\sigma$ -kompakt ist, wird  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$  ein Fréchet-Raum (mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen), genau wie  $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu)$  (der Vektorraum aller stetigen bzgl.  $\mu$  quadratisch integrierbaren Funktionen). Natürlich ist die Beschränktheit von  $(\epsilon_\lambda)_\lambda$  in  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$  hinreichend für die verlangte Beschränktheit.

Für jedes  $\rho$  mit  $\kappa = |\rho|^2$  ist die Abbildung

$$V : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu) : \xi \longmapsto Z_\rho \xi = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho(\lambda) \cdot (\epsilon_\lambda | \xi) \cdot \epsilon_\lambda$$

wohldefiniert, linear und stetig. Die (normale) Konvergenz der Reihe ist nämlich mittels Cauchy-Eigenschaft der Reihe und Vollständigkeit von  $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu)$  nachzuweisen. Die Argumentation beruht hierbei auf der folgenden Ungleichung (für  $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$  und endliches  $\Lambda' \subset \Lambda$ )

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} |\rho(\lambda) \cdot (\epsilon_\lambda | \xi)| \cdot \|\epsilon_\lambda\| \leq \|1_{\Lambda'} \cdot \rho\|_{\ell^2(\Lambda)} \cdot \|(\epsilon_\bullet | \xi)\|_{\ell^2(\Lambda)} \cdot \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\epsilon_\lambda\| ,$$

die wegen  $\|(\epsilon_\bullet | \xi)\|_{\ell^2(\Lambda)} = \|\xi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}$  auch die Stetigkeit von  $V$  im Wesentlichen liefert. Die Adjungierte  $V^\dagger$  ist eine stetige Fortsetzung von  $Z_{\bar{\rho}}$  auf  $(\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu))^\dagger$ . Die Komposition  $V^\dagger v^\dagger v V$  mit dem kanonischen Kern

$$v^\dagger v : \mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow (\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu))^\dagger$$

ist gerade  $Z_\kappa = G^* G$ , so dass  $V^\dagger$  die kanonische Zerlegung mittels Dirac-Maßen

$$\mathbf{L}^2(\mu) = \int_{\mathbf{T}}^\oplus \mathbb{K} \cdot \varepsilon_x d\mu(x) \hookrightarrow (\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu))^\dagger$$

auf

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{T}} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\mu(x) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \quad \text{mit} \quad \Theta_x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \overline{\rho(\lambda)} \cdot \overline{\epsilon_\lambda(x)} \cdot \epsilon_\lambda$$

abbildet<sup>23</sup>.

Die Injektivität von  $V^\dagger$  auf  $\mathbf{L}^2(\mu)$  ist äquivalent zu  $\kappa \neq 0$  auf  $\Lambda$  und die Zerlegung von  $\mathcal{G}$  ist in diesem Fall nicht-degeneriert (vgl. Hauptsatz 1.2). Jedoch erreicht man dann auch schon Direktheit, wie wir im Folgenden ohne weitere Voraussetzungen<sup>24</sup> zeigen wollen.

Man wähle dazu den Raum

$$E := \overline{\text{lin}}^{\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu)} \{ \epsilon_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$$

als abgeschlossenen Unterraum von  $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu)$  mit induzierter Topologie. Bezeichnet  $\iota : E \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu)$  die kanonische Injektion, so prüft man nach, dass  $\iota^\dagger$  injektiv auf  $\mathbf{L}^2(\mu)$  ist und dass  $Z_{\bar{\rho}}$  (durch Identifikation) einen Operator mit Werten im hilbertschen Unterraum

$$E \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) = \int_{\mathbf{T}}^\oplus \mathbb{K} \cdot \varepsilon_x d\mu(x) \hookrightarrow E^\dagger$$

induziert. Man beachte, dass man die letzte Zerlegung (und ihre Eigenschaften) in  $E^\dagger$  explizit nachrechnen muss, da nicht notwendig  $\iota^\dagger$  injektiv auf  $(\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu))^\dagger$  ist und durchaus  $\iota^\dagger \varepsilon_x = 0$  gelten kann<sup>25</sup>. Da  $(\epsilon_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  total in  $E$  ist und  $\rho \neq 0$  auf  $\Lambda$  gilt, bildet obiges  $V$  dicht nach  $E$  ab.  $V^\dagger$  setzt weiterhin  $Z_{\bar{\rho}}$  fort, ist aber nunmehr injektiv auf

<sup>23</sup> Beachte:  $\rho \in \ell^2(\Lambda)$  und  $\epsilon_\bullet(x) \in \ell^\infty(\Lambda)$ .

<sup>24</sup> wie z. B. Totalität von  $(\epsilon_\lambda)_\lambda$  in  $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{L}^2(\mu)$ .

<sup>25</sup> Allerdings ist die Menge  $\{x \mid \iota^\dagger \varepsilon_x = 0\}$  vernachlässigbar. In den entsprechenden Nachweis (und in den für die Direktheit) geht ein, dass  $(\epsilon_\lambda)_\lambda$  eine hilbertsche Basis von  $\mathbf{L}^2(\mu)$  ist.

$E^\dagger$ . Es bleibt weiterhin bei  $\Theta_x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \overline{\rho(\lambda)} \cdot \overline{\epsilon_\lambda(x)} \cdot \epsilon_\lambda$  für alle  $x \in \mathbf{T}$ , welche aber nunmehr  $\mathcal{G}$  direkt zerlegen. Der Zusatz folgt aus Satz 2.5.

**BEMERKUNG 2** Die Spektralzerlegung ist noch einheitlich für die gesamte Klasse konstruierbar, was nun mit ähnlich motivierendem Charakter über eine erste Bildzerlegung wie im endlichen Fall getan werden soll.

Nach dem Hauptsatz existiert eine Diagonalisierung des Kovarianzoperators in der Form

$$G^*G = Z_{\text{id}} : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \xi \longmapsto \sum_{\kappa \in \text{Sp}(G^*G)} \kappa \cdot (\mathcal{P}_\kappa \xi),$$

wenn dabei  $\mathcal{P}_\kappa$  die orthogonale Projektion auf den zu  $\kappa \in \text{Sp}(G^*G)$  gehörigen (abgeschlossenen) Eigenraum  $\widehat{\mathcal{H}}_\kappa$  von  $G^*G$  bezeichnet. Für die Zerlegungen der abgeschlossenen Unterräume des  $\mathbf{L}^2(\mu)$

$$\mathbf{L}^2(\mu) = \bigoplus_{\kappa \in \text{Sp}(G^*G)}^2 \widehat{\mathcal{H}}_\kappa \quad \text{und} \quad \overline{Z_{\sqrt{\text{id}}}(\mathbf{L}^2(\mu))} = \bigoplus_{\kappa \in \text{Sp}(G^*G) \setminus \{0\}}^2 \widehat{\mathcal{H}}_\kappa$$

ist kein größerer Oberraum nötig, man kann einfach gemäß Hauptsatz 1.2 durch  $W^* := Z_{\sqrt{\text{id}}}$  abbilden. Etwas allgemeiner erhält man aus Abschnitt 1.5 die folgende Spektralzerlegung.

**SATZ 2** Sei  $(\widehat{\mathcal{H}}_\kappa)_{\kappa \in \text{Sp}(G^*G)}$  die direkte Zerlegung von  $\mathbf{L}^2(\mu)$ , bzgl. welcher  $G^*G$  diagonal ist. Dann bildet

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\kappa \in \text{Sp}(G^*G) \setminus \{0\}}^2 \kappa \cdot \widehat{\mathcal{H}}_\kappa \quad \text{in } \mathbf{L}^2(\mu) \text{ wie auch in } \mathcal{M}(\mathbf{T})$$

die direkte Spektralzerlegung. Es handelt sich dabei um eine abzählbare Summation.

Jeder Eigenraum  $\widehat{\mathcal{H}}_\kappa$  lässt sich entsprechend der Vielfachheit des Eigenwerts  $\kappa$  als hilbertsche Summe der von den Eigenvektoren aufgespannten eindimensionalen Eigenräume  $(\mathbb{K} \cdot \epsilon_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  verfeinern. Dann überträgt sich dies auf die Spektralzerlegung von  $\mathcal{G}$  in der Form, dass für jedes  $\rho$  mit  $|\rho|^2 = \kappa$  der Prozessraum mittels

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\kappa=0\}}^2 \mathbb{K} \cdot (\rho(\lambda) \cdot \epsilon_\lambda) \quad \text{in } \mathbf{L}^2(\mu) \text{ wie auch in } \mathcal{M}(\mathbf{T})$$

zerlegt ist.

**BEMERKUNG 3** In der Literatur wird die in Satz 2 angegebene Fassung der Karhunen-Loève-Entwicklung z. B. für stetige Prozesse auf kompakten Zeitintervallen angeführt (vgl. Adler (1990, [1])). Dieser Rahmen verleitet oft zur Verwendung des Satzes von Mercer, welches allerdings unnötig erscheint.

Insgesamt wirken die bisherigen Arbeiten dazu auf eine unnatürliche Betonung der Abzählbarkeit einer solchen Zerlegung hin (vgl. Kakihara (1988, [21])), was eigentlich

nicht aus der Theorie heraus motiviert ist, sondern aus den Anwendungen<sup>26</sup>.

**BEISPIEL 1** Wir geben die verschiedenen Zerlegungen im Beispiel der Brownschen Bewegung  $(\Xi_t)_{t \in [0,1]}$  auf  $[0, 1]$  an, welche nicht nur normal quadratisch integrierbar, sondern auch stetig ist. Der Kovarianzoperator

$$G^*G : \mathbf{L}^2([0, 1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([0, 1]) : \xi \longmapsto \int_0^1 \min(\diamond, t) \cdot \xi(t) dt$$

ist injektiv und durch

$$G^*G = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{4}{(2\lambda+1)^2 \pi^2} \left| \sqrt{2} \sin \left( \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot \text{id} \right) \right| \left( \sqrt{2} \sin \left( \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot \text{id} \right) \right)$$

diagonalisiert, wie man z. B. Yaglom (1987, [50], Vol. I, p. 451) oder auch Adler (1990, [1], Abschnitt III.3) entnimmt. Mittels der positiven Wurzel  $\rho = \frac{2}{(2\text{id}+1) \cdot \pi}$  auf  $\mathbb{N}$  erhalten wir als Bild der kanonischen Zerlegung (gemäß Satz 1)

$$\mathcal{G} = \int_{[0,1]}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \hookrightarrow \mathbf{L}^2([0, 1])$$

mit

$$\Theta_x := \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2 \cdot \sqrt{2} \sin \left( \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot x \right)}{(2\lambda+1) \pi} \cdot \sqrt{2} \sin \left( \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot \text{id} \right) .$$

Der Parseval-Repräsentant von  $\Xi_t$  in dieser Zerlegung ist

$$\mathbf{L}^2(\lambda_{[0,1]}) \ni \widehat{\Xi}_t = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2 \cdot \sqrt{2} \sin \left( \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot t \right)}{(2\lambda+1) \pi} \cdot \sqrt{2} \sin \left( \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot \text{id} \right) .$$

Als Spektralzerlegung mittels der gleichen Wurzel  $\rho$  ergibt sich (gemäß Satz 2):

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathbb{K} \cdot \left( \frac{2 \cdot \sqrt{2} \sin \left( \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot \text{id} \right)}{(2\lambda+1) \cdot \pi} \right) \quad \text{in } \mathbf{L}^2([0, 1]) .$$

Der Parseval-Repräsentant für  $\Xi_t$  lässt sich hierfür als

$$\ell^2(\mathbb{N}) \ni \widehat{\Xi}_t = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin \left( \left( \text{id} + \frac{1}{2} \right) \pi \cdot t \right)}{\left( \text{id} + \frac{1}{2} \right) \pi}$$

nachweisen.

**BEISPIEL 2** Daneben kann anhand der Brownschen Bewegung beispielhaft gezeigt werden, dass der Satz 1 nicht die volle Vielfalt an Bildzerlegungen abdeckt, die durch die abstrakte Theorie des ersten Kapitels zur Verfügung steht. Der Kovarianzoperator der Brownschen Bewegung  $(\Xi_t)_{t \in [0,1]}$  wird nämlich auch durch den nicht-normalen Operator

$$W : \mathbf{L}^2([0, 1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([0, 1]) : \xi \longmapsto \int_0^1 \xi(t) \cdot 1_{[0,t]} dt$$

<sup>26</sup> Es sei hier auf Fragen der Simulation oder der Dimensionsreduktion hingewiesen.

faktoriisiert. Der adjungierte Operator ist

$$W^\dagger = W^* : \mathbf{L}^2([0, 1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([0, 1]) : \xi \longmapsto (1_{[0, \diamond]} | \xi) .$$

Dieser besitzt die stetige, injektive Fortsetzung

$$V^\dagger : \mathcal{M}([0, 1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1]) \subset \mathbf{L}^2([0, 1]) : \mu \longmapsto \mu([0, \diamond]) .$$

Als Bild der kanonischen Zerlegung erhalten wir

$$\mathcal{G} = \int_{[0, 1]}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \hookrightarrow \mathbf{L}^2([0, 1])$$

mit

$$\Theta_x := V^\dagger \varepsilon_x = 1_{[x, 1]} .$$

Der Parseval-Repräsentant von  $\Xi_t$  in dieser Zerlegung ist nach Satz 2.5

$$\widehat{\Xi}_t = 1_{[0, t]} .$$

**BEISPIEL 3** In diesem Beispiel wollen wir zeigen, dass wiederum die abstrakte Fassung aus Abschnitt 1.2, aber auch nicht-kanonische Hilbert-Räume  $\mathcal{V}$  zur Bildzerlegung herangezogen werden müssen. Das ( $d$ -dimensionale) Brownsche Blatt  $(B_\gamma^d(t))_{t \in \mathbf{T}}$  auf  $\mathbf{T} := [0, 1]^d$  (mit Parameter  $\gamma \in ]0, 2[^d$ ) ist sicherlich ein stetiger, normal quadratisch integrierbarer Prozess. Also ist  $(B_\gamma^d(t))_{t \in \mathbf{T}}$  bzgl.  $\lambda_{[0, 1]^d}$  in  $\mathcal{M}([0, 1]^d)$  injektiv einbettbar und abschließbar (mit Abschluss  $G$  des Prozesskerns). Kühn und Linde geben in ihrem Artikel 'Optimal series representation of fractional Brownian sheets' (2002, [25]) eine (stetige) Adjungierte

$$(T_\gamma^d)^\dagger : \mathcal{M}([0, 1]^d) \longrightarrow \mathcal{V} := \bigotimes_{j=1, \dots, d} \left( \mathbf{L}^2([0, 1]) \oplus \mathbf{L}^2(]-\infty, 0]) \right)$$

an, für die

$$\left( (T_\gamma^d)^\dagger(\varepsilon_s) \middle| (T_\gamma^d)^\dagger(\varepsilon_t) \right) = \frac{1}{2^d} \prod_{j=1}^d (|s_j|^{\gamma_j} + |t_j|^{\gamma_j} - |s_j - t_j|^{\gamma_j}) = (B_\gamma^d(s) | B_\gamma^d(t))$$

in Abhängigkeit von  $s, t \in [0, 1]^d$  die Kovarianzfunktion des Brownschen Blatts ist. Der stetige Operator

$$W := (T_\gamma^d)^\dagger|_{\mathbf{L}^2([0, 1]^d)} : \mathbf{L}^2([0, 1]^d) \longrightarrow \mathcal{V}$$

ist partiell unitär äquivalent zu  $G$ . In der Tat gilt für  $\varphi \in \mathcal{K}([0, 1]^d)$

$$\begin{aligned} (Wh\varphi | Wh\varphi) &= \left( \int h\varphi(s) \cdot (T_\gamma^d)^\dagger(\varepsilon_s) ds \middle| \int h\varphi(t) \cdot (T_\gamma^d)^\dagger(\varepsilon_t) dt \right) = \\ &= \int \overline{\varphi(s)} \cdot \int \left( (T_\gamma^d)^\dagger(\varepsilon_s) \middle| (T_\gamma^d)^\dagger(\varepsilon_t) \right) \cdot \varphi(t) dt ds = \\ &= \int \overline{\varphi(s)} \cdot \int (B_\gamma^d(s) | B_\gamma^d(t)) \cdot \varphi(t) dt ds = (g\varphi | g\varphi) . \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{M}([0, 1]^d) & & \\
 & & \downarrow (T_\gamma^d)^\dagger & & \\
 & & \searrow & & \\
 & \uparrow & & \nu & \\
 & & w & & w^* \\
 & & \nearrow & & \searrow \\
 \mathcal{K}([0, 1]^d) & \longrightarrow & \mathbf{L}^2([0, 1]^d) & & \mathbf{L}^2([0, 1]^d) \subset \mathcal{M}([0, 1]^d) \\
 & & \searrow & & \nearrow \\
 & & G & & G^* \\
 & & & \mathcal{G} & 
 \end{array}$$

Jede Orthonormalbasis  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des Bildes  $W(\mathbf{L}^2([0, 1]^d))$  führt unter  $W^*$  oder  $(Wh)^\dagger$  zu einer direkten Bildzerlegung des Prozessraums

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}}^2 \mathbb{K} \cdot \Theta_k \quad \text{in } \mathbf{L}^2([0, 1]^d) \text{ oder } \mathcal{M}([0, 1]^d)$$

mittels

$$\Theta_k = T_\gamma^d f_k \in \mathcal{C}([0, 1]^d) \hookrightarrow \mathbf{L}^2([0, 1]^d) \hookrightarrow \mathcal{M}([0, 1]^d) \quad , \quad k \in \mathbb{N} ,$$

mit der Darstellung (vgl. Satz 2.5)

$$B_\gamma^d(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\Theta_k(t)} \cdot \Theta_k \quad \text{für alle } t \in [0, 1]^d .$$

Eine solche Darstellung wurde von Kühn und Linde (2002, [25], Proposition 7.3 ff) analysiert und genutzt, um Konvergenzraten der Reihendarstellung abzuschätzen.

**BEMERKUNG 4** Wie in Beispiel 1 sind auch für die Brownsche Brücke auf  $[0, 1]$  entsprechende Zerlegungen möglich. Selbst innerhalb der von Pycke (2001, [41]) erweiterten Klasse von 'Brownschen Brücken' erscheint die Anwendung von Satz 1 und Satz 2 möglich.

Eine Reihendarstellung der fraktionalen Brownschen Bewegung auf  $[0, 1]$  ist auch Gegenstand des Reports 2002-5, 'A series expansion of fractional Brownian Motion' von Dzhaparidze und van Zanten (2002, [15]). Die dortige Konstruktion verbleibt eher in den kanonischen Hilbert-Räumen und arbeitet wie üblich mit isometrischen Bildern von abzählbaren Basen (vgl. Bemerkung 2.5.1).



### 3.3 Stationäre Zeitreihen auf $\mathbb{Z}^n$

Wir gehen von der diskreten Indexmenge  $\mathbf{T} = \mathbb{Z}^n$  aus und wählen das Zählmaß  $\mu = \#$  als Radon-Integral darauf. Wie in Beispiel 1.6.3 sei  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  ( $= \mathbf{L}^2(\#)$ ) der *Pivotraum* mit üblichem Skalarprodukt. Als *Testraum* möge  $F = \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  dienen, so dass der zugehörige Kern durch

$$h = \text{Id} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$$

gegeben ist. Der Raum aller  $\#$ -Funktionen in  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  war  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$ , der Vektorraum aller Familien mit höchstens polynomiellstem Wachstum.

**DEFINITION** Unter einer *stationären Zeitreihe* verstehen wir einen Prozess  $\Xi = (\Xi_t)_{t \in \mathbb{Z}^n}$  in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{X}$ , dessen Kovarianzfunktion

$$(\Xi_s | \Xi_t) = (\Xi_{s+z} | \Xi_{t+z}) \quad \text{für alle } s, t, z \in \mathbb{Z}^n$$

erfüllt. Die zu  $\Xi$  gehörige *Autokovarianzfunktion* sei  $c : t \mapsto (\Xi_t | \Xi_0)$ . Nach dem Satz von Bochner existiert eindeutig ein positives beschränktes Maß  $\tilde{\sigma}$  auf  $\mathbb{T}^n$  derart, dass  $\mathcal{F}c = \widehat{\mathcal{F}}(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}$ , d. h.

$$c(t) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i t \cdot x} d\tilde{\sigma}(x) = \mathcal{F}\tilde{\sigma}(-t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Z}^n$$

gilt.  $\tilde{\sigma}$  heißt das *Spektralmaß* von  $\Xi$ . Ist dieses absolutstetig bzgl.  $\lambda_{\mathbb{T}^n}$ , so nennt man die Dichte *Spektraldichte* von  $\Xi$ .

Der folgende Hauptsatz zeigt, dass die Theorie der Einbettung auf stationäre Zeitreihen angewendet werden kann. Die Klasse der abschließbaren stationären Zeitreihen wird vollständig charakterisiert.

**HAUPTSATZ** Jede stationäre Zeitreihe  $\Xi$  auf  $\mathbb{Z}^n$  ist injektiv in  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  einbettbar. Der Kern des eingebetteten Prozessraums ist

$$g : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' : \varphi \mapsto \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} (\Xi_{\diamond} | \Xi_t) \cdot \varphi(t) .$$

Genauer gesagt ist die zu  $\Xi$  gehörige Autokovarianzfunktion  $c$  beschränkt und es gilt

$$g(\varphi) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} (\Xi_{\diamond-t} | \Xi_0) \cdot \varphi(t) = c * \varphi \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) .$$

Darüber hinaus sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $g$  ist abschließbar bzgl.  $h$  mit Abschluss  $G$ .
- (ii) Das Spektralmaß  $\tilde{\sigma}$  ist absolutstetig bzgl. des Lebesgue-Integrals, d. h.  $\tilde{\sigma} = \kappa \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n}$  für ein  $\kappa \in \mathbf{L}^1_+(\mathbb{T}^n)$ .
- (iii) Es gibt eine Faktorisierung  $c = w^* * w$  mit  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  und  $w^* := \overline{w^\vee} = \overline{w(-\diamond)}$ .

**Beweis**  $(\Xi_\diamond | \eta) \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  ist für alle  $\eta \in \mathcal{X}$  eine #-Funktion und für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ ,  $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$  und  $\eta \in \mathcal{X}$  gilt

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \left| \left( f(t) \cdot \varphi(t) \cdot \Xi_t | \eta \right) \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\varphi\|_1 \cdot \|\Xi_0\| \cdot \|\eta\| ,$$

woraus die Pettis-Integrierbarkeit von  $\varphi \cdot \Xi$  in  $\mathcal{X}$  folgt. Zusammengenommen zeigt dies nach Korollar 2.2, dass  $\Xi$  (bzgl. #) in  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  einbettbar ist. Nach Bemerkung 2.3.4 ist die Einbettung sogar injektiv, d. h. die Abbildung

$$|\diamond| : \overline{\text{lin}}(\Xi_{\mathbb{Z}^n}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' : \eta \longmapsto (\Xi_\diamond | \eta)$$

ist eine surjektive Isometrie auf das Bild  $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$ .

Die Äquivalenzen beweisen wir durch Ringschluss und starten mit (i). Aufgrund der Fourier-Isomorphie (vgl. folgende Bemerkung) ist die Abschließbarkeit äquivalent zur Dichtheit von  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{T}^n}) \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n} \cap \mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\sigma}$  in  $\mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\sigma}$ . Zerlegt man  $\tilde{\sigma} = \kappa \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n} + \lambda^\perp$  in absolutstetigen und singulären Anteil, so gilt

$$\mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\sigma} = (\mathbf{L}^2(\kappa \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n}) \cdot (\kappa \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n})) \boxplus (\mathbf{L}^2(\lambda^\perp) \cdot \lambda^\perp)$$

und man zeigt  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{T}^n}) \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n} \cap \mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\sigma} \subset \mathbf{L}^2(\kappa \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n}) \cdot (\kappa \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n})$ . Dies beweist, dass aus der gegebenen Dichtheit die Eigenschaft  $\lambda^\perp = 0$  bzw. (ii) notwendigerweise folgt.

Aus der Gleichheit

$$\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u \cdot \mathcal{F}v \quad \text{für alle } u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$$

folgt unmittelbar die Äquivalenz von (ii) mit (iii).

Schließlich sei  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  wie in (iii). Durch

$$W : D(W) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) : \xi \longmapsto w * \xi$$

wird auf dem Untervektorraum  $D(W) := \{\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) \mid w * \xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)\}$  ein linearer Operator wohldefiniert. Da (mit Young-Ungleichung)  $\ell^1(\mathbb{Z}^n) \subset D(W)$ , ist  $W$  dicht definiert und für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ ,  $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  gilt (mit Fubini)

$$\left[ \left\langle \varphi \mid (Wh)^\dagger \xi \right\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} = \right] \quad (w * h\varphi | \xi)_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} = \langle \varphi | \overline{w^\vee} * \xi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} = \langle \varphi | w^* * \xi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} .$$

Insbesondere ist  $Wh$  schwach stetig. Eine analoge Überlegung zeigt, dass  $W$  die Adjungierte des Operators

$$w^* * \diamond : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) : \varphi \longmapsto w^* * \varphi$$

ist, also insbesondere abgeschlossen ist. Schließlich gilt für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$

$$\left\langle \varphi \mid (Wh)^\dagger Wh\psi \right\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} = \langle \varphi | w^* * w * \psi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} = \langle \varphi | g\psi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)}$$

und die Abschließbarkeit in (i) folgt mittels Hauptsatz 1.4.

**BEMERKUNG 1** Wir wollen auf einen Zusammenhang hinweisen, der im Beweis des Hauptsatzes verwendet wurde. Unabhängig von der Abschließbarkeit findet man nämlich, dass die hilbertschen Unterräume  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  bzw.  $\mathcal{G}$  durch die Fourier-Transformation (von  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  auf  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)'$ ) isometrisch auf  $\mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n) \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n}$  bzw.  $\mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\sigma}$  abgebildet

werden<sup>27</sup>. Diese Isometrie zwischen  $\mathbf{L}^2(\tilde{\sigma})$  und dem Prozessraum  $\mathcal{G}$  wird ausgiebig in der Literatur als stochastisches Spektralintegral diskutiert (z. B. in Gihman und Skorohod (1974, [18]) oder Priestley (1981, [40])). Aus Sicht der vorliegenden Arbeit handelt es sich eher um eine Faktorisierung des Prozesskerns bzgl. des kanonischen Kerns  $v : \mathcal{D}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\sigma}$  vermöge der Fourier-Transformation als Faktor (vgl. Abschnitt 1.2). Die Bildzerlegung der trivialen Zerlegung

$$\mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) = \int_{\mathbb{T}^n}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \varepsilon_\chi d\tilde{\sigma}(\chi) \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)'$$

unter der Adjungierten  $\mathcal{F}^\dagger$  (des Faktors) liefert eine direkte eindimensionale Zerlegung

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{T}^n}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot e_\chi d\tilde{\sigma}(\chi) \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$$

mit  $e^{-2\pi i t \text{id}}$  als Parseval-Repräsentant von  $\Xi_t$ . Das 'Spektralintegral' aus der Literatur ist dann die Integralabbildung

$$\int : \mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}, \mathbb{K} \cdot e_\diamond) \longrightarrow \mathcal{G} : f \longmapsto f \cdot e_\diamond \longmapsto \int f(\chi) \cdot e_\chi d\tilde{\sigma}(\chi) .$$

Für den Rest dieses Abschnitts sei

$\Xi$  eine abschließbare stationäre Zeitreihe (auf  $\mathbb{Z}^n$ ),

$\mathcal{G}$  der Prozessraum und  $G$  der Abschluss des Prozesskerns.

Es gelten die Notationen des obigen Hauptsatzes.

**BEMERKUNG 2** Dass der Hauptsatz die abschließbaren stationären Zeitreihen vollständig charakterisiert, sieht man daran, dass zu jedem  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  die Faltung  $c := w^* * w$  eine Kovarianzfunktion zu einer stationären Zeitreihe ist, weil sie von positivem Typ ist. Der zugehörige Kern ist nach dem Hauptsatz abschließbar. Solche Faltungsdarstellungen der Kovarianzfunktion werden in folgendem Satz zu einer Bildzerlegung ausgebaut.

**SATZ 1** Sei  $w$  gemäß (iii) des Hauptsatzes zur Zeitreihe  $\Xi$  gehörig.

Durch

$$W : D(W) := \{\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) \mid w * \xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)\} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) : \xi \longmapsto w * \xi$$

wird ein Faltungsoperator wohldefiniert, der partiell unitär äquivalent zu  $G$  ist. Insbesondere gilt

$$\mathcal{G} = W^\dagger(\ell^2(\mathbb{Z}^n)) = w^* * (\ell^2(\mathbb{Z}^n))$$

mit  $W^\dagger : \ell^2(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) + \mathcal{G} : \xi \longmapsto w^* * \xi$ .

Vermöge der Bilder

$$\Theta_x := W^\dagger \varepsilon_x = w^* (\diamond - x) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) + \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)' \quad , \quad x \in \mathbb{Z}^n ,$$

<sup>27</sup> Die abgeleiteten hilbertschen Unterräume (z. B.  $\ell^2(\mathbb{Z}^n) \cap \mathcal{G}$  oder  $\ell^2(\mathbb{Z}^n) + \mathcal{G}$ ) lassen sich ebenfalls über die Transformation im Spektralbereich charakterisieren.

der kanonischen Basis  $(\varepsilon_x)_{x \in \mathbb{Z}^n}$  von  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  unter  $W^\dagger$  gilt

$$\mathcal{G} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K} \cdot \Theta_x \quad \text{und} \quad \Xi_t = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \overline{\Theta_x(t)} \cdot \Theta_x = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} w(x-t) \cdot w^*(\diamond - x)$$

in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n) + \mathcal{G}$  wie auch in  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$ .

Die Zerlegung ist genau dann nicht-degeneriert, wenn  $w \neq 0$  gilt. Weiterhin sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Zerlegung von  $\mathcal{G}$  mittels  $(\Theta_x)_{x \in \mathbb{Z}^n}$  ist direkt.
  - (ii) Das Bild  $w * D(W)$  von  $W$  ist dicht in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ .
  - (iii)  $(w(\diamond - t))_{t \in \mathbb{Z}^n}$  ist total in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ .
  - (iv) Die Spektraldichte  $\kappa$  ist  $\lambda_{\mathbb{T}^n}$ -fast überall von Null verschieden.
- In diesem Fall schreiben wir

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}^n}^2 \mathbb{K} \cdot \Theta_x \quad \text{in } \ell^2(\mathbb{Z}^n) + \mathcal{G}.$$

**Beweis** Aufgrund des Beweises von (iii)  $\implies$  (i) des Hauptsatzes genügt es, die Dichtigkeit von  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$  in  $\mathcal{D}(W)$  zu beweisen. Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  nach  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)'$  induziert eine surjektive Isometrie von  $\mathcal{D}(W)$  auf  $\mathbf{L}^2((1 + \kappa) \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n})$ , da  $|\mathcal{F}w|^2 = \kappa$ . Erneut folgt  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathcal{D}(W)$  aber diesmal als wesentlicher Definitionsbereich, denn  $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)) = \mathcal{D}(\mathbb{T}^n)$  ist dicht in  $\mathbf{L}^2((1 + \kappa) \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n})$ .

Die Darstellung des Prozessraums folgt aus Abschnitt 1.4 (Korollar (iii) bzw. Hauptsatz (ii)) und die Zerlegung folgt aus Hauptsatz 1.2, wobei wir direkt mit  $W^\dagger$  arbeiten können, da wir die triviale Zerlegung von  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  abbilden. Die Darstellung für  $\Xi_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}^n$ , erhält man mit Satz 2.5.

Wegen

$$\mathcal{G}_{\{x\}} \neq \{0\} \quad \iff \quad \Theta_x = w^*(\diamond - x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Z}^n$$

ist die Charakterisierung der Nicht-Degeneriertheit trivial.

Ferner gilt

$$\overline{\text{lin}}((w(\diamond - t))_{t \in \mathbb{Z}^n}) = \overline{W(\mathcal{D}(W))} = \overline{\langle \Theta_\diamond | \mathcal{D}(W) \rangle},$$

so dass Direktheit äquivalent zur Totalität von  $(w(\diamond - t))_{t \in \mathbb{Z}^n}$  in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  ist. Letzteres ist äquivalent zur Dichtigkeit von  $(e^{-2\pi it \cdot \text{id}} \cdot \mathcal{F}w)_{t \in \mathbb{Z}^n}$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{T}^n})$ , was gleichbedeutend mit  $|\mathcal{F}w| = \sqrt{\kappa} \neq 0$   $\lambda_{\mathbb{T}^n}$ -fast überall ist.

**BEMERKUNG 3** Die Abschließbarkeit von  $g$  vorausgesetzt, besagt der Satz 1, dass zu  $G$  partiell unitär äquivalente Faltungsoperatoren  $W$  in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  existieren. Da wir in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  zerlegt haben, beliefen sich die Kriterien aus Abschnitt 1.2 auf die Dichtigkeit von  $W(D(W))$  in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ , um eine direkte Bildzerlegung zu erhalten. Eine zusätzliche Fortsetzbarkeit wurde unnötig.

Darüber hinaus entsprechen die zu  $G$  partiell unitär äquivalenten Faltungsoperatoren genau den 'Folgen'  $w$  aus (iii) des Hauptsatzes, wie aus dem Beweis ersichtlich ist. Es verbleibt noch zu bemerken, dass jeder zu  $G$  partiell unitär äquivalente Faltungsoperator  $W$  durch  $w = W1_{\{0\}}$  eine 'Folge' mit den Eigenschaften aus (iii) liefert. Diese Entsprechung ist ein-eindeutig.

Es sei hier aber daran erinnert, dass es sich trotzdem um eine gewisse Einschränkung handelt. Es gibt auch zu  $G$  partiell unitär äquivalente Operatoren  $W$  (in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ ), die nicht durch Faltung definiert sind (ganz zu schweigen von denen, die nicht nach  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  abbilden).

**BEMERKUNG 4** An dieser Stelle sei noch auf den Zusammenhang mit den Konstruktionen hingewiesen, die im Allgemeinen in der Literatur zu finden sind - z. B. bei Priestley (1981, [40], Abschnitt 10.1) oder bei Gihman und Skorohod (1974, [18], Abschnitt IV.7). So wie die vorliegende Arbeit auch, geht man dort von einer stationären Zeitreihe mit absolutstetigem Spektrum  $\kappa \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n}$  aus, wobei zunächst  $\mathbf{L}_+^1(\lambda_{\mathbb{T}^n}) \ni \kappa > 0$  auf  $\mathbb{T}^n$  angenommen wird. Für jede geeignete Wurzel  $\rho$  mit  $|\rho|^2 = \kappa$  bildet nun  $\left(\frac{\exp(-2\pi i x \bullet \text{id})}{\rho}\right)_{x \in \mathbb{Z}^n}$  eine hilbertsche Basis von  $\mathbf{L}^2(\kappa \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n})$ , die Bilder  $(\Theta_x)_{x \in \mathbb{Z}^n}$  unter dem Spektralintegral sind dementsprechend eine hilbertsche Basis von  $\mathcal{G}$ . Dies ist aber genau die im Satz 1 konstruierte Basis, die Eigenschaft  $\kappa > 0$  auf  $\mathbb{T}^n$  gewährleistet die Direktheit.

Auf die Eigenschaft  $\kappa > 0$  auf  $\mathbb{T}^n$  kann verzichtet werden, wenn man nur eine analoge Darstellung der  $\Xi_t$  mittels eines Orthonormalsystems herleiten möchte (vgl. Koopmans (1974, [24], p. 252)). Eine analoge Herleitung, die im Wesentlichen auf einer Erweiterung des Raums beruht, ist auch bei den hier entwickelten Bildzerlegungen möglich.

Nach Priestley (1981, [40], Abschnitt 10.1) wird die oben beschriebene Basisdarstellung des stationären Prozesses zur Prädiktion auf eine Art verwendet, die man bis auf Kolmogorov zurückführt. Wir werden später versuchen, ein ähnliches Vorgehen auch ausserhalb der stationären Prozesse zu entwickeln.

Für die Spektralzerlegung, die im unten stehenden Satz 2 gezeigt wird, benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

**LEMMA** *Der Pivotraum ist durch*

$$\ell^2(\mathbb{Z}^n) = \int_{\mathbb{T}^n}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot e_\chi d\chi \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$$

*direkt zerlegt, wobei  $e_\chi = \exp(2\pi i \chi \bullet \diamond)$  bezeichnet. In dieser Zerlegung gilt für  $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$*

$$\xi = \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{\xi}(\chi) \cdot e_\chi d\chi ,$$

*wobei der Parseval-Repräsentant durch die Fourier-Transformierte  $\widehat{\xi} = \mathcal{F}\xi$  gegeben ist.*

**Beweis** Dies ist die übliche Fourier-Zerlegung in der Formulierung von Portenier (2002, [38]).

**SATZ 2** *Sei  $\Xi$  eine abschließbare stationäre Zeitreihe mit Spektraldichte  $\kappa$ .*

Der Kovarianzoperator  $G^*G$  ist in der Zerlegung des Lemmas diagonal mit Diagonale  $\kappa$ , d. h. es ist

$$G^*G = Z_\kappa : \mathcal{D}(Z_\kappa) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{T}^n} (\kappa \cdot \widehat{\xi})(\chi) \cdot e_\chi d\chi$$

mit  $D(Z_\kappa) = \left\{ \xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) \mid \kappa \cdot \widehat{\xi} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n) \right\}$ .

Für alle  $\rho \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)$  mit  $\kappa = |\rho|^2$  lässt sich der eingebettete Prozessraum direkt durch

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{T}^n \setminus \{\kappa=0\}}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot (\rho(\chi) \cdot e_\chi) d\chi \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$$

zerlegen. Der Parseval-Repräsentant von  $\Xi_t$  in dieser Spektralzerlegung ist

$$\bar{\rho} \cdot \exp(-2\pi i t \bullet \text{id}) .$$

**Beweis** Für jedes  $\rho \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)$  mit  $|\rho|^2 = \kappa$  wird durch

$$Z_\rho : \mathcal{D}(Z_\rho) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n) : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{T}^n} (\rho \cdot \widehat{\xi})(\chi) \cdot e_\chi d\chi$$

ein (abgeschlossener) normaler Operator in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  auf

$$D(Z_\rho) = \left\{ \xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) \mid \rho \cdot \widehat{\xi} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n) \right\}$$

definiert (vgl. Portenier (2002, [38], Kap. 8)). Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$  nach  $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)'$  induziert eine Isometrie von  $\mathcal{D}(Z_\rho)$  auf  $\mathbf{L}^2((1 + \kappa) \cdot \lambda_{\mathbb{T}^n})$ . Man erhält wie bei der Bildzerlegung  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathcal{D}(Z_\rho)$  als wesentlichen Definitionsbereich und

$$Z_\rho \xi = \left[ \mathcal{F}(\rho \cdot \widehat{\xi}) \right]^\vee = \mathcal{F}(\check{\rho} \cdot \widehat{\mathcal{F}}\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathcal{D}(Z_\rho) ;$$

insbesondere ist  $Z_\rho h : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n)$  stetig. Ferner gilt für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$

$$\begin{aligned} (Z_\rho h \varphi | Z_\rho h \psi)_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} &= (\rho \cdot \mathcal{F}\varphi | \rho \cdot \mathcal{F}\psi)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)} = \left\langle \widehat{\mathcal{F}}\bar{\varphi} \cdot \widehat{\mathcal{F}}\check{\psi}, \widehat{\mathcal{F}}(\check{c}) \right\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)} = \\ &= \langle \varphi^* * \psi, \check{c} \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} = \langle \bar{\varphi}, c * \psi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)} \end{aligned}$$

und somit  $(Z_\rho h)^\dagger(\ell^2(\mathbb{Z}^n)) = \mathcal{G}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)'$ . Insgesamt folgt  $G^*G = Z_\rho^* Z_\rho = Z_\kappa$  und die Spektralzerlegung von  $G^*G$  ist die obige. Alles Weitere folgt aus Hauptsatz 1.5. Für die Parseval-Repräsentanten genügt es,  $\Xi_t = g1_{\{t\}}$  bzw.  $\widehat{\Xi}_t = \widehat{g1_{\{t\}}}$  in Hauptsatz 1.5 auszunutzen oder auf Satz 2.5 zurückzugreifen.

**BEMERKUNG 5** Ähnlich wie in Bemerkung 2 angemerkt kann man (über  $W = Z_\rho$ ) eine Beziehung zwischen den zu  $G$  partiell unitär äquivalenten Faltungsoperatoren  $W$  in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  und den Funktionen  $\rho \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)$  mit  $|\rho|^2 = \kappa$  formulieren.

Die Zerlegung des Satzes 1 findet man wieder vor, wenn man als Faktor den Operator  $W = M_\rho \circ \widehat{\mathcal{F}} \circ \check{\diamond} = M_\rho \circ \mathcal{F} : \mathcal{D}(Z_\rho) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)$  wählt, wobei  $\rho \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n)$  mit  $|\rho|^2 = \kappa$  gelte. Dann lässt sich nämlich die Fourier-Zerlegung

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{T}^n) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{K} \cdot e_{-k}$$

mittels  $W^\dagger$  abbilden. Man erhält die gleiche Zerlegung und äquivalente Direktheitskriterien wie in Satz 1. In der Tat ist

$$w^* = (\mathcal{F}\bar{\rho})(-\diamond) = \int \bar{\rho}(\chi) \cdot e^{-2\pi i(-\diamond)\bullet\chi} d\chi$$

und somit für  $t, k \in \mathbb{Z}^n$

$$w^*(t - k) = (\mathcal{F}\bar{\rho})(k - t) = \langle e^{-2\pi i t \bullet \text{id}} | \bar{\rho} \cdot e_{-k} \rangle = \langle 1_{\{t\}} | \mathcal{F}^\dagger \circ M_{\bar{\rho}}(e_{-k}) \rangle .$$

Hier sieht man noch einmal die Äquivalenz der Totalität von  $(w(\diamond - t))_{t \in \mathbb{Z}^n}$  in  $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$  zur Injektivität von  $M_{\bar{\rho}}$ . Letzteres entspricht genau der Forderung '  $\kappa \neq 0$   $\lambda_{\mathbb{T}^n}$ -fast überall' des Satzes 1.

### 3.4 Stationäre Prozesse auf $\mathbb{R}^n$

Wir gehen von der Indexmenge  $\mathbf{T} = \mathbb{R}^n$  aus und wählen das Lebesgue-Maß  $\mu = \lambda^n$  als Radon-Integral darauf. Wie in Beispiel 1.6.4 sei  $\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\lambda^n)$  der *Pivotraum* mit üblichem Skalarprodukt. Als *Testraum* möge  $F = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dienen, so dass der zugehörige Kern durch

$$h = \text{Id} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

gegeben ist. Als  $\lambda^n$ -Funktionen in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  werden uns nur solche aus  $\mathbf{L}^\infty(\lambda^n)$  begegnen.

**DEFINITION** Unter einem (stetigen) *stationären Prozess* verstehen wir einen stetigen Prozess  $\Xi$  auf  $\mathbb{R}^n$  in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{X}$ , dessen Kovarianzfunktion

$$(\Xi_s | \Xi_t) = (\Xi_{s+r} | \Xi_{t+r}) \quad \text{für alle } s, t, r \in \mathbb{R}^n$$

erfüllt. Die zu  $\Xi$  gehörige *Autokovarianzfunktion* sei  $c : t \longmapsto (\Xi_t | \Xi_0)$ . Nach dem Satz von Bochner existiert eindeutig ein positives beschränktes Maß  $\tilde{\sigma}$  auf  $\mathbb{R}^n$  derart, dass  $\mathcal{F}c = \tilde{\sigma}$ , d. h.

$$c(t) = \mathcal{F}^{-1}\tilde{\sigma}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i t \cdot \chi} d\tilde{\sigma}(\chi) = (\mathcal{F}\tilde{\sigma})(-t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}^n$$

gilt.  $\tilde{\sigma}$  heißt das *Spektralmaß* von  $\Xi$ . Ist dieses absolutstetig bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ , so nennt man die Dichte *Spektraldichte* von  $\Xi$ .

Die Anwendbarkeit der Einbettungs- und Abschließungstheorie dieser Arbeit ist für solche stationären Prozesse ähnlich möglich, wie schon für stationäre Zeitreihen. Genauer gilt:

**HAUPTSATZ** Jeder stationäre Prozess  $\Xi$  ist injektiv in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  einbettbar. Der Kern des eingebetteten Prozessraums ist

$$g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} (\Xi_\diamond | \Xi_t) \cdot \varphi(t) dt .$$

Genauer ist die zu  $\Xi$  gehörige Autokovarianzfunktion  $c$  stetig und beschränkt und es gilt

$$g(\varphi) = \int (\Xi_{\diamond-t} | \Xi_0) \cdot \varphi(t) dt = c * \varphi \in \mathbf{L}^\infty(\lambda^n) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

Darüber hinaus sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $g$  ist abschließbar bzgl.  $h$  mit Abschluss  $G$ .
- (ii) Das Spektralmaß  $\tilde{\sigma}$  ist absolutstetig bzgl. des Lebesgue-Integrals, d. h.  $\tilde{\sigma} = \kappa \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}$  für ein  $\kappa \in \mathbf{L}^1_+(\mathbb{R}^n)$ .
- (iii) Es gibt eine Faktorisierung  $c = w^* * w$  mit  $w \in \mathbf{L}^2(\lambda^n)$  und  $w^* := \overline{w^\vee} = \overline{w(-\diamond)}$ .



**Beweis** Der Beweis verläuft analog zu dem stationärer Zeitreihen<sup>28</sup> auf  $\mathbb{Z}^n$ .

**BEMERKUNG 1** Wie im Fall stationärer Zeitreihen prüft man nach, dass die hilbertschen Unterräume  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$  bzw.  $\mathcal{G}$  durch die Fourier-Transformation auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  isometrisch auf  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n}) \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}$  bzw.  $\mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\sigma}$  abgebildet werden<sup>29</sup>. Ebenso eröffnet die zu Bemerkung 3.3.1 analoge Faktorisierung des Prozesskerns vermöge  $\mathcal{F}$  die entsprechende Interpretation des in der Literatur diskutierten 'Spektralintegrals'.

Für den Rest dieses Abschnitts sei

$\Xi$  ein abschließbarer stationärer Prozess (auf  $\mathbb{R}^n$ ),

$\mathcal{G}$  der Prozessraum und  $G$  der Abschluss des Prozesskerns.

Es gelten die Notationen des obigen Hauptsatzes.

**BEMERKUNG 2** Auch bei kontinuierlichem Parameterraum  $\mathbb{R}^n$  sind die Kovarianzfunktionen abschließbarer stationärer Prozesse genau solche Funktionen, die sich in Form  $c := w^* * w$  mit  $w \in \mathbf{L}^2(\lambda^n)$  schreiben lassen. Darüber finden sich zu  $G$  partiell unitär äquivalente Faltungsoperatoren  $W$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$ . Auch wenn diese nicht alle zu  $G$  partiell unitär äquivalenten Operatoren sind, so besitzen sie jedoch alle Eigenschaften, um Bildzerlegungen zu konstruieren. Wir präzisieren dies in folgendem Lemma 1 und Satz 1.

**LEMMA 1** *In der Semidualität  $\langle \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\lambda^n) | \mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) \rangle$  lässt sich  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$  vermöge der Dirac-Integrale  $(\varepsilon_x)_{x \in \mathbb{R}^n} \subset \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$  direkt zerlegen:*

$$\mathbf{L}^2(\lambda^n) = \int_{\mathbb{R}^n}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \varepsilon_x dx \quad \text{in } \mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) .$$

**Beweis** Die Semidualität ist schon aus Beispiel 1.6.5 bekannt und die Zerlegung weist man mit den Methoden von Portenier (2002, [38]) nach.

**SATZ 1** *Sei  $w$  gemäß (iii) des Hauptsatzes zu  $\Xi$  gehörig.*

*Durch*

$$W : D(W) := \{ \xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n) \mid w * \xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n) \} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n) : \xi \longmapsto w * \xi$$

*wird ein Faltungsoperator wohldefiniert, der partiell unitär äquivalent zu  $G$  ist. Insbesondere gilt*

$$\mathcal{G} = W^\dagger(\mathbf{L}^2(\lambda^n)) = w^* * (\mathbf{L}^2(\lambda^n))$$

*mit  $W^\dagger : \mathbf{L}^2(\lambda^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{G} : \xi \longmapsto w^* * \xi$ .*

*Der lineare Operator*

$$V : \mathcal{D}(W) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\lambda^n) : \xi \longmapsto w * \xi$$

<sup>28</sup> Eine Ausformulierung des Beweises zeigt: Für die Einbettbarkeit genügt schwache Messbarkeit des Prozesses; Stetigkeit ist an dieser Stelle notwendig.

<sup>29</sup> Analoges gilt für die abgeleiteten hilbertschen Unterräume (z. B.  $\mathbf{L}^2(\lambda^n) \cap \mathcal{G}$  oder  $\mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{G}$ ).

ist wohldefiniert, stetig bzgl. den entsprechenden Normtopologien und die Adjungierte

$$V^\dagger : \mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{G}$$

stimmt mit  $W^\dagger$  auf  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$  überein.

Vermöge der Bilder

$$\Theta_x := V^\dagger \varepsilon_x = w^*(\diamond - x) \in \mathbf{L}^2(\lambda^n) \subset \mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad ,$$

der Dirac-Integrale unter  $V^\dagger$  gilt

$$\mathcal{G} = \int \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \quad \text{und} \quad \Xi_t = \int \overline{\Theta_x(t)} \cdot \Theta_x dx = \int w(x-t) \cdot w^*(\diamond - x) dx$$

in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{G}$  wie auch in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ .

Die Zerlegung ist genau dann nicht-degeneriert, wenn  $w \neq 0$ . Weiterhin sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Zerlegung von  $\mathcal{G}$  mittels  $(\Theta_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$  ist direkt.
- (ii) Das Bild  $w * D(W)$  von  $W$  ist dicht in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$ .
- (iii)  $(w(\diamond - t))_{t \in \mathbb{R}^n}$  ist total in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$ .
- (iv) Die Spektraldichte  $\kappa$  ist  $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ -fast überall von Null verschieden.  
In diesem Fall schreiben wir

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}^n}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{G} \quad .$$

**Beweis** Die Wohldefiniertheit von  $W$  ist klar. Eine analoge Überlegung wie im Fall stationärer Zeitreihen zeigt, dass  $W$  die Adjungierte des Operators

$$w^* * \diamond : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n) : \varphi \longmapsto w^* * \varphi \quad ,$$

also insbesondere abgeschlossen ist. Schließlich gilt für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\left\langle \varphi \left| (Wh)^\dagger Wh\psi \right. \right\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \langle \varphi | w^* * w * \psi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \langle \varphi | g\psi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$$

und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist wesentlicher Definitionsbereich von  $W$ . Die Darstellung des Prozessraums folgt somit aus Abschnitt 1.4 (oder nach Fortsetzung mit Lemma 1.2).

Nun zur Fortsetzung: Die Faltung zweier  $\mathbf{L}^2$ -Funktionen liefert eine  $\mathcal{C}^0$ -Funktion und die Stetigkeit von  $V$  ist klar (Young-Ungleichung und Stetigkeit von  $W$  auf  $\mathcal{D}(W)$ ). Die Adjungierte ist durch die Gleichung

$$\left\langle \eta \left| V^\dagger(\xi + \mu) \right. \right\rangle_{\mathcal{D}(W)} = \langle w * \eta | \xi + \mu \rangle = (w * \eta | \xi)_{\mathbf{L}^2(\lambda^n)} + \langle w * \eta | \mu \rangle_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)}$$

für alle  $\eta \in \mathcal{D}(W)$ ,  $\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n)$ ,  $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$  festgelegt. Insbesondere gilt

$$\left\langle \eta \left| V^\dagger(\xi + 0) \right. \right\rangle_{\mathcal{D}(W)} = (w * \eta | \xi)_{\mathbf{L}^2(\lambda^n)} = (W\eta | \xi) = \left\langle \eta \left| W^\dagger \xi \right. \right\rangle_{\mathcal{D}(W)}$$

und

$$\left\langle \eta \left| V^\dagger \varepsilon_x \right. \right\rangle_{\mathcal{D}(W)} = \langle w * \eta | \varepsilon_x \rangle_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)} = (\eta | w^*(\diamond - x))_{\mathbf{L}^2(\lambda^n)} = \langle \eta | w^*(\diamond - x) \rangle_{\mathcal{D}(W)}$$

für  $\eta \in \mathcal{D}(W)$  und  $\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n)$  bzw.  $x \in \mathbb{R}^n$ . Die Zerlegung von  $\mathcal{G}$  folgt aus Satz 1.2. Für die Darstellung von  $\Xi_t$  genügt es, auf Satz 2.5 zu verweisen.

Sicher ist  $w \neq 0$  notwendig für die Nicht-Degeneriertheit. Nimmt man umgekehrt  $w \neq 0$  an und ist  $A$   $\lambda^n$ -messbar mit

$$0 = \left\langle \varphi \left| \left( \int_A |\Theta_x\rangle \langle \Theta_x| dx \right) \varphi \right. \right\rangle = \int_A |(\varphi(\diamond + x) | w^*)|^2 dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(W) ,$$

so gilt für kompaktes  $K \subset A$  dieselbe Gleichung. Ist nun  $y \in K$ , so gibt es wegen der Dichtheit von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$  ein  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $|(\varphi(\diamond + y) | w^*)|^2 = 1$ . Die Abbildung  $x \mapsto (\varphi(\diamond + x) | w^*)$  ist stetig und wir erhalten eine offene Umgebung  $U_y$  von  $y$  mit  $|(\varphi(\diamond + x) | w^*)|^2 \geq \frac{1}{2}$  für alle  $x \in U_y$ . Wegen

$$0 = \int_K |(\varphi(\diamond + x) | w^*)|^2 dx \geq \int_{U_y \cap K} |(\varphi(\diamond + x) | w^*)|^2 dx \geq \frac{1}{2} \lambda^n(U_y \cap K)$$

ist  $U_y \cap K$  eine Nullmenge.  $K$  wird von endlich vielen  $(U_{y_j})_{j=1, \dots, u}$  überdeckt, ist also wegen  $K \subset \bigcup_{j=1}^u (U_{y_j} \cap K)$  eine Nullmenge. Dies zeigt, dass  $A$  eine lokale  $\lambda^n$ -Nullmenge ist. Die Zerlegung ist nicht-degeneriert.

Die Direktheit<sup>30</sup> ist äquivalent zur Dichtheit von  $\langle \Theta_\diamond | (\mathcal{D}(W)) \rangle$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$ , was wegen

$$\langle \Theta_\diamond | (\mathcal{D}(W)) \rangle = \langle \varepsilon_\diamond | W(\mathcal{D}(W)) \rangle = W(\mathcal{D}(W))$$

äquivalent zu (ii) ist. Da  $W$  einer durch  $\xi \in \mathcal{D}(W) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gewichteten Integration von Translatierten von  $w$  entspricht, ist die Dichtheit des Bildes äquivalent zur Dichtheit von  $(w(\diamond - t))_{t \in \mathbb{R}^n}$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$ . Wie im Fall stationärer Zeitreihen ist dies äquivalent dazu, dass  $|\mathcal{F}w| = \sqrt{\kappa} \neq 0$   $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ -fast überall gilt.

**BEMERKUNG 3** Anders als im diskreten Fall mussten wir hier den Hilbert-Raum verlassen und eine Fortsetzbarkeit musste gezeigt werden<sup>31</sup>. Ansonsten überträgt sich der in Bemerkung 3.3.3 gemachte Hinweis, dass die Faltungsoperatoren nicht alle zu  $G$  partiell unitär äquivalenten Operatoren ausschöpfen.

Die Spektralzerlegung schließt sich unmittelbar an das folgende Lemma 2 an.

**LEMMA 2** *Der Pivotraum ist durch*

$$\mathbf{L}^2(\lambda^n) = \int_{\mathbb{R}^n}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot e_\chi d\chi \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

*direkt zerlegt, wobei  $e_\chi = \exp(2\pi i \chi \bullet \diamond)$  bezeichnet. In dieser Zerlegung gilt für  $\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n)$*

$$\xi = \int \widehat{\xi}(\chi) \cdot e_\chi d\chi ,$$

*wobei der Parseval-Repräsentant durch die Fourier-Transformierte  $\widehat{\xi} = \mathcal{F}\xi$  gegeben ist.*

**Beweis** Dies ist die übliche Fourier-Zerlegung in der Formulierung von Portenier (2002, [38]).

<sup>30</sup> Die Bedingung  $w \neq 0$  ist äquivalent zur Dichtheit von  $\mathbf{L}^\infty(\lambda^n) \cdot \langle \Theta_\diamond | \mathcal{D}(W) \rangle$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$ .

<sup>31</sup> Der Hilbert-Raum braucht nicht verlassen zu werden, wenn man hilbertsche Basen *im*  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$  verwendet, für die das angegebene Konstruktionsverfahren ebenfalls eine Zerlegung liefert.

**SATZ 2** Sei  $\Xi$  ein abschließbarer stationärer Prozess mit Spektraldichte  $\kappa$ .

Der Kovarianzoperator  $G^*G$  ist in der Zerlegung des Lemma 2 diagonal mit Diagonale  $\kappa$ , d. h. es ist

$$G^*G = Z_\kappa : \mathcal{D}(Z_\kappa) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n) : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} (\kappa \cdot \widehat{\xi})(\chi) \cdot e_\chi d\chi$$

mit  $\mathcal{D}(Z_\kappa) = \{\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n) \mid \kappa \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$ .

Für alle  $\rho \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}^n})$  mit  $|\rho|^2 = \kappa$  lässt sich der eingebettete Prozessraum direkt durch

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{\kappa=0\}}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot (\rho(\chi) \cdot e_\chi) d\chi \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

zerlegen. Der Parseval-Repräsentant von  $\Xi_t$  in dieser Spektralzerlegung ist

$$\bar{\rho} \cdot \exp(-2\pi i t \bullet \text{id}) .$$

**Beweis** Für jedes  $\rho \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  mit  $|\rho|^2 = \kappa$  wird durch

$$Z_\rho : \mathcal{D}(Z_\rho) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n) : \xi \longmapsto \int (\rho \cdot \widehat{\xi})(\chi) \cdot e_\chi d\chi$$

ein (abgeschlossener) normaler Operator in  $\mathbf{L}^2(\lambda^n)$  auf

$$\mathcal{D}(Z_\rho) = \{\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n) \mid \rho \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$$

definiert (vgl. Portenier (2002, [38], Kap. 8)). Die inverse Fourier-Transformation  $\mathcal{F}^{-1}$  (auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ ) induziert eine surjektive Isometrie von  $\mathbf{L}^2((1+\kappa) \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})$  auf  $\mathcal{D}(Z_\rho)$ . Man erhält  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(Z_\rho)$  als wesentlichen Definitionsbereich und

$$Z_\rho \xi = \mathcal{F}^{-1}(\rho \cdot \mathcal{F}\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathcal{D}(Z_\rho) ,$$

insbesondere ist  $Z_\rho h : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n)$  stetig. Ferner gilt für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (Z_\rho h \varphi \mid Z_\rho h \psi)_{\mathbf{L}^2(\lambda^n)} &= (\rho \cdot \widehat{\varphi} \mid \rho \cdot \widehat{\psi})_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{F}\varphi \mid \kappa \cdot \mathcal{F}\psi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \\ &= \langle \varphi \mid \mathcal{F}^{-1}(\kappa \cdot \mathcal{F}\psi) \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \langle \varphi \mid \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(c * \psi) \rangle = \langle \varphi \mid c * \psi \rangle \end{aligned}$$

und somit  $(Z_\rho h)^\dagger(\mathbf{L}^2(\lambda^n)) = \mathcal{G}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ . Insgesamt folgt  $G^*G = Z_\rho^* Z_\rho = Z_\kappa$  und die Spektralzerlegung von  $G^*G$  ist die obige.

Die Zerlegung folgt aus Hauptsatz 1.5 und der Parseval-Repräsentant ist durch Satz 2.5 bewiesen.

Wir bestimmen noch die Adjungierte  $Z_\rho^\dagger : \mathbf{L}^2(\lambda^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda^n) + \mathcal{G}$ . Dazu beachte man, dass für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und jedes  $\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n)$

$$\langle \varphi \mid Z_\rho^\dagger \xi \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = (Z_\rho h \varphi \mid \xi)_{\mathbf{L}^2(\lambda^n)} = (\rho \cdot \mathcal{F}\varphi \mid \mathcal{F}\xi)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \varphi \mid \mathcal{F}^{-1}(\bar{\rho} \cdot \mathcal{F}\xi) \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$$

gilt. Demnach ist  $Z_\rho^\dagger \xi = \mathcal{F}^{-1}(\bar{\rho} \cdot \mathcal{F}\xi)$  für alle  $\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda^n)$ .

**BEMERKUNG 4** Alle in diesem Abschnitt gemachten Aussagen zu Einbettbarkeit, Abschließbarkeit und die gezeigten Zerlegungen sind auch im Rahmen  $\langle \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mid \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \rangle$  an Stelle von  $\langle \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \rangle$  richtig.

### 3.5 Selbstähnliche Prozesse

In diesem Abschnitt sei  $H$  eine reelle Zahl. Wir gehen von der Indexmenge  $\mathbf{T} = \mathbb{R}_+^*$  aus, wählen das positive Radon-Integral<sup>32</sup>

$$\mu := \text{id}^{-2H} \cdot \exp(\lambda_{\mathbb{R}})$$

darauf und der *Pivotraum* sei  $\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\mu)$  mit üblichem Skalarprodukt. Als *Testraum* möge  $F = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  dienen, so dass der zugehörige Kern durch

$$\tilde{h} : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' : \varphi \longmapsto [\varphi]_{\mu} = \varphi \cdot \mu$$

gegeben ist (vgl. Abschnitt 1.6).

Aus der Perspektive dieser Arbeit werden selbstähnliche Prozesse wie stationäre Prozesse durch eine Kovarianzstruktur charakterisiert. Die Verbindung ist dabei so deutlich, dass darüber die Untersuchungen der Einbettbarkeit, der Abschließbarkeit sowie der verschiedenen Zerlegungen sehr effektiv durchgeführt werden können. Die Verbindung eröffnen wir mit folgendem Lemma.

#### LEMMA 1

(i) *Durch*

$$\phi : \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : f \longmapsto \text{id}^H \cdot (f \circ \ln)$$

ist eine unitäre Abbildung mit Inverser

$$\phi^{-1} : \tilde{f} \longmapsto (\text{id}^{-H} \cdot \tilde{f}) \circ \exp = e^{-H \text{id}} \cdot \tilde{f}(\exp)$$

wohldefiniert. Die Einschränkung  $\phi|_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$  ist ein Isomorphismus von  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ .

(ii) *Die Adjungierte*

$$\Phi := \left( \phi|_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}^{-1} \right)^{\dagger} : \mathcal{D}(\mathbb{R})' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

ist ebenfalls ein Isomorphismus, welcher  $\phi$  fortsetzt.

(iii) *Seien  $f$  bzw.  $\tilde{f}$  Funktionen auf  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{R}_+^*$ .  $f$  (bzw.  $e^{-H \text{id}} \cdot \tilde{f}(\exp)$ ) ist genau dann eine  $\lambda_{\mathbb{R}}$ -Funktion in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ , wenn  $\text{id}^H \cdot (f \circ \ln)$  (bzw.  $\tilde{f}$ ) eine  $\mu$ -Funktion in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  ist. In diesem Fall gilt*

$$\Phi(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}}) = (\text{id}^H \cdot (f \circ \ln)) \cdot \mu \quad \text{bzw.} \quad \Phi^{-1}(\tilde{f} \cdot \mu) = (e^{-H \text{id}} \cdot \tilde{f}(\exp)) \cdot \lambda_{\mathbb{R}}.$$

(iv)  $\Phi$  bildet den hilbertschen Unterraum  $h^{\dagger} : \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \cdot \lambda_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})'$  isometrisch auf  $(\tilde{h})^{\dagger} : \mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  ab und es gelten analoge Formeln wie in (iii).

**Beweis** Die erste Aussage ist klar. Die zweite Aussage folgt daraufhin unmittelbar, wobei die Fortsetzung von  $\phi$  mit (iii) bewiesen ist. Wir zeigen also (iii):

<sup>32</sup>  $\exp(\lambda_{\mathbb{R}})$  allein wäre das Haar-Maß  $\frac{\lambda_{\mathbb{R}_+^*}}{\text{id}}$  auf  $\mathbb{R}_+^*$ .

Es gilt genau dann  $\tilde{\psi} \cdot \tilde{f} \in \mathbf{L}^1(\mu)$  für alle  $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ , wenn

$$\phi^{-1}(\tilde{\psi}) \cdot e^{-H\circ} \cdot (\tilde{f} \circ \exp) = e^{-H\circ} \cdot (\tilde{\psi} \circ \exp) \cdot e^{-H\circ} \cdot (\tilde{f} \circ \exp) \in \mathbf{L}^1(\lambda_{\mathbb{R}})$$

für alle  $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  gilt. Letzteres ist äquivalent zu

$$\varphi \cdot e^{-H\circ} \cdot (\tilde{f} \circ \exp) \in \mathbf{L}^1(\lambda_{\mathbb{R}}) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) .$$

Stetigkeit ist wegen der Tonneliertheit von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  und  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  automatisch erfüllt (vgl. Bemerkung 1.6.3). Die analoge Behauptung für eine Funktion  $f$  zeigt man auf die gleiche Weise und die zugehörige Formel ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\psi} \left| \Phi(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}}) \right. \right\rangle &= \int e^{-H\circ} \cdot (\tilde{\psi} \circ \exp) \cdot e^{-H\circ} \cdot [(\text{id}^H \cdot (f \circ \ln)) \circ \exp] d\lambda_{\mathbb{R}} = \\ &= \int \tilde{\psi} \cdot (\text{id}^H \cdot (f \circ \ln)) d\mu = \left\langle \tilde{\psi} \left| (\text{id}^H \cdot (f \circ \ln)) \cdot \mu \right. \right\rangle \quad \forall \tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) . \end{aligned}$$

Für Aussage (iv) beachte man, dass die Kerne von

$$\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \cdot \lambda_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})' \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

durch

$$h : \varphi \longmapsto \varphi \cdot \lambda_{\mathbb{R}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{h} : \tilde{\psi} \longmapsto \tilde{\psi} \cdot \mu$$

gegeben sind. Für alle  $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  gilt nun

$$\left\langle \tilde{\psi} \left| \Phi(\Phi^\dagger(\tilde{\psi}) \cdot \lambda_{\mathbb{R}}) \right. \right\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)} = \left\langle \tilde{\psi} \left| \phi(\phi^{-1}(\tilde{\psi})) \cdot \mu \right. \right\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)} = \left\langle \tilde{\psi} \left| \tilde{\psi} \cdot \mu \right. \right\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)} ,$$

also die Gleichheit der Kerne.

**BEMERKUNG 1** (Vgl. Nuzman und Poor (2000, [33]))  $\Phi^{-1}$  wird in der Literatur als *Lamperti-Transformation* bezeichnet und lässt sich mit den entsprechenden Formeln auch als Isomorphismus zwischen  $\mathbb{K}^{\mathbb{R}_+^*}$  und  $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$  definieren. Ausserdem lassen sich Prozesse transformieren:

Jedem Prozess  $(X_a)_{a \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{X}$  auf  $\mathbb{R}$  entspricht über

$$\Xi_t := (\Phi(X))_t := t^H \cdot X_{\ln(t)} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_+^*$$

genau ein Prozess  $(\Xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*} \subset \mathcal{X}$  auf  $\mathbb{R}_+^*$ . Den ursprünglichen Prozess erhält man durch

$$X_a = e^{-Ha} \cdot \Xi_{\exp(a)} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

zurück. In diesem Fall gilt für die entsprechenden Kovarianzfunktionen

$$c_X(a, b) = e^{-H(a+b)} \cdot c_{\Xi}(e^a, e^b) \quad \text{und} \quad c_{\Xi}(s, t) = (st)^H \cdot c_X(\ln(s), \ln(t)) .$$

Somit ist  $\Xi$  genau dann der Lamperti-transformierte Prozess eines stationären Prozesses  $X$ , wenn  $c_{\Xi}$  stetig und *homogen vom Grade  $2H$*  ist, d. h. wenn

$$(\Xi_{rs} | \Xi_{rt}) = r^{2H} (\Xi_s | \Xi_t) \quad \text{für alle } r, s, t \in \mathbb{R}_+^*$$

gilt.

**DEFINITION** Ein Prozess  $(\Xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*} \subset \mathcal{X}$  heiße *selbstähnlicher Prozess* (mit Parameter  $H$ ), wenn er der gemäß

$$\Xi_t := t^H \cdot X_{\ln(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+^*,$$

transformierte Prozess eines stationären Prozesses  $(X_a)_{a \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{X}$  ist. Der eindeutig bestimmte Prozess  $X$  wird *stationärer Erzeuger* von  $\Xi$  genannt.

**BEMERKUNG 2** Durch diese ein-eindeutige Entsprechung lassen sich die Ergebnisse zu stationären Prozessen auf solche für selbstähnliche umschreiben. Da unsere Definition von Stationarität die Stetigkeit mit einschließt, sind selbstähnliche Prozesse ebenfalls automatisch stetig. Allerdings spielt diese Eigenschaft bei der Einbettbarkeit nur für die Injektivität eine Rolle.

**HAUPTSATZ 1** Sei  $\Xi$  ein selbstähnlicher Prozess (mit Parameter  $H$ ) und  $X$  sein stationärer Erzeuger.

(i)  $\Xi$  ist bzgl.  $\mu$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  injektiv einbettbar, ebenso wie  $X$  bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$  injektiv einbettbar ist. Die Kerne der eingebetteten Prozessräume sind durch

$$\begin{aligned} g_X &: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{G}_X \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})' : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} (X_{\diamond} | X_a) \cdot \varphi(a) da \\ g_{\Xi} &: \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathcal{G}_{\Xi} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' : \tilde{\psi} \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} (\Xi_{\diamond} | \Xi_t) \cdot \tilde{\psi}(t) d\mu(t) \end{aligned}$$

gegeben und es gilt  $\mathcal{G}_{\Xi} = \Phi(\mathcal{G}_X)$  mit der Abbildung  $\Phi$  aus Lemma 1.(ii).

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a)  $g_{\Xi}$  ist bzgl.  $\tilde{h} : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu$  abschließbar.
- (b) Es existiert ein  $\kappa \in \mathbf{L}_+^1(\mathbb{R})$  mit

$$c_{\Xi}(s, t) = \int_{\mathbb{R}} \overline{s^{H-2\pi i\chi}} \cdot t^{H-2\pi i\chi} \cdot \kappa(\chi) d\chi \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}_+^* .$$

- (c)  $g_X$  ist bzgl.  $h : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \cdot \lambda_{\mathbb{R}}$  abschließbar.
- (d) Es existiert ein  $\kappa \in \mathbf{L}_+^1(\mathbb{R})$  mit

$$c_X(a, b) = \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{-2\pi i\chi \cdot a}} \cdot e^{-2\pi i\chi \cdot b} \cdot \kappa(\chi) d\chi \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R} .$$

In diesem Fall gilt (mit  $\Phi$  bzw.  $\phi$  aus Lemma 1)

$$\Phi G_X = G_{\Xi} \phi \quad \text{bzw.} \quad G_X^* G_X = \phi^{-1} G_{\Xi}^* G_{\Xi} \phi$$

für die Abschlüsse  $G_X$  bzw.  $G_{\Xi}$  der Kerne. Insbesondere ist  $W_{\Xi}$  genau dann (partiell) unitär äquivalent zu  $G_{\Xi}$ , wenn  $W_{\Xi} \phi$  (partiell) unitär äquivalent zu  $G_X$  ist.

**Beweis** Für  $\eta \in \mathcal{X}$  ist  $(\Xi_{\diamond} | \eta)$  nach dem Lemma 1.(iii) genau dann eine  $\mu$ -Funktion in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$ , wenn  $(X_{\diamond} | \eta) = e^{-H\circ} \cdot (\Xi_{\exp(\diamond)} | \eta)$  eine  $\lambda_{\mathbb{R}}$ -Funktion in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$  ist. Für

$\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $\tilde{f} \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$  gilt

$$\left( \tilde{f} \cdot \tilde{\psi} \cdot \Xi_\diamond \middle| \eta \right) \in \mathbf{L}^1(\mu) \quad \forall \eta \in \mathcal{X}$$

und Stetigkeit von

$$\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K} : \eta \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} \left( \tilde{f}(t) \cdot \tilde{\psi}(t) \cdot \Xi_t \middle| \eta \right) d\mu(t)$$

genau dann, wenn

$$\left( (\tilde{f} \circ \exp) \cdot \phi^{-1}(\tilde{\psi}) \cdot e^{-H_\diamond} \cdot \Xi_{\exp(\diamond)} \middle| \eta \right) \in \mathbf{L}^1(\lambda_{\mathbb{R}}) \quad \forall \eta \in \mathcal{X}$$

und Stetigkeit von

$$\eta \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \left( \tilde{f}(e^a) \cdot \phi^{-1}(\tilde{\psi})(a) \cdot X_a \middle| \eta \right) da$$

erfüllt sind. Dies zeigt, dass die  $\lambda_{\mathbb{R}}$ -Integrierbarkeit von  $\varphi \cdot X$  in  $\mathcal{X}$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  notwendig und hinreichend für die  $\mu$ -Integrierbarkeit von  $\tilde{\psi} \cdot \Xi$  in  $\mathcal{X}$  für alle  $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  ist. Da stationäre Prozesse auf  $\mathbb{R}$  immer bzgl.  $\lambda_{\mathbb{R}}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$  einbettbar sind, ist die erste Aussage von (i) bewiesen und die Formeln für die Kerne sind nach Hauptsatz 2.3 klar. Für  $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\psi} \middle| \Phi_{G_X} \Phi^\dagger \tilde{\psi} \right\rangle &= \int e^{-Ha} \cdot \tilde{\psi}(e^a) \int (X_a | X_b) \cdot e^{-Hb} \cdot \tilde{\psi}(e^b) db da = \\ &= \int e^{-2Ha} \cdot \tilde{\psi}(e^a) \int \left( e^{Ha} \cdot X_{\ln(e^a)} \middle| e^{Hb} \cdot X_{\ln(e^b)} \right) \cdot e^{-2Hb} \cdot \tilde{\psi}(e^b) db da = \\ &= \int s^{-2H} \cdot \tilde{\psi}(s) \cdot \int (s^H \cdot X_{\ln s} \middle| t^H \cdot X_{\ln t}) \cdot t^{-2H} \cdot \tilde{\psi}(t) d \exp(\lambda_{\mathbb{R}})(t) d \exp(\lambda_{\mathbb{R}})(s) = \\ &= \int \tilde{\psi}(s) \cdot \int (\Xi_s | \Xi_t) \cdot \tilde{\psi}(t) d\mu(t) d\mu(s) = \left\langle \tilde{\psi} \middle| g_{\Xi} \tilde{\psi} \right\rangle, \end{aligned}$$

womit  $\mathcal{G}_{\Xi} = \Phi(\mathcal{G}_X)$  gezeigt ist.

Schließlich bildet  $\Phi$  die Räume  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \cdot \lambda_{\mathbb{R}}$ ,  $\mathcal{G}_X$  und  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \cdot \lambda_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{G}_X$  isometrisch isomorph auf  $\mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu$ ,  $\mathcal{G}_{\Xi}$  und  $\mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu \cap \mathcal{G}_{\Xi}$  ab. Demnach ist  $\Xi$  genau dann abschließbar, wenn  $X$  abschließbar ist, was nach Hauptsatz 3.4 äquivalent zur Existenz eines  $\kappa \in \mathbf{L}_+^1(\mathbb{R})$  mit  $c_X(a, b) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \chi \cdot (a-b)} \cdot \kappa(\chi) d\chi$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  ist. Schließlich folgt die Äquivalenz zu (ii).(b) aus Bemerkung 1.

Im Falle der Abschließbarkeit ist genau dann  $\xi \in \mathcal{D}(G_X)$ , wenn ein  $\gamma \in \mathcal{G}_X$  derart existiert, dass

$$(\gamma | \delta)_{\mathcal{G}_X} = (\xi | \delta)_{\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})} \quad \text{für alle } \delta \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{G}_X$$

gilt. Über  $\tilde{\gamma} = \Phi\gamma$ ,  $\tilde{\xi} = \phi\xi$  und  $\tilde{\delta} = \Phi\delta$  liefert dies die Existenz eines  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}_{\Xi}$  mit

$$\left( \tilde{\gamma} \middle| \tilde{\delta} \right)_{\mathcal{G}_{\Xi}} = \left( \tilde{\xi} \middle| \tilde{\delta} \right)_{\mathbf{L}^2(\mu)} \quad \text{für alle } \tilde{\delta} \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathcal{G}_{\Xi}.$$

Damit ist  $\tilde{\xi} = \phi\xi \in \mathcal{D}(G_{\Xi})$  nachgewiesen und analog zeigt man  $\Phi^{-1}\tilde{\xi} \in \mathcal{D}(G_X)$  für  $\tilde{\xi} \in \mathcal{D}(G_{\Xi})$ . Die Beziehungen

$$\gamma = G_X \xi \quad , \quad \tilde{\gamma} = \Phi\gamma \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma} = G_{\Xi} \tilde{\xi}$$



lassen sich hierbei zu  $\Phi G_X \xi = G_{\Xi} \phi \xi$  zusammenfassen und es gilt

$$\|\Phi \xi\|_{\mathcal{D}(G_{\Xi})}^2 = \|\Phi \xi\|_{\mu}^2 + \|G_{\Xi} \Phi \xi\|_{\mathcal{G}_{\Xi}}^2 = \|\xi\|_{\lambda}^2 + \|G_X \xi\|_{\mathcal{G}_X}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{D}(G_X)}^2 .$$

Das Verbliebene folgt unmittelbar aus der Unitarität der Abbildung  $\phi$ .

**BEMERKUNG 3** Die Gleichheit  $\mathcal{G}_{\Xi} = \Phi(\mathcal{G}_X)$  findet man bei Nuzman und Poor (2001, [34], Theorem 3.1) mit diskreten Topologien auf den Parameterbereichen  $\mathbb{R}_+^*$  und  $\mathbb{R}$ , also für reproduzierende Kern-Hilbert-Räume nach Aronszajn.

**BEMERKUNG 4** Der Isomorphismus  $\Phi$  gestattet Zerlegungen von  $\mathcal{G}_X$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$  auf solche von  $\mathcal{G}_{\Xi}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  zu übertragen. Jede (direkte) Zerlegung

$$\mathcal{G}_X = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{K} \cdot \Theta_y d\nu(y) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})'$$

liefert dann eine (direkte) Zerlegung

$$\mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{K} \cdot \Phi(\Theta_y) d\nu(y) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' .$$

Die Verbindung lässt sich sogar noch in der Situation von Bildzerlegungen mittels Faktoren konkretisieren. Ist die Zuordnung von  $\mathcal{G}_X$  Abbild einer Zerlegung

$$\mathcal{V} = \int_{\mathbf{X}} \mathbb{K} \cdot v_y d\nu(y) \hookrightarrow E^{\dagger}$$

unter der Adjungierten  $V_X^{\dagger}$  eines zu  $g_X$  gehörenden Faktors  $V_X : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow E$ , so ist die Zerlegung von  $\mathcal{G}_{\Xi}$  das Abbild dieser Zerlegung unter der Adjungierten  $\Phi V_X^{\dagger}$  des zu  $g_{\Xi}$  gehörenden Faktors  $V_{\Xi} := V_X \circ \phi^{-1}$ .

Darüber hinaus besteht die Möglichkeit einer Zerlegung bzgl.  $\mu$ , sofern eine geeignete Transformation zwischen den Maßräumen  $(\nu, \mathbf{X})$  und  $(\mu, \mathbb{R}_+^*)$  existiert. Dies soll im folgenden Hauptsatz 2 in die später nützliche Form gebracht werden.

**HAUPTSATZ 2** Sei  $\Xi$  ein selbstähnlicher Prozess und  $X$  sein stationärer Erzeuger.  
Über

$$(\Theta_y)_{y \in \mathbb{R}} \longmapsto (\Phi \Theta_y)_{y \in \mathbb{R}} \longmapsto (x^H \cdot \Phi \Theta_{\ln(x)})_{x \in \mathbb{R}_+^*}$$

und die zugehörige Umkehrung

$$\left( \tilde{\Theta}_x \right)_{x \in \mathbb{R}_+^*} \longmapsto \left( e^{-Hy} \cdot \tilde{\Theta}_{\exp(y)} \right)_{y \in \mathbb{R}} \longmapsto \left( e^{-Hy} \cdot \Phi^{-1} \left( \tilde{\Theta}_{\exp(y)} \right) \right)_{y \in \mathbb{R}}$$

ist eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den direkten Zerlegungen

$$\mathcal{G}_X = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_y dy \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})'$$

des zu  $X$  gehörenden hilbertschen Unterraums und den direkten Zerlegungen

$$\mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \tilde{\Theta}_y dy \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

des zu  $\Xi$  gehörenden hilbertschen Unterraums gegeben.

Für die entsprechenden Parseval-Repräsentanten von  $\gamma \in \mathcal{G}_X$  und  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}_\Xi$  gilt

$$\begin{aligned}\Phi \left( \int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(y) \cdot \Theta_y dy \right) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(y) \cdot \Phi \Theta_y dy , \\ \int_{\mathbb{R}} \hat{\tilde{\gamma}}(y) \cdot \Phi \Theta_y dy &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \phi(\hat{\tilde{\gamma}})(x) \cdot (x^H \cdot \Phi \Theta_{\ln(x)}) d\mu(x)\end{aligned}$$

bzw.

$$\Phi^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} \hat{\tilde{\gamma}}(x) \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x) \right) = \int_{\mathbb{R}} \phi^{-1}(\hat{\tilde{\gamma}})(y) \cdot \left( e^{-Hy} \cdot \Phi^{-1}(\tilde{\Theta}_{\exp(y)}) \right) dy .$$

**Beweis** Da für  $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$

$$\left\langle \tilde{\psi} \middle| \Phi \Theta_\diamond \right\rangle = \left\langle \phi^{-1} \tilde{\psi} \middle| \Theta_\diamond \right\rangle$$

bzw.

$$\left\langle \tilde{\psi} \middle| (\text{id}^H \cdot \Phi \Theta_{\ln(\diamond)}) \right\rangle = \text{id}^H \cdot \left\langle \phi^{-1} \tilde{\psi} \middle| \Theta_\diamond \right\rangle \circ \ln = \phi \left( \left\langle \phi^{-1} \tilde{\psi} \middle| \Theta_\diamond \right\rangle \right)$$

gilt, erhält man

$$\int \left| \left\langle \tilde{\psi} \middle| (x^H \cdot \Phi \Theta_{\ln(x)}) \right\rangle \right|^2 d\mu(x) = \int \left| \left\langle \tilde{\psi} \middle| \Phi \Theta_y \right\rangle \right|^2 dy = \left\| g_X(\phi^{-1} \tilde{\psi}) \right\|_{\mathcal{G}_X}^2 = \left\| g_\Xi \tilde{\psi} \right\|_{\mathcal{G}_\Xi}^2$$

für alle  $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ . Ausserdem ist die Dichtigkeit von  $\langle \mathcal{D}(\mathbb{R}) | \Theta_\diamond \rangle$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$  sowohl äquivalent zur Dichtigkeit von  $\langle \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) | \Phi \Theta_\diamond \rangle$  in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$  als auch äquivalent zur Dichtigkeit von  $\langle \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) | (\text{id}^H \cdot \Phi \Theta_{\ln(\diamond)}) \rangle$  in  $\mathbf{L}^2(\mu)$ . Für die umgekehrte Zuordnung ist der Nachweis auf die gleiche Art durchzuführen.

Schließlich sind noch für alle  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  und  $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$  die Gleichheiten

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{\psi} \middle| \Phi \left( \int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(y) \cdot \Theta_y dy \right) \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(y) \cdot \left\langle \phi^{-1} \tilde{\psi} \middle| \Theta_y \right\rangle dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(y) \cdot \left\langle \tilde{\psi} \middle| \Phi \Theta_y \right\rangle dy , \\ \left\langle \tilde{\psi} \middle| \left( \int_{\mathbb{R}} \hat{\tilde{\gamma}}(y) \cdot \Phi \Theta_y dy \right) \right\rangle &= \left( \overline{\left\langle \phi^{-1} \tilde{\psi} \middle| \Theta_\diamond \right\rangle} \middle| \hat{\tilde{\gamma}} \right) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \phi(\hat{\tilde{\gamma}}) \cdot \phi \left( \left\langle \phi^{-1} \tilde{\psi} \middle| \Theta_\diamond \right\rangle \right) d\mu\end{aligned}$$

bzw.

$$\left\langle \psi \middle| \Phi^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} \hat{\tilde{\gamma}} \cdot \tilde{\Theta}_\diamond d\mu \right) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi^{-1}(\hat{\tilde{\gamma}})(y) \cdot \left\langle \psi \middle| e^{-Hy} \cdot \Phi^{-1}(\tilde{\Theta}_{\exp(y)}) \right\rangle dy$$

für den Nachweis der Parseval-Repräsentanten zu bemerken.

Für den Rest dieses Abschnitts sei

$\Xi$  ein abschließbarer selbstähnlicher Prozess (auf  $\mathbb{R}_+^*$  mit Parameter  $H$ ),

$\mathcal{G}_\Xi$  der Prozessraum und  $G_\Xi$  der Abschluss des Prozesskerns.

Es gelten die Notationen der obigen Hauptsätze.

Die Abschließbarkeit gestattet nun mittels Hauptsatz 2 eine Übertragung des Satzes 3.4.1 in den Rahmen von selbstähnlichen Prozessen:

**SATZ 1** Sei  $X$  der zu  $\Xi$  gehörige abschließbare stationäre Erzeuger und  $G_X$  der Abschluss des Prozesskerns  $g_X$ . Wie in Satz 3.4.1 bezeichne

$$W_X = w * \diamond : \mathcal{D}(W_X) = \{\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \mid w * \xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})\} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$$

den zu  $G_X$  (partiell) unitär äquivalenten Faltungoperator.

Durch

$$W_{\Xi} := \phi \circ W_X \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{D}(W_X)) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

$$\tilde{\xi} \longmapsto \phi(w) * \tilde{\xi} = (\text{id}^H \cdot (w \circ \ln)) * \tilde{\xi} = \text{id}^H \cdot \int_{\mathbb{R}_+^*} s^H \cdot w \left( \ln \left( \frac{\diamond}{s} \right) \right) \cdot \tilde{\xi}(s) d\mu(s)$$

wird ein Faltungoperator<sup>33</sup> wohldefiniert, der partiell unitär äquivalent zu  $G_{\Xi}$  ist. Insbesondere gilt

$$\mathcal{G}_{\Xi} = W_{\Xi}^{\dagger}(\mathbf{L}^2(\mu)) = \phi(w^*) * (\mathbf{L}^2(\mu))$$

mit  $W_{\Xi}^{\dagger} : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) + \mathcal{G}_{\Xi} : \tilde{\eta} \longmapsto \phi(w)^* * \tilde{\eta}$ , wobei alle Faltungen bzgl. des Haar-Maßes  $\exp(\lambda_{\mathbb{R}})$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  verstanden sein sollen.

Es gilt

$$\mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cdot \tilde{\Theta}_y dy \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}_+^*} \mathbb{K} \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' ,$$

wobei

$$\tilde{\Theta}_y = \Phi \Theta_y = \Phi(w^*(\diamond - y)) \quad , \quad y \in \mathbb{R} ,$$

bzw.

$$\tilde{\Theta}_x = x^H \cdot \Phi \Theta_{\ln(x)} = (\diamond \cdot x)^H \cdot \left( \bar{w} \circ \ln \left( \frac{x}{\diamond} \right) \right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+^* .$$

Die Kriterien für Nicht-Degeneriertheit und Direktheit der Zerlegungen sind die aus dem Satz 3.4.1. Die entsprechenden Parseval-Repräsentanten von  $\Xi_s \in \mathcal{G}_{\Xi}$  sind

$$\widehat{\Xi}_s = s^H \cdot w(\diamond - \ln s) \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \quad , \quad \text{bzw.} \quad \widehat{\Xi}_s(x) = (s \cdot \diamond)^H \cdot w \left( \ln \left( \frac{\diamond}{s} \right) \right) \in \mathbf{L}^2(\mu) .$$

**Beweis** Es ist zunächst die Abbildungsvorschrift nachzuweisen. Für  $\tilde{\delta} \in \phi(\mathcal{D}(W_X))$  ist

$$\begin{aligned} \phi \circ W_X \circ \phi^{-1}(\tilde{\delta}) &= \phi \left( \int_{\mathbb{R}} w(\diamond - a) \cdot e^{-Ha} \cdot \tilde{\xi}(e^a) da \right) = \\ &= \text{id}^H \cdot \int_{\mathbb{R}} w(\ln(\diamond) - a) \cdot e^{-Ha} \cdot \tilde{\xi}(e^a) da = \text{id}^H \cdot \int_{\mathbb{R}_+^*} s^{-H} \cdot w \left( \ln \left( \frac{\diamond}{s} \right) \right) \cdot \tilde{\xi}(s) \frac{ds}{s} = \\ &= \text{id}^H \cdot \int_{\mathbb{R}_+^*} s^H \cdot w \left( \ln \left( \frac{\diamond}{s} \right) \right) \cdot \tilde{\xi}(s) d\mu(s) . \end{aligned}$$

Der erste Teil ist somit nach Hauptsatz 1 und Korollar 1.4 klar. Die Zerlegungen ergeben sich durch Übertragung der Zerlegung aus Satz 3.4.1 gemäß Hauptsatz 2. Mit diesem beweist man auch die weiteren Aussagen (mittels  $\Xi_s = \Phi(s^H \cdot X_{\ln(s)})$ ).

<sup>33</sup> Faltung bzgl. des Haar-Maßes  $\exp(\lambda_{\mathbb{R}})$  auf  $\mathbb{R}_+^*$ .

**BEMERKUNG 5** Die Darstellung des Prozessraums  $W_{\Xi}^{\dagger}(\mathbf{L}^2(\mu)) = \mathcal{G}_{\Xi}$  und die zugehörige Faltungsformel sind das Pendant zum ersten Teils von Theorem 3.3 bei Nuzman und Poor (2001, [34]). Weiterhin ist die Zerlegung  $\mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x)$  und die darin gültige Darstellung

$$\Xi_s = \int_{\mathbb{R}_+^*} \widehat{\Xi}_s(x) \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} (sx)^H \cdot (w \circ \ln) \left( \frac{x}{s} \right) \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x)$$

das Analogon zum zweiten Teil des besagten Theorems 3.3 von Nuzman und Poor (2001, [34]). Man beachte noch, dass die von Nuzman und Poor (2001, [34], Abschnitt 3.2) gemachten einschränkenden Annahmen über die Struktur der Funktion  $w$  für diese Ergebnisse unnötig sind. Allerdings sind sie für die weitere Prädiktionstheorie dienlich<sup>34</sup>.

Im Falle der Spektralzerlegung des stationären Erzeugers erwartet man eine Spektralzerlegung des selbstähnlichen Prozessraums. In der Tat wird dies durch Lemma 2 und Satz 2 wie folgt nachgewiesen.

**LEMMA 2** *Der Pivotraum wird durch*

$$\mathbf{L}^2(\mu) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot (\text{id}^{H+2\pi i\chi} \cdot \mu) d\chi \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

*direkt zerlegt.*

**Beweis** Zunächst ist  $e_{\chi} = e^{-H\circ} \cdot (e^{\circ})^{H+2\pi i\chi}$  für jedes  $\chi \in \mathbb{R}$  eine  $\lambda_{\mathbb{R}}$ -Funktion in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ . Nach Lemma 1.(iii) ist  $\text{id}^{H+2\pi i\chi}$  eine  $\mu$ -Funktion in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  und es gilt  $\text{id}^{H+2\pi i\chi} \cdot \mu = \Phi(e_{\chi} \cdot \lambda_{\mathbb{R}})$  für alle  $\chi \in \mathbb{R}$ . Die Zerlegung ist also die Bildzerlegung von

$$\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot e_{\chi} d\chi \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})'$$

unter  $\Phi$ . Ergänzend sei noch erwähnt, dass die  $\mu$ -Funktion  $\text{id}^{H+2\pi i\chi}$  als Element von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  gerade die Mellin-Transformierte im Punkt  $2\pi i\chi - H$  liefert.

**SATZ 2** *Sei  $\Xi$  ein abschließbarer selbstähnlicher Prozess mit Spektraldichte  $\kappa$  gemäß Hauptsatz 1.(ii). Der zu  $\Xi$  gehörige Kovarianzoperator  $G^*G$  wird durch die Zerlegung des Lemma 2 diagonalisiert und es gilt*

$$G^*G = Z_{\kappa} : \tilde{\xi} \longmapsto \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \kappa(\chi) \cdot \widehat{\tilde{\xi}}(\chi) \cdot (\text{id}^{H+2\pi i\chi} \cdot \mu) d\chi$$

mit  $\mathcal{D}(Z_{\kappa}) = \left\{ \tilde{\xi} \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid \kappa \cdot \widehat{\tilde{\xi}} \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \right\}$ .

*Der zu  $\Xi$  gehörige eingebettete Prozessraum wird direkt durch*

$$\mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R} \setminus \{\kappa=0\}}^{\oplus} \kappa(\chi) \cdot (\mathbb{K} \cdot (\text{id}^{H+2\pi i\chi} \cdot \mu)) d\chi \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

*zerlegt.*

<sup>34</sup> Dies wird in der vorliegenden Arbeit jedoch erst im nächsten Kapitel behandelt.

**Beweis** Der erste Teil folgt vermöge des Lemma 2 durch die im Hauptsatz angegebene Beziehung  $G^*G = \phi G_X^* G_X \phi^{-1}$ , wobei  $X$  den stationären Erzeuger und  $G_X^* G_X$  dessen Kovarianzoperator bezeichnet. Letzterer ist nämlich (vgl. Satz 3.4.2) diagonal in der Fourier-Zerlegung von  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$  mit Diagonale  $\kappa$  und das Bild der Diagonalisierung unter  $\Phi$  liefert die Behauptung (i). Den zweiten Teil erhält man durch die abstrakte Spektralzerlegung aus Hauptsatz 1.5.

**BEISPIEL** Die fraktionale Brownsche Bewegung  $\Xi$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  (mit Parameter  $H \in ]0, 1[$ ) ist ein abschließbarer, injektiv in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  einbettbarer selbstähnlicher Prozess. In der Tat gilt nach Abschnitt 3.4 das Analoge für den zugehörigen stationären Erzeuger  $X$ , dessen Autokovarianzfunktion

$$\begin{aligned} (X_{\diamond} | X_0) &= e^{-H\diamond} (\Xi_{\exp(\diamond)} | \Xi_1) = \frac{\|\Xi_1\|^2}{2} \cdot e^{-H\diamond} \cdot \left( e^{2H\diamond} - |e^{\diamond} - 1|^{2H} + 1 \right) = \\ &= \frac{\|\Xi_1\|^2}{2} \cdot \left[ e^{H\diamond} - (e^{\diamond} - 2 + e^{-\diamond})^H + e^{-H\diamond} \right] = \|\Xi_1\|^2 \cdot \cosh(H\diamond) - \frac{\|\Xi_1\|^2}{2} \cdot \left| \sinh\left(\frac{\diamond}{2}\right) \right|^{2H} \end{aligned}$$

ein Element von  $\mathcal{K}(\mathbb{R}) + \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist, so dass das positive beschränkte Spektralmaß  $\mathcal{F}((X_{\diamond} | X_0))$  von einer  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$ -Funktion her stammt und  $\mathcal{F}((X_{\diamond} | X_0)) \in \mathbf{L}_+^1(\lambda_{\mathbb{R}})$  gelten muss. Diese Fourier-Transformierte<sup>35</sup> wird von Nuzman und Poor (2000, [33], p. 438) als

$$\mathcal{F}((X_{\diamond} | X_0)) = \frac{\Gamma(1 - H + i \cdot \text{id})}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i \cdot \text{id}\right) (H + i \cdot \text{id})} \cdot \frac{\Gamma(1 - H - i \cdot \text{id})}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i \cdot \text{id}\right) (H - i \cdot \text{id})}$$

angegeben.

Daraus ergibt sich nach Satz 2 als Spektralzerlegung

$$\mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \left| \frac{\Gamma(1 - H + i\chi)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\chi\right) (H + i\chi)} \right|^2 \cdot (\mathbb{K} \cdot (\text{id}^{H+2\pi i\chi} \cdot \mu)) \, d\chi \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

bzw.

$$\mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \left( \frac{\Gamma(1 - H + i\chi)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\chi\right) (H + i\chi)} \cdot (\text{id}^{H+2\pi i\chi} \cdot \mu) \right) \, d\chi \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)' .$$

Der Faktor  $\frac{\Gamma(1-H-i\text{id})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\text{id}\right)(H-i\text{id})}$  hat (wiederum nach Nuzman und Poor (2000, [33], p. 438)) für  $H > \frac{1}{2}$  im Zeitbereich die Rücktransformierte

$$w := \frac{1}{\Gamma\left(H - \frac{1}{2}\right)} \cdot e^{H\diamond} \cdot B\left(\frac{2H-1}{2}, 1-2H, 1-e^{\diamond}\right) \cdot 1_{]-\infty, 0]}$$

bzw.<sup>36</sup> für  $H < \frac{1}{2}$

$$w := \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left[ \frac{(1-e^{\diamond})^{H-\frac{1}{2}}}{e^{-(1-H)\diamond}} + \frac{\left(\frac{1}{2}-H\right)}{e^{-H\diamond}} \cdot B\left(\frac{2H+1}{2}, 1-2H, 1-e^{\diamond}\right) \right] \cdot 1_{]-\infty, 0]} ,$$

<sup>35</sup> Bei Wahl von  $\|\Xi_1\|^2 = 1/(\sin(\pi H) \cdot \Gamma(2H+1))$ .

<sup>36</sup> Für  $H = \frac{1}{2}$  sind entsprechende Rechnungen in der Einleitung durchgeführt worden.

wobei die Beta-Funktion durch

$$B(x, y, t) := \int_0^t z^{x-1} (1-z)^{y-1} dz$$

für  $x > 0$  und  $0 \leq t \leq 1$  bezeichnet sei.

Aus der Zerlegung des stationären Erzeugers mittels  $(\Theta_y)_{y \in \mathbb{R}} = (w^*(\diamond - y))_{y \in \mathbb{R}}$  (vgl. Satz 3.4.1) ergibt sich gemäß Satz 1 als Bildzerlegung

$$\mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \tilde{\Theta}_y dy \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G}_{\Xi} = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \left( x^H \cdot \tilde{\Theta}_{\ln(x)} \right) d\mu(x)$$

in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$ . Im Fall  $H > \frac{1}{2}$  ist dabei

$$\tilde{\Theta}_y = \Phi(w^*(\diamond - y)) = \text{id}^H \cdot \left( \frac{e^{-H(\diamond - y)}}{\Gamma(H - \frac{1}{2})} \cdot B\left(\frac{2H-1}{2}, 1 - 2H, 1 - e^{-(\diamond - y)}\right) \cdot 1_{[y, \infty[} \right) \circ \ln$$

bzw.

$$x^H \cdot \tilde{\Theta}_{\ln(x)} = x^H \cdot \Phi\Theta_{\ln(x)} = \frac{x^{2H}}{\Gamma(H - \frac{1}{2})} \cdot B\left(\frac{2H-1}{2}, 1 - 2H, 1 - \frac{x}{\diamond}\right) \cdot 1_{[x, \infty[}$$

Als Parseval-Repräsentanten für  $\Xi_s$  erhält man aufgrund von  $\Xi_s = \Phi(s^H \cdot X_{\ln(s)})$  zunächst in der ersten Zerlegung

$$\widehat{\Xi}_s = s^H \cdot \frac{e^{H(\diamond - \ln s)}}{\Gamma(H - \frac{1}{2})} \cdot B\left(\frac{2H-1}{2}, 1 - 2H, 1 - e^{(\diamond - \ln s)}\right) \cdot 1_{]-\infty, \ln s]}$$

und weiter in der zweiten Zerlegung

$$\widehat{\Xi}_s = \frac{\text{id}^{2H}}{\Gamma(H - \frac{1}{2})} \cdot B\left(\frac{2H-1}{2}, 1 - 2H, 1 - \frac{\diamond}{s}\right) \cdot 1_{]0, s]}$$

Im Fall  $H < \frac{1}{2}$  ist

$$\tilde{\Theta}_y = \frac{\text{id}^H}{\Gamma(\frac{2H+1}{2})} \cdot \left( \left[ \frac{(1 - e^{-(\diamond - y)})^{\frac{2H-1}{2}}}{e^{(1-H)(\diamond - y)}} + \frac{B(\frac{2H+1}{2}, 1 - 2H, 1 - e^{-(\diamond - y)})}{\frac{2}{1-2H} \cdot e^{H(\diamond - y)}} \right] \cdot 1_{[y, \infty[} \right) \circ \ln$$

bzw.

$$x^H \cdot \tilde{\Theta}_{\ln(x)} = \frac{(x \cdot \text{id})^H}{\Gamma(\frac{2H+1}{2})} \cdot \left[ \frac{(1 - \frac{x}{\diamond})^{\frac{2H-1}{2}}}{(\frac{\diamond}{x})^{(1-H)}} + \frac{B(\frac{2H+1}{2}, 1 - 2H, 1 - \frac{x}{\diamond})}{\frac{2}{1-2H} \cdot (\frac{\diamond}{x})^H} \right] \cdot 1_{[x, \infty[}$$

Als Parseval-Repräsentanten für  $\Xi_s$  erhält man aufgrund von  $\Xi_s = \Phi(s^H \cdot X_{\ln(s)})$  zunächst in der ersten Zerlegung

$$\widehat{\Xi}_s = \frac{s^H}{\Gamma(\frac{2H+1}{2})} \cdot \left[ \frac{(1 - e^{(\diamond - \ln s)})^{H-\frac{1}{2}}}{e^{(H-1)(\diamond - \ln s)}} + \frac{B(\frac{2H+1}{2}, 1 - 2H, 1 - e^{(\diamond - \ln s)})}{\frac{2}{1-2H} \cdot e^{-H(\diamond - \ln s)}} \right] \cdot 1_{]-\infty, \ln s]}$$

und weiter in der zweiten Zerlegung

$$\widehat{\Xi}_s = \frac{(s \cdot \text{id})^H}{\Gamma(\frac{2H+1}{2})} \cdot \left[ \frac{(1 - \frac{\diamond}{s})^{H-\frac{1}{2}}}{(\frac{\diamond}{s})^{(H-1)}} + \frac{B(\frac{2H+1}{2}, 1 - 2H, 1 - \frac{\diamond}{s})}{\frac{2}{1-2H} \cdot (\frac{\diamond}{s})^{-H}} \right] \cdot 1_{]0, s]}$$

Diese Darstellungen

$$\Xi_s = \int_{\mathbb{R}_+^*} \widehat{\Xi}_s(x) \cdot \left(x^H \cdot \tilde{\Theta}_{\ln(x)}\right) d\mu(x)$$

mit den entsprechenden Repräsentanten  $\widehat{\Xi}_s$  durch Integration von 'weißem Rauschen' sind das Pendant zu den Darstellungen durch Integration bzgl. der Brownschen Bewegung  $dB(t)$  in Theorem 4.1 von Nuzman und Poor (2000, [33])<sup>37</sup>.

---

<sup>37</sup> Vgl. wiederum Bemerkung 2.5.2.

## 3.6 Abschließende Bemerkungen

**BEMERKUNG 1** Die angegebenen verschiedenen Zerlegungssätze und Beispiele zu den jeweiligen Prozessklassen lassen hoffen, dass durch den erweiterten Rahmen dieser Arbeit für die Stochastik neue und nützliche Zerlegungen ermöglicht wurden.

Die Ausführungen zu den stochastisch interessanten Anwendungen von Zerlegungen sind in dieser Arbeit bisher jedoch sehr knapp gehalten. Um die stochastischen Anteile an einer Zerlegung herauszuarbeiten, wären meist zusätzliche, durchaus tief in der Stochastik angesiedelte Methoden nötig, die den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen würden. Deswegen wurde dieser Aspekt mit Hilfe der Beispiele nur angedeutet (vgl. Beispiel 3.2.3).

Allerdings zielen die Ausführungen des vierten Kapitels auf Anwendungen ab, die den Nutzen der Zerlegungstheorie (auch für die Stochastik) veranschaulichen sollen. Dabei konzentriert sich die vorliegende Arbeit auf Anwendungen in der Vorhersage von Zeitreihen.

**BEMERKUNG 2** Die aufgeführten Sätze und Beispiele zur Spektralzerlegung verdeutlichen die Ausweitung der klassischen Spektralzerlegung durch die operatortheoretische Herangehensweise des Abschnitts 1.5.

Es sollte allerdings nicht unbemerkt bleiben, dass der praktischen Anwendung dieser Karhunen-Loève-Zerlegung Grenzen gesetzt sind (vgl. Courmontagne (1999, [8])), die durch die angegebene abstraktere Formulierung nicht beiseite geräumt sind. Der natürliche Bezug der Spektralzerlegung auf allgemeine operatortheoretische Konstruktionen kontinuierlicher Art hilft also nicht, diese praktischen Probleme schneller zu überwinden.

**BEMERKUNG 3** Die Abschnitte zu stationären Prozessen beinhalten keine neuen Erkenntnisse oder wirklich neue Zerlegungen. Die meisten der dortigen Aussagen sind schon sehr lange bekannt. Insofern dienen diese Abschnitte nur der Rückversicherung, dass durch den verwendeten Formalismus die klassischen und motivierenden Resultate wiedererlangt werden können.

**BEMERKUNG 4** Eine ähnliche Einordnung kann für die Ausführungen zu selbstähnlichen Prozessen vorgenommen werden. Im Prinzip ist die Methodik bekannt, wenn auch erst seit Kürzner durch die Artikel von Nuzman und Poor (2000, [33], bzw. 2001, [34]).



# Kapitel 4

## Vorhersage von Prozessen

Die bisherigen Resultate sind eher theoretischer Natur. Sie haben jedoch auch praktischen Nutzen. Die Ausführungen dieses Kapitels dienen dem Ausbau der Theorie hin zu Methoden, die direkt Anwendung in der Zeitreihenanalyse finden. Die Anwendungen beziehen sich dabei auf die Vorhersage von stochastischen Prozessen.

Im ersten Abschnitt wird eine Einleitung in die Problematik gegeben. Diese ist durchaus abstrakt gehalten, um die wesentlichen Punkte für eine Vorhersage klarzustellen und die Verbindung zur abstrakten Zerlegungstheorie deutlicher zu machen.

Sei dazu

$\mu$  ein moderates positives Radon-Integral auf lokal kompaktem  $\mathbf{T}$  und  $F$  ein  $\mu$ -Testraum - insbesondere bezeichne  $h : F \rightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$  den Pivotkern.

$(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  sei ein (bzgl.  $\mu$ ) in  $F^\dagger$  eingebetteter Prozess.

Der Prozesskern  $g : F \rightarrow \mathcal{G}$  sei (bzgl.  $h$ ) abschließbar mit Abschluss  $G$ .

Für eine ( $\mu$ -messbare) Menge  $A \subset \mathbf{T}$  bezeichne

$\text{lin}(\Xi_A)$  den von allen  $\Xi_\beta$ ,  $\beta \in A$ , erzeugten Untervektorraum und  $\overline{\text{lin}}(\Xi_A)$  dessen Abschluss.

Ziel ist es, einen Prozess  $\Xi = (\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  für einen bestimmten Zeitpunkt  $\tau \in \mathbf{T}$  mittels eines ( $\mu$ -messbaren) Zeitbereichs  $A \subset \mathbf{T}$  vorherzusagen, d. h. den Prädiktor in Form der orthogonalen Projektion  $\mathcal{P}_{\overline{\text{lin}}(\Xi_A)}^{\mathcal{G}} \Xi_\tau$  von  $\Xi_\tau$  auf  $\overline{\text{lin}}(\Xi_A)$  in  $\mathcal{G}$  zu bestimmen.

Nachdem zunächst die Methoden zur Bestimmung des Prädiktors in den theoretischen Rahmen der bisherigen Arbeit eingebunden werden, folgen konkrete Prädiktionsprobleme innerhalb der Klassen von Prozessen, die schon in Kapitel 3 diskutiert wurden. So zeigen die Abschnitte 4.2 bis 4.5, wie die Zerlegungstheorie der vorliegenden Arbeit zur Prädiktion endlicher, stationärer und schließlich selbstähnlicher Prozesse genutzt werden kann. Der Parameterbereich 'Zeit' ist dabei stets eindimensional und geordnet:  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ ,  $\mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{R}$  und schließlich  $\mathbb{R}_+^*$ .

Im Ergebnis kristallisiert sich eine abstrakte Cholesky-Faktorisierung des Kovarianzoperators als das Werkzeug heraus, welches die Anwendung der Zerlegungstheorie von Prozessen auf Prädiktionsprobleme ermöglicht.

## 4.1 Prädiktion, Strukturhaltung und Prädiktorformel

**BEMERKUNG 1** Zur Motivation betrachten wir zunächst eine beliebige, eindimensionale direkte Zerlegung des Prozessraums

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{X}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\nu(x) \hookrightarrow F^\dagger .$$

Diese etabliert eine unitäre Transformation

$$\widehat{\diamond} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\nu) : \gamma \longmapsto \widehat{\gamma} ,$$

wenn dabei

$$\widehat{\gamma} \cdot \Theta$$

die Parseval-Zerlegung von  $\gamma \in \mathcal{G}$  bezeichnet. Damit lassen sich Projektionsprobleme äquivalent in  $\mathcal{G}$  oder in  $\mathbf{L}^2(\nu)$  formulieren. Über die Abbildung  $\widehat{\diamond}$  entsprechen sich nämlich die Projektionen

$$\mathcal{P}_{\widehat{\text{lin}}(\Xi_A)}^{\mathcal{G}} \Xi_\tau \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_{\widehat{\text{lin}}(\widehat{\Xi}_A)}^{\mathbf{L}^2(\nu)} \widehat{\Xi}_\tau .$$

Dies ist offensichtlich eine gut bekannte, nicht besonders tiefliegende Möglichkeit den Prädiktor zu bestimmen, die auch sinnvoll eingesetzt werden kann. Die folgenden Beispiele dazu stammen von Brockwell und Davis (1987, [6], §5.6).

**BEISPIEL 1** In der Spektralzerlegung einer stationären Zeitreihe  $\Xi$  auf  $\mathbb{Z}$  gemäß Abschnitt 3.3 (Bemerkung 3.3.1) nehme man an, dass das Spektralmaß  $\nu := \tilde{\sigma}$  durch eine Dichte  $\kappa \in \mathbf{L}_+^1([0, 1])$  mit der Eigenschaft  $\kappa = 0$  auf  $]\frac{1}{2\pi}, 1 - \frac{1}{2\pi}[$  gegeben ist. Es gilt

$$|1 - e^{2\pi i \chi}| < 1 \quad \text{für } \chi \in [0, 1] \setminus \left] \frac{1}{2\pi}, 1 - \frac{1}{2\pi} \right[ ,$$

so dass nach Multiplikation mit  $e^{2\pi i \alpha \text{id}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , die Neumann-Reihe

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i(\alpha+1)\text{id}} &= e^{-2\pi i \alpha \text{id}} \cdot [1 - (1 - e^{2\pi i \text{id}})]^{-1} = e^{-2\pi i \alpha \text{id}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \text{id}})^m = \\ &= e^{-2\pi i \alpha \text{id}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \cdot (-1)^n \cdot e^{2\pi i n \text{id}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \cdot (-1)^n \cdot e^{-2\pi i(\alpha-n)\text{id}} \end{aligned}$$

gleichmäßig auf  $[0, 1] \setminus ]\frac{1}{2\pi}, 1 - \frac{1}{2\pi}[$  und somit in  $\mathbf{L}^2(\tilde{\sigma})$  konvergiert. Aufgrund der Isomorphie aus Bemerkung 3.3.1, wonach sich  $\Xi_t$  und  $e^{-2\pi i t \text{id}}$  entsprechen, liefert dies nicht nur

$$e^{-2\pi i(\alpha+1)\text{id}} = \widehat{\Xi}_{\alpha+1} \in \overline{\text{lin}}\left(\widehat{\Xi}_{\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}}\right) \quad \text{in } \mathbf{L}^2(\tilde{\sigma}) ,$$

sondern auch eine Darstellung von  $\widehat{\Xi}_{\alpha+1}$  als Linearkombination der  $\widehat{\Xi}_{\beta}$ ,  $\beta \leq \alpha$ :

$$\mathcal{P}_{\overline{\text{lin}}(\Xi_{\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}})}^{\mathcal{G}} \widehat{\Xi}_{\alpha+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \cdot (-1)^n \cdot \Xi_{\alpha-n} .$$

**BEISPIEL 2** In der Spektralzerlegung einer stationären Zeitreihe  $\Xi$  auf  $\mathbb{Z}$  gemäß Abschnitt 3.3 nehme man an, dass das Spektralmaß  $\nu := \tilde{\sigma}$  durch eine Dichte  $\kappa = \bar{\rho} \cdot \rho \in \mathbf{L}_+^1([0, 1])$  gegeben ist, wobei der Faktor  $\rho$  die 'Fourier-Entwicklungen'

$$\rho = \sum_{j=-\infty}^0 \psi(j) \cdot e^{2\pi i j \diamond} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\rho} = \sum_{j=-\infty}^0 \varphi(j) \cdot e^{2\pi i j \diamond}$$

mit  $\psi, \varphi \in \ell^1(\mathbb{Z})$ <sup>38</sup> besitzen soll. Insbesondere soll  $\rho$  und damit  $\kappa$  überall von Null verschieden sein. Es folgt

$$\overline{\text{lin}}^{\mathbf{L}^2([0,1])}(\bar{\rho} \cdot e^{-2\pi i \beta \cdot \text{id}}; \beta \leq \alpha) = \overline{\text{lin}}^{\mathbf{L}^2([0,1])}(e^{-2\pi i \beta \cdot \text{id}}; \beta \leq \alpha) .$$

Gemäß der direkten Spektralzerlegung aus Satz 3.3.2 ist die orthogonale Projektion von  $\widehat{\Xi}_{\alpha+k} = \bar{\rho} \cdot e^{-2\pi i(\alpha+k)\text{id}}$  auf  $\overline{\text{lin}}(\widehat{\Xi}_{\beta}; \beta \leq \alpha)$  in  $\mathbf{L}^2([0, 1])$  somit durch

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\overline{\text{lin}}(e^{-2\pi i \beta \cdot \text{id}}; \beta \leq \alpha)} \bar{\rho} \cdot e^{-2\pi i(\alpha+k)\text{id}} &= \sum_{(\alpha+k)+j \leq \alpha} \overline{\psi(j)} \cdot e^{-2\pi i((\alpha+k)+j)\text{id}} = \\ &= \sum_{j \leq -k} \overline{\psi(j)} \cdot e^{-2\pi i((\alpha+k)+j)\text{id}} = \sum_{j \leq 0} \overline{\psi(j-k)} \cdot e^{-2\pi i(\alpha+j)\text{id}} \end{aligned}$$

gegeben. Um die Koeffizienten für die entsprechende lineare Darstellung mittels  $\widehat{\Xi}_{\beta}$ ,  $\beta \leq \alpha$ , zu berechnen, verbleibt noch

$$\sum_{j \leq 0} \overline{\psi(j-k)} \cdot e^{-2\pi i(\alpha+j)\text{id}} = \sum_{\beta \leq \alpha} \xi(\beta) \cdot \bar{\rho} \cdot e^{-2\pi i \beta \cdot \text{id}}$$

nach  $\xi$  aufzulösen, d. h. die Koeffizienten des Cauchy-Produkts

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \sum_{j \leq 0} \overline{\psi(j-k)} \cdot e^{-2\pi i(\alpha+j)\text{id}} = \left( \sum_{j \leq 0} \overline{\varphi(j)} \cdot e^{-2\pi i j \cdot \text{id}} \right) \cdot \left( \sum_{j \leq 0} \overline{\psi(j-k)} \cdot e^{-2\pi i(\alpha+j)\text{id}} \right)$$

zu berechnen. Man erhält z. B.  $\xi(\alpha) = \overline{\varphi(0)} \cdot \overline{\psi(-k)}$ .

Die beiden Beispiele zeigen ein grundsätzliches Schema, in welchem Vorhersageprobleme gestellt sind. Gesucht waren die orthogonalen Projektionen auf die Unterräume  $\overline{\text{lin}}(\Xi_{\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}})$ , wobei mit  $\alpha \in \mathbb{Z}$  die Mengen  $\{\beta \in \mathbb{Z} \mid \beta \leq \alpha\}$  eine Kette von Teilmengen von  $\mathbb{Z}$  durchlaufen. Die folgende Definition soll dieses Schema formalisieren.

<sup>38</sup>  $\psi, \varphi = 0$  auf  $\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ .

**DEFINITION 1** Für einen abschließbaren (bzgl.  $\mu$  in  $F^\dagger$ ) eingebetteten Prozess  $(\Xi_t)_{t \in \mathbf{T}}$  im Prozessraum  $\mathcal{G}$  ist ein *Prädiktionsproblem* durch Angabe einer Kette  $\mu$ -messbarer Teilmengen  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mu)$  festgelegt.

Als Lösung sind die orthogonalen Projektionen von  $\gamma \in \mathcal{G}$  auf  $\overline{\text{lin}}(\Xi_A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  gesucht. Diese werden *Prädiktoren für  $\gamma$  gegeben  $\Xi_A$*  genannt und mit  $\mathcal{P}_A \gamma$  bezeichnet.

**BEMERKUNG 2** Ebenfalls aus den Beispielen ersichtlich, ist die Anwendbarkeit des Prinzips aus Bemerkung 1 zum 'Lösen' eines Prädiktionsproblems im Wesentlichen durch zwei Punkte beeinflusst.

Der erste Punkt betrifft die Projektion in  $\mathbf{L}^2(\nu)$ . Diese sollte leichter durchzuführen sein als in  $\mathcal{G}$ , sonst ist für die Anwendung nichts gewonnen. Diesem Aspekt werden wir Rechnung tragen, indem wir 'strukturerhaltende Zerlegungen' einführen, für die eine Prädiktion im Funktionenraum durch Multiplikation mit Indikatorfunktionen gegeben ist.

In Anlehnung an das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt und das Lösen von Gleichungssystemen mittels Cholesky-Zerlegungen werden wir den Begriff wie folgt wählen.

**DEFINITION 2** Eine eindimensionale direkte Zerlegung des Prozessraums

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{T}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\mu(x) \hookrightarrow F^\dagger$$

heißt bzgl. einer Kette  $\mu$ -messbarer Teilmengen  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mu)$  *strukturerhaltend*, wenn

$$\overline{\text{lin}}(\Xi_A) \stackrel{!}{=} \int_A \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\mu(x) =: \mathcal{G}_A \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}$$

gilt.

Erste Prädiktionsformeln werden mittels Strukturerhaltung durch das folgende Prinzip möglich.

**HAUPTSATZ** *Man nehme an, die Zerlegung von  $\mathcal{G}$  sei bzgl. einer Kette  $\mu$ -messbarer Teilmengen  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mu)$  strukturerhaltend.*

(i) *Bezeichnet in dieser Situation  $\widehat{\gamma} \in \mathbf{L}^2(\mu)$  den Parseval-Repräsentanten von  $\gamma \in \mathcal{G}$ , so gilt*

$$\mathcal{P}_A \gamma = \int_A \widehat{\gamma} \cdot \Theta_\diamond d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

(ii) *Sei  $A \in \mathcal{A}$ . Der Prädiktor  $\mathcal{P}_A \gamma$  besitzt genau dann eine Darstellung als Linearkombination der Gestalt*

$$\mathcal{P}_A \gamma = \int \xi(t) \cdot \Xi_t d\mu(t) = G\xi$$

*mit  $\xi \in \mathcal{D}(G)$ , wenn ein solches  $\xi$  mit  $\widehat{G\xi} = 1_A \cdot \widehat{\gamma}$  existiert.*

**Beweis** In der Zerlegung bzgl.  $(\Theta_x)_{x \in \mathbf{T}}$  sind orthogonale Projektionen auf  $\mathcal{G}_A$  durch Multiplikation mit  $1_A$  gegeben. Der zweite Teil ist dann klar.

**BEMERKUNG 3** Der zweite Teil des Hauptsatzes wie auch das Beispiel 2 deuten auf den zweiten entscheidenden Punkt zur Anwendung von Zerlegungen bei Prädiktionsproblemen hin.

Es ist nämlich wünschenswert, den Prädiktor  $\mathcal{P}_A \gamma$  als Linearkombination der  $\Xi_\beta$  mit Zeitpunkten  $\beta \in A$  zu schreiben. Dazu wird es notwendig werden, die Darstellung in der Zerlegungsbasis  $(\Theta_x)_{x \in \mathbf{X}}$  auf eine Linearkombination der  $(\Xi_\beta)_{\beta \in A}$  umzuschreiben. Die damit verbundenen Schwierigkeiten der Lösung einer linearen Gleichung (vgl. Hauptsatz (ii)) scheinen unausweichlich mit der Vorhersageproblematik verbunden zu sein.

Die Verbindung zu linearen Gleichungen zeigt auch, dass keine Darstellung als Linearkombination der  $\Xi_\beta$ ,  $\beta \in A$ , existieren muss. Nicht jedes Element im erzeugten abgeschlossenen Raum  $\overline{\text{lin}}(\Xi_A)$  besitzt nämlich eine solche Darstellung. Ein gutes Beispiel dafür bildet die Brownsche Bewegung<sup>39</sup> auf  $\mathbb{R}_+^*$ , wo jedes Element  $\Xi_s$ , insbesondere der Prädiktor  $\mathcal{P}_{]0,\alpha]} \Xi_\tau = \Xi_{\min(\alpha,\tau)}$ , keine Darstellung in Form einer Linearkombination  $\int \xi(t) \cdot \Xi_t dt$  mit  $\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}_+^*})$  besitzt. Als mögliche Erweiterung bietet sich an, Maße als Koeffizienten zuzulassen und statt  $\int \xi(t) \cdot \Xi_t d\mu(t)$  Ausdrücke der Form  $\int \Xi_t d\tilde{\mu}_\xi(t)$  einzuführen<sup>40</sup>. Die Schwierigkeiten dieser Erweiterung beginnen schon früh beim sinnvollen Aufbau des nötigen Formalismus (vgl. Abschnitt 2.4).

Intuitiv vernünftige Vorhersagekoeffizienten  $\mathcal{P}_A \gamma = \int \xi(t) \cdot \Xi_t d\mu(t)$  sollten darüber hinaus nur Zeitpunkte aus  $A$  berücksichtigen. Die zugehörige Trägerbedingung  $\text{supp } \xi \subset A$  ist also zusätzlich zu beachten.

Wir wollen Strukturhaltung und Darstellung als Linearkombination in der Situation von Bildzerlegungen analysieren, da dies in den Anwendungen meist der Fall sein wird.

**BEMERKUNG 4** Sei also der abschließbare Prozesskern  $g^\dagger g$  gemäß Abschnitt 1.2 bzgl. eines Kerns

$$v^\dagger : \int_{\mathbf{T}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot v_x d\mu(x) \hookrightarrow E^\dagger$$

in  $g^\dagger g = V^\dagger v^\dagger v V$  mit schwach stetigem Faktor  $V : F \longrightarrow E$  faktorisiert. Das Abbild dieser Faktorisierung unter  $V^\dagger$  führe zu einer direkten eindimensionalen Zerlegung

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbf{T}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\mu(x) \hookrightarrow F^\dagger .$$

Der nach Beispiel 1.4 zum Abschluss  $G$  unitär äquivalente Operator  $W := \overline{vV}$  lässt sich genau wie  $G$  mit den Parseval-Abbildungen zu

$$\widehat{W} : \mathcal{D}(W) \longrightarrow \int_{\mathbf{T}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot v_x d\mu(x) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \xi \longmapsto W\xi \longmapsto \widehat{W\xi}$$

<sup>39</sup> Vgl. mit den Ausführungen in der Einleitung.

<sup>40</sup> mit der Konvention  $\int \Xi_t d\varepsilon_r(t) = \Xi_r$ .

$$\widehat{G} : \mathcal{D}(W) \longrightarrow \int_{\mathbf{T}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x d\mu(x) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \xi \longmapsto G\xi \longmapsto \widehat{G}\xi$$

verknüpfen. Für diese Operatoren gilt  $\widehat{W} = \widehat{G}$  (vgl. Beispiel 1.4).

**SATZ** *Mit den Notationen der obigen Bemerkung 4 gilt:*

(i) *Ist die Zerlegung von  $\mathcal{G}$  bzgl. einer Kette  $\mu$ -messbarer Teilmengen  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mu)$  strukturerhaltend, so gilt*

$$\widehat{W} \left( \overline{1_A \cdot h(F)}^{\mathcal{D}(W)} \right) \subset \overline{\widehat{W}(1_A \cdot h(F))}^{\mathbf{L}^2(\mu)} \subset 1_A \cdot \mathbf{L}^2(\mu) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} .$$

(ii) *Ist  $\Xi$  ein stetiger Prozess und hat für jedes  $A \in \mathcal{A}$  das von  $\mu$  auf  $A$  induzierte Radon-Integral  $\mu_A$  vollen Träger, dann ist die Strukturerhaltung äquivalent zu*

$$\overline{\widehat{W}(1_A \cdot h(F))}^{\mathbf{L}^2(\mu)} = 1_A \cdot \mathbf{L}^2(\mu) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} .$$

(iii) *Sei  $\theta \in \mathbf{L}^2(\mu)$ . Genau dann existiert ein  $\xi \in \mathcal{D}(G)$  mit*

$$G\xi = \int_{\mathbf{T}} \xi(t) \cdot \Xi_t d\mu(t) = \int_{\mathbf{T}} \theta(x) \cdot \Theta_x d\mu(x) ,$$

wenn  $\theta \in \widehat{W}(\mathcal{D}(W))$  gilt, d. h. wenn die Gleichung  $\widehat{W}\xi = \theta$  eine Lösung in  $\mathcal{D}(W)$  besitzt.

**Beweis** Wegen Lemma 2.4.(ii) ist  $\overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}} \subset \overline{\text{lin}(\Xi_t | t \in A)}$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  und somit nach Voraussetzung der Strukturerhaltung aus (i):

$$\widehat{G} \left( \overline{1_A \cdot h(F)}^{\mathcal{D}(G)} \right) \subset \widehat{\diamond} \left( \overline{\text{lin}(\Xi_t | t \in A)} \right) = 1_A \cdot \mathbf{L}^2(\mu) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} .$$

Die Formulierung mit  $\widehat{W}$  ist wegen der eingangs erwähnten Gleichheit  $\widehat{W} = \widehat{G}$  trivial.

Die Voraussetzungen aus (ii) sind die aus Bemerkung 2.4.6, wonach  $\overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}} = \overline{\text{lin}(\Xi_t | t \in A)}$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt. Die Strukturerhaltung ist demnach äquivalent zu

$$\overline{\widehat{G}(1_A \cdot h(F))}^{\mathbf{L}^2(\mu)} = \widehat{\diamond} \left( \overline{G(1_A \cdot h(F))}^{\mathcal{G}} \right) = 1_A \cdot \mathbf{L}^2(\mu) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}$$

bzw. zu

$$\overline{\widehat{W}(1_A \cdot h(F))}^{\mathbf{L}^2(\mu)} = 1_A \cdot \mathbf{L}^2(\mu) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} .$$

Die Aussage (iii) ist wegen  $\widehat{W} = \widehat{G}$  und Bemerkung 2.5.4 klar.

**BEMERKUNG 5** Der letzte Schritt<sup>41</sup> hin zur Anwendung besteht schließlich im Auswerten des Prädiktors

$$\mathcal{P}_{A\gamma} = \int \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta d\mu(\beta) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P}_{A\gamma} = \sum_{\beta} \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta$$

<sup>41</sup> Erste Schritte wurden kurz in Bemerkung 2.6.1 erwähnt.

in  $\mathcal{G}$  für einen konkret beobachtbaren Prozess  $\Xi$  von quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen. Die naheliegende punktweise Auswertung in der Form, dass

$$\int \xi(\beta) \cdot \Xi_{\beta}(\omega) d\mu(\beta) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\beta} \xi(\beta) \cdot \Xi_{\beta}(\omega)$$

als Vorhersagewert bei Beobachtung von  $(\Xi_{\beta}(\omega))_{\beta \in A}$  resultiert, ist durchaus nicht unproblematisch. Zum einen gibt es die Problematik der Nullmengen, die einer solchen Verwendung von 'Klassengleichungen' widerspricht. Zum anderen hat der Prädiktor als Zufallsvariable auch eine Streuung und nur unter Berücksichtigung dieser könnte man mittels Konfidenzintervallen aus den punktweisen Ergebnissen sinnvolle Rückschlüsse auf den 'wahren' Vorhersagewert ziehen.

## 4.2 Vorhersage endlicher Prozesse

Sei  $\Xi$  ein endlicher Prozess auf  $\mathbf{T} := \{1, 2, \dots, n+1\}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und es gelten die Notationen aus Abschnitt 3.1. Ziel ist es, das Prädiktionsproblem für die Kette  $\mathcal{A} := (\{1, \dots, \alpha\})_{\alpha=1, \dots, n+1}$  von Teilmengen von  $\mathbf{T}$  zu lösen. Genauer gesagt sind für festes  $\tau \in \{1, 2, \dots, n+1\}$  mittels geeigneter (d. h. strukturerehaltender) Zerlegungen die Prädiktoren  $\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau := \mathcal{P}_{\{1, \dots, \alpha\}} \Xi_\tau$  für  $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$  zu bestimmen. Zunächst ein Satz zur Strukturierung.

**SATZ** *Genau dann existiert eine bzgl.  $(\{1, \dots, \alpha\})_{\alpha=1, \dots, n+1}$  strukturerehaltende Zerlegung, wenn die Kovarianzmatrix  $G^*G$  regulär ist.*

*In diesem Fall sind die Basisvektoren  $(\Theta_x)_{x \in \mathbf{T}}$  bis auf Phasenfaktoren die Gram-Schmidt-Orthonormierten der Vektoren  $\Xi_1, \dots, \Xi_{n+1}$ .*

**Beweis** Eine strukturerehaltende Zerlegung ist von der Form  $\mathcal{G} = \bigoplus_{x \in \mathbf{T}} \mathbb{K} \cdot \Theta_x$ , was sofort  $\dim \mathcal{G} = n+1$  bzw. die Regularität von  $G^*G$  nach sich zieht. Umgekehrt besagt die Regularität von  $G^*G$ , dass  $\Xi_1, \dots, \Xi_{n+1}$  eine linear unabhängige Familie von Vektoren ist. Die daraus konstruierte Gram-Schmidt-Basis  $\Theta_1, \dots, \Theta_{n+1}$  erfüllt

$$\overline{\text{lin}}(\Xi_1, \dots, \Xi_\alpha) = \bigoplus_{x=1, \dots, \alpha} \mathbb{K} \cdot \Theta_x \quad \text{für alle } \alpha = 1, \dots, n+1,$$

ist also strukturerehaltend. Die 'Eindeutigkeit' der Basis erhält man sukzessiv für  $\alpha = 1, \dots, n+1$ , da aufgrund der Strukturierung  $\Theta_\alpha$  im eindimensionalen Unterraum  $\overline{\text{lin}}(\Xi_1, \dots, \Xi_{\alpha-1})^\perp$  gewählt werden muss.

Da sich jede Zerlegung von  $\mathcal{G}$  mittels einer unitär zu  $G$  äquivalenten Matrix erzeugen lässt (vgl. Satz 3.1.1), formulieren wir die obigen Aussagen nochmals in dieser Situation. Man erhält unmittelbar Prädiktionsformeln in der Zerlegungsbasis und in Form einer Linearkombination der  $\Xi_\beta$ ,  $\beta \leq \alpha$ .

**HAUPTSATZ** *Man nehme an,  $G^*G$  sei regulär und die direkte Zerlegung*

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{x=1, \dots, n+1}^2 \mathbb{K} \cdot \Theta_x$$

*sei das Bild der kanonischen Basis unter einer zu  $G$  unitär äquivalenten Matrixabbildung  $W = (w(x, t))_{x, t} \in GL(n+1)$  gemäß Satz 3.1.1.*

(i) *Genau dann ist diese Zerlegung von  $\mathcal{G}$  bzgl.  $(\{1, \dots, \alpha\})_{\alpha=1, \dots, n+1}$  strukturerehaltend, wenn  $W$  eine obere Dreiecksmatrix ist. In diesem Fall sind die Prädiktoren für  $\Xi_\tau$  in der Orthonormalbasis von  $\mathcal{G}$  durch*

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \sum_{x=1}^{\alpha} (\Theta_x | \Xi_\tau) \cdot \Theta_x = \sum_{x=1}^{\min(\alpha, \tau)} w(x, \tau) \cdot \Theta_x \quad \text{für alle } \alpha = 1, 2, \dots, n+1$$

*gegeben.*



(ii) Sei  $\alpha \in \{1, \dots, n+1\}$ . Die Gleichung

$$W\xi = 1_{\{1, \dots, \alpha\}} \cdot \overline{\Theta_\diamond(\tau)} = 1_{\{1, \dots, \alpha\}} \cdot w(\diamond, \tau)$$

ist eindeutig lösbar und die Lösung  $\xi$  erfüllt

$$\text{supp } \xi \subset \{1, \dots, \min(\alpha, \tau)\} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \sum_{\beta \in \mathbf{T}} \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta = \sum_{\beta=1}^{\min(\alpha, \tau)} \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta.$$

**Beweis** Nach Satz 4.1.(iii) ist die Zerlegung genau dann strukturerhaltend, wenn  $W(\ell^2(\{1, \dots, \alpha\})) = \ell^2(\{1, \dots, \alpha\})$  für alle  $\alpha$  gilt, d. h. wenn  $W$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Hierbei nutzten wir aus, dass im vorliegenden Rahmen  $\widehat{W} = W$  gilt. Die anschließende Folgerung ist klar nach Hauptsatz 4.1.(i).

Die eindeutige Lösbarkeit folgt aus der Regularität von  $W$ . Die Eigenschaften der Lösung sind triviale Konsequenzen aus dem Bisherigen (und Satz 4.1).

**BEMERKUNG 1** Nach obigem Satz und Bemerkung 3.1.3 läuft das Prädiktionsverfahren im regulären endlichdimensionalen Fall nicht über die Spektralfaktorisierung durchzuführen, sondern über das aus der Numerik gut und lang bekannte Verfahren der Cholesky-Faktorisierung zur Lösung der Projektionsgleichungen. Diese lassen sich für  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$  in der Form

$$\left( \begin{array}{cc} \text{Id}^{\alpha \times \alpha} & 0 \end{array} \right) G^* G \left( \begin{array}{c} \text{Id}^{\alpha \times \alpha} \\ 0 \end{array} \right) \xi^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} (\Xi_1 | \Xi_\tau) \\ (\Xi_2 | \Xi_\tau) \\ \vdots \\ (\Xi_\alpha | \Xi_\tau) \end{pmatrix}$$

schreiben.

Eine Cholesky-Faktorisierung des gesamten Kovarianzoperators  $G^*G = W^*W$  ermöglicht ein einheitliches Vorgehen gemäß

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \text{Id}^{\alpha \times \alpha} & 0 \end{array} \right) W^* \left( \begin{array}{c} \text{Id}^{\alpha \times \alpha} \\ 0 \end{array} \right) \right) \left( \left( \begin{array}{cc} \text{Id}^{\alpha \times \alpha} & 0 \end{array} \right) W \left( \begin{array}{c} \text{Id}^{\alpha \times \alpha} \\ 0 \end{array} \right) \right) \xi^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} (\Xi_1 | \Xi_\tau) \\ (\Xi_2 | \Xi_\tau) \\ \vdots \\ (\Xi_\alpha | \Xi_\tau) \end{pmatrix}$$

für alle  $\alpha$ . Die erste Lösungsstufe

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \text{Id}^{\alpha \times \alpha} & 0 \end{array} \right) W^* \left( \begin{array}{c} \text{Id}^{\alpha \times \alpha} \\ 0 \end{array} \right) \right) \theta^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} (\Xi_1 | \Xi_\tau) \\ (\Xi_2 | \Xi_\tau) \\ \vdots \\ (\Xi_\alpha | \Xi_\tau) \end{pmatrix}$$

ist nach dem Satz durch  $\theta^{(\alpha)} = 1_{\{1, \dots, \alpha\}} \cdot w(\diamond, \tau)$  gegeben und liefert die Koeffizienten in der Zerlegungsbasis.

Damit können wir auch die Komplexität des Algorithmus angeben, die sich zu  $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$  für die Cholesky-Faktorisierung und zu  $\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha)$  für das Auflösen ergibt.

**BEMERKUNG 2** Es ist genau das Konzept der Einbettung, das den analytischen Ansatz über lineare Gleichungen und den geometrischen Zugang über Basen zusammenfasst. In diesem Zusammenhang wollen wir einige Methoden diskutieren, die eher dem Gleichungsansatz zugeschrieben werden könnten.

Neben der erwähnten ( $LR$ -) oder auch Cholesky-Faktorisierung<sup>42</sup> gibt es die Option, durch Inversion der Kovarianzmatrix die Gleichung zu lösen. Diese Vorgehensweise wird (u. a. wegen hoher Komplexität) eher vermieden, obwohl es Anwendungsbeispiele gibt (z. B. in Gihman und Skorohod (1974, [18], p. 274)).

Schließlich gibt es noch die Lösung über die sogenannte  $QR$ -Faktorisierung, die mittels Householder-Transformationen durchgeführt einen Aufwand von  $\frac{4}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$  hat. Der etwas höhere Aufwand im Vergleich zum Gauß-Algorithmus ist durch andere Vorteile (Stichwort: 'Konditionierung') häufig gerechtfertigt.

Schließlich gibt es noch für Kovarianzmatrizen mit Toeplitz-Struktur<sup>43</sup> rekursive Algorithmen für die Projektionskoeffizienten  $\xi$ . Diese basieren auf dem bekannten Durbin-Levinson-Algorithmus zur Lösung von Yule-Walker-Gleichungen, denn die Projektionsgleichungen sind unter der Strukturannahme genau von diesem Typ (vgl. Brockwell und Davis (1987, [6], §5.2)). Die Komplexität beläuft sich für dieses Vorgehen auf  $2n^2 + \mathcal{O}(n)$ .

**BEMERKUNG 3** Der analytische Ansatz über lineare Gleichungen wird schon seit längerem verwendet. Neben den obigen Lehrbüchern findet man diesen Zugang bei Wiener (vgl. Wiener und Masani (1957 bzw. 1958, [49]) oder Priestley (1981, [40])). Newton und Pagano (1983, [32]) beziehen sich auf die Cholesky-Zerlegung und Bondon (2001, [4]) gibt eine mehrstufige Levinson-Rekursion an.

---

<sup>42</sup> Diese könnte man vielleicht unter dem Stichwort Gauß-Algorithmus zusammenfassen.

<sup>43</sup> z. B. von stationären Zeitreihen

### 4.3 Stationäre Zeitreihen auf $\mathbb{Z}$

Sei  $\Xi$  eine abschließbare (bzgl.  $\#$ ) in  $\mathcal{S}(\mathbb{Z})'$  eingebettete stationäre Zeitreihe auf  $\mathbb{Z}$ . Es gelten die Notationen aus Abschnitt 3.3. Ziel ist es, das Prädiktionsproblem für die Kette  $(\{\beta \in \mathbb{Z} \mid \beta \leq \alpha\})_{\alpha \in \mathbb{Z}}$  von Teilmengen von  $\mathbb{Z}$  zu lösen. Bezüglich dieser Kette versuchen wir den Prädiktor eines  $\Xi_\tau \in \mathcal{G}$  herzuleiten. Auch hier steht vor der Bestimmung von  $\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau := \mathcal{P}_{\{\beta \in \mathbb{Z} \mid \beta \leq \alpha\}} \Xi_\tau$  die Untersuchung einer geeigneten, d. h. strukturerhaltenden Zerlegung.

**SATZ** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine bzgl.  $(\{\beta \in \mathbb{Z} \mid \beta \leq \alpha\})_{\alpha \in \mathbb{Z}}$  strukturerhaltende Zerlegung.
- (ii) Der Prozess ist rein undeterministisch, d. h.  $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{Z}} \overline{\text{lin}}(\Xi_\beta \mid \beta \leq \alpha) = \{0\}$ .
- (iii) Der Prozess ist undeterministisch, d. h.  $\overline{\text{lin}}(\Xi_\beta \mid \beta \leq 0 - 1) \neq \overline{\text{lin}}(\Xi_\beta \mid \beta \leq 0)$ .
- (iv) Die Spektraldichte  $\kappa$  erfüllt  $\ln(\kappa) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{T})$ .
- (v) Es gibt  $w \in \ell^2(\mathbb{Z})$  mit  $w = 0$  auf  $\mathbb{N}^*$  und  $c = w^* * w$ .

In diesem Fall ist  $w$  so zu wählen, dass  $\mathcal{F}w$  eine äußere Hardy-Funktion in  $H^2$  ist und  $w(0) > 0$  gilt. Dadurch ist  $w$  eindeutig festgelegt und die Bildzerlegung

$$\mathcal{G} = W^\dagger \left( \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}}^2 \mathbb{K} \cdot \varepsilon_x \right) = \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}}^2 \mathbb{K} \cdot \Theta_x \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})'$$

unter der Adjungierten von  $W := w * \diamond$  gemäß Satz 3.3.1 ist strukturerhaltend.

**Beweis** Eine strukturerhaltende Zerlegung ist von der Form  $\mathcal{G} = \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}}^2 \mathbb{K} \cdot \Theta_x$  mit der Eigenschaft

$$\overline{\text{lin}}(\Xi_\beta \mid \beta \leq \alpha) = \bigoplus_{x \leq \alpha}^2 \mathbb{K} \cdot \Theta_x \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{Z},$$

woraus  $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{Z}} \overline{\text{lin}}(\Xi_\beta \mid \beta \leq \alpha) = \{0\}$  bzw. (ii) folgt. Die Implikation (ii)  $\implies$  (iii) wird mit der unten stehenden Bemerkung trivial. Für die weiteren Implikationen verweisen wir auf die Literatur, z. B. Gihman und Skorohod (1974, [18]), wonach (iii) äquivalent zu (iv) ist ([18], Kap. IV, Abschnitt 9, Theorem 3). Letzteres gestattet eine Darstellung

$$\Xi_t = \sum_{x=-\infty}^t w(x-t) \cdot \Theta_x \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Z},$$

wobei  $(\Theta_x)_x$  ein Orthonormalsystem bezeichne und  $w \in \ell^2(\mathbb{Z})$  (durch 0 auf  $\mathbb{N}^*$  fortgesetzt) gelte ([18], Kap. IV, Abschnitt 7, Theorem 2). Daraus folgt (v).

Wir leiten aus (v) zunächst die weiteren Folgerungen her und erhalten darüber den Beweis zur Implikation (v)  $\implies$  (i). Die Fourier-Transformierte eines  $w$  gemäß (v) ist als Randfunktion einer Hardy-Funktion fast überall auf  $\mathbb{T}$  von Null verschieden,

wodurch  $(e_x \cdot \mathcal{F}w)_{x \in \mathbb{Z}}$  total in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$  und  $(w(\diamond - x))_{x \in \mathbb{Z}}$  total in  $\ell^2(\mathbb{Z})$  sind<sup>44</sup>. Für die Strukturhaltung ist festzuhalten, dass es sogenannte 'äußere  $H^2$ -Funktionen'  $\rho$  gibt, die vom Betrag gleich  $|\mathcal{F}w| = \sqrt{k}$  sind. Von diesen gibt es wiederum genau eine, deren zugehörige Fourier-Inverse die Bedingung  $(\mathcal{F}^{-1}\rho)(0) > 0$  erfüllt.  $w := \mathcal{F}^{-1}\rho$  erfüllt die Bedingungen in (v) und erbt darüber hinaus die Eigenschaft  $\overline{\text{lin}}(\rho \cdot e^{2\pi i n \text{id}} \mid n \in \mathbb{N}) = H^2$  in der Zeitbereichsform

$$\overline{w * (\mathbf{1}_{\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}} \cdot \mathcal{S}(\mathbb{Z}))}^{\ell^2(\mathbb{Z})} = \mathbf{1}_{\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}} \cdot \ell^2(\mathbb{Z}) ;$$

zunächst nur für  $\alpha = 0$  und dann durch Translation für alle  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Die Adjungierte  $W^\dagger$  des zu  $G$  partiell unitär äquivalenten Faltungsoperators  $W = w * \diamond$  bildet demnach die kanonische Zerlegung auf eine direkte Zerlegung des Prozessraums ab, die nach Satz 4.1.(ii) strukturhaltend ist.

**BEMERKUNG 1** Aufgrund der Stationarität kann man in (iii) statt 0 jede andere beliebige ganze Zahl einsetzen, d. h. (iii) ist äquivalent zu

$$\overline{\text{lin}}(\Xi_\beta \mid \beta \leq \alpha - 1) \neq \overline{\text{lin}}(\Xi_\beta \mid \beta \leq \alpha) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{Z} .$$

Dass die Eigenschaften (ii) und (iii) äquivalent sind, beruht auf der Tatsache, dass wir von vornherein das Spektralmaß als ein absolutstetiges Maß voraussetzen (vgl. Brockwell und Davies (1987, [6], Example 5.7.1)).

**HAUPTSATZ** Man nehme an,  $\mathcal{G} = \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{K} \cdot \Theta_x$  sei die strukturhaltende Bildzerlegung aus obigem Satz.

(i) Die Prädiktoren für  $\Xi_\tau$  in der Orthonormalbasis von  $\mathcal{G}$  sind durch

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \sum_x \mathbf{1}_{\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}}(x) \cdot \overline{\Theta_x(\tau)} \cdot \Theta_x = \sum_{x \leq \min(\alpha, \tau)} w(x - \tau) \cdot \Theta_x \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{Z}$$

gegeben.

(ii) Sei  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Ist die Gleichung  $w * \xi = \mathbf{1}_{\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}} \cdot w(\diamond - \tau)$  in

$$\{\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid \text{supp } \xi \subset \{\beta \mid \beta \leq \min(\alpha, \tau)\}\}$$

lösbar, so ist die Lösung  $\xi$  eindeutig und erfüllt  $\xi \in \mathcal{D}(W)$  sowie

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta = \sum_{\beta \leq \min(\alpha, \tau)} \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta .$$

**Beweis** Teil (i) folgt aus Hauptsatz 4.1.(i). Da  $w * \xi = \mathbf{1}_{\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}} \cdot w(\diamond - \tau) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , ist eine Lösung

$$\xi \in \{\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid \text{supp } \xi \subset \{\beta \mid \beta \leq \min(\alpha, \tau)\}\}$$

automatisch in  $\mathcal{D}(W)$  und muss

$$w(0) \cdot \xi(\min(\alpha, \tau)) = w * \xi(\min(\alpha, \tau)) = w(\min(\alpha, \tau) - \tau)$$

<sup>44</sup> Man könnte nun den zu  $G$  partiell unitär äquivalenten Faltungsoperator  $W = w * \diamond$  verwenden, um eine direkte Bildzerlegung gemäß Satz 3.3.1 zu konstruieren. Die Strukturhaltung erfordert aber etwas mehr.

aufgrund der Struktur von  $w$  erfüllen. Damit ist  $\xi(\min(\alpha, \tau)) = \frac{w(\min(\alpha, \tau) - \tau)}{w(0)}$  eindeutig festgelegt. Nimmt man diese Eindeutigkeit für alle  $j$  mit  $k < j \leq \min(\alpha, \tau)$  an, so legt die Gleichung

$$w(0) \cdot \xi(k) + \sum_{k < j \leq \min(\alpha, \tau)} w(k-j) \cdot \xi(j) = \sum_{k \leq j \leq \min(\alpha, \tau)} w(k-j) \cdot \xi(j) = w(k-\tau)$$

auch den Wert  $\xi(k)$  eindeutig fest. Sukzessive erhält man die behauptete Eindeutigkeit<sup>45</sup>. Die Projektionsgleichung folgt dann aus Satz 4.1.(iii).

**BEMERKUNG 2** Die Prädiktorformel in (i) ist innerhalb des Zeitbereichs formuliert und findet sich z. B. bei Gihman und Skorohod (1974, [18], Kap. IV, Abschnitt 9, Formel (5), p. 295). Die Herleitung der Formel auf die obige Weise schreibt man eher Kolmogorov zu (vgl. Bemerkung 3.3.3 und die dortige Referenz auf Priestley (1981, [40], Abschnitt 10.1)).

Es gibt auch eine Spektralbereichsfassung der Formel, z. B. bei Gihman und Skorohod (1974, [18], Theorem IV.9.4). Diese leitet sich meist aus dem Fourier-analytischen Zugang ab, den man eher Wiener zuschreiben könnte (vgl. Priestley (1981, [40], Abschnitt 10.1)). Dieser Zugang (über Variationsrechnung) ließe sich vielleicht in der Weise zusammenfassen, dass Eigenschaften der Spektraldichte ausgenutzt werden, um dort die Projektion von Exponentialfunktionen zu bestimmen.

**BEMERKUNG 3** Man beachte, dass es keine Darstellung der Projektion mittels  $\Xi_\beta$ ,  $\beta \leq \alpha$ , geben muss. Nichtsdestotrotz könnte man dem Hauptsatz (ii) insofern einen praktischen Nutzen abgewinnen, als dass die Koeffizienten der zuletzt vergangenen Zeitpunkte eindeutig aus den obigen Gleichungen zu bestimmen sind.

**BEISPIEL 1** Als ein erstes Beispiel betrachten wir eine  $AR(1)$ -Zeitreihe zum Parameter  $\tau \in \mathbb{C}$  mit  $|\tau| < 1$ . Dazu sei eine hilbertsche Basis  $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eines Hilbert-Raums  $\mathcal{X}$  gegeben und  $\Xi = (\Xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  die Lösung der Autoregressionsgleichung

$$\Xi_t - \tau \cdot \Xi_{t-1} = \Theta_t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Z}.$$

In der Tat ist

$$\Xi_t := \sum_{k \leq t} \tau^{t-k} \cdot \Theta_k \in \mathcal{X} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Z}$$

eine stationäre Lösung mit Kovarianzfunktion  $c = w^* * w$ , wobei

$$w : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} : s \longmapsto \begin{cases} \tau^{-s} & s \leq 0 \\ 0 & s > 0 \end{cases}$$

gewählt sei. Die Folge  $w$  ist quadratisch summierbar und wir beweisen direkt die Strukturhaltung, indem wir

$$1_{\{\beta\}} \in \overline{w * (1_{\{\beta | \beta \leq \alpha\}} \cdot \mathcal{S}(\mathbb{Z}))}^{\ell^2(\mathbb{Z})},$$

<sup>45</sup> Einen alternativen Nachweis der Eindeutigkeit werden wir im Beweis zum entsprechenden Hauptsatz zu stationären Prozessen auf  $\mathbb{R}$  angeben.

genauer gesagt

$$1_{\{\beta\}} = w * (1_{\{\beta\}} - \mathfrak{r}^1 \cdot 1_{\{\beta-1\}})$$

für  $\beta \leq \alpha$  bemerken. Die Zerlegungsbasis

$$(\Theta_x)_{x \in \mathbb{Z}} := (w^* (\diamond - x))_{x \in \mathbb{Z}}$$

entspricht dabei der eingebetteten Ausgangsbasis:

$$1_{\{x \leq \diamond\}} \cdot \overline{\mathfrak{r}^{\diamond-x}} = \left( \sum_{k \leq \diamond} \mathfrak{r}^{\diamond-k} \cdot \Theta_k \middle| \Theta_x \right) = (\Xi_\diamond | \Theta_x) = \Theta_x = w^* (\diamond - x) .$$

Nach dem Hauptsatz (i) gilt für  $\alpha, \tau \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau &= \sum_{x \leq \min(\alpha, \tau)} w(x - \tau) \cdot \Theta_x = \sum_{x \leq \min(\alpha, \tau)} \mathfrak{r}^{-x+\tau} \cdot \Theta_x = \\ &= \mathfrak{r}^{\tau - \min(\alpha, \tau)} \cdot \sum_{x \leq \min(\alpha, \tau)} \mathfrak{r}^{-(x - \min(\alpha, \tau))} \cdot \Theta_x . \end{aligned}$$

Das Lösen der Gleichung

$$w * \xi = 1_{]-\infty, \min(\alpha, \tau)]} \cdot w(\diamond - \tau)$$

gemäß (ii) des Hauptsatzes ist nicht nötig<sup>46</sup>, da aufgrund von  $\Xi_s = \sum_{x \leq s} w(x - s) \cdot \Theta_x$  die obige Projektion weiter in der Form

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \mathfrak{r}^{\tau - \min(\alpha, \tau)} \cdot \sum_{x \leq \min(\alpha, \tau)} \mathfrak{r}^{-(x - \min(\alpha, \tau))} \cdot \Theta_x = \mathfrak{r}^{\tau - \min(\alpha, \tau)} \cdot \Xi_{\min(\alpha, \tau)}$$

geschrieben kann.

**BEISPIEL 2** Analog verfährt man mit einer  $MA(1)$ -Zeitreihe  $\Xi = (\Xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  zum Parameter  $\mathfrak{r} \in \mathbb{C}$  mit  $|\mathfrak{r}| \neq 1$ , die vermöge einer hilbertschen Basis  $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eines Hilbert-Raums  $\mathcal{X}$  durch

$$\Xi_t = \Theta_t - \mathfrak{r} \cdot \Theta_{t-1} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Z}$$

definiert ist. Sie ist stationär mit Kovarianzfunktion

$$c = (-\mathfrak{r})_{\{-1\}} + (1 + |\mathfrak{r}|^2)_{\{0\}} + \overline{(-\mathfrak{r})}_{\{1\}} .$$

Wir faktorisieren  $c = w^* * w$ , wobei

$$\begin{aligned} w &:= 1_{\{0\}} - \mathfrak{r}_{\{-1\}} && \text{falls } |\mathfrak{r}| < 1 \\ w &:= \overline{(-\mathfrak{r})}_{\{0\}} + 1_{\{-1\}} && \text{falls } |\mathfrak{r}| > 1 \end{aligned}$$

gewählt sei. Die Folge  $w$  ist in jedem Fall quadratisch summierbar und wie in obigem Beispiel 1 beweist man die Strukturhaltung direkt. Nach dem Hauptsatz (i) gilt für  $\alpha, \tau \in \mathbb{Z}$  mit<sup>47</sup>  $\Theta_x := w^* (\diamond - x)$

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \sum_{x \leq \min(\alpha, \tau)} w(x - \tau) \cdot \Theta_x = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \leq \tau - 2 \\ w(-1) \cdot \Theta_{\tau-1} & \text{falls } \alpha = \tau - 1 \\ \Xi_\tau & \text{falls } \alpha \geq \tau \end{cases} ,$$

<sup>46</sup> auch wenn als Lösung  $\xi := \mathfrak{r}^{\tau - \min(\alpha, \tau)} \cdot 1_{\{\min(\alpha, \tau)\}}$  auf der Hand liegt.

<sup>47</sup> Die Zerlegungsbasis  $(\Theta_x)_{x \in \mathbb{Z}}$  entspricht nur im Fall  $|\mathfrak{r}| < 1$  der eingebetteten Ausgangsbasis.

wobei der erste und der letzte Fall klar sind. Im Fall  $\alpha = \tau - 1$  gilt genauer

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau &= (-\mathbf{r}) \cdot \Theta_{\tau-1} && \text{falls } |\mathbf{r}| < 1 \\ \mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau &= \Theta_{\tau-1} && \text{falls } |\mathbf{r}| > 1 \end{aligned}$$

Unter der Bedingung  $|\mathbf{r}| < 1$  ist die Faltungsgleichung

$$w * \xi = 1_{]-\infty, \tau-1]} \cdot w(\diamond - \tau)$$

d. h.

$$\left( (-\mathbf{r})_{\{-1\}} + 1_{\{0\}} \right) * \xi = 1_{]-\infty, \tau-1]} \cdot \left( 1_{\{\tau\}} - \mathbf{r}_{\{\tau-1\}} \right) = (-\mathbf{r})_{\{\tau-1\}}$$

gemäß Hauptsatz (ii) mit  $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z})$  derart zu lösen, dass  $\text{supp } \xi \subset ]-\infty, \alpha] = ]-\infty, \tau - 1]$  gilt. Eine solche Lösung existiert mit

$$\xi = - \sum_{k \geq 1} \mathbf{r}_{\{\tau-k\}}^k \cdot$$

Unter der Bedingung  $|\mathbf{r}| > 1$  lautet die gemäß Hauptsatz (ii) zu lösende Faltungsgleichung

$$\left( 1_{\{-1\}} + \overline{(-\mathbf{r})}_{\{0\}} \right) * \xi = 1_{]-\infty, \tau-1]} \cdot \left( \overline{(-\mathbf{r})}_{\{\tau\}} + 1_{\{\tau-1\}} \right) = 1_{\{\tau-1\}} \cdot$$

Eine entsprechende Lösung  $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z})$  mit  $\text{supp } \xi \subset ]-\infty, \alpha] = ]-\infty, \tau - 1]$  ist durch

$$\xi = - \sum_{k \geq 1} \left( \frac{1}{\overline{\mathbf{r}}} \right)_{\{\tau-k\}}^k$$

gegeben. In diesem Beispiel war ein explizites Lösen gemäß Hauptsatz (ii) nötig und möglich.

**BEMERKUNG 4** Wir skizzieren noch, warum das Lösen gemäß Hauptsatz (ii) nicht immer möglich ist. In der Situation  $\tau = 1 = \alpha + 1$  entspricht dem Auflösen von

$$w * \xi = 1_{]-\infty, 0]} \cdot w(\diamond - 1) = w(\diamond - 1) - w(0) \cdot 1_{\{1\}}$$

nach  $\xi$  mit  $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z})$  und  $\text{supp } \xi \subset ]-\infty, 0]$  gerade dem Auflösen von

$$\mathcal{F}w \cdot \mathcal{F}\xi = \mathcal{F}(w(\diamond - 1)) - w(0) \cdot \mathcal{F}(1_{\{1\}}) = e^{-2\pi i \cdot \text{id}} \cdot (\mathcal{F}w - w(0))$$

bzw.

$$\mathcal{F}\xi = \mathcal{F}(w(\diamond - 1)) - w(0) \cdot \mathcal{F}(1_{\{1\}}) = e^{-2\pi i \cdot \text{id}} \cdot \left( 1 - \frac{w(0)}{\mathcal{F}w} \right)$$

nach  $\mathcal{F}\xi \in H^2 \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ . Dazu ist jedoch  $\frac{1}{\mathcal{F}w} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$  notwendig, was nicht immer erfüllt ist.

Ein erweiterter Rahmen, der Linearkombinationen nicht starr an Koeffizienten  $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z})$  bindet, sondern einen Formalismus mittels Maßen gestattet (vgl. Bemerkung 4.1.3) könnte die Lösbarkeitsproblematik in Einzelfällen durchaus abschwächen. Aber eine entsprechend allgemeine Theorie zur Lösbarkeit kann nur im Rahmen von Distributionen gefasst sein und ihre Entwicklung scheint eine nicht zu unterschätzende, eigenständige Aufgabe zu sein.

## 4.4 Stationäre Prozesse auf $\mathbb{R}$

Sei  $\Xi$  ein abschließbarer (bzgl.  $\lambda$ ) in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$  eingebetteter stationärer Prozess auf  $\mathbb{R}$ . Es gelten die Notationen aus Abschnitt 3.4. Ziel ist es, das Prädiktionsproblem für die Kette  $(] -\infty, \alpha])_{\alpha \in \mathbb{R}}$  von Teilmengen von  $\mathbb{R}$  zu lösen. Bezüglich dieser Kette versuchen wir den Prädiktor  $\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau := \mathcal{P}_{]-\infty, \alpha]} \Xi_\tau$  eines  $\Xi_\tau \in \mathcal{G}$  herzuleiten, nachdem wir strukturerhaltende Zerlegungen untersucht haben.

**SATZ** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es existiert eine bzgl.  $(] -\infty, \alpha])_{\alpha \in \mathbb{R}}$  strukturerhaltende Zerlegung.
- (ii) Die Spektraldichte  $\kappa$  erfüllt  $\frac{\ln(\kappa)}{1+\text{id}^2} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ .
- (iii) Es gibt  $w \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$  mit  $w = 0$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  und  $c = w^* * w$ .

In diesem Fall ist  $w$  so zu wählen, dass  $\mathcal{F}w$  eine äußere  $H^2$ -Funktion ist. Dadurch ist  $w$  bis auf einen Phasenfaktor eindeutig festgelegt und die direkte Bildzerlegung

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})'$$

unter der Adjungierten von  $W := w * \diamond$  mittels  $\Theta_x = w^*(\diamond - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , gemäß Satz 3.4.1 ist strukturerhaltend.

**Beweis** Eine strukturerhaltende Zerlegung ist von der Form  $\mathcal{G} = \int^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx$ , mit der Eigenschaft

$$\overline{\text{lin}}(\Xi_\beta \mid \beta \leq \alpha) = \int_{]-\infty, \alpha]} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R},$$

wodurch für  $t \in \mathbb{R}$  und  $\Delta > 0$  der Fehler  $\|\Xi_t - \mathcal{P}_{t-\Delta} \Xi_t\|$  gerade durch  $\left\| \widehat{\Xi}_t \cdot 1_{[t-\Delta, t]} \right\| = \left\| \widehat{\Xi}_t \cdot 1_{[t-\Delta, \infty[} \right\|$  gegeben ist. Dieser Fehler konvergiert für  $\Delta \rightarrow \infty$  gegen die Gesamtmasse  $\left\| \widehat{\Xi}_t \right\| = \|\Xi_0\|$  des Spektralmaßes. Nach Gihman und Skorohod (1974, [18]) ist der Prozess also regulär. Äquivalent dazu ([18], Kap. IV, Abschnitt 9, Theorem 6) erfüllt die Spektraldichte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \kappa(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda > -\infty,$$

was hinreichend für die Bedingung in (ii) ist. Wie in der betreffenden Literatur üblich, möchten wir für die nötigen Folgerungen aus (ii) nur auf die Analogien zum Fall stationärer Zeitreihen auf  $\mathbb{Z}$  verweisen. Danach erfüllt die Fourier-Inverse  $w := \mathcal{F}^{-1} \rho$  der zu  $|\sqrt{\kappa}|$  gehörenden äußeren Hardy-Funktion  $\rho$  wiederum die Bedingungen in (iii) und besitzt darüber hinaus die Eigenschaft

$$\overline{w * (1_{]-\infty, \alpha]} \cdot \mathcal{S}(\mathbb{R}))}^{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = 1_{]-\infty, \alpha]} \cdot \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$$



für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die Adjungierte  $W^\dagger$  (bzw. ihre Fortsetzung  $V^\dagger$ ) des zu  $G$  partiell unitär äquivalenten Faltungsoperators  $W = w * \diamond$  bildet demnach die kanonische Zerlegung auf eine direkte Zerlegung des Prozessraums ab, die nach Satz 4.1.(ii) strukturerhaltend ist.

**HAUPTSATZ** Man nehme an,  $\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx$  sei die strukturerhaltende Bildzerlegung aus obigem Satz.

(i) Die Prädiktoren für  $\Xi_\tau$  in der Orthonormalbasis von  $\mathcal{G}$  sind durch

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \int_{]-\infty, \alpha]} \overline{\Theta_x(\tau)} \cdot \Theta_x dx = \int_{]-\infty, \alpha]} w(x - \tau) \cdot \Theta_x dx \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

gegeben.

(ii) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ist die Gleichung  $w * \xi = 1_{]-\infty, \alpha]} \cdot w(\diamond - \tau)$  in

$$\{\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \mid \text{supp } \xi \subset ]-\infty, \alpha]\}$$

lösbar, so ist die Lösung  $\xi$  eindeutig und erfüllt  $\xi \in \mathcal{D}(W)$  sowie

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \int \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta d\beta = \int_{-\infty}^{\min(\alpha, \tau)} \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta d\beta.$$

**Beweis** Teil (i) folgt aus Hauptsatz 4.1.(i). Da  $w * \xi = 1_{]-\infty, \alpha]} \cdot w(\diamond - \tau) \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$  gilt, ist eine Lösung

$$\xi \in \{\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}) \mid \text{supp } \xi \subset ]-\infty, \min(\alpha, \tau)]\}$$

automatisch in  $\mathcal{D}(W)$ . Mit  $G^*G$  ist  $G$  und somit  $W$  injektiv, was die behauptete Eindeutigkeit beweist. Die Projektionsgleichung folgt dann aus Satz 4.1.(iii).

**BEMERKUNG 1** Wir verweisen auf die Anmerkungen des vorigen Kapitels (Bemerkung 4.3.2) über Verbindungen zu bereits veröffentlichten Formeln, die auch für die Prozesse auf  $\mathbb{R}$  bestehen. In diesem kontinuierlichen Rahmen gewinnt jedoch die Einbettung in den Oberraum  $F^\dagger = \mathcal{S}(\mathbb{R})'$  an Bedeutung und der Formalismus der vorliegenden Arbeit mittels vektorwertigen Dichten setzt sich etwas deutlicher von den Formeln in der Literatur ab.

Der Hinweis auf die Nicht-Existenz von Prädiktionsformeln in Form von Linearkombinationen der  $(\Xi_\beta)_{\beta \leq \alpha}$  ist an dieser Stelle nicht weniger angebracht als im Diskreten.

**BEISPIEL** Als Beispiel betrachten wir den stationären Prozess  $\Xi$  auf  $\mathbb{R}$ , dessen Kovarianzfunktion durch

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (s, t) \longmapsto \exp\left(-\frac{|s - t|}{2}\right)$$

gegeben sei<sup>48</sup>. Die Autokovarianzfunktion  $c : s \mapsto \exp\left(\frac{-|s|}{2}\right)$  hat

$$\mathcal{F}c = \frac{4}{1 + |4\pi \cdot \text{id}|^2} = \frac{2}{1 + 4\pi i \cdot \text{id}} \cdot \frac{2}{1 - 4\pi i \cdot \text{id}}$$

als Fourier-Transformierte und erlaubt somit eine Faktorisierung gemäß

$$\exp\left(-\frac{|\text{id}|}{2}\right) = \left(1_{]-\infty, 0]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{2}}\right)^* * \left(1_{]-\infty, 0]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{2}}\right).$$

Wir zeigen für

$$w := 1_{]-\infty, 0]} \cdot e^{\frac{\text{id}}{2}} \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$$

die Strukturhaltung

$$\overline{w * (1_{]-\infty, \alpha]} \cdot \mathcal{S}(\mathbb{R}))}^{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = 1_{]-\infty, \alpha]} \cdot \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die Enthaltensrelation ' $\subset$ ' ergibt sich unmittelbar aus  $\text{supp } w \subset ]-\infty, 0]$ .

Für eine Funktion  $f \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$  mit

$$\begin{aligned} 0 &= (f | w * (1_{]-\infty, \alpha]} \cdot \varphi)) = \int \overline{f(x)} \cdot \int 1_{]-\infty, \alpha]}(y) \cdot w(x-y) \cdot \varphi(y) \, dy \, dx = \\ &= \int 1_{]-\infty, \alpha]}(y) \cdot \overline{\int f(x) \cdot w^*(y-x) \, dx} \cdot \varphi(y) \, dy = \\ &= \int 1_{]-\infty, 0]}(\tilde{y}) \cdot \overline{\int f(x) \cdot w^*(\tilde{y} - (x - \alpha)) \, dx} \cdot \varphi(\tilde{y} + \alpha) \, d\tilde{y} = \\ &= \int 1_{]-\infty, 0]}(\tilde{y}) \cdot \overline{\int f(\tilde{x} + \alpha) \cdot w^*(\tilde{y} - \tilde{x}) \, d\tilde{x}} \cdot \varphi(\tilde{y} + \alpha) \, d\tilde{y} \end{aligned}$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  folgt

$$e^{-\frac{\diamond}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\diamond} f(x + \alpha) \cdot e^{\frac{x}{2}} \, dx = \int f(x + \alpha) \cdot w^*(\diamond - x) \, dx = f_{-\alpha} * w^* = 0$$

fast überall auf  $]-\infty, 0]$ . Dann muss aber

$$f(\diamond + \alpha) \cdot e^{\frac{\diamond}{2}} = 0 \quad \text{f.ü. auf } ]-\infty, 0]$$

bzw.  $f \cdot 1_{]-\infty, \alpha]} = 0$   $\lambda_{\mathbb{R}}$ -fast überall gelten. Dies beweist  $f \in (1_{]-\infty, \alpha]} \cdot \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}}))^{\perp}$ , woraus die noch fehlende Inklusion ' $\supset$ ' folgt.

Nach dem Hauptsatz (i) gilt für  $\alpha, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $\Theta_x := w^*(\diamond - x)$

$$\mathcal{P}_{\alpha} \Xi_{\tau} = \int_{-\infty}^{\min(\alpha, \tau)} w(x - \tau) \cdot \Theta_x \, dx = \int_{-\infty}^{\min(\alpha, \tau)} e^{\frac{(x-\tau)}{2}} \cdot \Theta_x \, dx$$

und weiter

$$\mathcal{P}_{\alpha} \Xi_{\tau} = e^{-\frac{\tau - \min(\alpha, \tau)}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\min(\alpha, \tau)} e^{\frac{x - \min(\alpha, \tau)}{2}} \cdot \Theta_x \, dx = e^{-\frac{\tau - \min(\alpha, \tau)}{2}} \cdot \Xi_{\min(\alpha, \tau)}$$

<sup>48</sup> Man vergleiche mit den Ausführungen zu Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen auf  $\mathbb{R}_+$  in den Beispielen 5 aller Abschnitte des Kapitels 2. Weiterhin besteht eine Verbindung zu der Brownschen Bewegung, deren stationärer Erzeuger genau die angeführte Kovarianzstruktur besitzt.

denn  $\Xi_s = \int w(x-s) \cdot \Theta_x dx$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ . Dies macht ein Lösen gemäß Hauptsatz (ii) unnötig, denn der Prädiktor besitzt keine Darstellung als Linearkombination

$$\int_{-\infty}^{\min(\alpha, \tau)} \xi(\beta) \cdot \Xi_\beta d\beta$$

mit Koeffizienten  $\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$ . Die Situation ähnelt in diesem Punkt ebenfalls der bei der Brownschen Bewegung in der Einleitung.

## 4.5 Selbstähnliche Prozesse

Sei  $\Xi$  ein abschließbarer bzgl.  $\mu := \text{id}^{-2H} \cdot \exp(\lambda_{\mathbb{R}})$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$  eingebetteter selbstähnlicher Prozess auf  $\mathbb{R}_+^*$  (mit Parameter  $H$ ). Es gelten die Notationen aus Abschnitt 3.5, insbesondere bezeichne

$$X_a := (\Phi^{-1}\Xi)_a = e^{-Ha} \cdot \Xi_{\exp(a)} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

den über die Lamperti-Transformation zu  $\Xi$  gehörenden stationären Erzeuger. Ziel ist es, das Prädiktionsproblem für die Kette  $(]0, \alpha])_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}$  von Teilmengen von  $\mathbb{R}_+^*$  zu lösen. Bezüglich dieser Kette versuchen wir den Prädiktor  $\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau := \mathcal{P}_{]0, \alpha]} \Xi_\tau$  eines  $\Xi_\tau \in \mathcal{G}_\Xi$  herzuleiten, nachdem wir strukturerhaltende Zerlegungen untersucht haben.

**SATZ** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Es existiert eine bzgl.  $(]0, \alpha])_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}$  strukturerhaltende Zerlegung von  $\mathcal{G}_\Xi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$ .*
- (ii) *Es existiert eine bzgl.  $(]-\infty, a])_{a \in \mathbb{R}}$  strukturerhaltende Zerlegung von  $\mathcal{G}_X$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ .*
- (iii) *Die Spektraldichte  $\kappa$  erfüllt  $\frac{\ln(\kappa)}{1+\text{id}^2} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ .*
- (iv) *Es gibt  $w \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$  mit  $w = 0$  auf  $\mathbb{R}_+^*$  und  $c = w^* * w$ .*

*In diesem Fall ist  $w$  so zu wählen, dass  $\mathcal{F}w$  eine äußere  $H^2$ -Funktion ist. Dadurch ist  $w$  bis auf einen Phasenfaktor eindeutig festgelegt und die direkte Bildzerlegung*

$$\mathcal{G}_X = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \Theta_x dx \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})'$$

*unter der Adjungierten von  $W_X := w * \diamond$  mittels  $\Theta_x = w^*(\diamond - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , gemäß Satz 3.4.1 ist strukturerhaltend für  $\mathcal{G}_X$ . Gemäß Satz 3.5.1 entspricht dieser Zerlegung genau eine strukturerhaltende Zerlegung*

$$\mathcal{G}_\Xi = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)'$$

**Beweis** Der Satz ergibt sich aus der Verknüpfung von Satz 3.5.1 mit Satz 4.4.

**HAUPTSATZ** *Man nehme an,  $\mathcal{G}_\Xi = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{K} \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x)$  sei die strukturerhaltende Bildzerlegung aus obigem Satz und  $W_X$  bzw.  $W_\Xi = \phi \circ W_X \circ \phi^{-1}$  die zugehörigen Operatoren gemäß Satz 3.5.1.*

(i) *Die Prädiktoren für  $\Xi_\tau$  in der Orthonormalbasis von  $\mathcal{G}_\Xi$  sind durch*

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \int_{]0, \alpha]} \overline{\tilde{\Theta}_x(\tau)} \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x) = \int_{]0, \alpha]} (x\tau)^H \cdot w\left(\ln\left(\frac{x}{\tau}\right)\right) \cdot \tilde{\Theta}_x d\mu(x) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

*gegeben.*

(ii) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Ist die Faltungsgleichung

$$(\text{id}^H \cdot (w \circ \ln)) * \tilde{\xi} = 1_{]0, \alpha]} \cdot (\text{id} \cdot \tau)^H \cdot w \left( \ln \left( \frac{\text{id}}{\tau} \right) \right)$$

bzgl. des Haar-Maßes auf  $\mathbb{R}_+^*$  in

$$\left\{ \tilde{\xi} \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid \text{supp } \tilde{\xi} \subset ]0, \alpha] \right\}$$

lösbar, so ist die Lösung  $\tilde{\xi}$  eindeutig und erfüllt  $\tilde{\xi} \in \mathcal{D}(W_\Xi)$  sowie

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \int \tilde{\xi}(\beta) \cdot \Xi_\beta d\mu(\beta) = \int_0^{\min(\alpha, \tau)} \tilde{\xi}(\beta) \cdot \Xi_\beta d\mu(\beta) .$$

**Beweis** Analog zu Hauptsatz 4.4 über Hauptsatz 4.1 und Satz 4.1.

**BEISPIEL** Im Falle der Fraktionalen Brownschen Bewegung mit den Notationen des Beispiels 3.5 ergibt sich gemäß des Hauptsatzes, dass ein  $\tilde{\xi} \in \mathcal{D}(\widetilde{W})$  genau dann Koeffizient zu  $\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau$  bzgl.  $\Xi_{]0, \alpha]}$  mit  $\alpha < \tau$  ist, wenn es die folgende Faltungsgleichung (bzgl. Haar-Maß auf  $\mathbb{R}_+^*$ )

$$[\text{id}^H \cdot (w \circ \ln)] * \tilde{\xi} = 1_{]0, \alpha]} \cdot (\tau \cdot \text{id})^H \cdot (w \circ \ln) \left( \frac{\text{id}}{\tau} \right)$$

mit

$$w := \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \cdot \left[ \frac{(1 - e^\diamond)^{H - \frac{1}{2}}}{e^{-(1-H)\diamond}} + \frac{(\frac{1}{2} - H)}{e^{-H\diamond}} \cdot B\left(\frac{2H+1}{2}, 1-2H, 1-e^\diamond\right) \right] \cdot 1_{]-\infty, 0]} ,$$

falls  $H < \frac{1}{2}$ , bzw.

$$w := \frac{1}{\Gamma(H - \frac{1}{2})} \cdot e^{H\diamond} \cdot B\left(\frac{2H-1}{2}, 1-2H, 1-e^\diamond\right) \cdot 1_{]-\infty, 0]} ,$$

falls  $H > \frac{1}{2}$  löst. Äquivalent dazu ist, dass

$$\xi := \frac{1}{\tau^H} \cdot \phi^{-1}(\tilde{\xi})$$

Koeffizient zu  $\mathcal{P}_{\ln \alpha} X_{\ln \tau}$  bzgl.  $X_{]-\infty, \ln \alpha]}$  ist, wenn dabei  $X$  den zu  $\Xi$  gehörigen stationären Erzeuger bezeichnet<sup>49</sup>. Dies ist nach Hauptsatz 4.4.(ii) genau dann der Fall, wenn  $\xi$  die Faltungsgleichung (in  $\mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$ )

$$w * \xi = 1_{]-\infty, \ln \alpha]} \cdot w(\diamond - \ln(\tau))$$

löst. Im Fourier-Bild ist dies gleichbedeutend mit

$$\frac{\Gamma(1-H-i\text{id})}{(H-i\text{id})\Gamma(\frac{1}{2}-i\text{id})} \cdot \mathcal{F}\xi = \mathcal{F}(1_{]-\infty, \ln \alpha]} \cdot w(\diamond - \ln(\tau))) .$$

Nuzman und Poor (2000, [33]) wählen zur Bestimmung des Prädiktors genau diesen Weg über die Fourier-Inverse, wobei  $H < \frac{1}{2}$  für die Eigenschaft  $\xi \in \mathbf{L}^2(\lambda_{\mathbb{R}})$  notwendig

<sup>49</sup> Diese Beziehung zwischen den Vorhersagekoeffizienten ist bei Nuzman und Poor (2000, [33], Abschnitt 3.2) ausführlich diskutiert.

ist. Im Ergebnis erhalten Nuzman und Poor (2000, [33], Theorem 4.4) als Prädiktor

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \int_0^\alpha m_\alpha \left( \frac{\tau}{\alpha} - 1, t \right) \cdot \Xi_{\alpha-t} dt$$

mit

$$m_\alpha \left( \frac{\tau}{\alpha} - 1, t \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{t}{\alpha} \right)^{-(H+\frac{1}{2})} \cdot \left( 1 - \frac{t}{\alpha} \right)^{-(H+\frac{1}{2})} \times \\ \times \left[ \frac{1-2H}{2} \cdot B \left( \frac{2H+1}{2}, 1-2H, \frac{\tau-\alpha}{\tau} \right) + \left( \frac{\tau}{\alpha} - 1 \right)^{H+\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\tau}{\alpha} \right)^{H-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha-t}{\tau-\alpha+t} \right]$$

In der Notation der vorliegenden Arbeit besagt dies:

$$\mathcal{P}_\alpha \Xi_\tau = \int_0^\alpha \tilde{\xi}(\beta) \cdot \Xi_\beta d\mu(\beta)$$

mit

$$\tilde{\xi}(\beta) = (\alpha\beta)^{2H} \cdot (\alpha-\beta)^{-(H+\frac{1}{2})} \cdot \beta^{\frac{1}{2}-H} \times \\ \times \left[ \frac{1-2H}{2} \cdot B \left( \frac{2H+1}{2}, 1-2H, \frac{\tau-\alpha}{\tau} \right) + \left( \frac{\tau}{\alpha} - 1 \right)^{H+\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\tau}{\alpha} \right)^{H-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\beta}{\tau-\beta} \right]$$

## 4.6 Abschließende Bemerkungen

**BEMERKUNG 1** Der Inhalt dieses Kapitels sollte vor dem Hintergrund der vorliegenden Arbeit als Ganzes eingeordnet werden.

Die angesprochene Anwendung der entwickelten Zerlegungstheorie auf die Vorhersage stochastischer Prozesse soll die Bedeutung der Zerlegungstheorie hervorheben. Weniger die Ergebnisse der Prädiktionstheorie dieses Kapitels stehen dabei im Vordergrund als vielmehr ihre einheitliche Herleitung über die abstrakt zur Verfügung gestellte Zeitbereichstheorie.

Die Aussicht, auch neue Ergebnisse in der Vorhersage von Zeitreihen mit dem entwickelten Formalismus zu erzielen, ist nach unserer Einschätzung jedoch groß genug, um daran anschließende Untersuchungen zu motivieren.

Wir nennen noch weitere Aspekte, deren Untersuchung aus Sicht der vorliegenden Arbeit interessant erscheint.

**BEMERKUNG 2** Die theoretischen Ausführungen zum abstrakten Begriff der Strukturhaltung (Abschnitt 4.1) und die konkreten Diskussionen in den Abschnitten 4.2 bis 4.5 deuten auf das zentrale Bindeglied zwischen der Zerlegungstheorie und ihrer Anwendbarkeit für Vorhersagen stochastischer Prozesse hin. Die Verbindung ist durch eine allgemeine Cholesky-Zerlegung des Kovarianzoperators gegeben. Eine Ausweitung dieser Methodik könnte man zukünftig verfolgen. Arbeiten zur Operatorfaktorisierung kommen meist ohne die üblichen Strukturannahmen aus (z.B. Power (1986, [39]) oder Larson (1985, [26])).

**BEMERKUNG 3** Der Begriff der Linearkombination (wie er in der vorliegenden Arbeit verwendet wird) gestattet nicht, alle Elemente des abgeschlossenen Raums darzustellen. Hier besteht noch Bedarf an allgemeineren Koeffizienten. Wie schon in Bemerkung 4.1.3 angemerkt, könnte eine Erweiterung hin zu Maßen als Koeffizienten ein Ansatz sein.

# Literaturverzeichnis

- [1] R.J. Adler. *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*. IMS Lecture Notes - Monograph Series. 12. Hayward, CA: Institute of Mathematical Statistics. vii, 160 p. (1990).
- [2] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels*. Trans. Am. Math. Soc. 68, 337-404 (1950).
- [3] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 4., völlig überarb. u. neugestaltete Aufl. des Werkes: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. De Gruyter Lehrbuch. Berlin etc.: Walter de Gruyter. xvii, 520 S. (1991).
- [4] P. Bondon. *Recursive relations for multistep prediction of a stationary time series*. J. Time Ser. Anal. 22, No.4, 399-410 (2001).
- [5] G.E.P. Box; G.M. Jenkins. *Time series analysis: Forecasting and control. Rev. ed.*. Holden-Day Series in Time Series Analysis. San Francisco etc.: Holden-Day. XXI, 575 p. (1976).
- [6] P.J. Brockwell; R.A. Davies. *Time series: theory and methods*. Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag XIV, 519 p. (1987).
- [7] S. Chaturvedi, A.K. Kapoor, V. Srinivasan. *A new orthogonalization procedure with an extremal property*. J. Phys. A, Math. Gen. 31, No.19, L367-L370 (1998).
- [8] Ph. Courmontagne. *A new formulation for the Karhunen-Loeve expansion*. Signal Process. 79, No.3, 235-249 (1999).
- [9] H. Cramér. *On some classes of nonstationary stochastic processes*. Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. 2, 57-78 (1961).
- [10] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Enlarged and corrected printing. New York-London: Academic Press. XV, 387 p. (1969).
- [11] J. Dieudonné. *Treatise on analysis. Vol. II*. Translated by I. G. Macdonald. Enlarged and corrected printing. Pure and Applied Mathematics. Vol. 10-II. New York - San Francisco - London: Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XV, 453 p. (1976).



- [12] J. Dieudonné. *Treatise on Analysis. Vol. VI.* Transl. by I. G. Macdonald. Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-VI. New York-San Francisco-London: Academic Press, X, 239 p. (1978).
- [13] A. Dür. *On the optimality of the discrete Karhunen-Loève expansion.* SIAM J. Control Optimization 36, No. 6, 1937-1939 (1998).
- [14] P.L. Duren. *Theory of  $H^p$  Spaces.* New York and London: Academic Press XII, 258 p. (1970).
- [15] K.O. Dzharidze; J.H. van Zanten. *A series expansion of fractional Brownian motion.* Stichting Centrum voor Wiskunde en Informatica. CWI Report PNA-R0216, June 30, 2002.  
Zugriff am 26.11.2003 unter <http://ftp.cwi.nl/CWIreports/PNA/PNA-R0216.pdf>
- [16] W.A. Fuller. *Introduction to statistical time series.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York, NY: Wiley. xxii, 698 p. (1996).
- [17] I.M. Gelfand; G.E. Schilow. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). II: Lineare topologische Räume. Räume von Grundfunktionen und verallgemeinerten Funktionen.* Hochschulbücher für Mathematik, 48. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. XII, 216 S. (1962).
- [18] I.I. Gihman; A.V. Skorohod. *The theory of stochastic processes I.* Translated from the Russian by S. Kotz. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 210. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. VIII, 570 p. (1974).
- [19] V. Girardin; R. Senoussi. *Semigroup stationary processes and spectral representation.* Bernoulli 9, No. 5, 857-876 (2003).
- [20] C. Houdré. *Harmonizability,  $V$ -boundedness,  $(2,p)$ -boundedness of stochastic processes.* Probab. Theory Relat. Fields 84, No.1, 39-54 (1990).
- [21] Y. Kakihara. *Series representations and Karhunen processes.* J. Multivariate Anal. 25, No.1, 10-24 (1988).
- [22] K. Karhunen. *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, No.37, 79 p. (1947).
- [23] A. Kolmogoroff. *Interpolation und Extrapolation von stationären zufälligen Folgen.* Bull. Acad. Sci. URSS, Ser. Math. 5, 3-14 (1941).
- [24] L.H. Koopmans. *The spectral analysis of time series.* Probability and Mathematical Statistics. 22. New York - London: Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XIV, 366 p.(1974).

- [25] T. Kühn; W. Linde. *Optimal series representation of fractional Brownian sheets*. Bernoulli 8, No. 5, 669-696 (2002).
- [26] D.R. Larson. *Nest algebras and similarity transformations*. Ann. Math. (2) 121, 409-427 (1985).
- [27] M. Ledoux; M. Talagrand. *Probability in Banach Spaces. Isoperimetry and processes*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, 23. Berlin etc.: Springer-Verlag. xii, 480 p. (1991).
- [28] M. Loève. *Probability theory II*. 4th ed.. Graduate Texts in Mathematics. 46. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. XVI, 413 p. (1978).
- [29] R. Meidan. *Reproducing-kernel Hilbert spaces of distributions and generalized stochastic processes*. SIAM J. Math. Anal. 10, 62-70 (1979).
- [30] H. Meschkowski. *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 113. Berlin- Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, VIII, 256 S. (1962).
- [31] J. Michalék; L. Rüschendorf. *A remark on the spectral domain of nonstationary processes*. Stochastic Processes Appl. 53, No.1, 55-64 (1994).
- [32] H.J. Newton; M. Pagano. *The finite memory prediction of covariance stationary time series*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 4, 330-339 (1983).
- [33] C.J. Nuzman; H.V. Poor. *Linear estimation of self-similar processes via Lamperti's transformation*. J. Appl. Probab. 37, No.2, 429-452 (2000).
- [34] C.J. Nuzman; H.V. Poor. *Reproducing kernel Hilbert space methods for wide-sense self-similar processes*. Ann. Appl. Probab. 11, No.4, 1199-1219 (2001).
- [35] E. Parzen. *Statistical inference on time series by Hilbert space methods, I*. Department of Statistics, Stanford University, Technical Report No. 23, January 2, 1959.
- [36] E. Parzen. *An approach to time series analysis*. Ann. Math. Stat. 32, 951-989 (1961).
- [37] E. Parzen. *Time series analysis papers*. San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day 1967. XVI, 565 p. (1967).
- [38] C. Portenier. *Analyse fonctionnelle*. Marburg (FRG): Univ. Marburg, Fachbereich Mathematik und Informatik, Vorlesungsskript im WS und SS 2002 (Zugriff auf Kap. 1 bis 7 am 26.11.2003 unter <http://www.mathematik.uni-marburg.de/~port/Analyse-fonctionnelle.html>)
- [39] S.C. Power. *Factorization in analytic operator algebras*. J. Funct. Anal. 67, 413-432 (1986).

- [40] M.B. Priestley. *Spectral analysis and time series. Volume 1: Univariate series. Volume 2: Multivariate series, prediction and control.* Probability and Mathematical Statistics. London etc.: Academic Press. A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XVIII, 890, AIX, RXXI, IXV p. (1981).
- [41] J.-R. Pycke. *Une généralisation du développement de Karhunen-Loève du pont brownien.* C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 333, No.7, 685-688 (2001).
- [42] M. Reed; B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. 1: Functional analysis.* New York-London: Academic Press, Inc. XVII, 325 p. (1972).
- [43] M. Reed; B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II: Fourier analysis, self-adjointness.* New York - San Francisco - London: Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XV, 361 p. (1975).
- [44] W. Rudin. *Fourier analysis on groups.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. 12. New York and London: Interscience Publishers, division of John Wiley and Sons. IX, 285 p. (1962).
- [45] L. Schwartz. *Sous-espaces d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés. (Noyaux reproduisants).* J. Anal. Math. 13, 115-256 (1964).
- [46] H. Speyer. *Spektralzerlegung von Operatoren und Algebren mit Hilfe von Kernhilberträumen.* Marburg (FRG): Univ. Marburg, Fachbereich Mathematik, Diss. viii, 120 S. (1987).
- [47] E. Thomas. *L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle.* Ann. Inst. Fourier 20, No.2, 55-191 (1970).
- [48] N. Wiener. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series with engineering applications.* The Technology Press of The Massachusetts Institute of Technology. New York: John Wiley & Sons, Inc., London: Chapman & Hall, Ltd. 163 p. (1949).
- [49] N. Wiener; P. Masani. *The prediction theory of multivariate stochastic processes I. The regularity condition. - II. The linear predictor.* Acta Math. 98, 111-150 (1957); 99, 93-137 (1958).
- [50] A.M. Yaglom. *Correlation theory of stationary and related random functions. Volume I: Basic results. - Volume II: Supplementary notes and references.* Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag. XIV, 526 p. (1987); IX, 258 p. (1987).

# Danksagung

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Prof. Dr. C. Portenier für die Betreuung und Begutachtung dieser Dissertation. Seine kontinuierlich hohe Bereitschaft zur Diskussion sowie seine zahlreichen Anregungen und Fragen haben die Arbeit zu der vorliegenden Form reifen lassen. Dafür möchte ich ihm besonders danken.

Herrn Prof. Dr. J. Steinebach danke ich für die Übernahme des Zweitgutachtens. Auch dafür, dass durch ihn mein Interesse an stochastischen Prozessen erwachte und eine weitere Perspektive auf meine Arbeit möglich wurde, gilt ihm mein Dank.

Schließlich möchte ich allen meinen Kollegen, Freunden und Verwandten für ihre Kritik und Ermunterung in den vergangenen Jahren danken.

# Lebenslauf

**Name:** Jäger, Ralf Karsten  
**Geburtsdatum:** 20. April 1973  
**Geburtsort:** Marburg/Lahn

**Schulbildung:**  
08.1979-07.1983 Grundschule Stadtallendorf  
08.1983-07.1989 Gymnasialzweig der Gesamtschule Stadtallendorf  
08.1989-06.1992 Gymnasiale Oberstufe der Gesamtschule Kirchhain  
Abschluss: Abitur

**Wehrdienst:**  
10.1992-09.1993 Grundwehrdienst

**Studium:**  
10.1993 Beginn des Studiums der Mathematik (Diplom) mit  
Nebenfach Physik an der Philipps-Universität Marburg  
10.1995 Diplomvorprüfung  
08.1996 Beginn eines 10-monatigen Auslandsaufenthalts  
an der University of Illinois at Urbana-Champaign, USA  
07.1997 Fortsetzung des Studiums an der Philipps-Universität  
10.1999 Diplom der Mathematik  
11.1999 Beginn des Promotionsstudiums der Mathematik  
an der Philipps-Universität Marburg

**Berufstätigkeit:**  
seit 11.1999 Wiss. Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik  
und Informatik der Philipps-Universität Marburg