Zur Perspektivität oder: Die Dreiheit

Desarguessche Konfiguration

Kehren wir zurück zu einem in der Einleitung erwähnten Problem: Wir hatten zwei regelmässige Dreiecke betrachtet; eines davon ist einem Kreis eingeschrieben, das andere ist umschrieben. Die Ecken des eingeschriebenen Dreiecks liegen auf den Seiten des umschriebenen, in diesem Fall genau in der Mitte. (Abb. 1a) Man kann nun die Ecken der beiden Dreiecke einander so zuordnen, dass die Ecke A auf die Ecke A′ bezogen wird, die gegenüber auf der Seite CB liegt. Dadurch ergeben sich die Zuordnungen der anderen Ecken ebenfalls. Verbindet man nun diese Ecken, so ergibt sich, dass die drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt laufen (blaue Geraden in Abb. 1a). In dieser regelmässigen Anordnung ist es einsichtig, dass es sich dabei um den Kreismittelpunkt handelt. Nun kann man ebenso die Seiten der beiden Dreiecke einander zuordnen. Die Seite CB gehört zur Seite B′C′, es gehören also jeweils die beiden parallel liegenden Seiten zusammen. Im Endlichen haben diese keinen Schnittpunkt, sie schneiden oder begegnen sich auf der unendlich fernen Gerade der Ebene, in der das Dreieck liegt. Die drei Schnittpunkte liegen also in regelmässiger Anordnung auf der Ferngeraden. Die Situation ist exakt polar zu derjenigen der drei Geraden, die sich im Kreismittelpunkt schneiden.

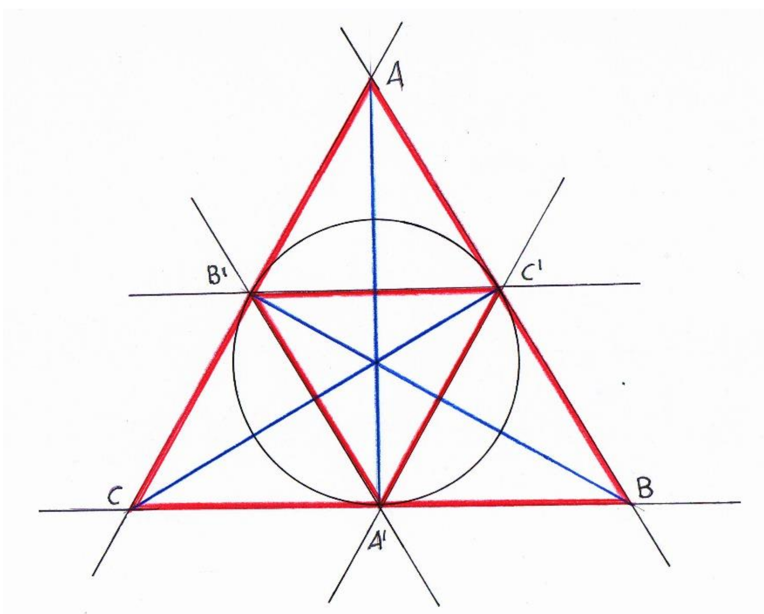

Abbildung 1a

Schreibt man nun dem Kreis ein unregelmässiges Dreieck ein und ordnet dieses in gleicher Weise einem dem Kreis umschriebenen zu, so ergeben sich gewisse Veränderungen der Verhältnisse, Wesentliches bleibt aber auch gleich. (Das umschriebene Dreieck besteht aus den Tangenten an den Kreis in den Punkten A′, B′ und C′, wo das eingeschriebene Dreieck den Kreis berührt.) So gehen die drei Geraden, die die Ecken verbinden, weiterhin durch einen Punkt, dieser ist aber nicht mehr der Kreismittelpunkt. Die einander zugeordneten Seiten schneiden sich in drei Punkten, diese liegen allerdings nicht mehr auf der Ferngeraden, sondern auf der in Abb. 1b gelb gezeichneten Geraden. Der Schnittpunkt der beiden Geraden BA und A′B′ ist sichtbar, der Schnittpunkt der Geraden CA und A′C′ ist knapp nicht mehr auf der Zeichnung, der dritte Schnittpunkt liegt in einiger Entfernung links unten. Die beiden Dreiecke haben also weiterhin die Eigenschaft, dass durch die beschriebene Verbindung zwei exakt polare Gebilde erzeugt werden:

drei Geraden durch einen Punkt sowie drei Punkte auf einer Geraden. Unterschiedlich ist lediglich die Lage der so entstandenen Punktreihe, bzw. des Strahlenbüschels.
In beiden Fällen hat man offensichtlich eine spezielle Lage der beiden Dreiecke zueinander.

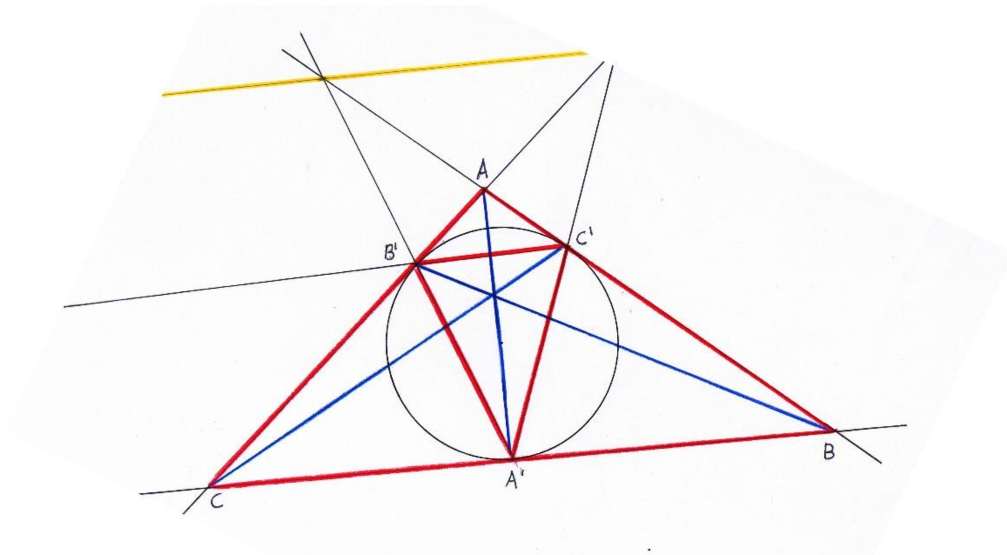

Abbildung 1b

Nun kann man ja auch zwei Dreiecke in allgemeiner Lage in gleicher Weise aufeinander beziehen, sodass man die einander zugeordneten Ecken verbindet und die einander zugeordneten Seiten, evtl. durch Verlängerung, miteinander schneidet. Was ergibt sich dann? Man bezeichnet bei zwei beliebigen Dreiecken die Ecken mit A, B und C und verbindet die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Ecken. Offensichtlich erhält man so drei Geraden (blaue Geraden in Abb. 2). Drei Geraden in allgemeiner Lage, d. h. drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, bilden in der Ebene stets ein Dreieck, dessen Ecken die Schnittpunkte von je zwei der drei Geraden sind. Die einander zugeordneten Seiten der beiden Dreiecke schneiden sich in je einem Punkt. Verbindet man diese drei Punkte, so ergibt sich wiederum ein Dreieck (gelb in Abb. 2). Verfährt man mit zwei Dreiecken in allgemeiner Lage wie beschrieben, so werden sich immer zwei weitere Dreiecke ergeben, wobei das eine durch den Schnitt von Geraden, das andere durch die Verbindung von Punkten entsteht. Die beiden Dreiecke sind also in ihrer Entstehung polar zueinander.

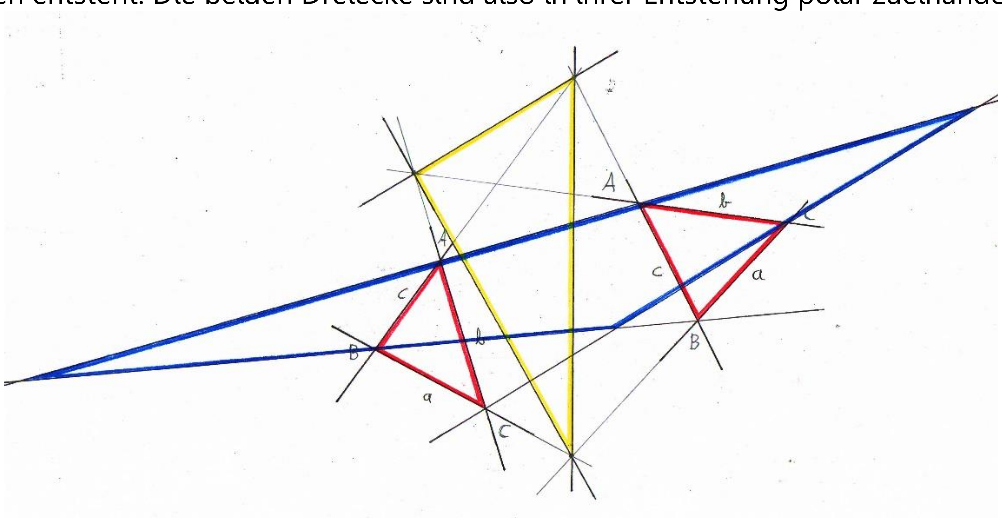

Abbildung 2

Es gibt einen Sonderfall und die Entdeckung von dessen Gesetzmässigkeit geht auf Girard Desargues zurück. Im Grunde haben wir ihn bereits betrachtet. Zwei Dreiecke können so im Verhältnis zueinanderstehen, dass die Verbindungsgeraden der Ecken durch einen Punkt gehen. Diese Möglichkeit existiert unabhängig davon, ob die beiden Dreiecke, so wie oben, einen Kreis gemeinsam haben, dem sie eingeschrieben, bzw. umschrieben sind. Die Abbildungen 3a und 3b zeigen weitere mögliche Lagen von Dreiecken, die dieselbe Eigenschaft haben. Es ergibt sich, dass wenn dies der Fall ist, gleichzeitig auch die drei Schnittpunkte der einander zugeordneten Seiten auf einer Geraden liegen. Es tritt immer beides zugleich auf oder keines von beiden. Eine solche Figur, die aus zwei Dreiecken, den durch einen Punkt laufenden Verbindungsgeraden der Ecken und der Geraden, auf der die Schnitte der Seiten liegen, besteht, nennt man Desarguessche Konfiguration.[1] Wenn man eine solche zeichnen möchte, geht man am besten so vor, dass man mit den drei durch einen Punkt laufenden Geraden beginnt und dann die Dreiecke so platziert, dass je eine Ecke auf jeder der Geraden zu liegen kommt. Dabei ist es unerheblich, ob die beiden Dreiecke, wie in Abb. 3a auf der gleichen Seite des Schnittpunktes liegen oder nicht (Abb. 3b). In jedem Fall werden die Schnittpunkte der Seiten auf einer Geraden liegen. Der umgekehrte Weg ist ebenso gut möglich. Man wählt auf einer Geraden drei Punkte. Durch jeden der Punkte legt man eine Gerade, wodurch sich ein Dreieck ergibt. Diesen Vorgang wiederholt man mit denselben Punkten, sodass man ein zweites Dreieck erhält. Verbindet man nun die entsprechenden Ecken miteinander, so laufen die drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt.

Unsere zu Beginn des Kapitels gewählte Ausgangssituation ist ein spezieller Fall einer Desarguesschen Konfiguration. Deren Gesetzmässigkeit ist einfach, es liegen in ihr aber viele Möglichkeiten verborgen. In Kapitel 6 hatten wir bereits die geometrischen Gesetzmässigkeiten der Perspektive betrachtet. Schneidet man eine Anzahl von Strahlen, die durch einen Bündelpunkt gehen mit zwei voneinander verschiedenen Ebenen, so sind die durch die Schnitte entstehenden ebenen Figuren perspektiv zueinander (vgl. Kap. 6, Abb. 8). Entsprechendes gilt auch in der Ebene: Schneidet man die Strahlen eines Büschels mit zwei voneinander verschiedenen Geraden, so sind die entstehenden Punktreihen ebenfalls perspektiv. Man sieht leicht, dass die Seiten der beiden Dreiecke in Abbildung 3a und 3b diese Eigenschaft haben: Man kann sie als Schnitte von je zwei der Büschelgeraden mit zwei verschiedenen Geraden auffassen. Es ist aber auch möglich, die ganze Figur dreidimensional zu sehen. Die drei blauen Geraden könnte man sich dann als die Beine eines Stativs oder die Ecken eines dreieckigen Zeltes veranschaulichen. Die beiden roten Dreiecke ergeben sich dadurch, dass man dieses Gebilde mit zwei verschiedenen Ebenen schneidet. Zwei Ebenen haben immer eine Schnittgerade gemeinsam. Diese Schnittgerade ist die gelbe Gerade. In Abbildung 3c wird dieser Sachverhalt durch eine andersartige Färbung derselben Zeichnung verdeutlicht. Die Desarguessche Konfiguration hat somit, wenn man sie räumlich auffasst, im Prinzip dieselbe Struktur wie die perspektivische Abbildung 8 in Kap. 6.

[1] Zur Desarguesschen Konfiguration vgl. z. B.
Bernhard (1984), Kap. 17: Nur liniert oder nur zentriert? – Der Satz von Desargues
Locher-Ernst (1980), II 1. Harmonische Würfe
Field, Gray (1987), Chapter 8: The three geometrical propositions of 1648

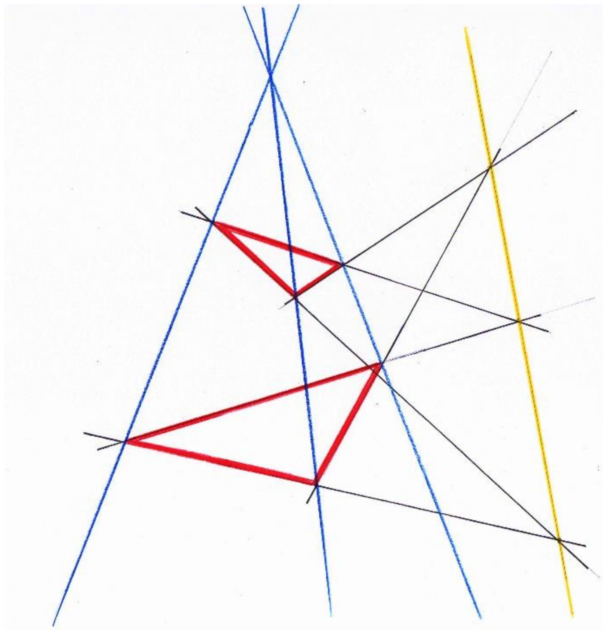
Abbildung 3a

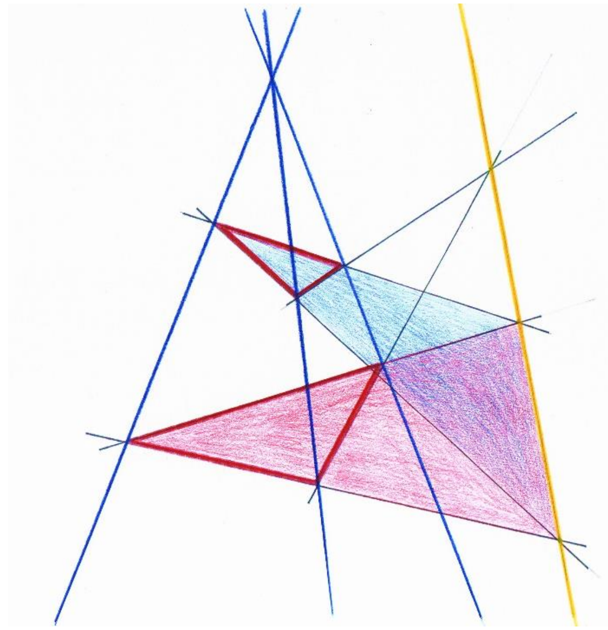
Abbildung 3c

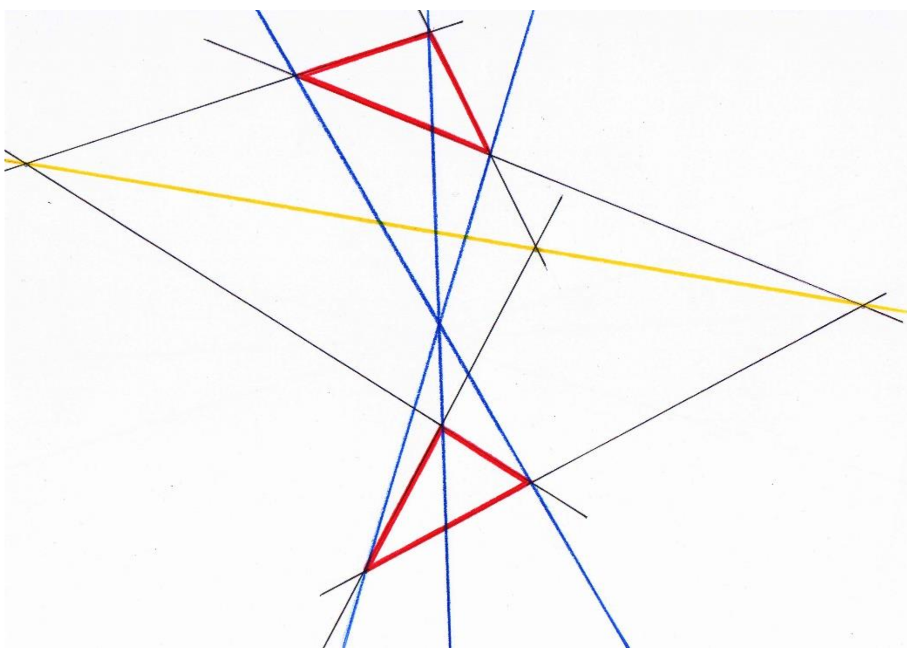
Abbildung 3b

Zentriert linierte Kollineation

Wir haben nun die Voraussetzungen gewonnen, um Dreiecke (oder andere Vielecke) in gesetzmässiger Weise durch Bewegung auseinander hervorgehen zu lassen. Es lassen sich ganze Scharen von Dreiecken bilden, deren Ecken auf den gleichen Geraden liegen und deren Seiten jeweils im gleichen Punkt drehen. Mit anderen Worten: Es können nicht nur zwei Dreiecke so aufeinander bezogen sein, wie es die Desarguessche Konfiguration zeigt, sondern grundsätzlich unbegrenzt viele. Um dies zu zeigen, ist es am Übersichtlichsten, zunächst von einer symmetrischen Situation auszugehen. In Abbildung 4a gibt es sechs verschiedene Dreiecke, deren Ecken auf je einer der drei blauen Geraden laufen. Gleichzeitig dreht jede der Seiten in einem auf der gelben Gerade liegenden Punkt. Die Dreiecksseite, die zu dieser Geraden parallel liegt, dreht im Fernpunkt derselben. Von dieser Situation ausgehend, kann man alle dargestellten und viele weitere Dreiecke durch Verschiebung eines Punktes oder Drehung einer Seite auseinander hervorgehen lassen. Man kann z. B. bei dem kleinsten Dreieck, dessen Spitze nach unten zeigt, beginnen und diese Spitze auf der mittleren Gerade nach unten wandern lassen. Durch die Verschiebung dieser einen Spitze ist das nächste Dreieck dann festgelegt. Die so gebildeten Dreiecke werden zunächst länglicher. In dem Moment, wo die untere Spitze in die Unendlichkeit läuft, werden die beiden Seiten parallel. Durchläuft die Spitze die Unendlichkeit und kommt von oben wieder in die Sichtbarkeit, so drehen die beiden Seiten über die Parallellage hinaus weiter nach aussen. Die zu dem hier gezeigten ausgedrehten Stadium gehörende Spitze ist allerdings auf der Zeichnung nicht sichtbar. Sie liegt weiter oben. Die hier von oben in die Zeichnung hineinragende Spitze gehört einem Dreieck an, dessen waagrecht liegende Seite sich in der Unendlichkeit befindet. Grundsätzlich können alle Ecken jeweils die gesamte Gerade, auf der sie sich bewegen, durchlaufen und alle Geraden des Büschels, in dem sich je eine Seite dreht, können die Lage der Seite angeben. Denkt man sich entweder einen Punkt in Bewegung oder eine Büschelgerade in Rotation, so ergeben sich alle möglichen Formen, die das Dreieck unter diesen Bedingungen annehmen kann. Im Verlaufe der Bewegung gibt es zwei Momente, wo das Dreieck ausartet: Kommt eine Ecke auf der gelben Geraden zu liegen, so fällt das gesamte Dreieck in diese hinein und überdeckt die Strecke auf derselben, die zwischen den blauen Geraden liegt, doppelt. Fällt eine Ecke in den Schnittpunkt der blauen Geraden, so schrumpft das ganze Dreieck auf diesen Punkt zusammen.[2]

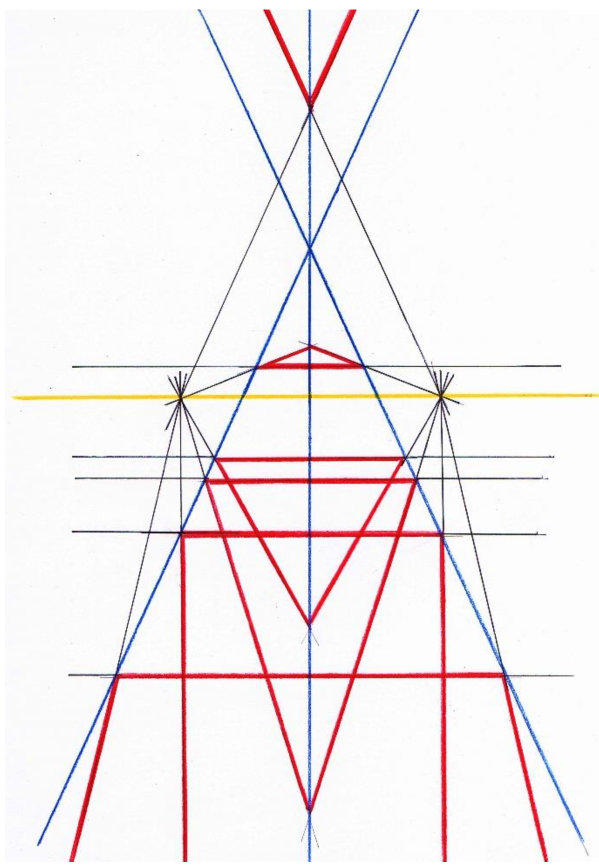

Abbildung 4a

[2] Mannigfaltige Anregungen zu diesem Thema und auch ausgearbeitete Übungen finden sich bei Bernhard (1984)

Grundsätzlich gibt es bei der Durchführung dieser Konstruktion vielfältige Variationsmöglichkeiten. Man kann von einem beliebig gewählten, unregelmässigen Dreieck ausgehen und den Schnittpunkt der drei blauen Geraden irgendwo ins Innere desselben verlegen. Mit dem Inneren des Dreiecks ist hier der im Endlichen abgeschlossene Bereich desselben gemeint. Dann sucht man eine ausserhalb liegende Gerade, die die Verlängerung aller Dreiecksseiten so schneidet, dass die Schnittpunkte sichtbar auf dem Zeichenblatt liegen. Man kann nun in gleicher Weise wie vorher eine Ecke verschieben oder eine Seite drehen. Die Abbildungen 4b und 4c zeigen zwei Beispiele.

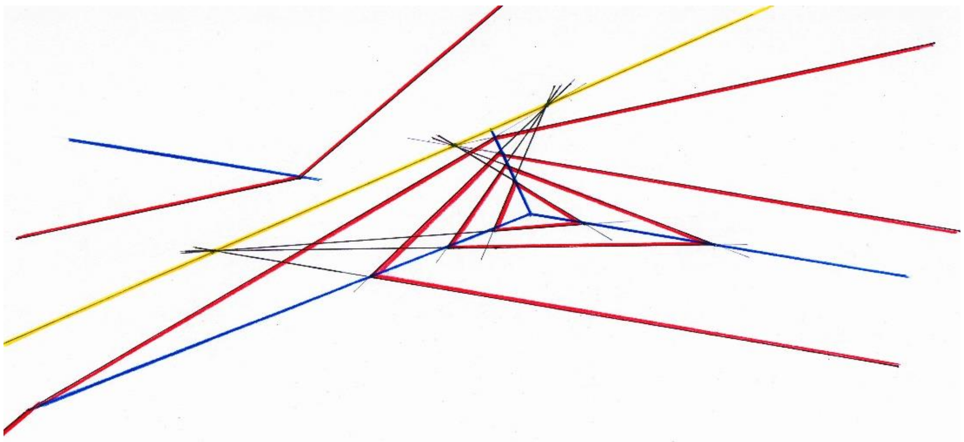

Abbildung 4b

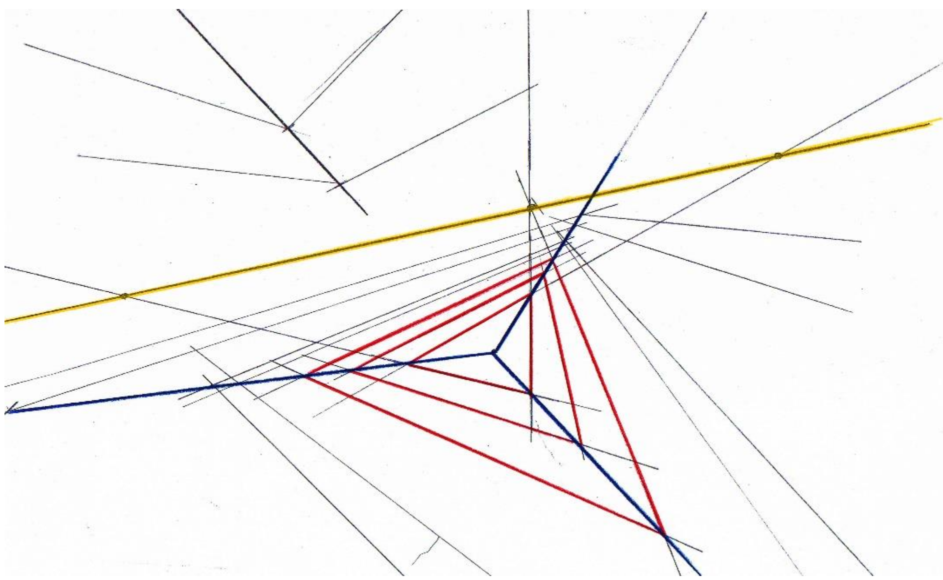

Abbildung 4c

Lässt man das kleinste Dreieck weiterwachsen, so ergibt sich, dass die Ecke, die am weitesten von der gelben Geraden entfernt ist, am schnellsten beschleunigt. Läuft diese durch die Unendlichkeit und kommt von der anderen Seite her zurück, so gibt es einen Moment, wo sie auf die gelbe Gerade trifft. In den gleichen Moment fallen die beiden übrigen Ecken, die sich der Geraden von unten her angenähert haben, ebenfalls in dieselbe hinein. Das Dreieck entartet nun wiederum zur Geraden. Verfolgt man die Bewegungsgebärde, so sieht man, dass der Innenbereich des Dreiecks, der zunächst geschlossen war, grösser und grösser wird, sich durch die Unendlichkeit zieht und schliesslich die Ebene vollständig überdeckt. Das Dreieck hat seine grösstmögliche Ausdehnung erreicht, es erstreckt sich über die ganze Ebene und lässt kein Aussen mehr bestehen. Es umgreift

sozusagen alles. Diese Ausdehnung kann man sich dadurch klarmachen, dass man auf die Bewegung der Ecken entlang der blauen Geraden schaut, man kann ebenso gut auf die Drehung der Seiten blicken. Diese Bewegungen sind in gewisser Weise polar. Indem sich das Dreieck vergrössert, laufen die Ecken vom Zentrum weg, sie entfernen sich immer weiter von ihm. Natürlich tun die Seiten das auch, nur haben sie ihr Zentrum nicht im Punkt, sondern in der Geraden. Während die Ecken bei weiterer Verkleinerung des Dreiecks gleichzeitig in den Schnittpunkt der drei blauen Geraden hineinfallen, gilt für die Seiten das Gegenteil. Vergrössert sich das Dreieck, so fallen sie gleichzeitig in die gelbe Gerade hinein. Ein auf den Punkt zentriertes Bewusstsein sieht das Dreieck durch Vergrösserung aus dem Punkt entspringen und durch Verkleinerung in ihn zurückfallen. Ein im Umkreis lebendes Bewusstsein blickt sozusagen entgegengesetzt: Indem das Dreieck gebildet wird, dadurch, dass sich die Seiten desselben aus der gelben Gerade herausdrehen, wird der zunächst riesige Innenbereich desselben durch weiteres Drehen der Seiten verkleinert, bis er dadurch in den Punkt hinein verschwindet, dass die drei Seiten gleichzeitig in den Schnittpunkt der blauen Geraden hineinfallen. Drehen sich die Seiten dann zurück und nähern sich wiederum ihrem Ursprung, so bedeutet das, dass sich das Dreieck vergrössert. Das Dreieck entpuppt sich so als ein vielschichtiges Gebilde, denn es besteht ja zugleich aus Ecken und Seiten. Um ihm gerecht zu werden, müsste man die auf den Punkt bezogene und die aus dem Umkreis gebildete Bewegung gleichzeitig denken. Mit der Vergrösserung des Innenbereichs ist eine Verkleinerung der Umgebung verbunden und umgekehrt.[3]
Wir hatten bereits gesehen, dass drei in einer Ebene liegende Geraden dieselbe in vier dreieckige Gebiete unterteilen (S. Kap. 5). Drei davon erstrecken sich über die Unendlichkeit, das vierte ist im Endlichen geschlossen. Bisher haben wir die Entfaltung des geschlossenen Dreiecks berücksichtigt. Durch entsprechend Vergrösserung wandelt sich dieser Bereich zwar um und läuft durch die Unendlichkeit, dennoch haben wir bisher aber nur die Bewegungsgebärde von einem der vier Dreiecksbereiche verfolgt. Eine vollständigere Betrachtung könnte die Verwandlung aller vier Bereiche in den Blick nehmen. Allerdings kann man dies schlecht auf einer Zeichnung darstellen. Diese würde völlig unübersichtlich. Man kann aber die drei übrigen, bisher nicht berücksichtigten Bereiche ebenso in ihrer Entfaltung verfolgen. Dies ist in den Abbildungen 4d bis 4g veranschaulicht. Der grundsätzliche Aufbau der Zeichnungen entspricht der Abbildung 4c. Durch die Einfärbung derselben ist jeweils einer der vier Dreiecksbereiche in seiner Bewegung verfolgt worden. So ist Z. B. in Abbildung 4e derjenige Bereich ausgewählt worden, der sich an den ursprünglich betrachteten geschlossenen oben und unten anfügt. Dieser hat die Eigentümlichkeit, dass er sich nach einigen Schritten, die sich jeweils über die Unendlichkeit erstrecken, schliesslich im Endlichen schliesst. Immer dann, wenn sein Partner geschlossen ist, ist er geöffnet und umgekehrt. Die Abbildungen 4f und 4g zeigen die Entfaltung der beiden übrigen Bereiche, die sich an den zuerst gewählten geschlossenen links und rechts anschliessen. Die Bewegungen wirken tänzerisch und man kann den Eindruck bekommen, dass die willkürliche Verschiebung von lediglich einem Punkt oder die willkürliche Drehung von einer Seite die gesamte Ebene, in der das Dreieck liegt, mit vielschichtigen, tanzenden Bewegungen überzieht. Was wir willentlich getan haben ist ausserordentlich einfach. Es erzeugt zugleich Strukturen von grosser Komplexität, deren Ausmass wir zunächst nicht im Bewusstsein hatten. Auch jetzt ist diese nicht vollständig ausgeschöpft. Wir haben lediglich einen Schritt in eine tiefere Schicht getan. Hier wartet weiterhin Unentdecktes.

[3] Vgl. dazu Locher-Ernst (1970), Kap. 11, Die vier elementaren Metamorphosen

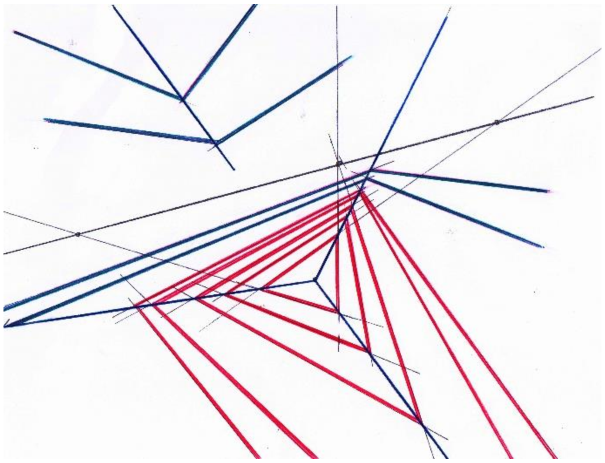

Abbildung 4d

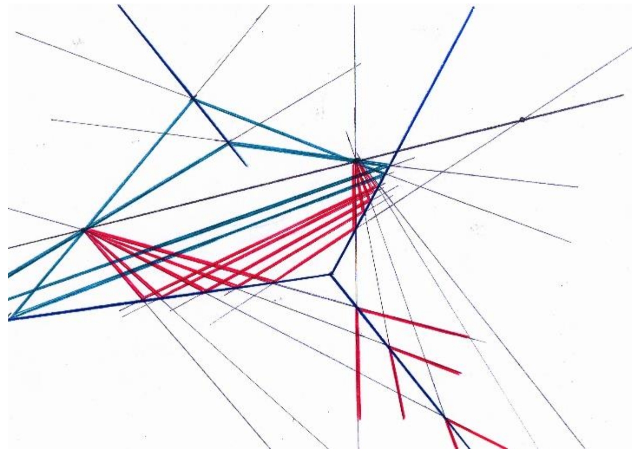

Abbildung 4e

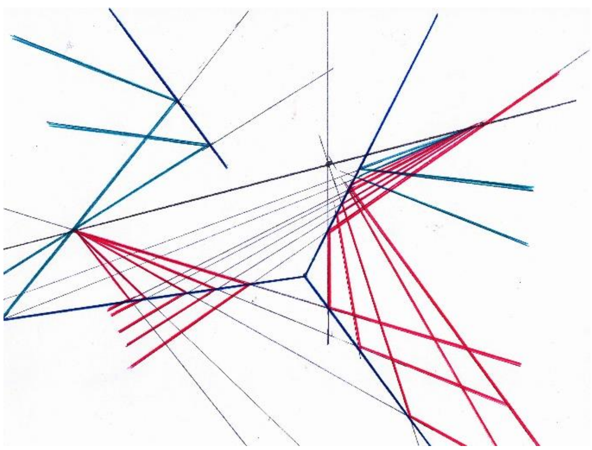

Abbildung 4f

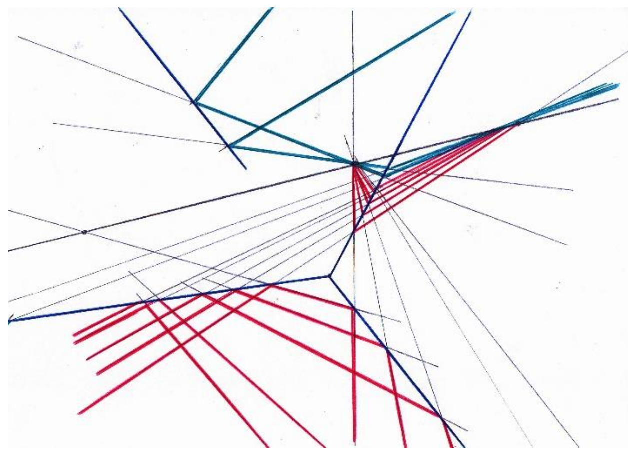

Abbildung 4g

Die geschilderte Bewegungsart nennt sich zentriert-linierte Kollineation. Man kann sie nicht nur mit Dreiecken ausführen, sondern auch mit beliebigen Vielecken. Diese lassen sich ja durch Aneinanderfügen von Dreiecken erzeugen. So kann z. B. ein Viereck als aus zwei Dreiecken zusammengesetzt betrachtet werden, ein Fünfeck besteht aus drei Dreiecken, usw. Unabhängig davon kann man die oben beschriebene Konstruktion aber auch direkt mit einem Vieleck ausführen. Abbildung 5 zeigt ein Beispiel mit einem Fünfeck. Die Vorgehensweise ist dieselbe: Man wählt ein beliebiges Fünfeck, legt einen Punkt fest, in dem sich die Geraden, die durch die Ecken desselben laufen, schneiden. Hier liegt dieser Punkt im Innern der Ausgangsform. Dann sucht man eine Gerade, die die Eigenschaft hat, dass sie die Verlängerung aller Seiten des Fünfecks so schneidet, dass die Schnittpunkte auf dem Blatt sichtbar sind. Nun kann man in gleicher Weise wie vorher durch die Verschiebung eines Punktes oder die Drehung einer Seite weitere Fünfecke konstruieren. Die Bewegungsgeste ist dieselbe wie vorher beim Dreieck, Das Fünfeck wird grösser, eine Ecke desselben läuft in die Unendlichkeit, durchquert dieselbe, wodurch es sich öffnet und läuft von der anderen Seite her wieder in die Sichtbarkeit. In dem Moment, wo dieser Punkt auf der gelben Gerade zu liegen kommt, öffnet sich das Fünfeck gänzlich und umgreift die gesamte Ebene als seinen Innenraum. Wollte man die Bewegung aller durch das Fünfeck erzeugten Bereiche verfolgen, so wäre das schon eine ziemlich komplizierte Angelegenheit, denn fünf Geraden zerlegen die Ebene in elf Bereiche. Fünf davon weisen eine dreieckige Form auf, fünf weitere besitzen eine viereckige Form und ein Bereich ist fünfeckig.

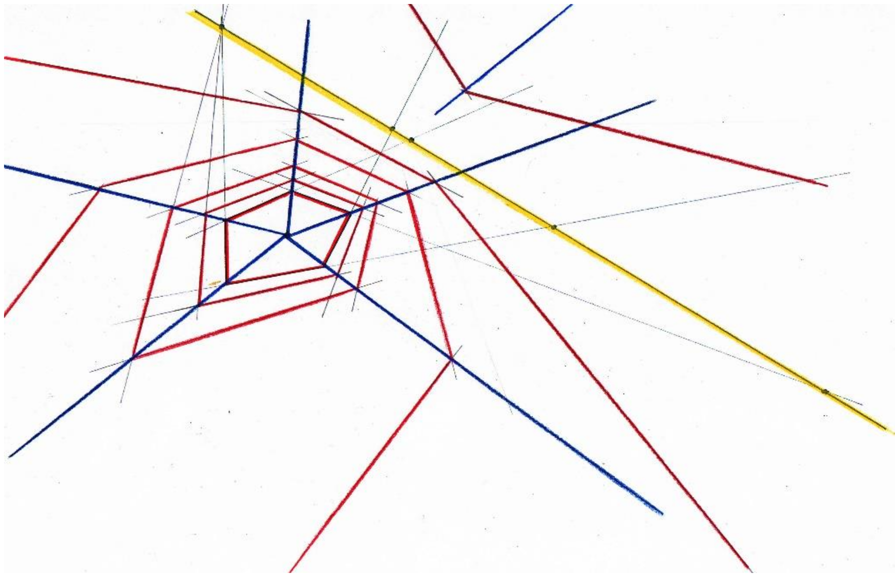

Abbildung 5

Harmonischer Punktwurf und Netzbildung

Harmonische Punktwürfe haben wir im Zusammenhang mit der Involution bereits betrachtet. Sie sind leicht zu erzeugen: Man wählt vier Geraden, so dass sie einen geschlossenen viereckigen Bereich umschliessen. Neben den Ecken dieses Bereichs bilden diese Geraden zwei weitere Schnittpunkte, die Punkte A und C in Abbildung 6a. Diese beiden Schnittpunkte verbindet man mit einer Geraden. Die beiden Diagonalen durch den viereckigen Bereich schneiden diese Gerade in den Punkten B und D. Die Punkte A, B, C und D liegen harmonisch zueinander. AB/BC = AD/CD. Diese Verhältnisse ergeben sich immer, unabhängig von der Lage der vier ursprünglich gewählten Geraden. Die Gerade, auf der die Punkte A, B, C und D markiert sind, verbindet ebenso wie die beiden hier blau eingezeichneten Diagonalen zwei gegenüberliegende Ecken. Sie ist also ebenfalls eine Diagonale. Das bedeutet, dass sich auf jeder der drei Diagonalen ein harmonischer Punktwurf befindet. Jede derselben läuft durch zwei Ecken des Vierseits und schneidet die beiden anderen Diagonalen und zwar jeweils so, dass die Ecken des Vierseits und die Diagonalenschnittpunkte sich gegenseitig trennen. Man kann die Zeichnung weiterführen, indem man den ursprünglich gewählten Vierecksbereich unterteilt und ergänzt und so zu einem Netz vervollständigt. Abbildung 6b zeigt einen ersten Schritt: Durch die Punkte A und C wurde je eine weitere Gerade gezogen, die durch den Diagonalenschnittpunkt läuft. Das Viereck ist nun unterteilt in vier aneinandergrenzende kleinere Vierecke. Je zwei durch Punkt B und Punkt D gezogene Geraden ergänzen die Diagonalen. Die Zeichnung lässt sich fortsetzen, indem durch die Punkte A und C weitere Geraden gezogen werden, die jeweils Viereckseiten darstellen. Die Geraden, die durch die Punkte B und D gezogen werden, stellen Diagonalen dar. In Abbildung 6c ist das Netz einige Schritte weitergeführt. Obwohl die Zeichnung nicht in der Absicht angelegt wurde, eine perspektivische Abbildung zu erzeugen, blickt man auf eine mit Vierecken überzogene Ebene, deren Lage perspektivisch wirkt. Man kann die Punkte A, B, C und D auch als Fluchtpunkte ansehen, in denen je ein Seitenpaar, bzw. eine der Diagonalen zusammenlaufen. Gegen die Gerade, auf der die Fluchtpunkte liegen hin, werden die Vierecke zunehmend kleiner, in die andere Richtung grösser.[4]

[4] Zur Netzbildung, vgl. z. B.
Whicher (1970) Kap. 3 und 5
Locher-Ernst (2016) Abs. 6: Möbius Netze und der Fundamentalsatz

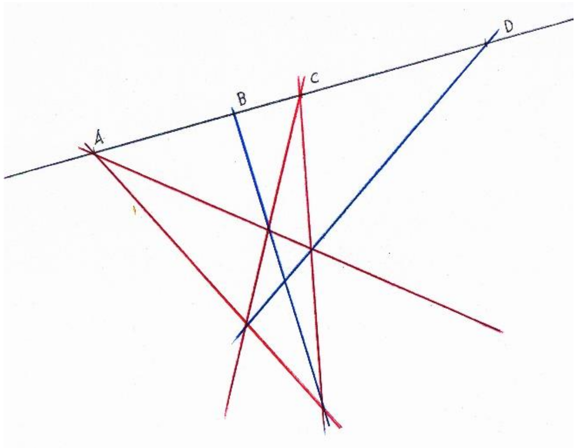

Abbildung 6a

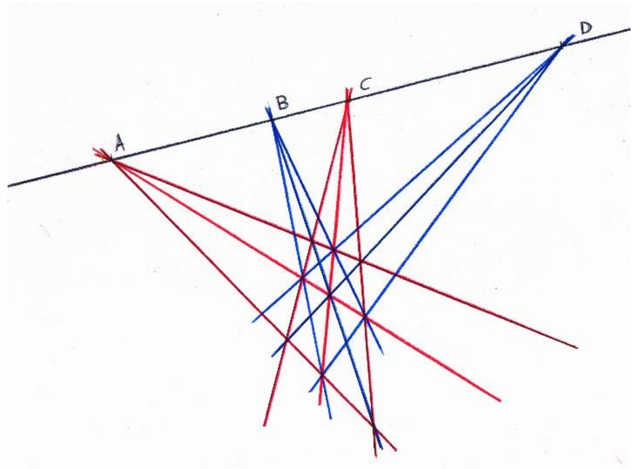

Abbildung 6b

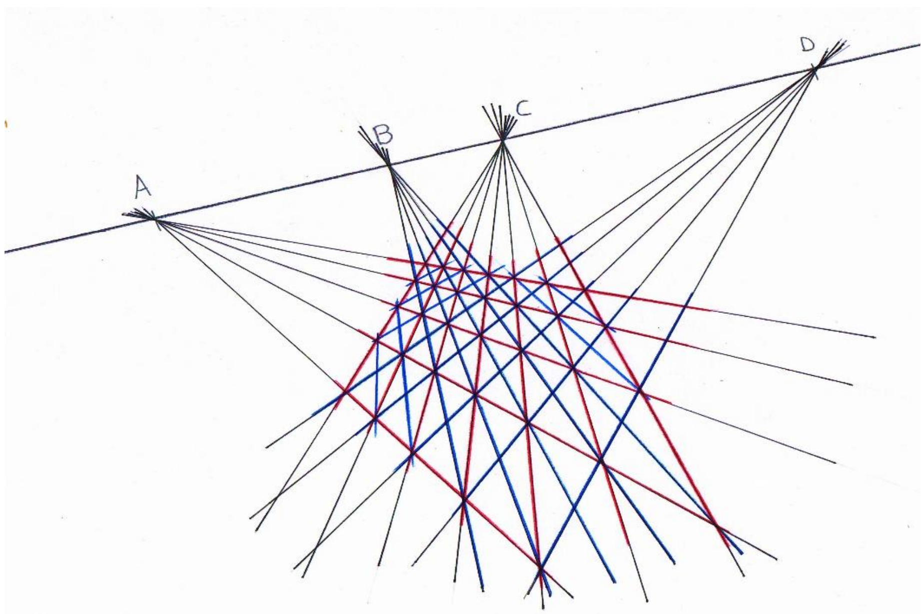

Abbildung 6c

Es ist möglich, dieses Netz auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt zu betrachten. Abbildung 6d zeigt dieselbe Konstruktion, wie zuvor, das entstandene Netz wird aber anders interpretiert. Es werden nicht Vierecke, sondern Dreiecke hervorgehoben und zwar solche, deren Ecken auf je einer der drei blauen Geraden liegen, die sich im Punkt B begegnen. Gleichzeitig dreht je eine Dreiecksseite in den Punkten A, C und D. Wir haben es offensichtlich mit einer Desarguesschen Konfiguration zu tun, nur tritt hier die Besonderheit auf, dass das Schnittpunkt der Geraden, auf denen sich die Ecken der hervorgehobenen Dreiecke befinden, auf derselben Geraden liegen, auf der sich auch die Punkte befinden, in denen die Seiten drehen. Punkt B liegt mit den Punkten A, C und D auf derselben Geraden. Man könnte ebenso gut eine andere Schar von Dreiecken hervorheben, dann würden die Punkte ihre Rollen tauschen. Betrachtet man z. B. drei der Geraden, die sich im Punkt D schneiden, so findet man eine Reihe von Dreiecken, deren Ecken auf einer der Geraden liegen. Die Seiten derselben drehen dann durch die Punkte A, B und C. Die Punkte A, B, C und D können untereinander die Rollen tauschen, jeder von ihnen kann

---

Locher-Ernst (1980) II 1. Harmonische Würfe

Schnittpunkt derjenigen Geraden sein, auf denen die Ecken liegen. In den drei übrigen Punkten dreht dann je eine Ecke der betrachteten Dreiecke.

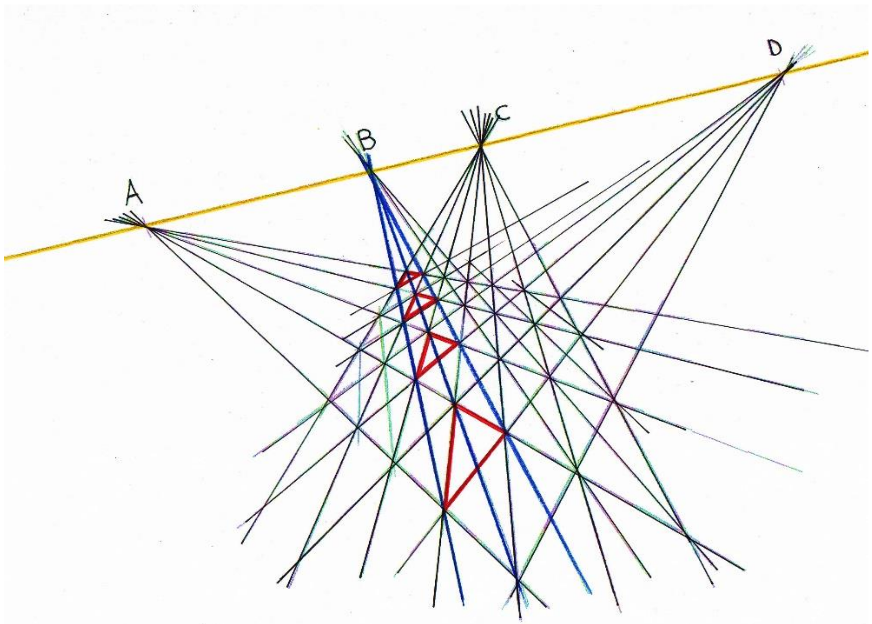

Abbildung 6d

Selbstdualität der Desarguesschen Konfiguration

Überhaupt ist die Desarguessche Konfiguration in einem hohen Masse beweglich. Betrachten wir noch einmal die Abbildung 3a. Das Gebilde besteht aus zehn Geraden, sechs davon sind Dreiecksseiten, auf drei von ihnen (blau) liegt je eine Ecke der beiden Dreiecke und auf der noch übrigen Geraden (gelb) schneiden sich die einander zugeordneten Dreiecksseiten. Auf jeder der Geraden befinden sich drei Punkte, in denen je drei Geraden zusammenlaufen. (Es gibt weitere Punkte, in denen sich lediglich zwei Geraden schneiden, diese spielen in unserer Betrachtung keine Rolle.) Gleichzeitig besteht die Figur aus 10 Punkten. In jedem Punkt schneiden oder begegnen sich drei Geraden und je drei dieser Punkte liegen auf einer Geraden. Wir haben eine vollständige Dualität oder Polarität: zehn Geraden, auf denen je drei Punkte liegen oder zehn Punkte, in denen sich je drei Geraden begegnen. Das bedeutet, dass die duale oder polare Figur zu einer Desargueschen Konfiguration wiederum eine solche ergibt. Die Figur ist selbstdual. Bis jetzt haben wir die Geraden und die Punkte so betrachtet, dass ihnen verschiedene Aufgaben zukommen, einige sind Ecken oder Seiten von Dreiecken, andere haben eine andere Aufgabe. Nun ist aber in einer Figur, in der es die gleiche Anzahl von Geraden und Punkten gibt, in der auf jeder Geraden gleichviele Punkte liegen und in der durch jeden Punkt gleichviele Geraden laufen, kein Element vor dem anderen ausgezeichnet. Mit anderen Worten: Jeder Punkt kann jede Funktion übernehmen, das gleiche gilt für jede der Geraden. Zeichnet man eine bestimmte Desarguessche Konfiguration, so lässt sich diese jeweils in zehnfacher Art und Weise interpretieren. Es ergeben sich so zehn verschiedene Lagen der beiden durch die Konfiguration aufeinander bezogenen Dreiecke.[5] Die Abbildungen 7a – j zeigen ein Beispiel. Jeder der zehn Punkte der Konfiguration übernimmt einmal die Aufgabe, der Schnittpunkt derjenigen Geraden zu sein, die die einander zugeordneten Dreiecksecken verbinden. Bestimmt man diesen Punkt, so sind damit die beiden Dreiecke ebenfalls festgelegt. Man findet sie in der Zeichnung, ohne bisher nicht vorhandene

[5] Vgl. dazu: Locher-Ernst (2016), Abs. 1: Einige geometrische Phänomene

Linien hinzufügen zu müssen. Damit ist auch alles Übrige bestimmt. So einleuchtend das theoretisch ist, in wirkliches Erstaunen wird man am ehesten dann versetzt, wenn man die Übung selbst durchführt und nach und nach alle möglichen Lagen und Beziehungen der Dreiecke zueinander entdeckt.

Bisher hatten wir die Desarguessche Konfiguration immer so betrachtet, dass wir die besonderen Beziehungen von zwei geschlossenen Dreiecksformen in den Blick genommen haben. Nun zerlegen drei Geraden die Ebene in vier dreieckige Bereiche, von denen nur einer geschlossen ist. Die anderen erstrecken sich über die Unendlichkeit. Es ist also nicht zwingend, nur die Lage der geschlossenen Dreiecksbereiche zueinander in Betracht zu ziehen. Hat man einmal die Konfiguration so weit bestimmt, dass deutlich ist, welche Geraden die Dreiecksseiten darstellen, so ist damit noch nicht festgelegt, welcher der Dreiecksbereiche jeweils hervorgehoben werden soll. Es kann sowohl der geschlossene sein als auch einer der offenen. Damit ergibt sich eine Fülle von weiteren Möglichkeiten, offene und geschlossene Dreiecksbereiche zu kombinieren. In den Abbildungen 8a – j ist zu jeder der geschlossenen Kombinationen eine der möglichen offenen, die sich ergeben, gezeigt. Wollte man alle verschiedenen Möglichkeiten, eine Desarguessche Konfiguration zu interpretieren, ermitteln, so käme man auf die Anzahl von 160. Es gibt zehn verschiedene Lagen der Dreiecke und für jede Lage lässt sich einer der vier Bereiche des ersten Dreiecks mit einem der vier Bereiche des zweiten Dreiecks kombinieren. Allerdings sind nicht alle Kombinationen gleichwertig. Nur zehn von ihnen beruhen darauf, dass die Punkte und Geraden ihre Aufgabe wechseln. Zu jeder der zehn Möglichkeiten gibt es dann sechzehn verschiedene Arten, sie zu betrachten, ohne dass die Geraden und Punkte dabei ihre Rollen tauschen.

Alles, was wir getan haben, besteht darin, zwei Dreiecke in ein bestimmtes Verhältnis zueinander zu bringen. Man könnte auch sagen, dass man die Bewegungsmöglichkeit eines Dreieckes dadurch eingeschränkt hat, dass man jeder der Ecken nur das Hin und Her Bewegen auf einer vorgegebenen Geraden gestattet. Die Vorgabe ist dergestalt, dass sich diese drei Geraden in einem Punkt schneiden. Hier zeigt sich eine Merkwürdigkeit. Gegenüber der völlig freien Beweglichkeit eines Dreiecks, wo sämtliche Seiten und sämtliche Ecken beliebige Lagen annehmen können, kann man die gewählte Vorgabe zunächst als ein Korsett empfinden. Wenn man aber versucht, zwei Dreiecke in der Vorstellung durch Bewegung in beliebige Verhältnisse zueinander zu bringen, so wird man vermutlich die Erfahrung machen, dass die Ergebnisse der Bemühung zunächst ärmer ausfallen, als wenn man die Bewegungsgesten der eingeschränkten Desarguesschen Konfiguration vollzieht. Denn man wird vielleicht nicht unmittelbar auf die Idee kommen, den Weg eines geschlossenen Dreiecksbereiches durch die Unendlichkeit zu verfolgen oder die Bewegung einer Ecke in einen gesetzmässigen Zusammenhang zur gegenüberliegenden Seite zu bringen. Das völlig freie Bewegen von Dreiecken in der Vorstellung ist eine anregende Übung, die dazu führt, die Begrenzung durch die starre, gewordene Form zu überwinden.[6] Es zeigt sich, dass es relativ schwierig ist, alle Ecken und Seiten gleichzeitig aus der Erstarrung zu lösen. Meistens bewegt man eine Ecke oder eine Seite und hält den Rest fest. Die Desarguessche Konfiguration, entsprechend betrachtet, kann eine Art Zwischenglied darstellen zwischen der Veränderung eines Dreiecks, die durch messbare Vorgaben geschieht und einer völlig freien Beweglichkeit desselben. Sie zeigt einen gesetzmässigen Zusammenhang zwischen der Bewegung einer Ecke oder einer Seite und den übrigen auf, lässt den Durchgang durch die Unendlichkeit zu, ermöglicht es, die verschiedenen Bereiche, die durch drei Geraden in einer Ebene erzeugt werden, in Bewegung zu betrachten und führt so zu grossem Formenreichtum. Indem sie Gesetzmässigkeit in der Bewegung zeigt, kann sie zu neuen Gesichtspunkten führen, wie man die völlig freie Bewegung auch noch vollziehen kann. Sie zeigt zudem auf, dass wenn man der Bewegung der Punkte eine bestimmte Gesetzmässigkeit zuweist, sich für die Seiten die duale oder polare Entsprechung ergibt. Damit führt sie zu einer intimeren Vertrautheit mit der Komplexität des so einfach erscheinenden Dreiecks.

[6] Vgl. Steiner, Rudolf (1990), GA 151, 1. Vortrag

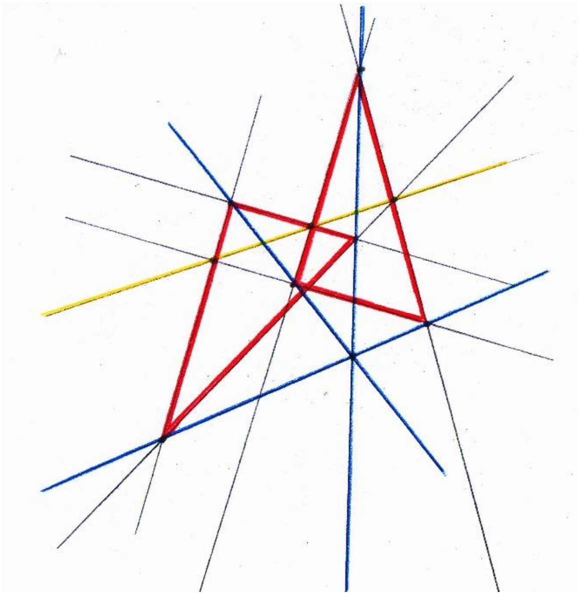

Abbildung 7a

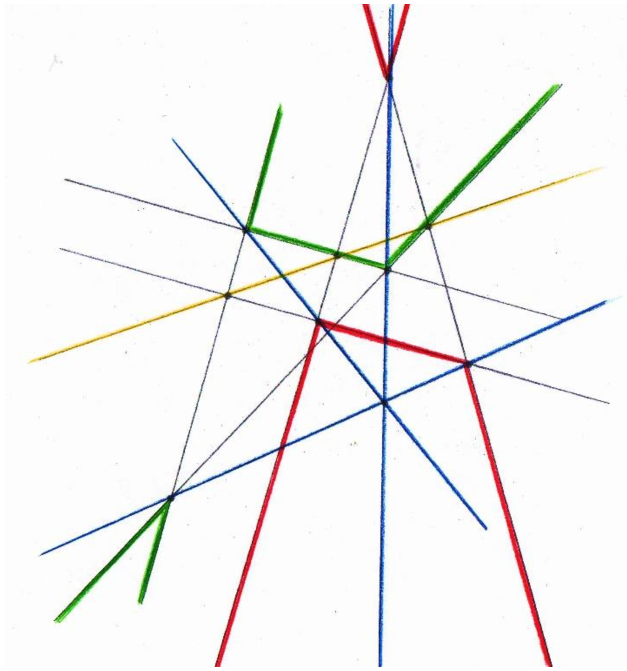

Abbildung 8a

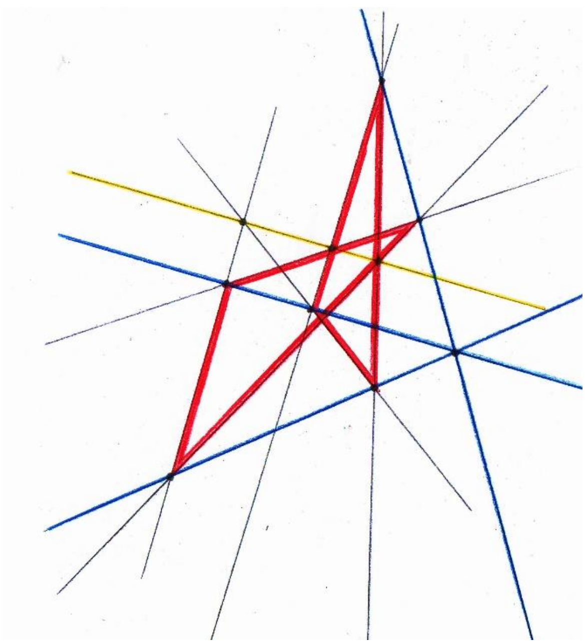

Abbildung 7b

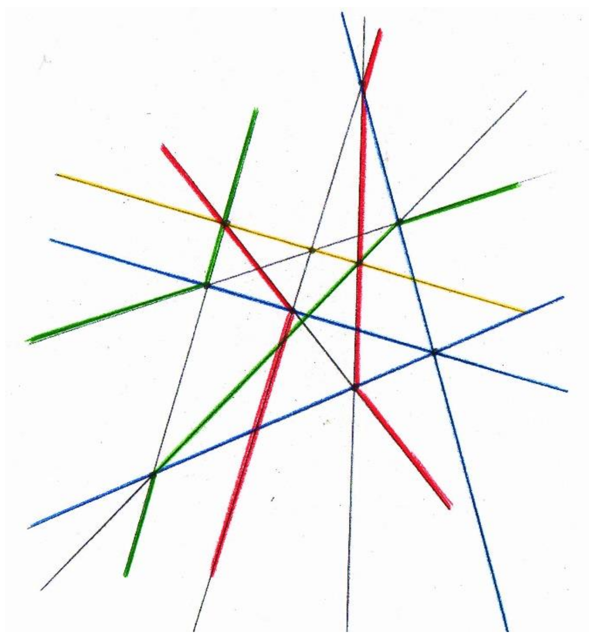

Abbildung 8b

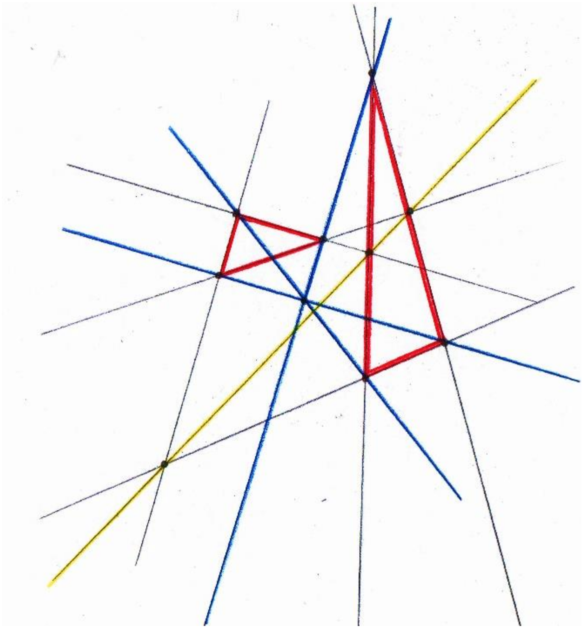

Abbildung 7c

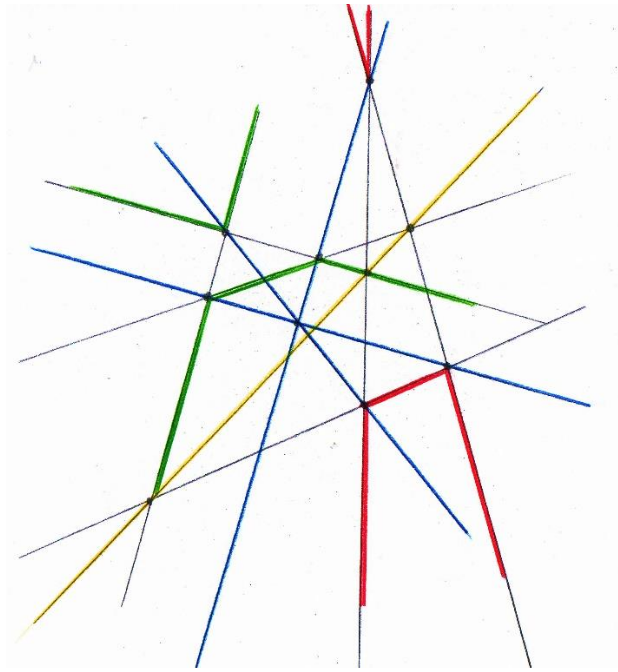

Abbildung 8c

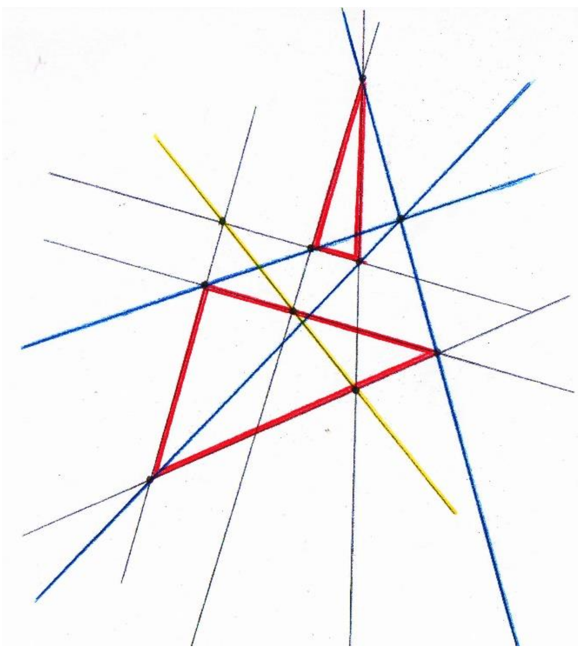

Abbildung 7d

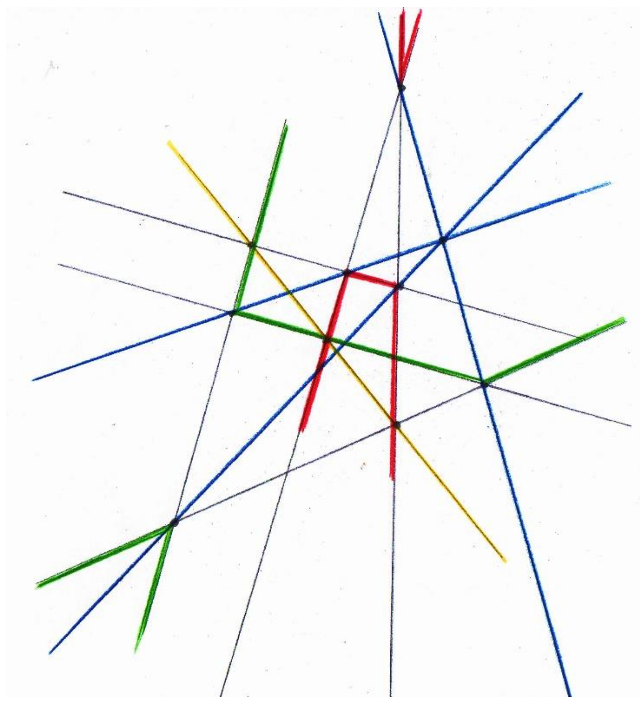

Abbildung 8d

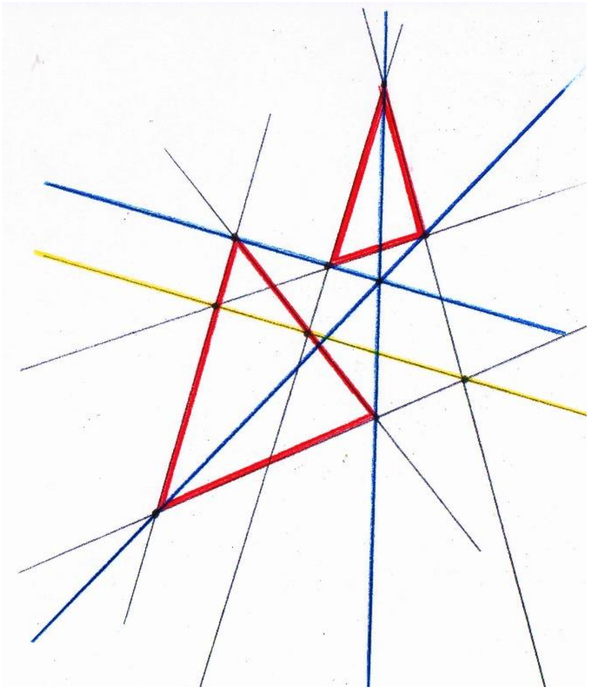

Abbildung 7e

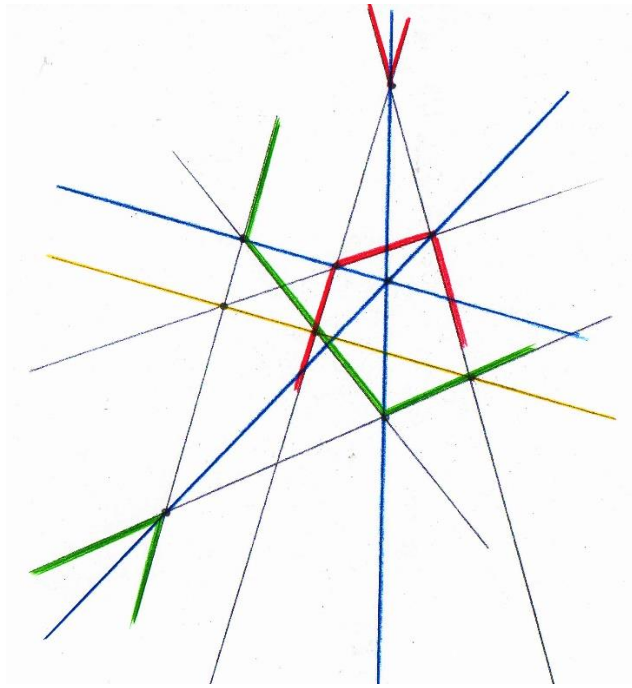

Abbildung 8e

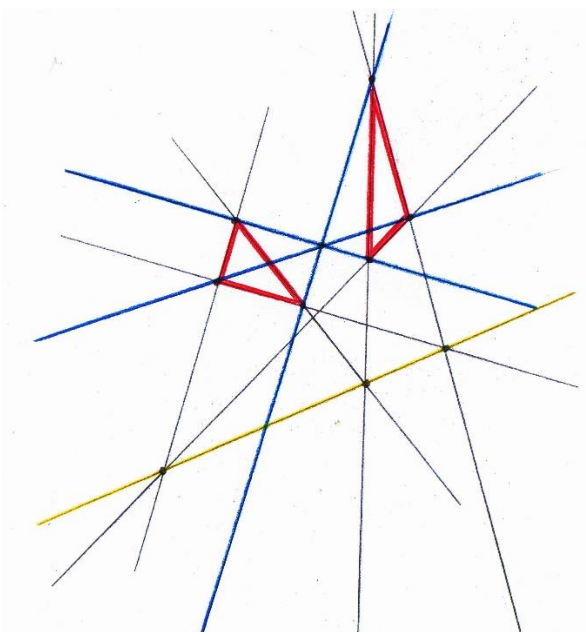

Abbildung 7f

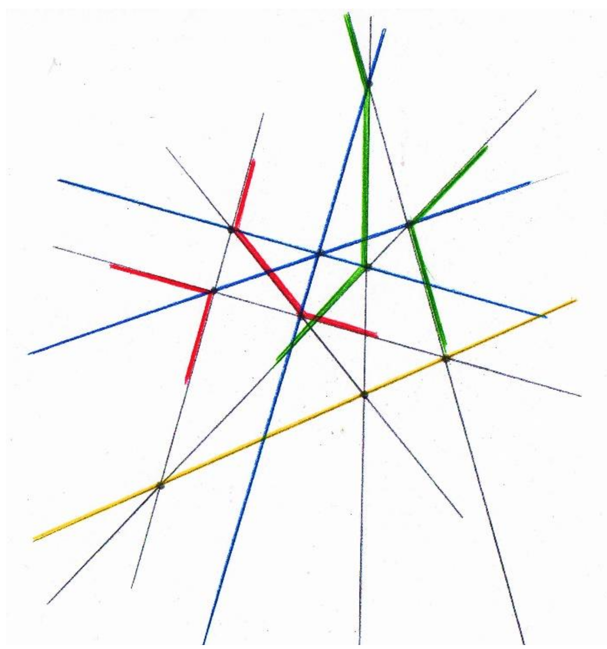

Abbildung 7f

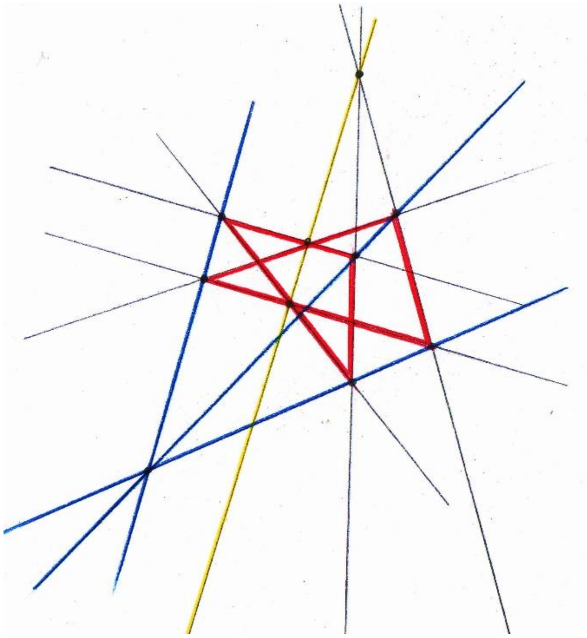

Abbildung 7g

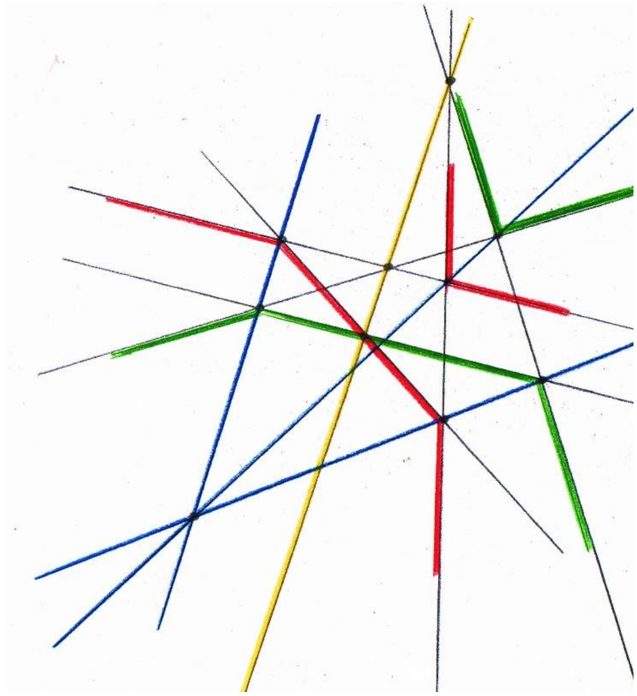

Abbildung 8g

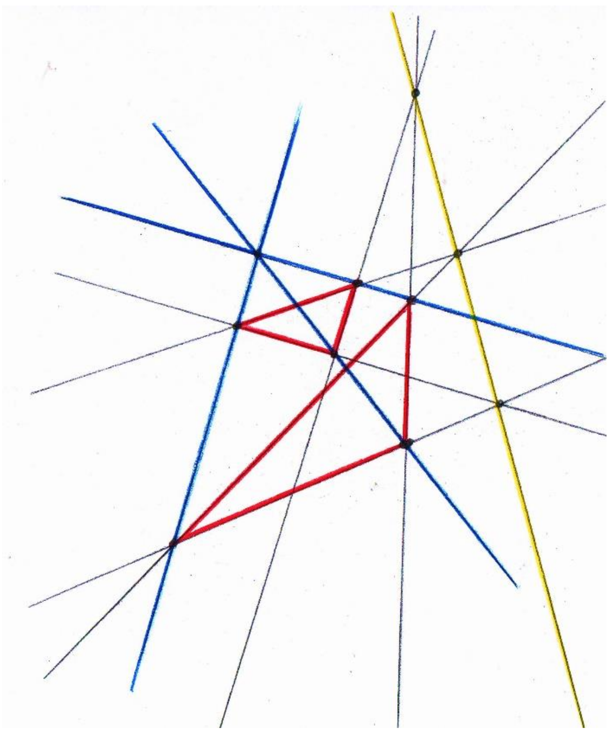

Abbildung 7h

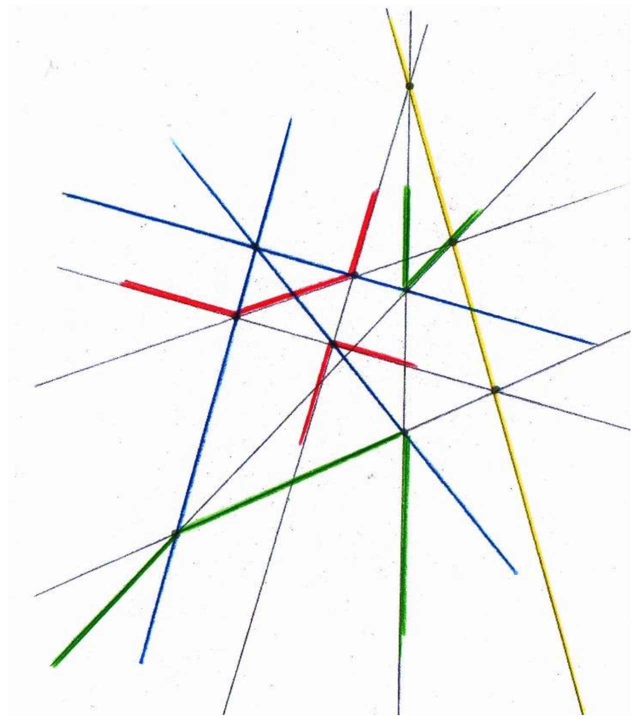

Abbildung 8h

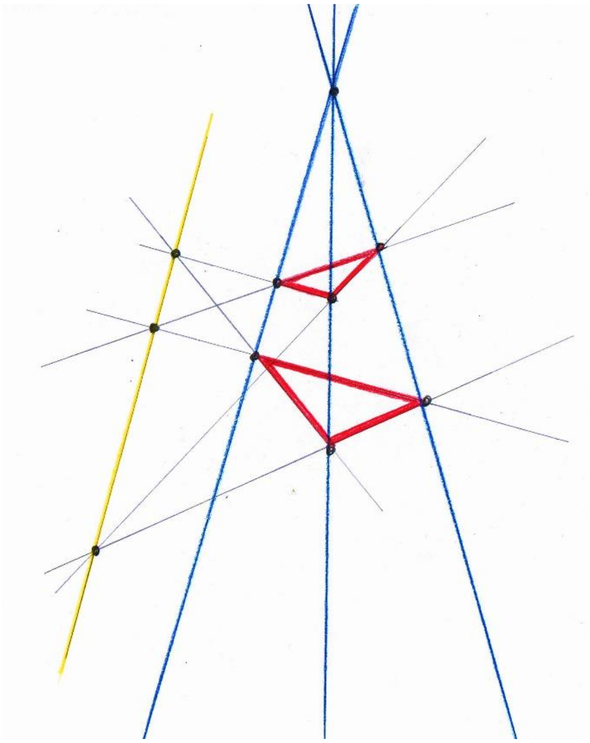

Abbildung 7i

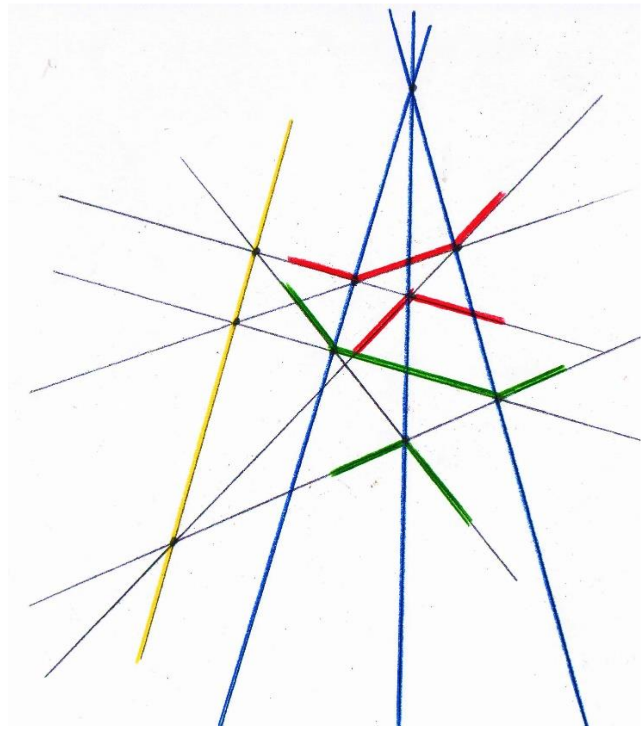

Abbildung 8i

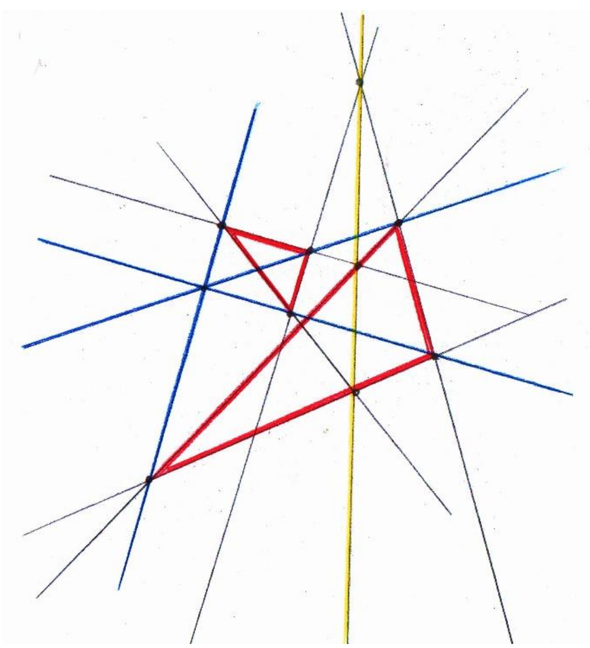

Abbildung 7j

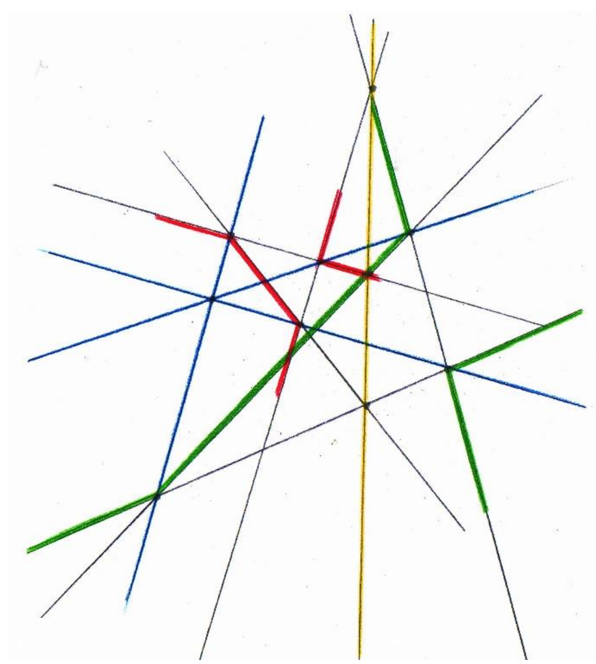

Abbildung 8j