Aufgaben Coulombsches Gesetz

383. Bestimmen Sie in jeder Teilaufgabe die fehlenden Größen und Begriffe.
$(\varepsilon_r = 1)$

Nr.	Q_1	Q_2	r	|F|	Anziehung/ Abstoßung
1	$5{,}25 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$	$6{,}45 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$	$11{,}5\,\mathrm{cm}$		
2	$3{,}95 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$		$5{,}10\,\mathrm{mm}$	$0{,}725\,\mathrm{N}$	anziehend
3	$2{,}22 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$	$-6{,}05 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$		$0{,}272\,\mathrm{N}$	
4	$-5{,}94 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$		$2{,}45\,\mathrm{cm}$	$81{,}5\,\mathrm{mN}$	abstoßend
5	$7{,}19 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$	$9{,}30 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$		$7{,}15\,\mathrm{mN}$	
6	$3{,}25 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$	$-2{,}28 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$	$32{,}5\,\mathrm{cm}$		

384. In einem Atomkern befinden sich positiv geladene Protonen im mittleren Abstand von $1 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$.
a) Wie groß ist die Abstoßungskraft zwischen zwei Protonen im Kern?
b) Wie groß ist die Gravitationskraft zwischen zwei Protonen?
c) Welche Schlussfolgerung ergibt sich daraus, wenn man weiß, dass der Atomkern ein stabiles Gebilde ist?

516. (LK 2020)
Zwei gleichartige Fadenpendel mit jeweils 0,800 m Länge sind im Abstand von 0,085 m aufgehängt. Die Pendelkörper sind Kügelchen und die Fäden bestehen aus elektrisch isolierendem Material. Die Kugeln sind entgegengesetzt, aber mit gleichem Betrag von $5{,}2 \cdot 10^{-9}$ C geladen und ruhen. Jedes der beiden Pendel ist um den Winkel 2° ausgelenkt.
a) Berechnen Sie den Abstand der Massenmittelpunkte der Kügelchen.
b) Weisen Sie nach, dass der Betrag der Coulombkraft $2{,}9 \cdot 10^{-4}$ N ist.
c) Ermitteln Sie die Masse eines Kügelchens.

511. Die Mittelpunkte zweier identischer, leitender Kugeln sind 0,50 m voneinander entfernt. Die Kugeln ziehen sich mit einer Kraft von 0,108 N an.
Sie werden nun mit einem dünnen, leitenden Draht verbunden.
Nachdem man die Verbindung wieder entfernt hat, stoßen sich die beiden Kugeln mit der Kraft von 0,0360 N ab.
Wie groß waren anfänglich die Ladungen der Kugeln, wenn zwischen den beiden Kugeln bei beiden Kraftmessungen Luft war?

496. Zwei gleichgroße Kugeln K_1 und K_2 tragen jeweils die gleiche Ladung +Q. Sie sind im Abstand von 20,0 cm voneinander fest aufgestellt und stoßen sich mit der Kraft von 10µN ab.
Mit einer dritten ungeladenen, gleich großen Kugel K_3 wird zunächst K_1 berührt. Danach wird die Kugel K_3 zur Kugel K_2 geführt und berührt auch diese. Zum Ende des Experimentes wird die Kugel K_3 genau in der Mitte zwischen den beiden äußeren Kugeln ebenfalls fest aufgestellt.

a) Welche Ladungen tragen die die einzelnen Kugeln am Ende des Experimentes, wenn keine Ladungen durch Schmutzeffekte verschwunden sind?
b) Wie groß ist die resultierende Kraft, die auf die Kugel K_3 wirkt? In welche Richtung wirkt diese Kraft?

Lösungen

383. Es kommt das Coulombsche Gesetz zur Anwendung:

$$F=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$$

zu 1.

$$F=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,A\cdot s\cdot V^{-1}\cdot m^{-1}}\cdot\frac{5{,}25\cdot 10^{-8}\,C\cdot 6{,}45\cdot 10^{-8}\,C}{\left(11{,}5\cdot 10^{-2}\,m\right)^2}$$

$$F=2{,}3\cdot 10^{-3}\,N$$

zu 2.

$$F=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$$

$$Q_2=\frac{F\cdot 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^2}{Q_1}$$

$$Q_2=\frac{0{,}725\,N\cdot 4\cdot\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,A\cdot s\cdot V^{-1}\cdot m^{-1}\cdot\left(5{,}10\cdot 10^{-3}\,m\right)^2}{3{,}95\cdot 10^{-8}\,C}$$

$$Q_2=5{,}31\cdot 10^{-8}\,C$$

zu 3.

$$r^2=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{F}$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{F}}$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,A\cdot s\cdot V^{-1}\cdot m^{-1}}\cdot\frac{2{,}22\cdot 10^{-7}\,C\cdot 6{,}05\cdot 10^{-7}\,C}{0{,}272\,N}}$$

$$r=0{,}067\,m$$

$$r=6{,}7\,cm$$

Nr.	Q_1	Q_2	r	|F|	Anziehung/ Abstoßung
1	$5{,}25\cdot 10^{-8}\,C$	$6{,}45\cdot 10^{-8}\,C$	$11{,}5\,cm$	$2{,}3\cdot 10^{-3}\,N$	abstoßend
2	$3{,}95\cdot 10^{-8}\,C$	$-5{,}31\cdot 10^{-8}\,C$	$5{,}10\,mm$	$0{,}725\,N$	anziehend
3	$2{,}22\cdot 10^{-7}\,C$	$-6{,}05\cdot 10^{-7}\,C$	$6{,}7\,cm$	$0{,}272\,N$	anziehend
4	$-5{,}94\cdot 10^{-8}\,C$	$-9{,}16\cdot 10^{-8}\,C$	$2{,}45\,cm$	$81{,}5\,mN$	abstoßend
5	$7{,}19\cdot 10^{-9}\,C$	$9{,}30\cdot 10^{-9}\,C$	$9{,}2\,mm$	$7{,}15\,mN$	abstoßend
6	$3{,}25\cdot 10^{-7}\,C$	$-2{,}28\cdot 10^{-7}\,C$	$32{,}5\,cm$	$6{,}31\,mN$	anziehend

384. a) Die elektrostatische Abstoßungskraft berechnet sich mit dem Coulombschen Gesetz;

$$F=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$$

Die beiden Ladungen entsprechen den Ladungen des Protons, also einer Elementarladung und der Abstand dem gegebenen mittleren Protonenabstand:

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}} \cdot \frac{\left(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C\right)^2}{\left(1 \cdot 10^{-15}\ m\right)^2}$$

$$F = 231 N$$

b) Die gravitative Kraft wird mit dem Gravitationsgesetz berechnet:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_P \cdot m_P}{r^2}$$

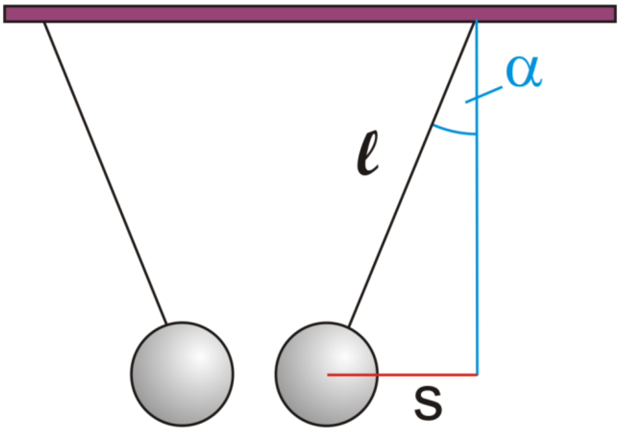
Die Massen sind die Protonenmassen:

$$F = 6{,}672 \cdot 10^{-11} Nm^2\, kg^{-2} \cdot \frac{\left(1{,}673 \cdot 10^{-27}\ kg\right)^2}{\left(1 \cdot 10^{-15}\ m\right)^2}$$

$$F = 1{,}88 \cdot 10^{-34}\ N$$

c) Die elektrische Kraft ist abstoßend, würde also die Protonen auseinandertreiben. Die Gravitationskraft ist anziehend, hält die Protonen also zusammen. Nur: Die anziehende Kraft ist um Größenordnungen kleiner als die abstoßende Kraft. Die Gravitation spielt praktisch keine Rolle, sie ist Null.
Den Kern halten demnach andere Kräfte zusammen.
Diese Kraft ist die starke Wechselwirkung oder starke Kernkraft. Sie kann die abstoßende Kräfte aufhalten, hat aber nur eine sehr kurze Reichweite. Sie liegt im Bereich der Protonenabstände und ist deshalb in der Praxis nicht zu spüren.

516.



Um welchen Weg ist das Kügelchen aus der Senkrechten abgelenkt. Man sieht, dass zwischen der Länge des Pendels, dem Winkel und der Auslenkung s der Zusammenhang

$$\sin\alpha = \frac{s}{\ell}$$

besteht. Damit kann die Auslenkung berechnet werden. Sie ist 0,028 m groß. Damit kann der Anstand der beiden Kügelchen berechnet werden. Er ist der obere Abstand der beiden Kugeln, von der der doppelte Wert der Auslenkung abgezogen wird.
Es sind 0,029 m.
Über das Coulombsche Gesetz kann nun die Ladung der Kugeln berechnet werden.

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Die beiden Ladungen sind vom Betrag her gleich und r ist der soeben berechnete Abstand der beiden Kugeln.

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,AsV^{-1}m^{-1}} \cdot \frac{\left(5{,}2 \cdot 10^{-9}\,C\right)^2}{\left(0{,}029\,m\right)^2}$$

$$F = 2{,}9 \cdot 10^{-4}\,N$$

Diese Kraft zieht die beiden Kugeln an. Gleichzeitig wirkt noch die Gewichtskraft nach unten.
Der Winkel von 2° stellt sich durch die Überlagerung der beiden Kräfte ein.
Es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{F_C}{F_G}$$

In der Gewichtskraft steckt die gesuchte Masse drin:

$$\tan\alpha = \frac{F_C}{m \cdot g}$$

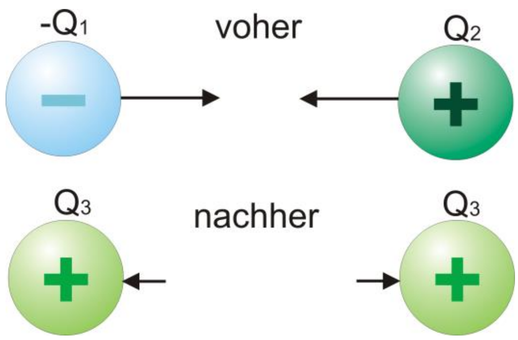
$$m = \frac{F_C}{\tan\alpha \cdot g}$$

$$m = 8{,}4 \cdot 10^{-4}\,kg$$

$$m = 0{,}84\,g$$

511.

Zu Beginn des Versuches müssen beide Kugeln unterschiedlich geladen sein, da sie sich anziehen. Die linke Kugel kann z.B. schwach negativ und die rechte stark positiv geladen sein.
Dann sind die beiden Kugeln nach der Berührung sowohl von der Stärke als auch der Polung gleich geladen. In diesem Fall wäre das positiv, aber sie sind schwächer positiv als die rechte Kugel vor dem Berühren mit dem Draht.
Was passiert beim Berühren?



Als erstes werden in diesem Beispiel die negativen Ladungen benutzt, um die positiven Ladungen auf der rechten Kugel auszugleichen.
Danach verteilen sich die restlichen positiven Ladungen der rechten Kugel gleichmäßig auf beiden Kugeln.
Vereinbarung:
negative Ladung der linken Kugel vor dem Berühren: $-Q_1$
positive Ladung der rechten Kugel vor dem Berühren: Q_2
positive Ladung einer Kugel nach der Berührung: Q_3

Die Gesamtladung der beiden Kugeln vor dem Berühren ist die Summe der Ladungen

$$-Q_1 + Q_2$$

Nach dem Berühren teilt sich diese Ladung auf die beiden Kugeln auf

$$-Q_1 + Q_2 = 2 \cdot Q_3$$

Weiterhin gilt für beide Anordnungen das Coulombsche Gesetz:

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Da sich der Versuch in Luft abspielt, kann man

$$\varepsilon_r = 1$$

setzen.

Als erstes lässt sich aus den gegeben Größen die Ladung Q_3 berechnen:

$$F_2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_3^2}{r^2}$$

$$Q_3 = \sqrt{F_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$Q_3 = \sqrt{0{,}0360\,\mathrm{N} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}} \cdot (0{,}50\,\mathrm{m})^2}$$

$$Q_3 = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

Prima, nun fehlen nur noch die beiden gesuchten Ladungen.
Auch da hilft das Coulombsche Gesetz weiter:

$$F_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

In dieser Gleichung sind die beiden Ladungen aber die unbekannten Größen, weshalb sie sich nicht einfach lösen lässt.
Man kennt aber eine weitere Beziehung:

$$-Q_1 + Q_2 = 2 \cdot Q_3$$

Die kann man z.B. nach Q1 umstellen und in das Coulomsche Gesetz einsetzen.

$$-Q_1 = 2 \cdot Q_3 - Q_2$$

$$Q_1 = -2 \cdot Q_3 + Q_2$$

und eingesetzt:

$$F_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{(-2 \cdot Q_3 + Q_2) \cdot Q_2}{r^2}$$

Diese Gleichung enthält nur noch Q_2 als unbekannte Größe und sollte zu knacken sein.
Ausmultiplizieren:

$$F_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{-2 \cdot Q_3 \cdot Q_2 + Q_2^2}{r^2}$$

Die gesuchte Größe taucht jetzt zweimal in der Gleichung auf: einmal einfach so und einmal als Quadrat.
Das kann nun auf verschiedene Art gelöst werden. Man kann z.B. einen GTR mit Solver nutzen oder man stellt die quadratische Gleichung in Normalform auf und löst diese. Das soll jetzt gezeigt werden.
Normalform:

$$F_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2 = -2 \cdot Q_3 \cdot Q_2 + Q_2^2$$

$$0 = Q_2^2 - 2 \cdot Q_3 \cdot Q_2 - F_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2$$

Damit kann die Lösungsformel zum Einsatz kommen.

$$Q_{2(1/2)} = Q_3 \pm \sqrt{Q_3^2 - F_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$Q_{2(1/2)} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,C \pm \sqrt{1{,}00 \cdot 10^{-12}\,C^2 + 0{,}108\,N \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1} \cdot (0{,}50\,m)^2}$$

$$Q_{2(1/2)} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,C \pm \sqrt{1{,}00 \cdot 10^{-12}\,C^2 + 3{,}00 \cdot 10^{-12}\,C^2}$$

$$Q_{2(1/2)} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,C \pm \sqrt{4{,}00 \cdot 10^{-12}\,C^2}$$

$$Q_{2(1/2)} = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,C \pm 2{,}00 \cdot 10^{-6}\,C$$

$$Q_{2(1)} = -1{,}00 \cdot 10^{-6}\,C$$

$$Q_{2(2)} = 3{,}00 \cdot 10^{-6}\,C$$

Damit hat man die beiden Ladungen der Kugeln zu Beginn des Versuches.

Kontrolle:
1. Wie groß ist die Kraft zwischen den beiden Kugel?

$$F_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{-1{,}00 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 3{,}00 \cdot 10^{-6}\,C}{(0{,}50\,m)^2}$$

$$F_1 = 0{,}108\,N$$

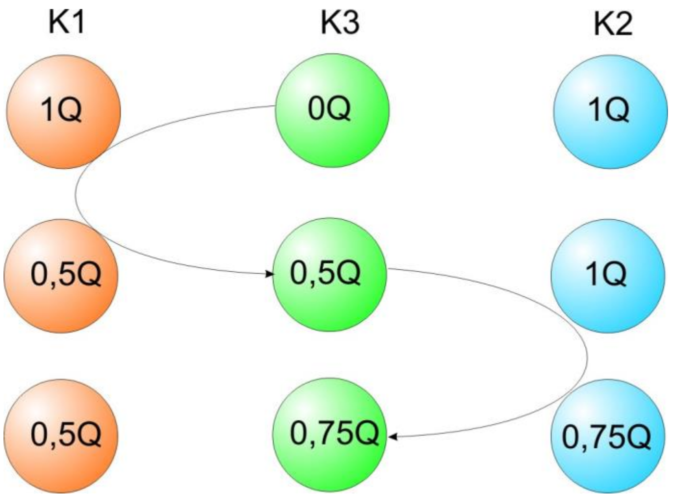
2. Wie groß ist die Ladung Q_3?

$$-1{,}00 \cdot 10^{-6}\,C + 3{,}00 \cdot 10^{-6}\,C = 2 \cdot Q_3$$

$$1{,}00 \cdot 10^{-6}\,C = Q_3$$

496.

a) Berühren sich zwei gleiche Körper, verteilen sich die Ladungen gleichmäßig auf beide Körper. Im ersten Teil geht also die Hälfte der Ladungen von Körper 1 auf den Körper 2 über.
Im zweiten Teil berührt Körper 2 den Körper 3. Zusammen haben sie 1,5 Q. Nach der Berührung hat jeder der beiden Körper davon die Hälfte, also 0,75 Q.



b) Auf die mittlere Kugel wirken zwei Kräfte: die abstoßende Kraft zwischen K_1 und K_3 und die abstoßende Kraft zwischen K_3 und K_2. Beide Kräfte wirken in entgegengesetzte Richtungen, so dass die resultierende Kraft die Differenz der beiden Teilkräfte ist:

$$F = F_{13} - F_{32}$$

Die Kraft zwischen den beiden linken Kugeln ist nach dem Coulomb-Gesetz

$$F_{13} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r^2}$$

Um eine Größe für die Kraft anzugeben, müssen die beiden Ladungen bekannt sein. Sind sie aber nicht!

Es ist aber bekannt, wie groß die Kraft zwischen den beiden äußeren Kugeln vor dem Experiment ist. s ist der Abstand der beiden äußeren Kugeln.

$$F_{12} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{s^2}$$

Da die beiden Ladungen gleich groß sind, kann man auch schreiben:

$$F_{12} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

Für die Kugel K_3 sind die beiden Abstände zu den äußeren Kugeln gleich groß und jeweils halb so groß wie der Gesamtabstand s:

$$r = \frac{s}{2}$$

Damit kann die Kraft F_{13} so geschrieben werden:

$$F_{13} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{1}{2}Q \cdot \frac{3}{4}Q}{\left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

Das kann vereinfacht werden:

$$F_{13} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{3}{8}Q^2}{\frac{s^2}{4}}$$

$$F_{13} = \frac{3}{8} \cdot 4 \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

$$F_{13} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

Der hintere Ausdruck entspricht genau der Kraft zwischen den beiden Kugel K_1 und K_2 vor dem Experiment.
Für die Kraft zwischen der Kugel K_3 und K_2 kann man ebenso verfahren:

$$F_{32} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{3}{4}Q \cdot \frac{3}{4}Q}{\left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$F_{32} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{9}{16}Q^2}{\frac{s^2}{4}}$$

$$F_{32} = \frac{9}{16} \cdot 4 \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

$$F_{13} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

Das kann nun in die Kraftgleichung eingesetzt werden:

$$F = F_{13} - F_{32}$$

$$F = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

Zusammengefasst ergibt das:

$$F = \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

$$F = \left(\frac{6}{4} - \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

$$F = \left(-\frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{s^2}$$

$$F = -\frac{3}{4} \cdot 10 \mu N$$

$$F = -7{,}5 \mu N$$

Das negative Vorzeichen sagt etwas über die Richtung der Kraft aus. Sie wirkt nach links. Das ist auch klar, da die abstoßende Kraft zwischen den beiden Kugeln K_3 und K_2 größer ist als die abstoßende Kraft zwischen K_1 und K_3.