Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien.

Von

H. Freudenthal und W. Hurewicz (Amsterdam).

Eine Abbildung f *einer* Teilmenge M eines metrischen Raumes in *sich* [1]) oder in *eine andere* heiße eine

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dehnung}\\ \text{Isometrie}\\ \text{Verkürzung}\end{array}\right\},\quad \text{wenn}\quad \varrho(f(a),f(b))\begin{array}{c}\geqq\\ =\\ \leqq\end{array}\varrho(a,b)\ ^{2)}$$

für je zwei Punkte a, b von M gilt (ϱ bezeichnet die Abstandsfunktion). Eine nichtisometrische Dehnung bzw. Verkürzung heiße auch echte Dehnung bzw. Verkürzung.

Der zugrundegelegte metrische Raum sei im Folgenden stets *totalbeschränkt*, d. h. jede unendliche Folge enthalte eine Fundamentalfolge; jede Teilmenge ist dann auch totalbeschränkt. Totalbeschränkt sind insbesondere alle kompakten Räume.

Satz Ia: Ist f eine *Dehnung* von M und M überall dicht rel. $f(M)$ [3]), so ist f eine *Isometrie*, und es ist auch $f(M)$ überall dicht rel. M.

Satz Ib: Ist f eine *Verkürzung* von M und $f(M)$ überall dicht rel. M, so ist f eine *Isometrie*, und es ist auch M überall dicht rel. $f(M)$.

---

[1]) Abbildung von M *in* N bedeutet: $f(M)\subset N$; Abbildung von M *auf* N: $f(M)=N$.

[2]) Falls f nicht als eindeutig vorausgesetzt wird, sind die Definitionsungleichungen der Dehnung usw. so zu deuten: für jedes a' aus der Menge $f(a)$ und jedes b' aus der Menge $f(b)$ gilt $\varrho(a', b')\geqq\varrho(a, b)$ usw. — Verkürzungen (und Isometrien) sind immer eindeutig.

[3]) „M überall dicht rel. N": die abgeschlossene Hülle von M enthält N. Für die Anwendung wichtig ist, daß das insbesondere dann gilt, wenn N in M enthalten ist.

Satz II: Bei einer Isometrie sind die Aussagen „M überall dicht rel. $f(M)$" und „$f(M)$ überall dicht rel. M" äquivalent. (Folgt aus Ia ind Ib).

Satz IIIa: Bei einer *echten Dehnung* gibt es einen Punkt von $f(M)$, der von M einen positiven Abstand hat. (Folgt aus Ia).

Satz IIIb: Bei einer *echten Verkürzung* gibt es einen Punkt von M, der von $f(M)$ einen positiven Abstand hat. (Folgt aus Ib).

Satz IV: Eine Abbildung eines totalbeschränkten Raumes auf sich ist entweder eine Isometrie, oder es gibt sowohl Punktepaare, deren Abstand wächst, als auch Punktepaare, deren Abstand abnimmt. (Folgt aus Ia und Ib).

Satz Va: Bei einer *Dehnung* eines kompakten R in sich ist $f(R)=R$; die Abbildung ist eine Isometrie. (In der Tat ist R überall dicht rel. $f(R)$, da $f(R)$ in R enthalten ist; nach Ia liegt also eine Isometrie vor, und da $f(R)$ als isometrisches, also stetiges Bild des kompakten R abgeschlossen ist, ist es nicht nur überall dicht in R, sondern sogar gleich R).

Satz Vb: Bei einer *Verkürzung* eines kompakten R auf einen R enthaltenden Raum ist $f(R)=R$; die Abbildung ist eine Isometrie. (Folgt aus Ib wie Va aus Ia).

Satz VI: Ein kompakter Raum läßt sich nicht isometrisch auf einen echten Teil abbilden. (Folgt aus Va).

Satz VII: Ist von zwei kompakten Räumen jeder einer Teilmenge des andern isometrisch, so sind sie einander isometrisch. (Folgt aus VI).

Von f wird nicht einmal Stetigkeit verlangt; Verkürzungen sind allerdings ohnehin stetig. Auch die üblichen Eigenschaften der Abstandsfunktion werden nicht voll ausgenutzt.

Die Sätze Ia und Ib sagen dasselbe aus, wenn man von f nicht verlangt, daß es eindeutig ist; ersetzt man f durch seine Umkehrung, so gehen sie ineinander über. Tatsächlich werden wir Ia beweisen, ohne die Eindeutigkeit von f vorauszusetzen, und damit wird auch das Übrige bewiesen sein.

In nur beschränkten und nicht totalbeschränkten R gelten die Sätze nicht notwendig. Bildet man z. B. die Einheitskugel des Hilbertschen Raumes so auf sich ab, daß der Punkt $(x_1, x_2, \ldots)$ in den Punkt $(x_2, x_3, \ldots)$ übergeht, so erhält man einen Widerspruch zu Ib.

Beweis von Ia: Wir dürfen den zugrundegelegten Raum als kompakt voraussetzen, denn jeder totalbeschränkte Raum ist isometrisch einer Teilmenge eines kompakten Raumes[4]). Wir erweitern f auf die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M, indem wir für $p \subset \overline{M} - M$ das Bild $f(p)$ als die Menge der Häufungspunkte aller Folgen $f(p_n)$ erklären ($p_n \subset M$, $\lim p_n = p$). Es ist klar, daß die so erweiterte Abbildung immer noch eine Dehnung ist, und daß

$$f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)} \subset \overline{M} \tag{1}$$

gilt.

Seien a, b Punkte von $\overline{M}$. Wir setzen $a_0 = a$, $b_0 = b$ und nehmen a_n als ein Element der Menge $f(a_{n-1})$ an und b_n als ein Element der Menge $f(b_{n-1})$ (die Möglichkeit dieser Rekursion folgt aus 1). Da f eine Dehnung ist, gilt

$$\varrho(a_m, a_n) \geqq \varrho(a_{m-1}, b_{n-1}), \qquad \varrho(b_m, b_n) \geqq \varrho(b_{m-1}, b_{n-1}), \tag{2}$$

$$\varrho(a_n, b_n) \geqq \varrho(a_{n-1}, b_{n-1}). \tag{3}$$

Wegen der Kompaktheit des Raumes gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl i und eine natürliche Zahl k mit

$$\varrho(a_i, a_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varrho(b_i, b_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach 2 folgt daraus

$$\varrho(a_0, a_k) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varrho(b_0, b_k) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

und nach der Dreiecksungleichung

$$\varrho(a_k, b_k) < \varrho(a_0, b_0) + \varepsilon.$$

Daraus folgt nach 3

$$\varrho(a_0, b_0) \leqq \varrho(a_1, b_1) < \varrho(a_0, b_0) + \varepsilon,$$

also

$$\varrho(a_0, b_0) = \varrho(a_1, b_1),$$

d. h. die Abbildung f ist eine *Isometrie*.

Da nach 4 in jeder Nähe von a Punkte aus $f(\overline{M})$ vorkommen (nämlich die a_k), liegt $f(\overline{M})$, also nach 1 auch $f(M)$ überall dicht in $\overline{M}$. Damit ist auch der zweite Teil von Ia bewiesen.

Problem: Läßt sich etwas Schärferes aussagen über die etwa in Satz IV ausgedrückte Kompensation von Dehnungen durch Verkürzungen und umgekehrt?

[4]) Die vollständige Hülle des Raumes (Hausdorff, *Mengenlehre*, 2. Aufl., 1927, S. 107) beispielsweise ist kompakt.

Über den Lusternik-Schnirelmannschen Begriff der Kategorie[1]).

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

In ihren Untersuchungen auf dem Gebiete der Differentialgeometrie und der Variationsrechnung haben die Herren L. Lusternik[2]) und L. Schnirelmann[3]) eine neue, für abgeschlossene Teilmengen E einer Mannigfaltigkeit definierte topologische Invariante eingeführt und *Kategorie von E in Bezug auf M* genannt. Die von ihnen eingeführte Definition läßt sich folgendermassen formulieren:

(1) *Die Kategorie von E in Bezug auf M (Bezeichnung: $\mathrm{cat}_M E$) ist die kleinste von derartigen Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$, daß E eine Zerlegung in $\mathfrak{m}$ in E abgeschlossene und in M zusammenziehbare Teilmengen zuläßt.*
Die Kategorie (schlechthin) von M (Bezeichnung: $\mathrm{cat}\, M$) heißt die Kategorie von M in Bezug auf M selbst.

In dieser Form hat die Definition der Kategorie einen Sinn nicht nur dann, wenn E eine abgeschlossene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist, sondern auch im allgemeinsten Falle irgendeiner Teilmenge E eines ganz beliebigen Raumes M. Da man in dem Begriff

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meiner in C. R. Bd. 198 (1934), S. 1730 befindlichen Note veröffentlicht worden.

[2]) L. Lusternik, *Topologische Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttheorie*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 125—130.

[3]) L. Schnirelmann, *Über eine neue kombinatorische Invariante*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 131—134.