

finite elemente

lecture notes

ellen kuhl

lehrstuhl für technische mechanik
tu kaiserslautern

ss 2006

disclaimer

hier sind wie versprochen die vorlesungsunterlagen der 'finite elemente' vorlesung 2006 - versprochen hab ich sie jedes jahr, dies jahr hab ich's tatsächlich gemacht. die unterlagen sind allerdings nicht zum selbststudium geeignet, sie sind nicht ganz vollständig, vor allem aber leider auch nicht immer fehlerfrei. teile der unterlagen basieren auf meinen eigenen mitschriften der superguten finite element vorlesungen von peter betsch, paul steinmann und ekkehard ramm.

diese lecture notes sind für rouven, der immer behauptet, dass er nach der vorlesung seine eigene mitschrift nicht mehr lesen kann, für katja, die zu eitel ist, ihre brille aufzusetzen und deshalb die indizes in der letzten reihe nicht mehr erkennen kann, für isabel, der ich immer zu schnell geschrieben habe, weil sie sich nebenbei noch die nägel lackieren musste, für kai, der beim lernen blöderweise ein weizen über seine eigene mitschrift gekippt hat und für alle die, die aufgrund der fussball wm absolut unverschuldet die eine oder andere vorlesung verpasst haben und es bis heute nicht geschafft haben, sich die mitschrift von michael zu kopieren, die eigentlich sowieso viel ordentlicher ist, als diese geteXte version. viel spass beim lernen!

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeines	1
2	1d Modellproblem	5
2.1	Differentielle Form	5
2.2	Variationelle Form	8
2.3	Schwache Form	10
2.4	Galerkin Verfahren	11
2.5	Implementierung in MATLAB	17
3	1d Kontinuumselemente - Stabelemente	21
3.1	Differentielle Form	21
3.2	Variationelle Form	21
3.3	Schwache Form	22
3.4	Finite Element Approximation	22
3.5	Numerische Implementierung	27
3.6	Randbedingungen	33
3.7	Nachlaufrechnung	36
3.8	Lagrange'sche Polynome	38
3.9	Beispiel	43
3.10	Implementierung in MATLAB	50

4	1d Strukturelemente - Balkenelemente	59
4.1	Differentielle Form	59
4.2	Variationelle Form	60
4.3	Schwache Form	61
4.4	Finite Element Approximation	62
4.5	Hermite Polynome	63
4.6	Implementierung in MATLAB	68
5	2d Theromelemente - Scheibenelemente	73
5.1	Differentielle Form	74
5.2	Variationelle Form	75
5.3	Schwache Form	76
5.4	Finite Element Approximation	77
5.5	Lineare Dreieckselemente	79
5.6	Bi-lineare Viereckselemente	87
6	2d Kontinuumselemente - Scheibenelemente	95
6.1	Differentielle Form	95
6.2	Variationelle Form	96
6.3	Schwache Form	97
6.4	Finite Element Approximation	100
6.5	Numerische Integration	103
6.6	Gängige Elementfamilien	106
6.7	Implementierung in MATLAB	113
	Bibliography	121

1 Allgemeines

Gliederung der Vorlesung / Übung

theoretische Grundlagen ↔ numerische Umsetzung (hier mit MATLAB)

- 1d Modellproblem
- 1d Kontinuumselemente
Stabelemente für Strukturmechanik
- 1d Strukturelemente
Balkenelemente für Strukturmechanik
- 2d Thermolemente
Scheibenelemente für Wärmeleitprobleme
- 2d Kontinuumselemente
Scheibenelemente für Strukturmechanik

Finite Element Methode

Die Finite Elemente Methode (FEM) ist ein vielseitiges numerisches Verfahren zur Lösung von linearen und nichtlinearen Randwert- und Anfangsrandwertproblemen.

Entwicklung der FEM

- Mathematik
Ansatzfunktionen, Variationsmethoden Rayleigh [1870], Ritz [1909]
- Mechanik
Stabwerksmodelle Hrennikoff [1941]
- Ingenieurwesen
Kraft- und Verschiebungsgrößenverfahren,
'Matrixmethode' Argyris [1954], 'FEM' Clough [1960]
- Informatik
numerische Umsetzung der FEM seit 1960

Einsatzbereich der FEM

- Kontinuumsmechanik
- Strukturmechanik
- Strömungsmechanik
- Elektrotechnik
- Biomechanik

Ablauf einer FE-Berechnung

1. Modellierung
(Anfangs-)Randwertproblem $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$
2. Diskretisierung
Zerlegung in Teilgebiete \rightarrow Finite Elemente
3. Algebraisierung
Gleichungssystem für die
unbekannten Knotengrößen $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}$
4. Lösung $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}$
5. Nachlaufrechnung
Berechnung abgeleiteter,
ingenieur-relevanter Größen
Verzerrungen, Spannungen, Fehler $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$

Literatur

Es gibt tonnenweise Literatur zur Finiten Element Methode, die wohl bekanntesten Textbücher sind jedoch meist englischsprachig, siehe z.B. [1–7, 9–14]. Als Einstieg und als Ergänzung zur Vorlesung ist der Abschnitt über Finite Elemente aus [8] ausreichend.

2 1d Modellproblem

2.1 Differentielle Form

Problemstellung finde $u = u(x)$, so dass

$$\begin{aligned}u''(x) + f(x) &= 0 & 0 < x < L \\u(0) &= u_0 \\u(L) &= u_L\end{aligned}$$

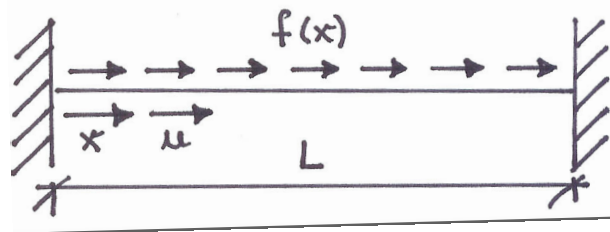
gesucht Funktion $u = u(x)$, die im Gebiet $0 < x < L$ die Differentialgleichung $u''(x) + f(x) = 0$ sowie auf den Rändern $x = 0$ und $x = L$ die Randbedingungen $u(0) = u_0$ und $u(L) = u_L$ erfüllt

Bemerkungen

- lineare Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung
- Dirichlet Randbedingungen (RB) $u(0) = u_0$ und $u(L) = u_L$

Beispiele: Differentialgleichungen 2. Ordnung

1. Verschiebungsproblem – Elastizitätstheorie



$u(x)$... axiale Verschiebung

$f(x)$... Belastung in axialer Richtung

$\sigma(x)$... Spannung

$\epsilon(x)$... Verzerrung

E ... Elastizitätsmodul $E = \text{const}$

Gleichgewicht :
$$\frac{d\sigma(x)}{dx} + f(x) = 0$$

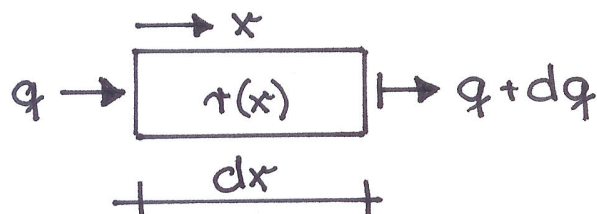
Kinematik :
$$\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

Hooke'sches Gesetz:
$$\sigma(x) = E \epsilon(x) \quad \text{mit } E = \text{const}$$

Differentialgleichung / starke Form

$$\boxed{u''(x) + \frac{f(x)}{E} = 0}$$

2. Temperaturproblem – Wärmeleitung



$\Theta(x)$... Temperatur

$r(x)$... Wärmequelle

$q(x)$... Wärmefluss

k ... Wärmeleitfähigkeit $k = \text{const}$

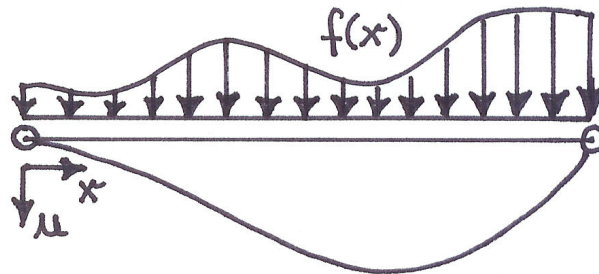
Energieerhaltung: $-\frac{dq(x)}{dx} + r(x) = 0$

Fourier Gesetz: $q(x) = -k \frac{d\Theta(x)}{dx}$

Differentialgleichung / starke Form

$$\Theta''(x) + \frac{r(x)}{k} = 0$$

3. Durchhangproblem – Biegeweiches Seil



$u(x)$... Durchhang

$f(x)$... Querbelastung

H_0 ... Horizontale Seilkraft $H_0 = \text{const}$

Gleichgewicht: $H_0 u''(x) - f(x) = 0$

Differentialgleichung / starke Form

$$u''(x) = \frac{f(x)}{H_0}$$

2.2 Variationelle Form

Multiplikation mit Testfunktion $v(x)$ und Integration über das Gebiet $\int_0^L \dots dx$ liefert variationelle Formulierung

Problemstellung finde $u = u(x) \in H^{\text{trial}}$, so dass

$$\int_0^L v(x) [u''(x) + f(x)] dx = 0 \quad \forall v \in H^{\text{test}}$$
$$u(0) = u_0$$
$$u(L) = u_L$$

$u(x)$... Lösungsfunktion

$v(x)$... Testfunktion / Wichtungsfunktion

H^{trial} ... Menge aller Lösungsfunktionen

genügend oft differenzierbar

mit der Eigenschaft $u(0) = u_0$ und $u(L) = u_L$

H^{test} ... Menge aller Testfunktionen

genügend oft differenzierbar

mit der Eigenschaft $v(0) = v(L) = 0$

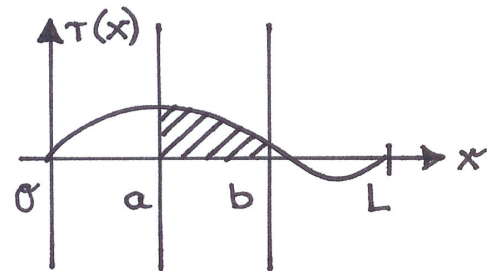
Behauptung

(V) \leftrightarrow (D), (V) und (D) besitzen identische Lösung $u = u(x)$

Veranschaulichung

Betrachte das "Residuum" $r(x) = u''(x) + f(x)$

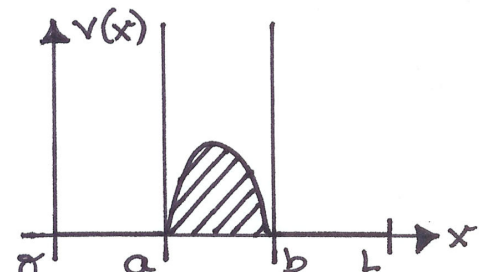
d.h. $r(x) \neq 0$, so dass zugehöriges $u(x)$ keine Lösung von (D) ist



wähle $v(x) \in H^{\text{test}}$ in der Form

$$\int_0^L v(x) r(x) dx > 0,$$

d.h. $u(x)$ ist keine Lösung von (V)
wenn $u(x)$ keine Lösung von (D)



Im allgemeinen kann durch entsprechende Wahl von $v(x) \in H^{\text{test}}$ die Differentialgleichung (D) in jedem beliebigen Bereich "getestet" werden \rightarrow wenn (V) gilt, dann gilt auch (D), d.h. (V) liefert im Vergleich zu (D) keine neuen Lösungen

Bemerkungen

- Die Lösung der variationellen Form (V) erfüllt auch die differentielle Form (D)
- Die Wahl der Testfunktionen / der Funktionenmenge H^{test} ist essentiell in (V)

- Die Lösungsfunktion $u(x)$ ist Element der Menge H^{trial} , i.a. gilt $H^{\text{trial}} \neq H^{\text{test}}$, Unsymmetrie in der Formulierung, unterschiedliche Kontinuitätsanforderungen, da u'' und v , Ziel symmetrisches Gleichungssystem

2.3 Schwache Form

Die schwache Form der Differentialgleichung stellt die Grundlage der Finite Element Methode dar.

partielle Integration der variationellen Form

$$\int_0^L v(x) u''(x) dx = - \int_0^L v'(x) u'(x) dx + [v(x) u'(x)]_0^L$$

mit besonderer Anforderung an die Testfunktionen $v(0) = v(L) = 0$

$$\int_0^L v(x) u''(x) dx = - \int_0^L v'(x) u'(x) dx$$

Problemstellung finde $u = u(x) \in H_0^1$, so dass

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^L v'(x) u'(x) - v(x) f(x) dx &= 0 \quad \forall v \in H_0^1 \\ u(0) &= u_0 \\ u(L) &= u_L \end{aligned}}$$

- H^1 ... die Menge aller zulässiger Funktionen
für $w(x) \in H^1$ muss $\int_0^L [w'(x)]^2 dx$ existieren
1. Ableitungen müssen quadratisch integrierbar sein
 $w(x) \in H^1$ wenn $\int_0^L [w'(x)]^2 dx < \infty$
- H_0^1 ... Menge aller Funktionen H^1 , die zusätzlich
die homogenen Dirichlet Randbedingungen erfüllen
 $w(x) \in H_0^1$ wenn $\int_0^L [w'(x)]^2 dx < \infty$
und $w(0) = w(L) = 0$

Bemerkungen

- Hier gleiche Kontinuitätsanforderungen an $u(x)$ und $v(x)$ da u' und v' , $H^{\text{trial}} = H^1$ und $H^{\text{test}} = H_0^1$
- Verminderung der Kontinuitätsanforderungen an $u(x)$, nur noch 1. Ableitungen anstelle 2. Ableitungen in (W) "schwache" Form
- (W) \leftrightarrow (D), unter der Voraussetzung, dass $u(x)$ genügend glatt ist, besitzt (D) eine Lösung, erfüllt diese auch (W)

2.4 Galerkin Verfahren

Ausgangspunkt schwache Form (W) des
Randwertproblems, Variationsproblem der Galerkin-
Approximation

Problemstellung finde $u = u(x) \in H_0^1$, so dass

$$\int_0^L v'(x) u'(x) - v(x) f(x) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1$$

$$u(0) = u_0$$

$$u(L) = u_L$$

Galerkin Approximation der Lösung im gesamten Gebiet

$$u(x) = \sum_{J=1}^N \alpha_J \Phi_J(x) \quad u'(x) = \sum_{J=1}^N \alpha_J \Phi_J'(x)$$

Galerkin Approximation der Testfunktionen im Gebiet

$$v(x) = \sum_{I=1}^N \beta_I \Phi_I(x) \quad v'(x) = \sum_{I=1}^N \beta_I \Phi_I'(x)$$

mit

α_J ... unbekannte Freiheitsgrade

β_I ... beliebige Koeffizienten

Φ_I, Φ_J ... Basisfunktionen

Einsetzen in schwache Form

$$\int_0^L \left[\sum_{I=1}^N \beta_I \Phi_I'(x) \sum_{J=1}^N \alpha_J \Phi_J'(x) - \sum_{I=1}^N \beta_I \Phi_I(x) f(x) \right] dx = 0 \quad \forall \beta_I$$

Ausklammern der Koeffizienten

$$\sum_{I=1}^N \beta_I \left[\sum_{J=1}^N \underbrace{\int_0^L \Phi_I'(x) \Phi_J'(x) dx}_{:=K_{IJ}} \alpha_J - \underbrace{\int_0^L \Phi_I(x) f(x) dx}_{:=F_I} \right] = 0$$

Steifigkeitsmatrix

$$K_{IJ} = \int_0^L \Phi'_I(x) \Phi'_J(x) dx$$

globale Systemsteifigkeitsmatrix

Lastvektor

$$F_I = \int_0^L \Phi_I(x) f(x) dx$$

globaler Systemlastvektor

zu lösendes Gleichungssystem

$$\sum_{I=1}^N \beta_I \left[\sum_{J=1}^N K_{IJ} \alpha_J - F_I \right] = 0 \quad \forall \beta_I$$

muss für beliebige β_I gelten!

Beispiel

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \dots, \beta_N = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{J=1}^N K_{1J} \alpha_J - F_1 = 0$$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \dots, \beta_N = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{J=1}^N K_{2J} \alpha_J - F_2 = 0$$

usw. d.h. es ergeben sich insgesamt N Gleichungen zur Bestimmung der N unbekanntenen Freiheitsgrade α_J

resultierendes Gleichungssystem

$$\sum_{J=1}^N K_{IJ} \alpha_J - F_I = 0 \quad I = 1, 2, \dots, N \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}$$

Lösung für die Freiheitsgrade

$$\alpha_J = \sum_{I=1}^N K_{JI}^{-1} F_I \quad J = 1, 2, \dots, N \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}$$

Problem Interpretation der Freiheitsgrade α

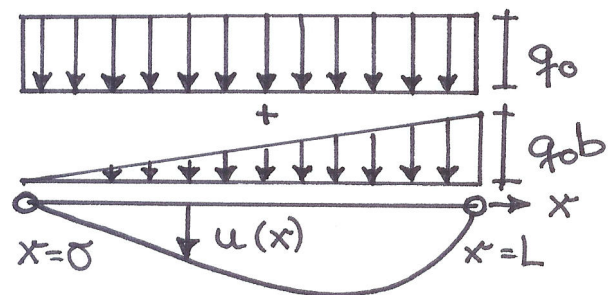
Beispiel: Seildurchhang

Anwendung des Galerkin Verfahrens zur Berechnung des Durchhanges eines biegeweichen Seils

betrachte Hängebrücke mit spezifischer Längsbelastung $q(x) = q_0 + q_0 b \frac{x}{L}$

konstanter Anteil q_0

linearer Anteil $q_0 b \frac{x}{L}$



zugehörige Differentialgleichung

$$u''(x) + f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(x) = -\frac{q_0}{H_0} \left[1 + b \frac{x}{L} \right]$$

H_0 ... Horizontalkomponente der Seilkraft $H_0 = \text{const}$

analytische Lösung

1. Integration

$$u'(x) = \int_{w=0}^x f(w) dw + c_1$$

2. Integration

$$u(x) = \int_{v=0}^x u'(v) \, dv + c_2$$

$$u(x) = \int_{v=0}^x \left[\int_{w=0}^x f(w) \, dw \right] \, dv + c_1 x + c_2$$

$$u(x) = \frac{q_0 L}{H_0} \left[\frac{b}{6} \left[\frac{x}{L} \right]^3 + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{L} \right]^2 - \left[\frac{1}{2} + \frac{b}{6} \right] \frac{x}{L} \right] L$$

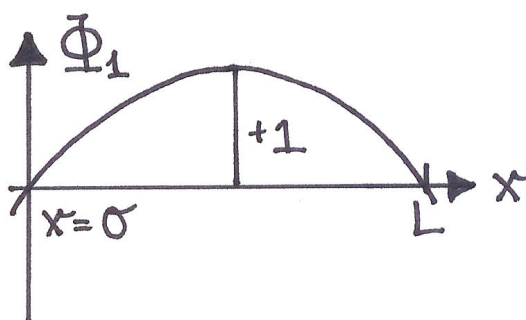
numerische Lösung

mit N Basisfunktionen Φ_I , z.B. Sinusfunktion mit I Halbkurven

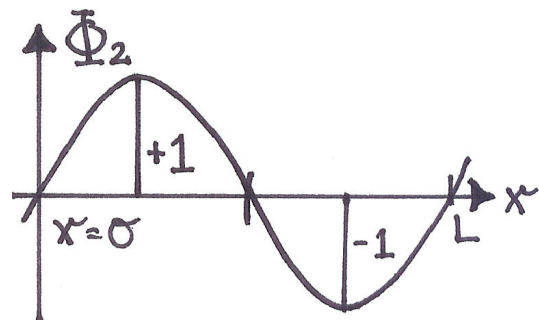
$$\varphi_I = \sin\left(I \Pi \frac{x}{L}\right) \in H_0^1$$

Galerkin Approximation der Lösung und Testfunktionen

$$u(x) = \sum_{J=1}^N \alpha_J \sin\left(J \Pi \frac{x}{L}\right) \quad v(x) = \sum_{I=1}^N \beta_I \sin\left(I \Pi \frac{x}{L}\right)$$



Basisfunktion Φ_1



Basisfunktion Φ_2

Steifigkeitsmatrix

$$K_{IJ} = \int_0^L \Phi_I'(x) \Phi_J'(x) \, dx$$

$$K_{IJ} = I \cdot J \cdot \left[\frac{\pi}{L} \right]^2 \int_0^L \cos\left(I \pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(J \pi \frac{x}{L}\right) dx$$

$$K_{II} = I^2 \frac{\pi^2}{2L} \quad \text{für } I = J \quad \text{und} \quad K_{IJ} = 0 \quad \text{für } I \neq J$$

Lastvektor

$$F_I = \int_0^L \Phi_I(x) f(x) dx$$

$$F_I = \int_0^L \sin\left(I \pi \frac{x}{L}\right) \frac{q_0}{H_0} \left[1 + b \frac{x}{L} \right] dx$$

$$F_I = \frac{q_0 L}{H_0} \frac{1}{I \pi} \left[[1 + b] \cos(I \pi) - 1 \right]$$

Lösung

$$\alpha = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}$$

Auswertung z.B. mit MATLAB

2.5 Implementierung in MATLAB

galerkin.m

Berechnung des Seildurchhanges bei konstanter Streckenlast mit Hilfe des Galerkin Verfahrens mit globalen Sinusansätzen

```
% Eingabe
n = input('Anzahl der Freiheitsgrade = ');
load = input('Konstante Streckenlast = ');
loadb = input('Lineare Streckenlast = ')

clear alpha, clear phi0, clear kij, clear K, clear
F
% Aufbau der Steifigkeitsmatrix (Diagonalmatrix)
% Aufbau des Lastvektors
for i = 1:n
    is = i*pi;
    K(i,i) = is^2/2;
    F(i) = load*((1+loadb)*cos(is)-1)/is;
end

% Bildschirmausgabe von K und F
K
F

% Loesung des linearen Gleichungssystems
alpha = K \ F';
```

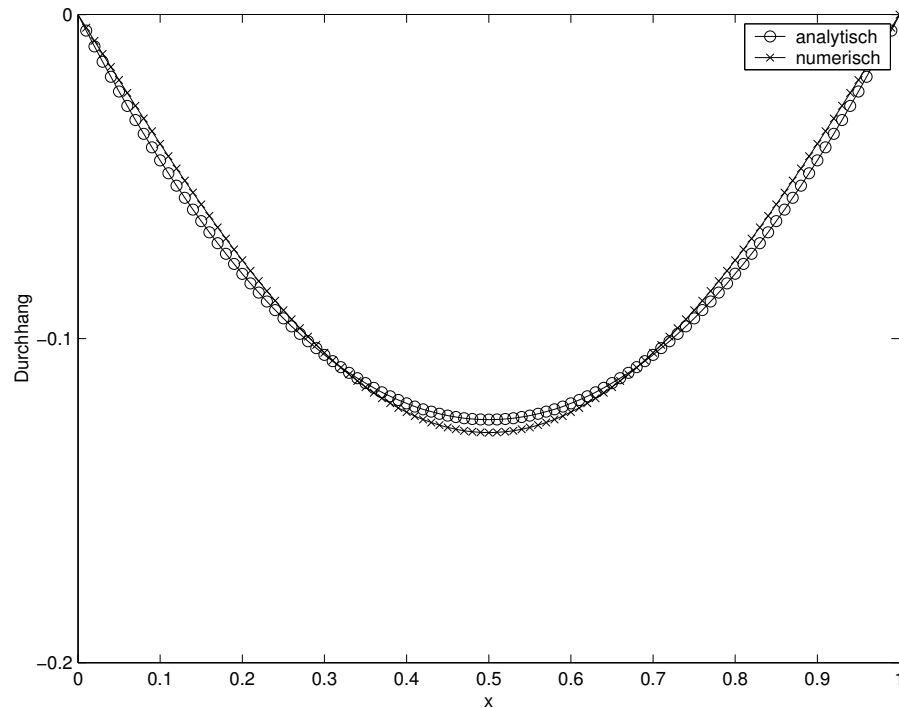
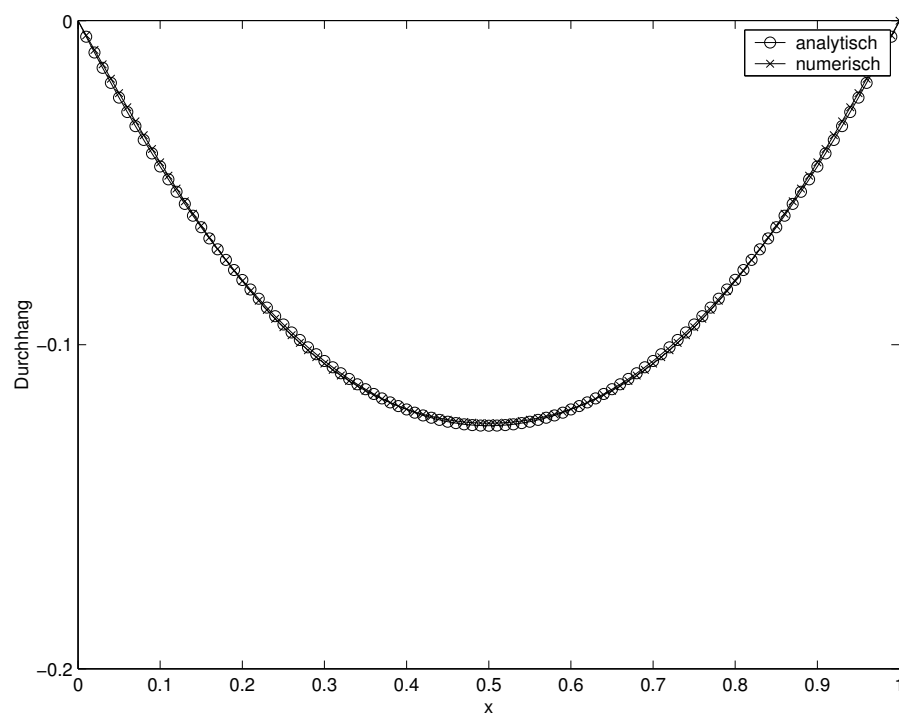
```
% BildschirmAusgabe der Freiheitsgrade
alpha

% Graphische Ausgabe der numerischen und
% analytischen Loesung im Intervall [0,1]
x = 0:0.01:1;
for i = 1:n
fact = i*pi;
phi0(:,i) = sin(fact*x)';
end

% Verlauf der numerischen Loesung
disp = phi0*alpha;

% Analytische Vergleichsloesung
ya = load*(x.*x/2 - x/2) ...
+ load*loadb*(x.^3/6 -x/6);

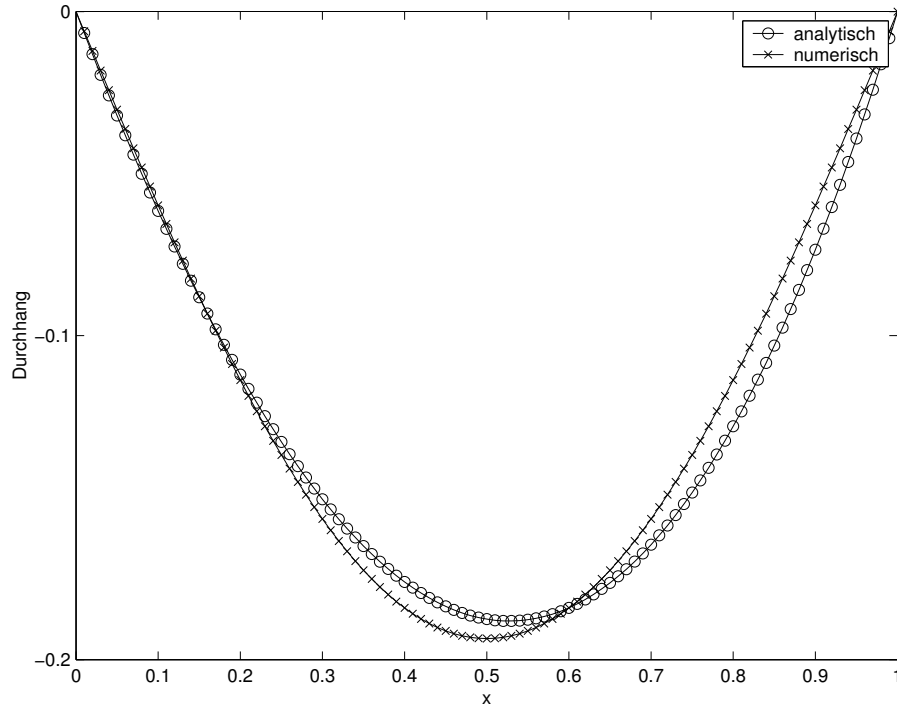
% Graphische Ausgabe
plot(x,ya,x,disp)
xlabel('x')
ylabel('Durchhang')
legend('analytisch','numerisch')
```


Beispielinput $n=1$, load=1, loadb=0output $\alpha_1 = -0.1290$ **Beispiel**input $n=4$, load=1, loadb=0output $\alpha_1=-0.1290$, $\alpha_2=0.0000$, $\alpha_3=-0.0048$, $\alpha_4=0.0000$ 

Beispiel

input $n=1$, load=1, loadb=1

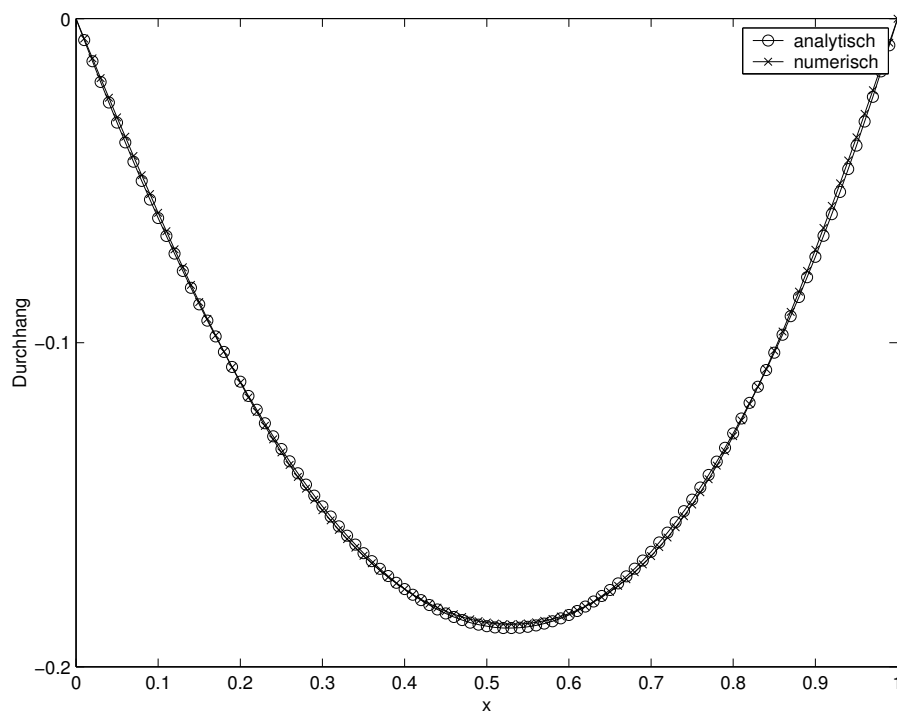
output $\alpha_1 = -0.1935$



Beispiel

input $n=n$, load=1, loadb=1

output $\alpha_1 = -0.1935$, $\alpha_2 = 0.0081$, $\alpha_3 = -0.0072$, $\alpha_4 = 0.0010$



3 1d Kontinuumselemente - Stabelemente

3.1 Differentielle Form

Problemstellung finde $u = u(x)$, so dass

$$u''(x) + f(x) = 0 \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = u_0$$

$$u(L) = u_L$$

3.2 Variationelle Form

Multiplikation der differentiellen Form mit Testfunktion $v(x)$ und Integration über das Gebiet $\int_0^L \dots dx$ liefert variationelle Formulierung

Problemstellung finde $u = u(x) \in H^{\text{trial}}$, so dass

$$\int_0^L v(x) [u''(x) + f(x)] dx = 0 \quad \forall v \in H^{\text{test}}$$
$$u(0) = u_0$$
$$u(L) = u_L$$

3.3 Schwache Form

partielle Integration der variationellen Form liefert schwache Form

Problemstellung finde $u = u(x) \in H_0^1$, so dass

$$\int_0^L v'(x) u'(x) - v(x) f(x) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1$$
$$u(0) = u_0$$
$$u(L) = u_L$$

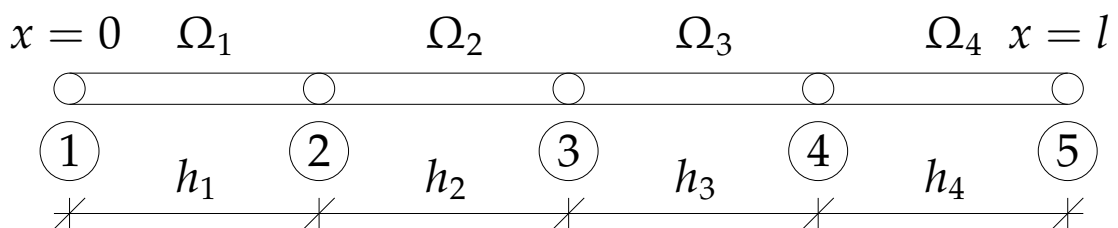
3.4 Finite Element Approximation

Finite Element Methode elementorientierte systematische Methode zur Generierung der Basisfunktionen im Rahmen des Galerkin-Verfahrens

- wesentliche Rechenoperationen beschränken sich auf ein repräsentatives Element

- komplizierte Geometrien und Randbedingungen lassen sich insbesondere im 2d und 3d Fall sehr gut erfassen

Diskretisierung Zerlegung des Gebietes $0 \leq x \leq L$ in endliche Anzahl von Teilgebieten / Finite Elemente Ω_e mit $e = 1, 2, \dots, n_{el}$



$n_{el} = 4$... number of elements

$n_{nod} = 5$... number of nodes, hier $n_{nod} = n_{el} + 1$

h_e ... Elementlänge

FE Basisfunktionen Φ_I

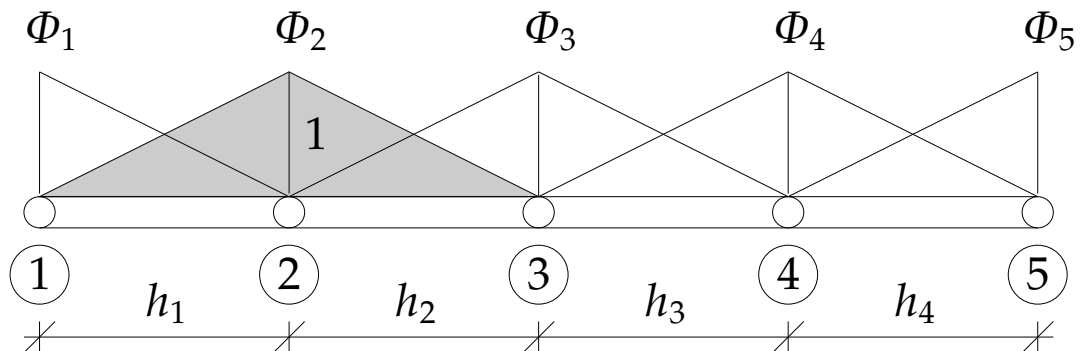
Wahl möglichst einfacher zulässiger Basisfunktionen, z.B. stückweise linear

$$\Phi_I(x) = \begin{cases} \frac{x-x_I}{h_{I-1}} & \text{für } x_{I-1} \leq x \leq x_I \\ \frac{x_{I+1}-x}{h_I} & \text{für } x_I \leq x \leq x_{I+1} \\ 0 & \text{für } x < x_{I-1} \text{ und } x_{I+1} < x \end{cases}$$

mit $h_I = x_{I+1} - x_I$ für $I = 1, 2, \dots, n_{nod}$

Beispiel

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{h_1} & \text{für } x_1 \leq x \leq x_2 \\ \frac{x_3-x}{2} & \text{für } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0 & \text{für } x < x_1 \text{ und } x_3 < x \end{cases}$$



wesentliche Eigenschaft der Basisfunktionen Φ_I

$$\Phi_I(x_J) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1 & \text{für } I = J \\ 0 & \text{für } I \neq J \end{cases}$$

FE-Approximation

FE-Approximation der Lösung

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nod}}} \alpha_I \Phi_I(x)$$

Auswertung am Knoten J, d.h. an der Stelle x_J

$$u^h(x_J) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nod}}} \alpha_I \Phi_I(x_J) = \alpha_J$$

d.h. die Freiheitsgrade α_J stimmen mit den Knotenverschiebungen $u_J = u^h(x_J)$ überein, also lässt

sich vereinfacht schreiben

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nod}}} u_I \Phi_I(x)$$

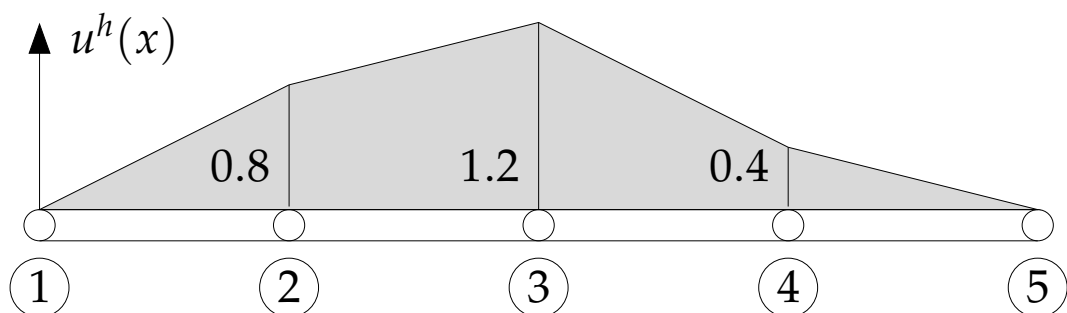
u_I ... diskrete Knotenverschiebungen des Knotens I

FE-Approximation der Testfunktionen

$$v^h(x) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nod}}} v_I \Phi_I(x)$$

Beispiel angenommen, die Lösung habe die Knotenwerte $u_1 = 0.0$ (Dirichlet RB), $u_2 = 0.8$, $u_3 = 1.2$, $u_4 = 0.4$ und $u_5 = 0.0$ (Dirichlet RB), dann gilt die stückweise lineare Interpolation

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^5 u_I \Phi_I(x)$$



Ableitung der Basisfunktionen

$$\Phi'_I(x) = \begin{cases} \frac{+1}{h_{I-1}} & \text{für } x_{I-1} \leq x \leq x_I \\ \frac{-1}{h_I} & \text{für } x_I \leq x \leq x_{I+1} \\ 0 & \text{für } x < x_{I-1} \text{ und } x_{I+1} < x \end{cases}$$

Einsetzen in die schwache Form und Ausklammern

$$\sum_{I=1}^{n_{\text{nod}}} \beta_I \left[\sum_{J=1}^{n_{\text{nod}}} \underbrace{\int_0^L \Phi'_I(x) \Phi'_J(x) dx}_{:=K_{IJ}} \alpha_J - \underbrace{\int_0^L \Phi_I(x) f(x) dx}_{:=F_I} \right] = 0$$

Steifigkeitsmatrix

$$K_{IJ} = \int_0^L \Phi'_I(x) \Phi'_J(x) dx$$

$$K_{IJ} = \int_{x_1}^{x_2} \Phi'_I(x) \Phi'_J(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} \Phi'_I(x) \Phi'_J(x) dx \\ + \int_{x_3}^{x_4} \Phi'_I(x) \Phi'_J(x) dx + \int_{x_4}^{x_5} \Phi'_I(x) \Phi'_J(x) dx$$

$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} K_{IJ}^e$ <p>globale Stema</p>	$K_{IJ}^e = \int_{\Omega_e} \Phi'_I(x) \Phi'_J(x) dx$ <p>Elementsteifigkeitsmatrix</p>
---	--

- die globale Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Summe der Elementbeiträge / **„Zusammenbau“**
- elementweise Betrachtung möglich
- im wesentlichen Betrachtung eines **repräsentativen Elementes**
- globale Steifigkeitsmatrix besitzt **Bandstruktur** und ist nur schwach besetzt da $\Phi'_I = 0$ für $x \leq x_{I-1}$ und $x_{I+1} \leq x$ gilt $K_{IJ} = \int_0^L \Phi'_I \Phi'_J dx = 0$ für $J < I - 1$ und $I + 1 < J$

Lastvektor

$$F_I = \int_0^L \Phi_I(x) f(x) dx$$

$F = \sum_{e=1}^{n_{el}} F_I^e$ globaler Vektor	$F_I^e = \int_{\Omega_e} \Phi_I(x) f(x) dx$ Elementlastvektor
---	---

- Lastvektor ergibt sich genau wie die Steifigkeitsmatrix aus dem Zusammenbau der Elementbeiträge

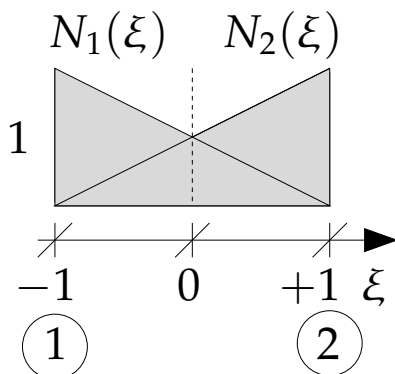
resultierendes Gleichungssystem

$$u_J = \sum_{I=1}^{n_{nod}} K_{JI}^{-1} \cdot F_I \quad \text{bzw.} \quad u = \mathbf{K}^{-1} \cdot F$$

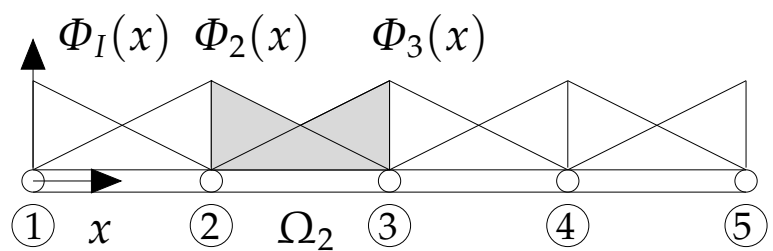
3.5 Numerische Implementierung

Ziel Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen K_{IJ}^e und der Elementlastvektoren F_I^e und Zusammenbau zu globaler Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und zum globalen Vektor F_I

Elementorientierte Betrachtung



Referenzelement



Gesamtsystem

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad \dots \text{ lokale Elementkoordinaten}$$

$$\xi_1 = -1, \xi_2 = +1 \quad \dots \text{ lokale Elementknoten}$$

Zusammenhang mit Gesamtsystem über
Zuordnungstabellen / Inzidenzmatritzen Zusammenhang

Element e	Knoten 1	Knoten 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

lokale \leftrightarrow globale Koordinaten

$$\xi = \frac{2x - [x_I + x_{I+1}]}{h_I} \quad \text{mit} \quad h_I = x_{I+1} - x_I$$

also gilt

$$x = x_I \quad \xi = -1 \quad \text{linker Knoten}$$

$$x = x_{I+1} \quad \xi = +1 \quad \text{rechter Knoten}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_I} \quad \text{also} \quad dx = \frac{h_I}{2} d\xi$$

$N_1(\xi), N_2(\xi)$... Elementformfunktionen, "element shape functions", hier stückweise linear

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} [1 - \xi]$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2} [1 + \xi]$$

Elementformfunktionen N_I paramterisiert in lokalen isoparametrischen Koordinaten entsprechen aber den

Basisfunktionen Φ ,

$$N_I(\xi_J) = \delta_{IJ} = \Phi_I(x_J)$$

typische Eigenschaft der Lagrange'schen Formfunktionen
 $N_I = 1$ am Knoten 1 und $N_I = 0$ an allen anderen Knoten

FE-Approximation auf Elementebene

FE-Approximation der Lösung auf Elementebene

$$u^h(\xi) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nod}}} u_I N_I(\xi) = u_1 N_1(\xi) + u_2 N_2(\xi)$$

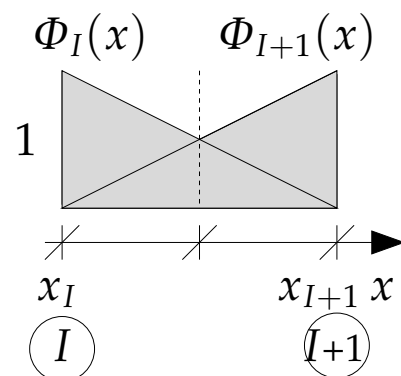
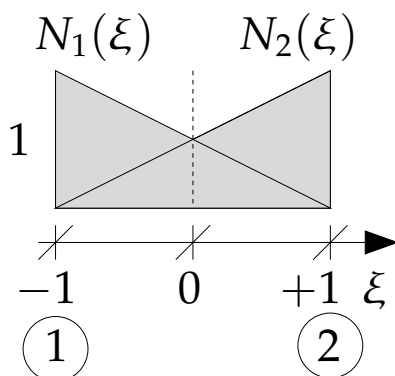
FE-Approximation der Testfunktionen auf Elementebene

$$v^h(\xi) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nod}}} v_I N_I(\xi) = v_1 N_1(\xi) + v_2 N_2(\xi)$$

Elementsteifigkeitsmatrix

$$K_{IJ}^e = \int_{\Omega_e} \Phi'_I(x) \Phi'_J dx$$

jetzt Umparametrisierung auf Elementebene



Elementformfunktionen N_1, N_2

Formfunktionen Φ_I, Φ_{I+1}

Elementformfunktionen N_1, N_2 betrachte Element $e = I$, dort sind lediglich $\Phi'_I = N_1$ und $\Phi'_{I+1} = N_2$ von Null verschieden, d.h.

$$K_{IJ}^e = \int_{\Omega_e} \frac{dN_I(\xi)}{dx} \frac{dN_J(\xi)}{dx} dx \quad I, J = 1, 2$$

Kettenregel

$$\frac{dN_I(\xi)}{dx} = \frac{dN_I(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = N'_I(\xi) \frac{d\xi}{dx}$$

mit

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_I} \quad \text{also} \quad dx = \frac{h_I}{2} d\xi$$

$$\frac{dN_I(\xi)}{dx} = N'_I(\xi) \frac{2}{h_e}$$

$$K_{IJ}^e = \int_{\xi=-1}^{+1} N'_I(\xi) N'_J(\xi) \frac{2}{h_e} d\xi \quad I, J = 1, 2$$

mit linearen Elementformfunktionen N_I und deren Ableitungen bzgl. isoparametrischer Koordinaten N'_I

$$N_I(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \xi] & I = 1 \\ \frac{1}{2} [1 + \xi] & I = 2 \end{cases} \quad N'_I(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & I = 1 \\ +\frac{1}{2} & I = 2 \end{cases}$$

komponentenweise Integration der Einträge der Elementsteifigkeitsmatrix

$$K_{11}^e = \int_{\xi=-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{2}{h_e} d\xi = \left[+\frac{1}{2h_e} \xi \right]_{\xi=-1}^{+1} = +\frac{1}{h_e}$$

$$K_{12}^e = \int_{\xi=-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{2}{h_e} d\xi = \left[-\frac{1}{2h_e} \xi \right]_{\xi=-1}^{+1} = -\frac{1}{h_e}$$

$$K_{21}^e = \int_{\xi=-1}^{+1} \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{2}{h_e} d\xi = \left[-\frac{1}{2h_e} \xi \right]_{\xi=-1}^{+1} = -\frac{1}{h_e}$$

$$K_{22}^e = \int_{\xi=-1}^{+1} \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{2}{h_e} d\xi = \left[+\frac{1}{2h_e} \xi \right]_{\xi=-1}^{+1} = +\frac{1}{h_e}$$

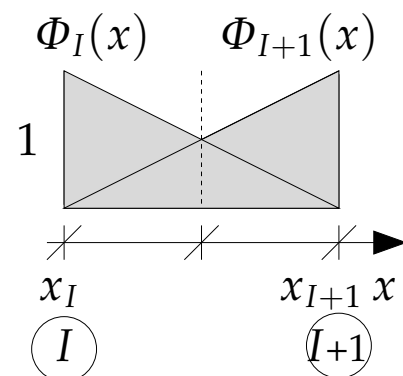
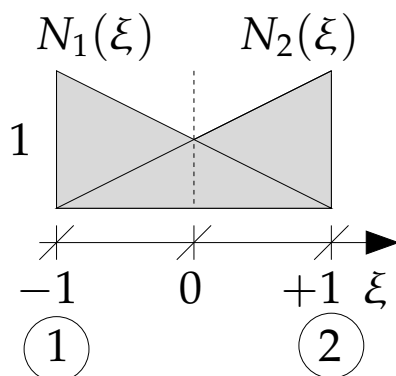
Elementsteifigkeitsmatrix für lineare 1d-Stabelemente

$$K_{IJ}^e = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Elementlastvektor

$$F_I^e = \int_{\Omega_e} \Phi_I(x) f(x) dx$$

jetzt Uparametrisierung auf Elementebene



Elementformfunktionen N_1, N_2

Formfunktionen Φ_I, Φ_{I+1}

betrachte Element $e = I$, dort sind lediglich $\Phi_I = N_1$ und $\Phi_{I+1} = N_2$ von Null verschieden, d.h.

$$F_I^e = \int_{\Omega_e} N_I(\xi) f(x) dx \quad I, J = 1, 2$$

Beispiel: konstante Streckenlast $f(x) = f_0 = \text{const}$

$$F_I^e = \int_{\xi=-1}^{+1} N_I(\xi) f_0 \frac{h_e}{2} d\xi$$

mit linearen Elementformfunktionen N_I

$$N_I(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \xi] & I = 1 \\ \frac{1}{2} [1 + \xi] & I = 2 \end{cases}$$

komponentenweise Integration der Einträge des Elementlastvektors

$$F_1^e = \int_{\xi=-1}^{+1} [1 - \xi] \frac{h_e}{4} f_0 d\xi = \frac{h_e}{4} f_0 \left[\xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right]_{\xi=-1}^{+1} = +\frac{1}{2} h_e f_0$$

$$F_2^e = \int_{\xi=-1}^{+1} [1 + \xi] \frac{h_e}{4} f_0 d\xi = \frac{h_e}{4} f_0 \left[\xi + \frac{1}{2} \xi^2 \right]_{\xi=-1}^{+1} = +\frac{1}{2} h_e f_0$$

Elementlastvektor für lineare 1d-Stabelemente unter konstanter Streckenlast, konsistente Knotenlasten

$$F_I^e = \frac{1}{2} h_e f_0 \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung Lasten können immer nur diskret auf die Knoten aufgebracht werden, dazu ist Umrechnung in konsistente Knotenlasten mit Hilfe der jeweiligen Ansatzfunktionen N_I erforderlich

Zusammenbau der Elementbeiträge ("assembling")

Einsortieren der Elementbeiträge K_{IJ}^e und F_I^e in \mathbf{K} und \mathbf{F} basierend auf der Zuordnung der lokalen \leftrightarrow globalen Knotennummern

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccccc}
 K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & 0 \\
 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & 0 \\
 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{11}^4 & K_{12}^4 \\
 0 & 0 & 0 & K_{21}^4 & K_{22}^4
 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} = \begin{array}{c} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 + F_1^3 \\ F_2^3 + F_1^4 \\ F_2^4 \end{array} \\
 \mathbf{K} \qquad \qquad \mathbf{u} \qquad \qquad = \qquad \mathbf{F}
 \end{array}$$

nach Einbau der Randbedingungen $u_1 = 0$ und $u_5 = 0$ verbleibt ein $[3 \times 3]$ Gleichungssystem, dessen Lösung

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}$$

ergibt die unbekanntenen Knotenverschiebungen u_2, u_3, u_4

Bemerkung beachte typische Bandstruktur der Systemsteifigkeitsmatrix, insbesondere bei grosser Anzahl von Elementen

3.6 Randbedingungen

Dirichlet Randbedingungen

essentielle Randbedingungen, RB für Unbekannte, hier Verschiebungen, gegeben

$$u(x=0) = \bar{u}_1 \quad \text{bisher} \quad u(x=0) = 0$$

$$u(x=L) = \bar{u}_n \quad \text{bisher} \quad u(x=L) = 0$$

Berücksichtigung inhomogener Dirichlet RB ($\bar{u} \neq 0$) kompliziert, da Gleichungssystem mit teilweise bekannten Größen im Unbekanntenvektor

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & K_{n,n-1} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ \bar{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

Streichen der ersten und letzten Zeile liefert reduziertes Gleichungssystem, $[n-2]$ Gleichungen zur Bestimmung der $[n-2]$ unbekanntenen Knotenverschiebungen u_2, u_3, \dots, u_{n-1}

Streichen der ersten und letzten Spalte liefert modifizierte rechte Seite

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \\ K_{32} & K_{33} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & K_{n-2,n-2} & K_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & K_{n-1,n-2} & K_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 - K_{21} \bar{u}_1 \\ F_3 \\ \dots \\ F_{n-2} \\ F_{n-1} - K_{n-1,n} \bar{u}_n \end{bmatrix}$$

gestrichene Zeilen liefern Gleichungen zur Bestimmung der Reaktionskräfte V_1 und V_n

$$K_{11} u_1 + K_{12} u_2 = F_1 - V_1$$

$$K_{n,n-1} u_{n-1} + K_{nn} u_n = F_n + V_n$$

Bemerkung Lösen des Gleichungssystems erfordert Invertieren der Systemsteifigkeitsmatrix, ohne Dirichlet RB ist Systemsteifigkeitsmatrix singulär und kann nicht invertiert werden, Dirichlet RB sind essentiell, Anzahl der erforderlichen Dirichlet RB entspricht Anzahl der zu fixierenden Starrkörperbewegungen

Neumann Randbedingungen

natürliche Randbedingungen, RB für Ableitungen der Unbekannten, hier Kräfte \bar{V} , gegeben

$$u'(x=0) \rightarrow \bar{V}_1 \quad \text{bisher} \quad u(x=0) = 0$$

$$u(x=L) = \bar{u}_n \quad \text{bisher} \quad u(x=L) = 0$$

Berücksichtigung inhomogener Neumann RB relativ unkompliziert, da teilweise bekannte Größen auf der rechten Seite

Streichen der letzten Zeile und Spalte liefert reduziertes Gleichungssystem mit modifizierter rechter Seite

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & K_{n-2,n-2} & K_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & K_{n-1,n-2} & K_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - \bar{V}_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{n-2} \\ F_{n-1} - K_{n-1,n} \bar{u}_n \end{bmatrix}$$

gestrichene Zeile liefert Gleichung zur Bestimmung der Reaktionskraft und V_n

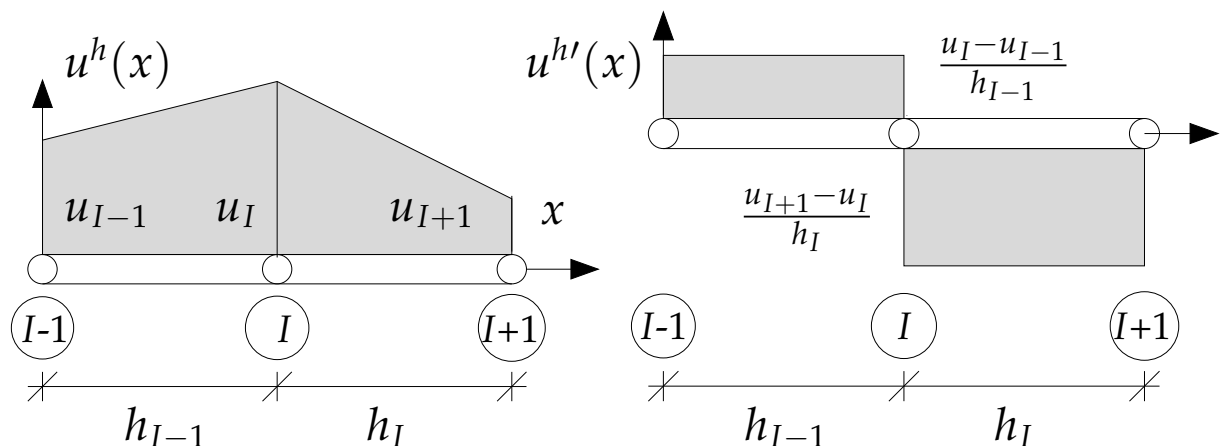
$$K_{n,n-1} u_{n-1} + K_{nn} u_n = F_n + V_n$$

Bemerkung trotz vorgegebener Kraft am linken Rand \bar{V}_1 muss mindestens eine Dirichlet RB bestehen bleiben, damit Systemsteifigkeitsmatrix invertierbar / Starrkörperverschiebungen ausgeschlossen

3.7 Nachlaufrechnung

Verlauf der Ableitungen / Spannungen

- bereichsweise lineare Ansätze für u^h , stetiger Verschiebungsverlauf (links)
- bereichsweise konstanter Verlauf von $u^{h'}$, unstetiger Verzerrungs- und Spannungsverlauf ϵ und σ (rechts)



die Ableitungen von u sind ein Mass für die Spannungen $\sigma(x) = E u'(x)$ oder für die Seilkraft $V(x) = H_0 u'(x)$

Beispiel Seildurchhang

analytische Lösung

$$u(x) = \frac{q_0}{H_0} \frac{1}{2} [x^2 - xL]$$

$$u'(x) = \frac{q_0}{H_0} \left[x - \frac{1}{2} L \right]$$

numerische Lösung

$$u'(x) = \begin{cases} -0.4 & e = 1 \\ -0.2 & e = 2 \\ 0.0 & e = 3 \\ 0.2 & e = 4 \\ 0.4 & e = 5 \end{cases}$$

$$\text{z.B. } u'_{e=2}(x) = \frac{u_3 - u_2}{h_e} = \frac{-0.04}{0.2} = -0.2 = \text{const}$$

in Elementmittelpunkten entspricht numerische Lösung der exakten Lösung \rightarrow superkonvergente Punkte

Beurteilung der Genauigkeit der Lösung / Adaptivität

Interpretation der FE-Approximation mittels Fehlerfunktion, Differenz der exakten Lösung $u(x)$ und der numerischen Lösung $u^h(x)$

$$e(x) = u(x) - u^h(x)$$

Fehlernorm, Mass für den Fehler, z.B. L_2 -Norm

$$\|e(x)\| = \left[\int_0^L e^2 dx \right]^{1/2} = \left[\int_0^L [u(x) - u^h(x)]^2 dx \right]^{1/2}$$

„Konvergenz der Lösung“ wenn $\|e(x)\| \rightarrow 0$ mit zunehmender Elementanzahl $n_{el} \rightarrow \infty$ bzw. abnehmender Elementgrösse $h_e \rightarrow 0$, Verfeinerung des Netzes **„h-Adaptivität“**

Beispiel Seildurchhang: für zunehmende Anzahl von Elementen konvergiert die numerische Lösung u^h gegen die exakte analytische Lösung u

Alternativ zur Netzverfeinerung ("h-Adaptivität") kann auch die Erhöhung der Interpolationsordnung ("p-Adaptivität") zu einer verbesserten Lösung führen

3.8 Lagrange'sche Polynome

bisher lineare Ansatzfunktionen, betrachte lokales Koordinatensystem des repräsentativen Elementes

$$\xi = \frac{2x - [x_I + x_{I+1}]}{x_{I+1} - x_I}$$

$$x = x_I \rightarrow \xi = -1 \quad \text{und} \quad x = x_{I+1} \rightarrow \xi = +1$$

jetzt allgemeine Konstruktion der Formfunktionen als Lagrange Polynome vom Grad k

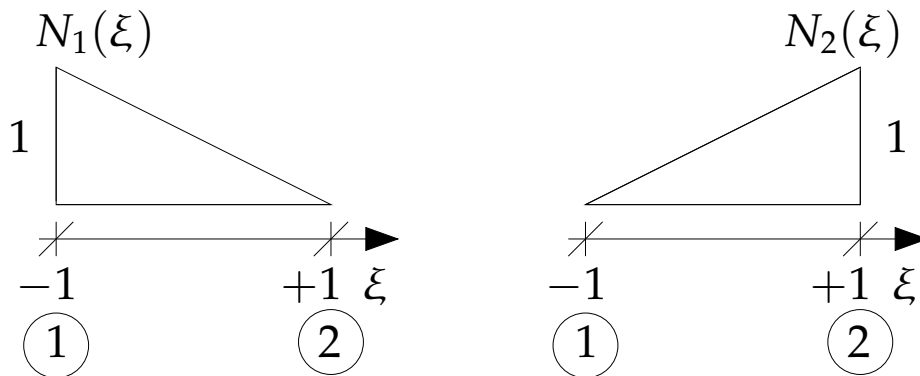
$$N_I = \frac{[\xi - \xi_1][\xi - \xi_2] \dots [\xi - \xi_{I-1}][\xi - \xi_{I+1}] \dots [\xi - \xi_{k+1}]}{[\xi_I - \xi_1][\xi_I - \xi_2] \dots [\xi_I - \xi_{I-1}][\xi_I - \xi_{I+1}] \dots [\xi_I - \xi_{k+1}]}$$

Beispiel $k=1$, lineare Formfunktionen

zwei Knoten $\xi_1 = -1$ und $\xi_2 = +1$

$$N_1 = \frac{[\xi - \xi_2]}{[\xi_1 - \xi_2]} = \frac{\xi - 1}{[-1] - [+1]} = \frac{1}{2}[1 - \xi]$$

$$N_2 = \frac{[\xi - \xi_1]}{[\xi_2 - \xi_1]} = \frac{\xi + 1}{[-1] - [+1]} = \frac{1}{2}[1 + \xi]$$



Beispiel $k=2$, quadratische Formfunktionen

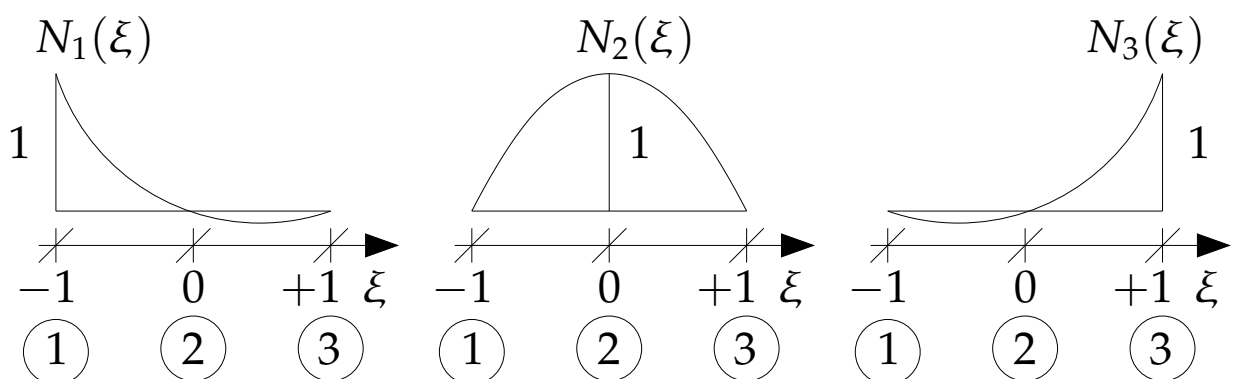
drei Knoten $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ und $\xi_3 = +1$

$$N_1 = \frac{[\xi - \xi_2][\xi - \xi_3]}{[\xi_1 - \xi_2][\xi_1 - \xi_3]} = \frac{\xi[\xi - 1]}{[-1 - 0][-1 - [+1]]} = \frac{1}{2}\xi[\xi - 1]$$

$$N_2 = \frac{[\xi - \xi_1][\xi - \xi_3]}{[\xi_2 - \xi_1][\xi_2 - \xi_3]} = \frac{\xi^2 - 1}{[0 + 1][0 - 1]} = 1 - \xi^2$$

$$N_3 = \frac{[\xi - \xi_1][\xi - \xi_2]}{[\xi_3 - \xi_1][\xi_3 - \xi_2]} = \frac{\xi[\xi + 1]}{[1 - [-1]][1 - 0]} = \frac{1}{2}\xi[\xi + 1]$$

Kontrolle, z.B. für $N_1(\xi)$



$$N_1(\xi = -1) = \frac{1}{2}[-1][-1 - 1] = 1 \quad \checkmark$$

$$N_2(\xi = 0) = \frac{1}{2}[0][0 - 1] = 0 \quad \checkmark$$

$$N_3(\xi = +1) = \frac{1}{2}[0][0 + 1] = 0 \quad \checkmark$$

Beispiel quadratische 1d Stabelemente

Steifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned}
 K_{IJ}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{d}{dx} N_I(\xi) \quad \frac{d}{dx} N_J(\xi) \quad dx \\
 &= \int_{\Omega^e} \frac{2}{h_e} \frac{d}{d\xi} N_I(\xi) \quad \frac{2}{h_e} \frac{d}{d\xi} N_J(\xi) \quad \frac{h_e}{2} d\xi \\
 &= \int_{\xi=-1}^{+1} \frac{2}{h_e} \frac{d}{d\xi} N_I(\xi) \quad \frac{d}{d\xi} N_J(\xi) \quad d\xi
 \end{aligned}$$

mit quadratischen Lagrange'schen Polynomen

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2} \xi [\xi - 1] & \frac{d}{d\xi} N_1 &= \xi - \frac{1}{2} \\
 N_2 &= \xi^2 - 1 & \frac{d}{d\xi} N_2 &= 2\xi \\
 N_3 &= \frac{1}{2} \xi [\xi + 1] & \frac{d}{d\xi} N_3 &= \xi + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

komponentenweise Integration der Einträge der Steifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned}
 K_{11}^e &= \frac{2}{h_e} \int_{\xi=-1}^{+1} \left[\xi - \frac{1}{2} \right] \left[\xi - \frac{1}{2} \right] d\xi \\
 &= \frac{2}{h_e} \int_{\xi=-1}^{+1} \left[\xi^2 - \xi + \frac{1}{4} \right] d\xi \\
 &= \frac{2}{h_e} \left[\frac{1}{3} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{4} \xi \right]_{\xi=-1}^{+1} \\
 &= \frac{2}{h_e} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] \\
 K_{11}^e &= \frac{1}{3h_e} [+7]
 \end{aligned}$$

Elementsteifigkeitsmatrix für quadratische 1d-Stabelemente

$$K_{IJ}^e = \frac{1}{3h_e} \begin{bmatrix} +7 & -8 & +1 \\ -8 & +16 & -8 \\ +1 & -8 & +7 \end{bmatrix}$$

Elementlastvektor

$$\begin{aligned} F_I^e &= \int_{\Omega_e} N_I(\xi) f(x) \, dx \\ &= \int_{\xi=-1}^{+1} N_I(\xi) f(\xi) \frac{h_e}{2} \, d\xi \end{aligned}$$

Beispiel: konstante Streckenlast $f(x) = f_0 = \text{const}$

$$F_I^e = \frac{h_e f_0}{2} \int_{\xi=-1}^{+1} N_I(\xi) \, d\xi$$

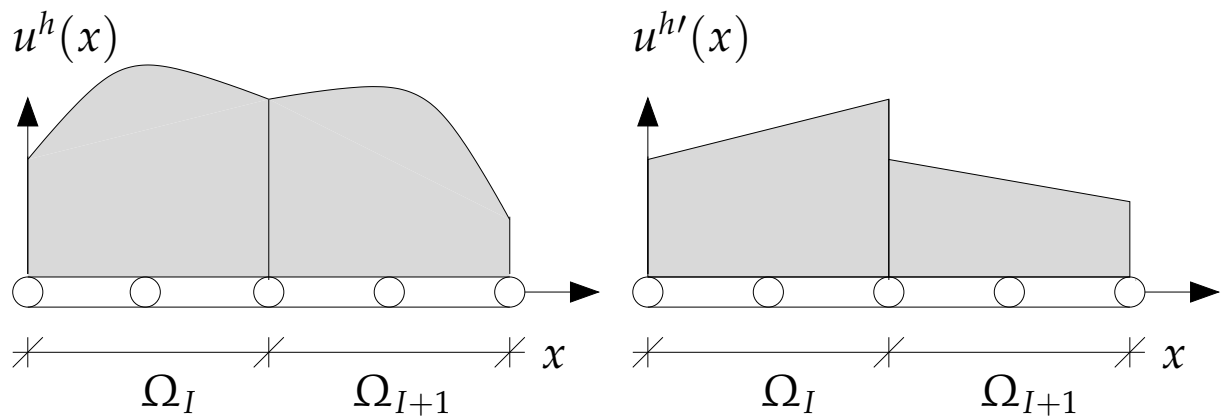
Elementlastvektor für quadratische 1d-Stabelemente unter konstanter Streckenlast, konsistente Knotenlasten

$$F_I^e = \frac{1}{6} h_e f_0 \begin{bmatrix} +1 \\ +4 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Verbesserung der Lösung durch Erhöhung des Polynomgrades "**p-Adaptivität**"

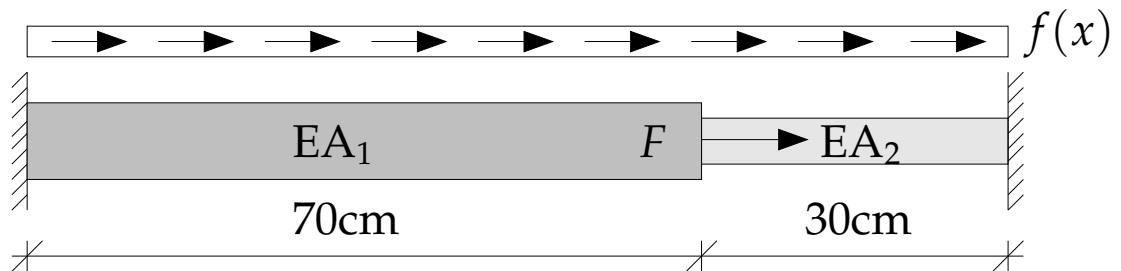
Bemerkung trotz beliebiger Erhöhung der Ansatzordnung Sprünge in Ableitung der Unbekannten $u^{h'}$ da Ansätze nur C^0 -stetig, jetzt Balkenelemente mit C^1 -stetigen Ansätzen

- bereichsweise quadratische Ansätze für u^h , stetiger Verschiebungsverlauf (links)
- bereichsweise konstanter Verlauf von $u^{h'}$, unstetiger Verzerrungs- und Spannungsverlauf ϵ und σ (rechts)

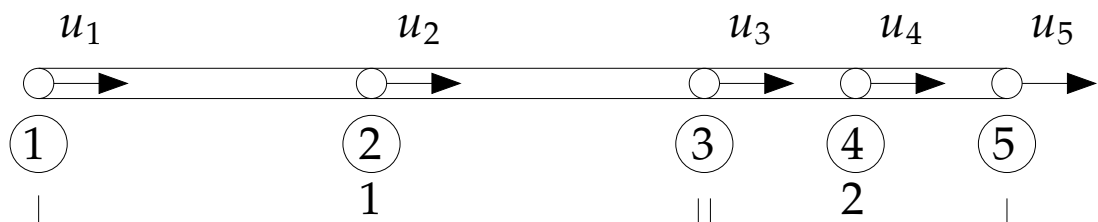


3.9 Beispiel

gegeben $F = 100 \text{ kN}$, $f = 10 \text{ KN / cm}$, $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$,
 $A_1 = 1 \times 1 \text{ cm}^2$, $A_2 = 0.6 \times 1 \text{ cm}^2$



Aufgabe I Diskretisieren Sie das System mit zwei quadratischen Finiten Stabelemente



$n_{\text{el}} = 4$ Elemente, $n_{\text{nod}} = 5$ Knoten, Anzahl der Freiheitsgrade $n_{\text{dof}} = 5 - 2 = 3$

Aufgabe II Berechnen Sie die Elementsteifigkeitsmatritzen beider Elemente

Wiederholung der relevanten Gleichungen

- Gleichgewicht $\frac{d\sigma(x)}{dx} = -f(x)$
- Kinematik $\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$
- Stoffgesetz $\sigma(x) = E \epsilon(x)$
- Randbedingungen $u(0) = u(L) = 0$

Differentielle Form

$$E u''(x) + f(x) = 0$$

Variationelle Form

$$\int_{\Omega} v(x) [E u''(x) + f(x)] dv = 0$$

Schwache Form

partielle Integration, Gauss'scher Integralsatz, Neumann RB

$$\int_{\Omega} v'(x) E u'(x) dv - \int_{\Omega} v(x) f(x) dv - v(L)F(L) + v(0)F(0) = 0$$

vergleich mit allgemeiner Darstellung (2d)

$$\int_{\Omega} v' E u' dv = \int_0^l \epsilon(v) EA \epsilon(u) dx$$

Schwache Form

$$\int_0^L \epsilon(v) EA \epsilon(u) dx - \int_0^L v f dx - v(L)F(L) + v(0)F(0) = 0$$

Finite Element Diskretisierung

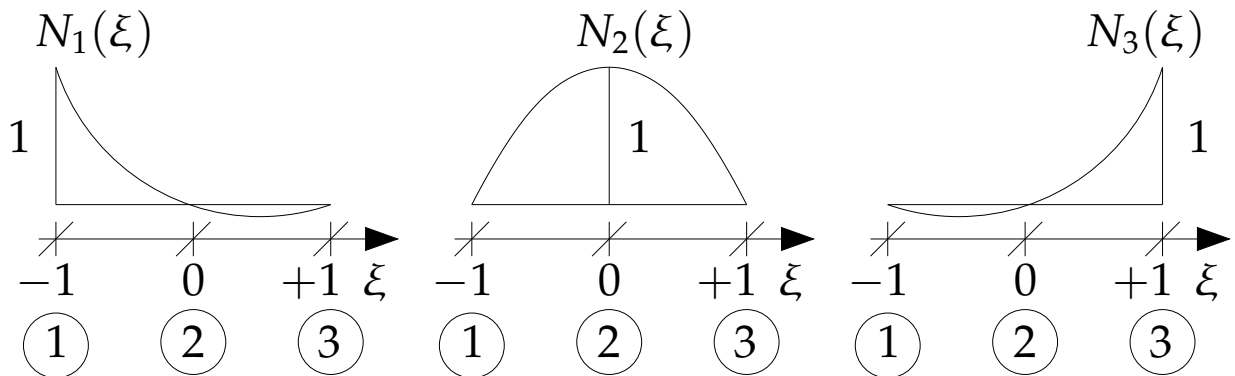
$$u^h = \sum_{I=1}^3 u_I N_I \quad \epsilon(u^h) = \sum_{I=1}^3 B_I u_I$$

$$v^h = \sum_{I=1}^3 v_I N_I \quad \epsilon(v^h) = \sum_{I=1}^3 v_I B_I$$

N_I ... quadratische Lagrange'sche Polynome

B_I ... B-Operator, Ableitung der Formfunktionen N_I nach physikalischen Koordianten ξ

$$B_I = N_{I,x} = \frac{dN_I}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_e} \quad dx = \frac{2}{h_e} d\xi$$



N_I und B_I für quadratisch 1d Stabelemente

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2} \xi [\xi - 1] & dN_{1,\xi} &= \xi - \frac{1}{2} & B_1 &= dN_{1,x} = \frac{1}{h_e} [2\xi - 1] \\
 N_2 &= \xi^2 - 1 & dN_{2,\xi} &= 2\xi & B_2 &= dN_{2,x} = \frac{1}{h_e} [-4] \\
 N_3 &= \frac{1}{2} \xi [\xi + 1] & dN_{3,\xi} &= \xi + \frac{1}{2} & B_3 &= dN_{3,x} = \frac{1}{h_e} [2\xi + 1]
 \end{aligned}$$

Einsetzen in schwache Form und Ausklammern

$$\sum_{I=1}^{n_{\text{nod}}} v_I \left[\sum_{J=1}^{n_{\text{nod}}} \underbrace{\int_0^L B_I EA B_J dx}_{:=K_{IJ}} u_J - \underbrace{\int_0^L N_I f dx}_{:=F_I} \pm F_I^{\text{ext}} \right] = 0$$

Elementsteifigkeitsmatrix

$$K_{IJ}^e = \int_0^l B_I(\xi) EA B_J(\xi) dx = \int_{-1}^{+1} B_I(\xi) EA B_J(\xi) \frac{h_e}{2} d\xi$$

komponentenweise Integration der Einträge $I, J = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
 K_{11}^e &= \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \frac{1}{h_e} [2\xi - 1] EA \frac{1}{h_e} [2\xi - 1] \frac{h_e}{2} d\xi \\
 &= \frac{EA}{h_e} \int_{\xi=-1}^{+1} 2\xi^2 - 2\xi + \frac{1}{2} d\xi \\
 &= \frac{EA}{h_e} \left[\frac{2}{3}\xi^3 - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi \right]_{\xi=-1}^{\xi=+1} \\
 &= \frac{EA}{h_e} \left[\left[\frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{2} \right] - \left[-\frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{2} \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$K_{11}^e = \frac{EA}{3h_e} [+7]$$

Elementsteifigkeitsmatrix für quadratische 1d-Stabelemente

$$K_{IJ}^e = \frac{EA}{3h_e} \begin{bmatrix} +7 & -8 & +1 \\ -8 & +16 & -8 \\ +1 & -8 & +7 \end{bmatrix}$$

für Element 1: $EA_1 = 21000$ und $l_1 = 70$

für Element 2: $EA_2 = 12600$ und $l_2 = 30$

$$K_{IJ}^1 = \begin{bmatrix} +700 & -800 & +100 \\ -800 & +1600 & -800 \\ +100 & -800 & +700 \end{bmatrix} \quad K_{IJ}^2 = \begin{bmatrix} +960 & -1120 & +140 \\ -1120 & +2240 & -1120 \\ +140 & -1120 & +980 \end{bmatrix}$$

Aufgabe III Berechnen Sie die Elementlastvektoren beider Elemente

Elementlastvektor

$$F_I^e = \int_{0^l} N_I(\xi) f(x) dx = \int_{-1}^{+1} N_I(\xi) f(\xi) \frac{h_e}{2} d\xi$$

hier konstante Streckenlast $f(x) = f = \text{const}$

$$F_I^e = \frac{h_e f}{2} \int_{-1}^{+1} N_I(\xi) d\xi$$

komponentenweise Integration der Einträge $I, J = 1, 2, 3$

Elementlastvektor für quadratische 1d-Stabelemente

$$F_I^e = \frac{1}{6} h_e f_0 \begin{bmatrix} +1 & +4 & +1 \end{bmatrix}^t$$

für Element 1: $f l_1 = 70$

für Element 2: $f l_2 = 30$

$$F_I^1 = \frac{700}{6} \begin{bmatrix} +1 \\ +4 \\ +1 \end{bmatrix} \quad F_I^2 = \frac{300}{6} \begin{bmatrix} +1 \\ +4 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe IV Berechnen Sie die Verschiebung des Angriffspunktes der Einzellast

Zusammenbau zur Systemsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} +700 & -800 & +100 & 0 & 0 \\ -800 & +1600 & -800 & 0 & 0 \\ +100 & -800 & +1680 & -1120 & +140 \\ 0 & 0 & -1120 & +2240 & -1120 \\ 0 & 0 & +140 & -1120 & +980 \end{bmatrix}$$

Zusammenbau zum Systemlastvektor

$$\mathbf{F} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 350 \\ 1400 \\ 500 \\ 600 \\ 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 350 \\ 1400 \\ 800 \\ 600 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Gesamtgleichungssystem $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}$

$$\begin{bmatrix} +1600 & -800 & 0 \\ -800 & +1680 & -1120 \\ 0 & -1120 & +2240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1400 \\ 800 \\ 600 \end{bmatrix}$$

Lösung

$$u_2 = 0.7083\text{cm} \quad u_3 = 0.8333\text{cm} \quad u_4 = 0.5060\text{cm}$$

Verschiebung des Lastangriffspunktes $u_3 = 0.8333 \text{ cm}$

Aufgabe V Bestimmen Sie die Normalkraftverläufe in beiden Elementen

Verschiebungsverlauf

$$u(\xi) = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi) u_I$$

für Element 1

$$\begin{aligned} u^1(\xi) &= \left[\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi \right] 0.0000\text{cm} \\ &+ \left[1 - \xi^2 \right] 0.7083\text{cm} \\ &+ \left[\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi \right] 0.8333\text{cm} \end{aligned}$$

$$u^1(\xi) = \left[-0.2917\xi^2 + 0.4166\xi + 0.7083 \right] \text{cm}$$

für Element 2

$$\begin{aligned} u^2(\xi) &= \left[\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi \right] 0.8333\text{cm} \\ &+ \left[1 - \xi^2 \right] 0.5060\text{cm} \\ &+ \left[\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi \right] 0.0000\text{cm} \end{aligned}$$

$$u^2(\xi) = \left[-0.0894\xi^2 - 0.4166\xi + 0.5060 \right] \text{cm}$$

Kontrolle

$$u^1(\xi = -1) = 0.0000 \text{ cm } \checkmark \quad u^1(\xi = +1) = 0.8332 \text{ cm } \checkmark$$

$$u^2(\xi = -1) = 0.8332 \text{ cm } \checkmark \quad u^2(\xi = +1) = 0.0000 \text{ cm } \checkmark$$

Normalkraftverlauf

$$N(\xi) = \sum_{I=1}^3 EA B_I(\xi) u_I$$

für Element 1

$$N^1(\xi) = [250 - 350\xi] \text{ kN}$$

für Element 2

$$N^2(\xi) = [-350 - 150\xi] \text{ kN}$$

Kontrolle

$$N^1(\xi = -1) = +600 \text{ kN } \checkmark \quad N^1(\xi = +1) = -100 \text{ kN } \checkmark$$

$$N^2(\xi = -1) = -200 \text{ kN } \checkmark \quad N^2(\xi = +1) = -500 \text{ kN } \checkmark$$

3.10 Implementierung in MATLAB

bar.m

Diskretisierung und Berechnung des Seildurchhanges bei konstanter Streckenlast mit 5 linearen Seilelementen

```
% Eingabe
load = input('Konstante Streckenlast = ');
loadb = input('Lineare Streckenlast = ');

nel = 5
node = 6
he = 1/nel

% Zuordnung Elemente - globale Knotennummern
edof = [1 1 2; 2 2 3; 3 3 4; 4 4 5; 5 5 6]

% Elementsteifigkeitsmatrix
hei = 1/he
Ke = [ hei -hei; -hei hei]

% Elementlastvektor
fen = -.5*he*load
Fe = [fen fen]'

% Zusammenbau (assembly)
K = zeros(node,node);
F = zeros(node,1);
```



```
[K,F] = assem(edof,K,Ke,F,Fe)

% Loesung des LGS unter Beruecksichtigung der RB
bc = [1, 0; node, 0]

disp = solveq(K,F,bc)

% Graphische Ausgabe der numerischen und der
% analytischen Loesung im Intervall [0,1]

% Analytische Vergleichsloesung
x = 0:0.01:1;
ya = load*(x.*x/2 - x/2) ...
+ load*loadb*(x.^3/6 -x/6);
xn = 0:he:1;

% Graphische Ausgabe
plot(x,ya,'k--',xn,disp,'k-')
xlabel('x')
ylabel('Durchhang')
legend('analytisch','numerisch')
```

assem.m

Einsortieren der Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementlastvektors in die Systemsteifigkeitsmatrix und den Systemlastvektor mit Hilfe der Zuordnungsmatrizen

```
function [K,F]=assem(edof,K,Ke,F,Fe)
%-----
% INPUT:
% edof = [nel x [dof+1]] ... Zuordnungsmatrix
% K = [ndof x ndof] ... Systemsteifigkeitsmatrix
% Ke = [dof x dof] ... Elementsteifigkeitsmatrix
% F = [ndof x 1] ... Systemlastvektor
% Fe = [dof x 1] ... Elementlastvektor
% OUTPUT:
% K = [ndof x ndof] ... Systemsteifigkeitsmatrix
% F = [ndof x 1] ... Systemlastvektor
%-----

% K=assem(edof,K,Ke)
% [K,F]=assem(edof,K,Ke,F,Fe)

[nie,n]=size(edof);
t=edof(:,2:n);
for i = 1:nie
K(t(i,:),t(i,:)) = K(t(i,:),t(i,:))+Ke;
if nargin==5
F(t(i,:))=F(t(i,:))+Fe;
end
end
```

solveq.m

Lösung des linearen Gleichungssystems unter Berücksichtigung der Dirichlet Randbedingungen

```
function [d,Q]=solveq(K,F,bc)
%-----
% INPUT:
% K = [ndof x ndof] ... Systemsteifigkeitsmatrix
% F = [ndof x 1] ... Systemlastvektor
% bc ... Dirichlet Randbedingungen
% OUTPUT:
% d ... [ndof x 1] ... Lösungsvektor
% Q ... [ndof x 1] ... Auflagerkräfte
%-----

% keine Dirichlet RB -> direkte Loesung
if nargin==2 ; % keine Dirichlet RB
d=K \ F ;

% Dirichlet RB -> partitionierte Loesung
elseif nargin==3;
[nd,nd]=size(K);
fdof=[1:nd]';

d=zeros(size(fdof));
Q=zeros(size(fdof));

pdof=bc(:,1);
dp=bc(:,2);
```

```
fdof(pdof)=[ ];
```

```
s=K(fdof,fdof) \ (F(fdof)-K(fdof,pdof)*dp);
```

```
% bekannter Anteil des Loesungsvektors
```

```
d(pdof)=dp;
```

```
% unbekannter Anteil des Loesungsvektors
```

```
d(fdof)=s;
```

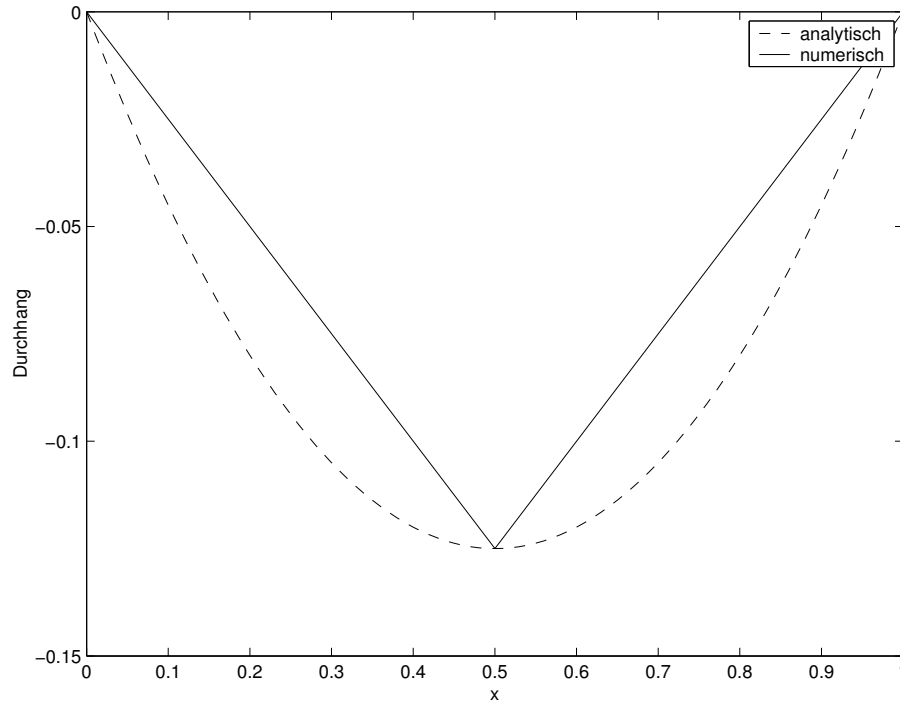
```
end
```

```
% Auflagerkräfte
```

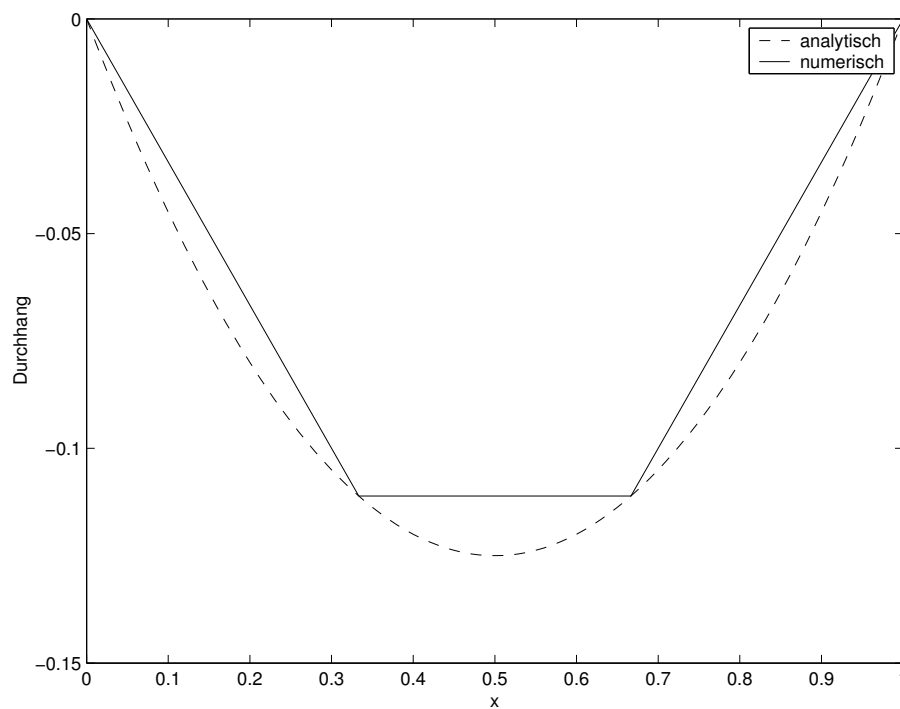
```
Q=K*d-F;
```

Beispiel

input nel=2, node=3, load=1

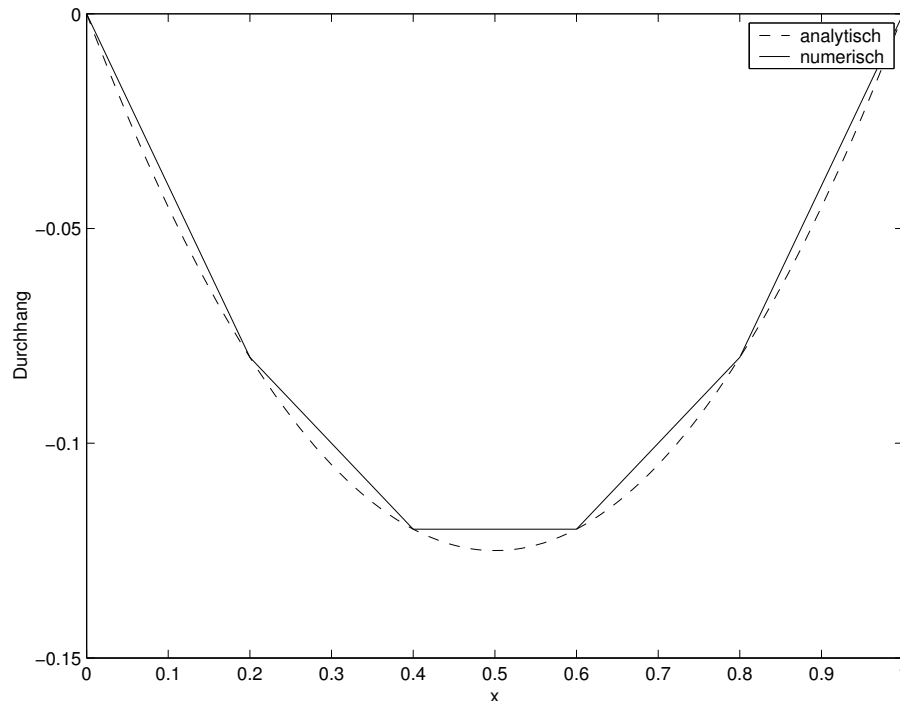
output $u_1 = 0.0000$, $u_2 = -0.1250$, $u_3 = 0.0000$ **Beispiel**

input nel=3, node=4, load=1

output $u_1 = 0.0000$, $u_2 = -0.1111$, $u_3 = -0.1111$, $u_4 = 0.0000$ 

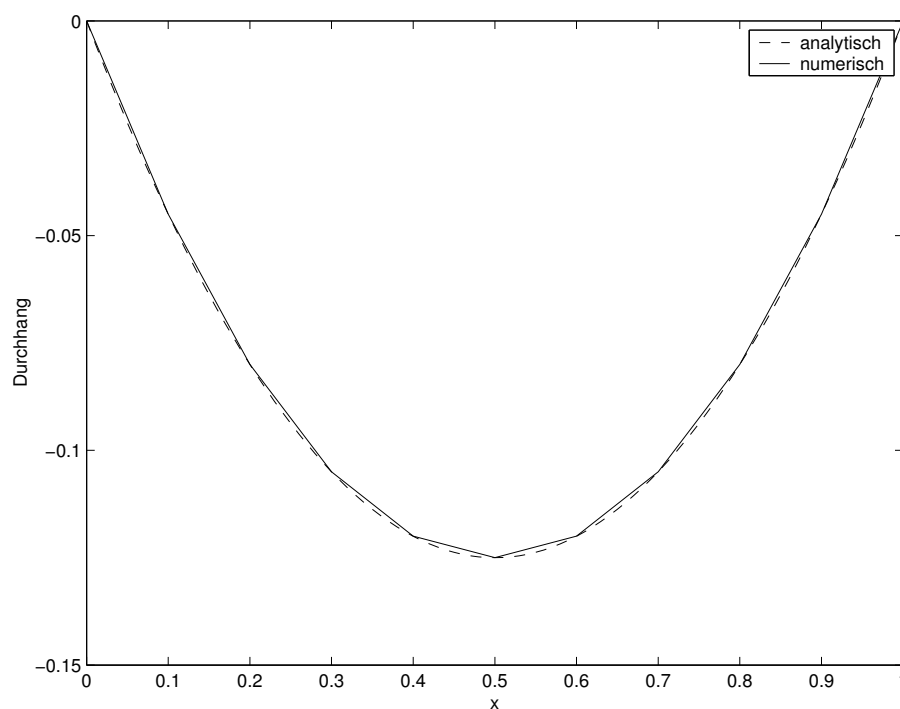
Beispiel input nel=5, node=6, load=1

output $u_1=0, u_2=-0.08, u_3=-0.12, u_4=-0.12, u_5=-0.08, u_6=0$



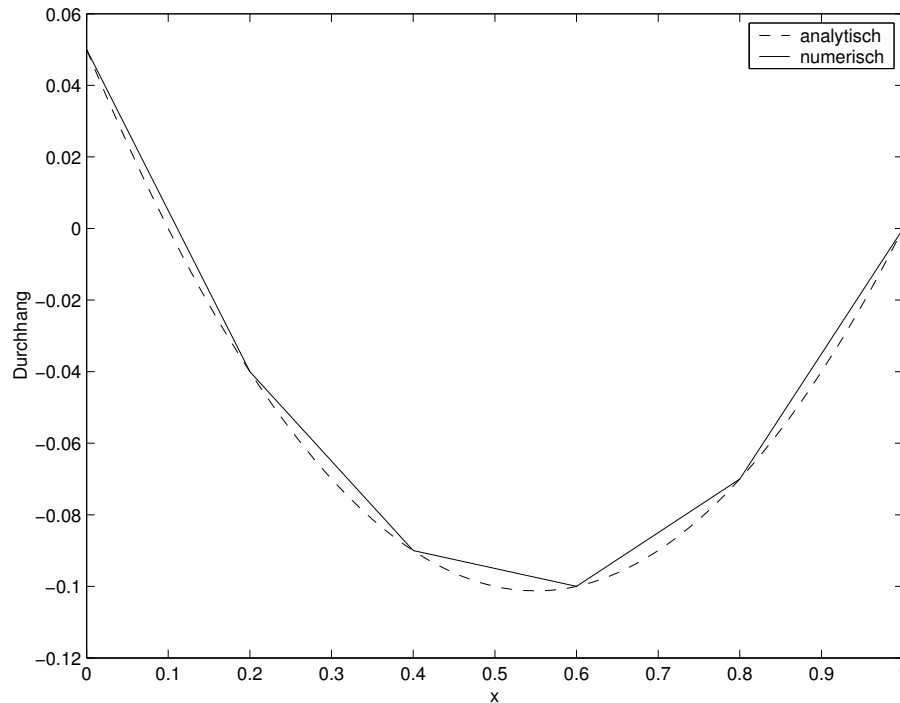
Beispiel input nel=10, node=11, load=1

output $u_1=0, u_2=-0.045, u_3=-0.08, u_4=-0.105, u_5=-0.12, u_6=-0.125, u_7=-0.12, u_8=-0.105, u_9=-0.08, u_{10}=-0.045, u_{11}=0$



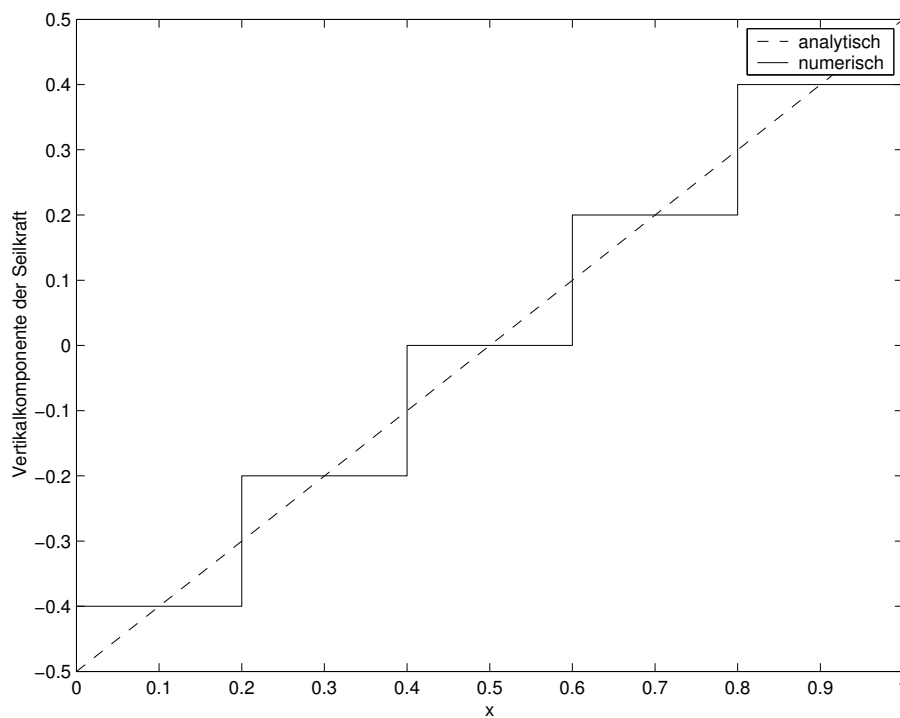
Beispiel input nel=5, node=6, load=1, $u_1=0.05$

output $u_2=-0.04$, $u_3=-0.09$, $u_4=-0.10$, $u_5=-0.07$, $u_6=0$



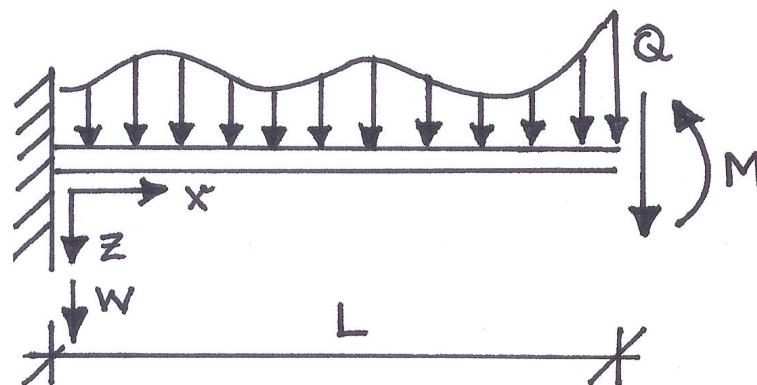
Beispiel input nel=5, node=6, load=1

output $u_1=0$, $u_2=-0.08$, $u_3=-0.12$, $u_4=-0.12$, $u_5=-0.08$, $u_6=0$



4 1d Strukturelemente - Balkenelemente

4.1 Differentielle Form



Problemstellung finde $w = w(x)$, so dass

$$EI w^{IV}(x) - q(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

$$w(0) = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_w \quad \text{Dirichlet RB}$$

$$w^I(0) = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_{w'} \quad \text{Dirichlet RB}$$

$$-EI w^{II}(L) = M \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_q \quad \text{Neumann RB}$$

$$-EI w^{III}(L) = Q \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_m \quad \text{Neumann RB}$$

$w(x)$... Durchbiegung

$w^I(x)$... Neigung

$w^{II}(x)$... Krümmung

$q(x)$... Streckenlast

Q ... Querkraft

M ... Moment

EI ... Biegesteifigkeit

Grundgleichungen

Kinematik $\kappa = -w^{II}$

konstitutives Gesetz $M = EI \kappa$

Gleichgewicht $EI w^{IV} - q = 0$

lineare Differentialgleichung **4. Ordnung!**

4.2 Variationelle Form

wie bisher: Multiplikation mit Testfunktion $v(x)$ und Integration über das Gebiet

Problemstellung finde $w = w(x) \in \mathcal{H}^{\text{trial}}$, so dass

$$\int_0^L v [EI w^{IV} - q] dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}^{\text{test}}$$

... + RB ...

unsymmetrisch in v und w^{IV}

4.3 Schwache Form

partielle Integration

$$\int_0^L v EI w^{IV} dx = [v EI w^{III}]_0^L - \int_0^L v^I EI w^{III} dx$$

$$\int_0^L v^I EI w^{III} dx = [v^I EI w^{II}]_0^L - \int_0^L v^{II} EI w^{II} dx$$

also gilt

$$\int_0^L v^{II} EI w^{II} dx - \int_0^L v q dx$$

$$+ v(L) EI w^{III}(L) - v(0) EI w^{III}(0)$$

$$- v^I(L) EI w^{II}(L) + v^I(0) EI w^{II}(0) = 0$$

mit homogenen Dirichlet RB für Testfunktionen $v(0) = 0$ und $v^I(0) = 0$ und Neumann RB für $-EI w^{II}(L) = M$ und $EI w^{III}(L) = -Q$

Problemstellung finde $w = w(x) \in \mathcal{H}^2$, so dass

$$\int_0^L v^{II} EI w^{II} dx - \int_0^L v q dx$$

$$- v(L) Q + v^I(L) M = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^2$$

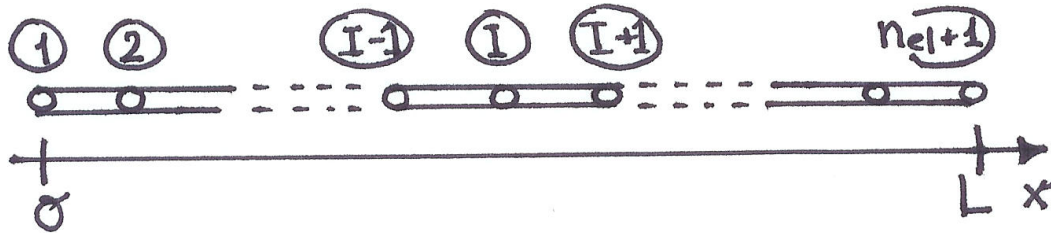
$$w(0) = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_w \quad \text{Dirichlet RB}$$

$$w^I(0) = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_{w'} \quad \text{Dirichlet RB}$$

\mathcal{H}^2 ... für $w(x) \in \mathcal{H}^2$ muss $\int_0^L [w^{II}(x)]^2 dx < \infty$ existieren, **2. Ableitungen** müssen quadratisch integrierbar sein!

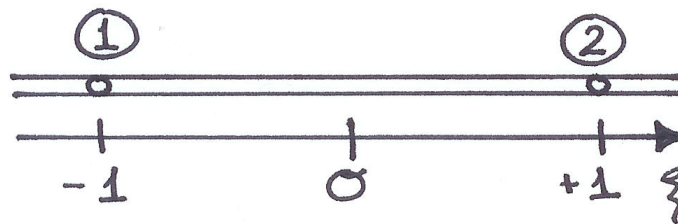
4.4 Finite Element Approximation

Diskretisierung Zerlegung des Gebietes $0 \leq x \leq L$ in n_{el} Finite Elemente Ω_e



$$\int_0^L (\dots) dx = \sum_I^{n_{el}} \int_{x_I}^{x_{I+1}} (\dots) dx$$

Elementorientierte Betrachtung Referenzelement Ω_e



$$h_e = x_{I+1} - x_I \quad \xi(x) = \frac{2x - [x_{I+1} + x_I]}{x_{I+1} - x_I}$$

Anforderung an die Basisfunktionen: $w_h \in \mathcal{H}^2$, d.h. **2. Ableitungen** müssen quadratisch integrierbar sein

Approximation der Lösung auf Elementebene

$$\begin{aligned} w_h^e(\xi) &= \sum_{I=1}^2 w_I N_I^0(\xi) + \sum_{I=1}^2 w_I' N_I^1(\xi) \\ &= w_1 N_1^0(\xi) + w_2 N_2^0(\xi) + w_1 N_1^1(\xi) \frac{h_e}{2} + w_2 N_2^1(\xi) \frac{h_e}{2} \end{aligned}$$

zwei Freiheitsgrade pro Knoten

w_I ... Durchbiegung

w'_I ... Neigung

$N_1^0(\xi), N_2^0(\xi), N_1^1(\xi), N_2^1(\xi)$...Elementformfunktionen

4.5 Hermite Polynome

bisher Lagrange'sche Polynome

jetzt kubische Hermite Polynome

$$N_1^0(\xi) = \frac{1}{4} [2 - 3\xi + \xi^3]$$

$$N_2^0(\xi) = \frac{1}{4} [2 + 3\xi - \xi^3]$$

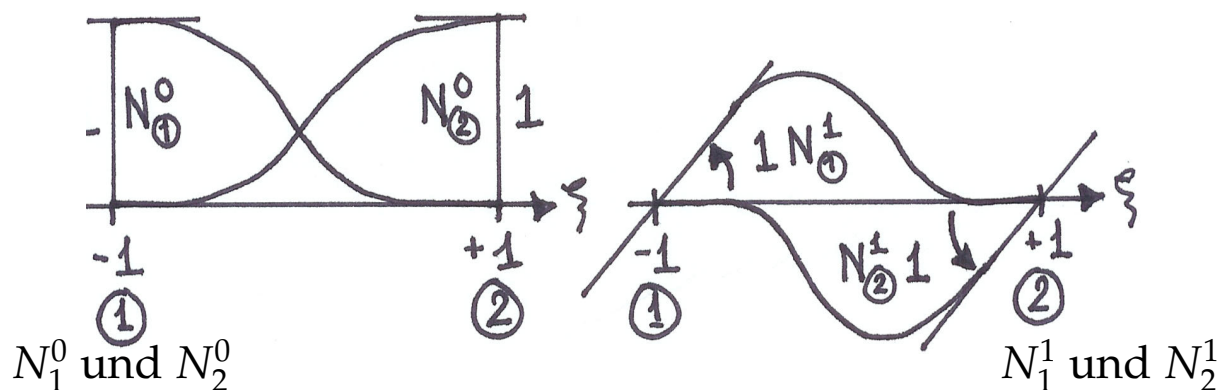
$$N_1^1(\xi) = \frac{1}{4} [1 - \xi - \xi^2 + \xi^3]$$

$$N_2^1(\xi) = \frac{1}{4} [-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3]$$

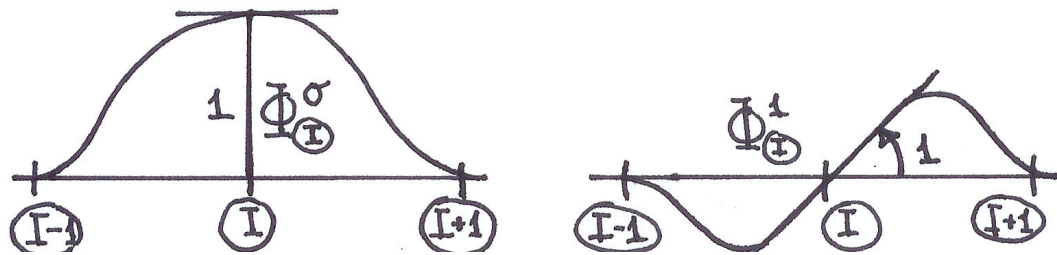
allgemein gilt

$$N_I^0(\xi_J) = \delta_{IJ} \quad \frac{dN_I^0(\xi_J)}{d\xi} = 0 \quad N_I^1(\xi_J) = 0 \quad \frac{dN_I^1(\xi_J)}{d\xi} = \delta_{IJ}$$

Verlauf auf Elementebene



Globaler Verlauf, Anteil des Knotens I



Funktion selbst stetig

erste Ableitung stetig

Übergang auf Matrixdarstellung

Approximation der Durchbiegung auf Elementebene

$$w_h^e(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{w}^e$$

mit Ansatzmatrix

$$\mathbf{N}(\xi) = [N_1^0(\xi), N_1^1(\xi) \frac{h_e}{2}, N_2^0(\xi), N_2^1(\xi) \frac{h_e}{2}]$$

und Knotenfreiheitsgraden

$$\mathbf{w}^e = [w_1, w_1', w_2, w_2']$$

Approximation der Testfunktionen auf Elementebene

$$v_h^e(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{v}^e = \mathbf{v}^{e^t} \cdot \mathbf{N}^t(\xi)$$

Approximation der Krümmung auf Elementebene

$$w_h^{e''}(\xi) = \frac{dw_h^e(\xi)}{dx^2} \quad \text{Kettenregel}$$

$$w_h^{e''}(\xi) = \frac{dw_h^e(\xi)}{d\xi^2} \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

mit

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{4}{h_e^2} \quad \text{und} \quad w_h^e(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{w}^e$$

also

$$w_h^{e''}(x) = \frac{4}{h_e} \frac{d^2\mathbf{N}(\xi)}{d\xi^2} \cdot \mathbf{w}^e = \mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{w}^e$$

$\mathbf{B}(\xi)$... diskrete Knoten-/Operator-Matrix, B-Matrix
Ableitung der Formfunktionen $N(\xi)$ nach physikalischen Koordinaten x

$$\mathbf{B}^t = \frac{4}{h_e^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \begin{bmatrix} N_1^0(\xi) \\ N_1^1(\xi) \frac{h_e}{2} \\ N_2^0(\xi) \\ N_2^1(\xi) \frac{h_e}{2} \end{bmatrix} = \frac{4}{h_e} \begin{bmatrix} +\frac{3}{2}\xi \\ \frac{1}{2}[-1 + 3\xi] \frac{h_e}{2} \\ -\frac{3}{2}\xi \\ \frac{1}{2}[+1 + 3\xi] \frac{h_e}{2} \end{bmatrix}$$

Approximation der Krümmung auf Elementebene

$$w_h^{e''}(x) = \mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{w}^e$$

$$v_h^{e''}(x) = \mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{v}^e = \mathbf{v}^{e^t} \cdot \mathbf{B}^t(\xi)$$

Steifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned} \int_{x_I}^{x_{I+1}} v_h^{e''}(x) EI w_h^{e''}(x) dx &= \int_{x_I}^{x_{I+1}} (\mathbf{B}^e \cdot \mathbf{v}^e) EI (\mathbf{B} \cdot \mathbf{w}^e) dx \\ &= \mathbf{v}^{e^t} \cdot \underbrace{EI \frac{h_e}{2} \int_{\xi+1}^{+1} \mathbf{B}^t \mathbf{B} d\xi}_{:=\mathbf{K}^e} \cdot \mathbf{w}^e \end{aligned}$$

System- und Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}^e \quad \mathbf{K}^e = EI \frac{h_e}{2} \int_{\xi=-1}^{+1} \mathbf{B}^t \mathbf{B} d\xi$$

globale Stema Elementsteifigkeitsmatrix

hier analytische Integration möglich

$$\mathbf{K}^e = \frac{2EI}{h_e^3} \begin{bmatrix} +6 & +3h_e & -6 & +3h_e \\ +3h_e & +2h_e^2 & -3h_e & +h_e^2 \\ -6 & -3h_e & +6 & -3h_e \\ +3h_e & +h_e^2 & -3h_e & +2h_e^2 \end{bmatrix}$$

Lastvektor

$$\begin{aligned} \int_{x_I}^{x_{I+1}} v_h^e q(x) dx &= \int_{\xi=-1}^{+1} (\mathbf{N}^t \cdot \mathbf{v}^e) q(x(\xi)) \frac{h_e}{2} d\xi \\ &= \mathbf{v}^{e,t} \cdot \underbrace{\frac{h_e}{2} \int_{\xi=-1}^{+1} \mathbf{N}^t q(x(\xi)) d\xi}_{:= \mathbf{F}^e} \end{aligned}$$

System- und Elementlastvektor

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{F}_I^e \quad \mathbf{F}_I^e = \frac{h_e}{2} \int_{\xi=-1}^{+1} \mathbf{N}^t q d\xi$$

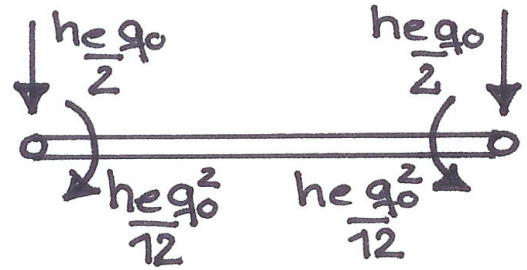
globaler Vektor Elementlastvektor

analytische Integration möglich z.B. für konstante Streckenlast $q = q_0 = \text{const.}$

$$\mathbf{F}_I^e = \frac{h_e q_0}{2} \int_{\xi=-1}^{+1} \mathbf{N}^t d\xi$$

energetisch äquivalente Knotenlasten

$$F^e = \begin{bmatrix} 1 \\ +\frac{h_e}{6} \\ 1 \\ -\frac{h_e}{6} \end{bmatrix}$$



Bemerkung Lasten können immer nur direkt auf die Knoten aufgebracht werden, dazu ist Umrechnung in konsistente Knotenlasten mit Hilfe der Ansatzfunktionen N_I^0 und N_I^1 erforderlich, für Bernoulli Balkenelemente ergeben sich sowohl Querkraft- als auch Biegeanteile

4.6 Implementierung in MATLAB

beam.m

Diskretisierung und Berechnung eines linksseitig eingespannten Balkens unter konstanter Streckenlast q , Endquerkraft Q und Endmoment M am rechten Rand mit 4 Bernoulli Balkenelementen

```
% Eingabe
EI = input('Biegesteifigkeit = ');
laenge = input('Balkenlaenge = ');
loadq = input('konstante Streckenlast q = ');
loadQ = input('Querkraft Q = ');
loadM = input('Moment M = ');
nel = 5;
node = 6;

% Zuordnungsmatrizen Elementfreiheitsgrade
edof = [1 1 2 3 4;
        2 3 4 5 6;
        3 5 6 7 8;
        4 7 8 9 10;
        5 9 10 11 12]

% Laenge eines Elements
he = laenge/nel
vor = 2*EI/he^3;
```

```

% Elementsteifigkeitsmatrix
Ke = vor*[ 6 3*he -6 3*he;
           3*he 2*he^2 -3*he he^2;
           -6 -3*he 6 -3*he;
           3*he he^2 -3*he 2*he^2];

% Elementlastvektor fac = he*loadq/2;
Fe = fac*[ 1 ;
           he/6;
           1 ;
           -he/6];

% Zusammenbau (assembly)
K = zeros(2*node,2*node);
F = zeros(2*node,1);
[ K,F ] = assem(edof,K,Ke,F,Fe)

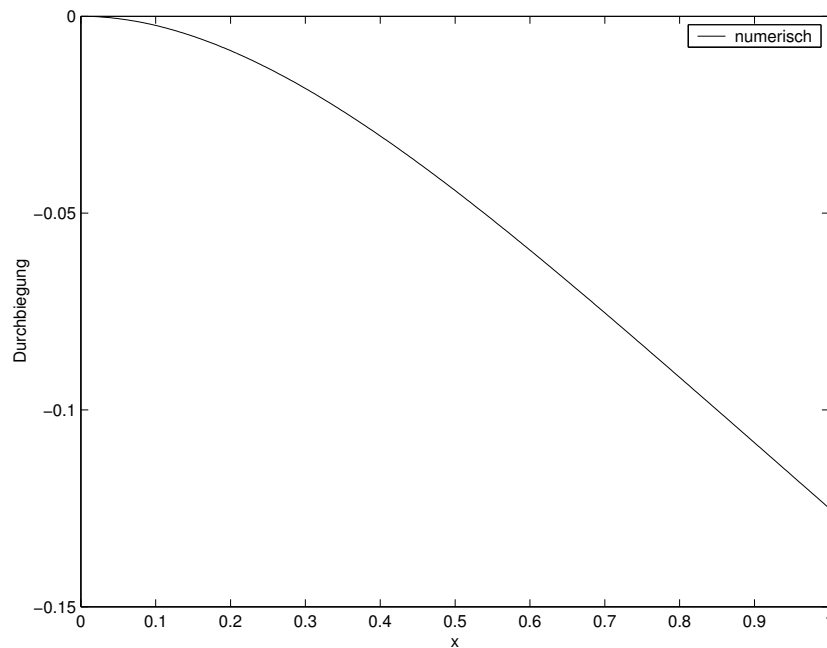
% RB am linken Rand: w(0)=0 und w'(0)=0
% RB am rechten Rand: Belastung M(L)=loadM,
Q(L)=loadQ
bc = [1 0;
      2 0];
F(2*node-1) = F(2*node-1) + loadQ
F(2*node) = F(2*node) - loadM
% alternative RB: beidseitig eingespannt
% bc = [1 0; 2 0; 2*node-1 0; 2*node 0]

% Loesung des LGS unter Beruecksichtigung der RB
[disp,Q] = solveq(K,F,bc)

```

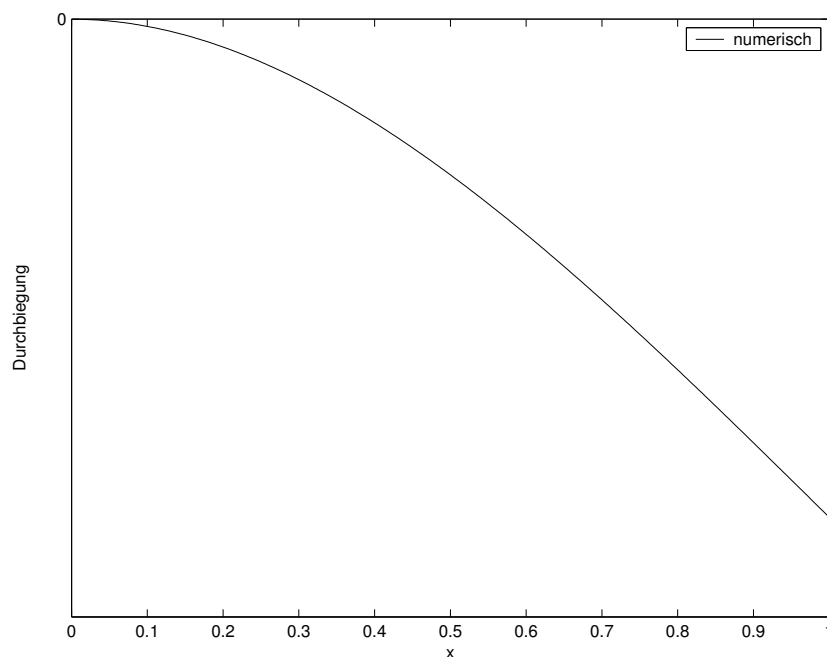
Beispiel

input nel=5, node=6, ndof=12
 $w_1=0.0, w'_1=0.0, Q(L)=0.0, M(L)=0.0, q=1.0$
 output $w_1=0.0, w_2=0.0087, w_3=0.0304, w_4=0.0594, w_5=0.0917, w_6=0.1250$
 $w'_1=0.0, w'_2=0.0813, w'_3=0.1307, w'_4=0.1560, w'_5=0.1653, w'_6=0.1667$



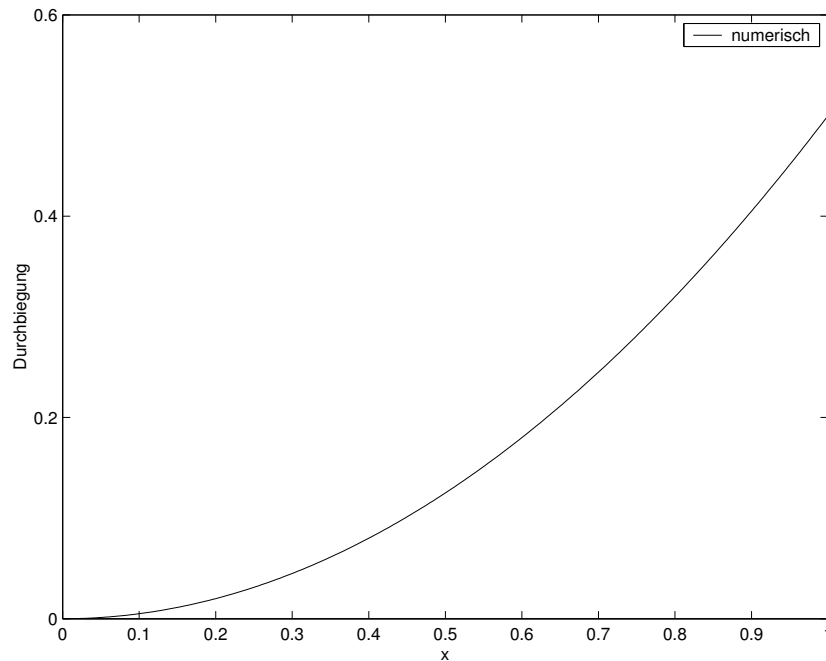
Beispiel

input nel=5, node=6, ndof=12
 $w_1=0.0, w'_1=0.0, Q(L)=1.0, M(L)=0.0, q=0.0$
 output $w_1=0.0, w_2=0.0187, w_3=0.0693, w_4=0.1440, w_5=0.2347, w_6=0.3333$
 $w'_1=0.0, w'_2=0.1800, w'_3=0.3200, w'_4=0.4200, w'_5=0.4800, w'_6=0.5000$

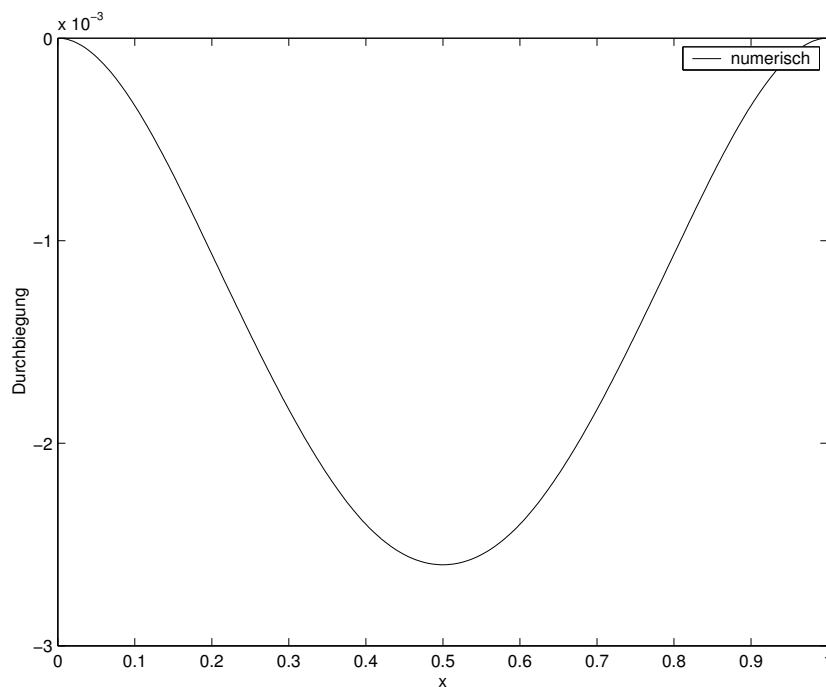


Beispiel

input nel=5, node=6, ndof=12
 $w_1=0.0, w'_1=0.0$ $Q(L)=0.0, M(L)=1.0, q=0.0$
 output $w_1=0.00, w_2=-0.02, w_3=-0.08, w_4=-0.18, w_5=-0.32, w_6=-0.50$
 $w'_1=0.00, w'_2=-0.20, w'_3=-0.40, w'_4=-0.60, w'_5=-0.80, w'_6=-1.00$

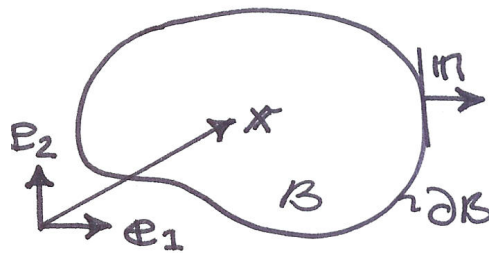
**Beispiel**

input nel=5, node=6, ndof=12
 $w_1=0.0, w'_1=0.0, w_6=0.0, w'_6=0.0$ $q=1.0$
 output $w_1=0.0, w_2=0.0011, w_3=0.0024, w_4=0.0024, w_5=0.0011, w_6=0.0$
 $w'_1=0.0, w'_2=0.0080, w'_3=0.0040, w'_4=-0.0040, w'_5=-0.0080, w'_6=0.0$



5 2d Theromelemente - Scheibenelemente

Notation Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs für mehrdimensionale Probleme



- Ortsvektor eines materiellen Punktes

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = \sum_i^2 x_i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i$$

Summenkonvention: über gleiche Indizes wird summiert

- Normalenvektor des Randes

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$$

- Gradient einer skalaren Feldgrösse, z.B. Temperatur $\Theta(\mathbf{x})$

$$\nabla \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 = \Theta_{,1} \mathbf{e}_1 + \Theta_{,2} \mathbf{e}_2 = \Theta_{,i} \mathbf{e}_i$$

Gradientenbildung erhöht Ordnung (Skalar \rightarrow Vektor)

- Divergenz eines Vektorfeldes, z. B. Wärmefluss $\mathbf{q}(\mathbf{x})$

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 = q_{1,1} + q_{2,2} = q_{i,i}$$

Divergenzbildung reduziert Ordnung (Vektor \rightarrow Skalar)

- Laplace Operator angewandt auf skalare Feldgrösse, z.B. Temperatur $\Theta(\mathbf{x})$

$$\Delta \Theta = \operatorname{div}(\nabla \Theta) = \operatorname{div}(\Theta_{,i} \mathbf{e}_i) = \Theta_{,ii} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \Theta_{,11} + \Theta_{,22} = \Theta_{,ii}$$

Anwendung des Laplace-Operators behält Ordnung bei

5.1 Differentielle Form

Problemstellung finde $\Theta = \Theta(\mathbf{x})$, so dass

$$k \Delta \Theta(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) = 0$$

$$k \Theta_{,ii}(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}$$

$$\Theta = \bar{\Theta}$$

$$\Theta = \bar{\Theta} \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}_\Theta \quad \text{Dirichlet RB}$$

$$-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}$$

$$-q_i n_i = \bar{q} \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}_q \quad \text{Neumann RB}$$

$\Theta(\mathbf{x})$... Temperatur

$Q(\mathbf{x})$... Wärmequelle

$\mathbf{q}(\mathbf{x})$... Wärmeflussvektor

k ... Konduktivität, Wärmeleitfähigkeit

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$... Normalenvektor auf dem Rand

Grundgleichungen

konstitutives Gesetz, Fourier (vergleiche Hooke)

$$\mathbf{q} = -k \nabla \Theta$$

stationäre Wärmeleitung (vergleiche Gleichgewicht)

$$k \Delta \Theta(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}) = 0$$

lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung!

5.2 Variationelle Form

wie bisher: Multiplikation mit skalarer Testfunktion $v(\mathbf{x})$, da auch skalare Unbekannte $\Theta(\mathbf{x})$, und Integration über das Gebiet \mathcal{B}

Problemstellung finde $\Theta = \Theta(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}^{\text{trial}}$, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} v [k \Delta \Theta + Q] dA &= 0 \\ \int_{\mathcal{B}} v [k \Theta_{,ii} + Q] dA &= 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}^{\text{test}} \\ \Theta &= \bar{\Theta} \\ \Theta &= \bar{\Theta} \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}_{\Theta} \\ -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= \bar{q} \\ -q_i n_i &= \bar{q} \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}_q \end{aligned}$$

unsymmetrisch in v und $\Theta_{,ii}$

5.3 Schwache Form

partielle Integration mit Kettenregel

$$[v k \Theta_{,i}]_{,i} = v_{,i} k \Theta_{,i} + v k \Theta_{,ii}$$

partielle Inegration der variationellen Form

$$\int_{\mathcal{B}} v k \Theta_{,ii} dA = \int_{\mathcal{B}} [v k \Theta_{,i}]_{,i} dA - \int_{\mathcal{B}} v_{,i} k \Theta_{,i} dA$$

Gauss'scher Integralsatz, Oberflächenintegral \rightarrow
Randintegral, allgemein

$$\int_{\mathcal{B}} [\circ]_{,i} dA = \int_{\partial\mathcal{B}} [\circ] n_i dS$$

Gauss'scher Integralsatz und Fourier $k \Theta_{,i} = -q_i$

$$\int_{\mathcal{B}} [v k \Theta_{,i}]_{,i} dA = \int_{\partial\mathcal{B}} [v k \Theta_{,i}] n_i dS = - \int_{\partial\mathcal{B}} v q_i n_i dS$$

mit Rand $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_{\Theta} \cup \partial\mathcal{B}_q$ und homogenen Dirichlet RB für v also $v = 0$ auf $\partial\mathcal{B}_{\Theta}$ und Neumann RB $-q_i n_i = \bar{q}$ auf $\partial\mathcal{B}_q$

$$- \int_{\partial\mathcal{B}} v q_i n_i dS = + \int_{\partial\mathcal{B}_q} v \bar{q} dS$$

Problemstellung finde $\Theta = \Theta(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}^1$, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \nabla v \cdot k \nabla \Theta dA &= \int_{\mathcal{B}} v Q dA + \int_{\partial\mathcal{B}} v \bar{q} dS \\ \int_{\mathcal{B}} v_{,i} k \Theta_{,i} dA &= \int_{\mathcal{B}} v Q dA + \int_{\partial\mathcal{B}} v \bar{q} dS \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1 \\ \Theta &= \bar{\Theta} \\ \Theta &= \bar{\Theta} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_{\Theta} \end{aligned}$$

für alle zulässigen Testfunktionen $v(\mathbf{x})$ mit $v = 0$ auf $\partial\mathcal{B}_\Theta$, Anforderung and die Approximationen Θ und v , $\int_{\mathcal{B}} [v_{,1}^2 + v_{,2}^2 = v^2] dA < \infty$, d.h. v sowie die 1. Ableitungen von v müssen quadratisch integrierbar sein

$$\begin{aligned} v &\in H_0^1(\mathcal{B}) & \text{mit} & \quad v = 0 & \text{auf} & \quad \partial\mathcal{B}_\Theta \\ \Theta &\in H^1(\mathcal{B}) & \text{mit} & \quad \Theta = \bar{\Theta} & \text{auf} & \quad \partial\mathcal{B}_\Theta \end{aligned}$$

$v(\mathbf{x})$ und $\Theta(\mathbf{x})$ müssen stetig / C^0 -kontinuierlich sein

Bemerkung Neumann RB in schwacher Form, also im integralen Sinne, erfüllt, treten hier nicht mehr explizit auf

5.4 Finite Element Approximation

Diskretisierung Bubnov-Galerkin Verfahren, gleiche Ansätze für Testfunktionen $v(\mathbf{x})$ und Lösungsfunktion $\Theta(\mathbf{x})$, dann symmetrisches Gleichungssystem

FE-Approximation auf Elementebene

FE-Approximation der Lösung und deren Gradienten

$$\Theta_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{n_{en}} N_J(\mathbf{x}) \Theta_J \quad \nabla \Theta_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{n_{en}} \nabla N_J(\mathbf{x}) \Theta_J$$

N_I ... Formfunktionen

Θ_I ... Temperatur am Knoten I

n_{en} ... Anzahl der Elementknoten

FE-Approximation der Testfunktion und deren Gradienten

$$v_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_{en}} N_I(\mathbf{x}) v_I \quad \nabla v_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_{en}} \nabla N_I(\mathbf{x}) v_I$$

v_I ... Koeffizienten der Testfunktion am Knoten I

einsetzen in schwache Form und Ausklammern

$$\sum_{I=1}^{n_{en}} v_I \left[\sum_{J=1}^{n_{en}} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \nabla N_I \cdot k \nabla N_J \, dA}_{:=K_{IJ}^e} \right] \Theta_J - \sum_{I=1}^{n_{en}} v_I \left[\underbrace{\int_{\mathcal{B}} N_I Q \, dA + \int_{\partial \mathcal{B}_q} N_I \bar{q} \, dS}_{:=F_I^e} \right] = 0$$

Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} K_{IJ}^e \quad K_{IJ}^e = \int_{\mathcal{B}} \nabla N_I \cdot k \nabla N_J \, dA$$

globale Stema Elementsteifigkeitsmatrix

Lastvektor

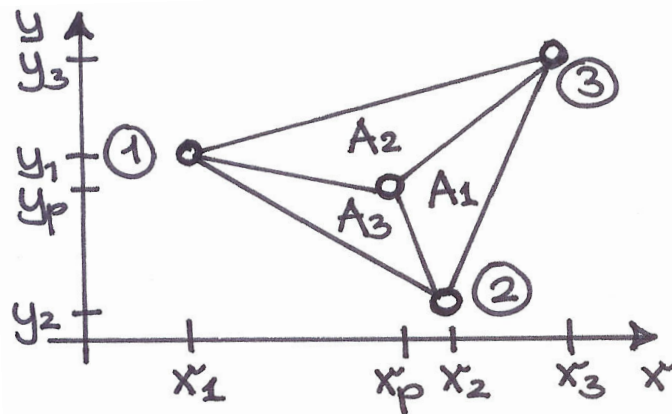
$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_{el}} F_I^e \quad F_I^e = \int_{\mathcal{B}} N_I Q \, dA + \int_{\partial \mathcal{B}_q} N_I \bar{q} \, dS$$

globaler Vektor Elementlastvektor

5.5 Lineare Dreieckselemente

Herleitung der Formfunktionen linearer Dreieckselemente

dazu Einführung von Flächenkoordinaten λ_I



es gilt

$$\lambda_I = \frac{A_I}{A} \quad \forall I = 1, 2, 3$$

Verhältnis der dem Knoten I gegenüberliegenden Fläche A_I zur Gesamtfläche A

$$\sum_{I=1}^3 \lambda_I = \frac{1}{A} \sum_{I=1}^3 A_I = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

es existieren **nur zwei unabhängige** Flächenkoordinaten

Beispiel

Elementkoordinaten $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^t$

Elementknoten $\lambda_1 = [1, 0, 0]^t$

$$\lambda_2 = [0, 1, 1]^t$$

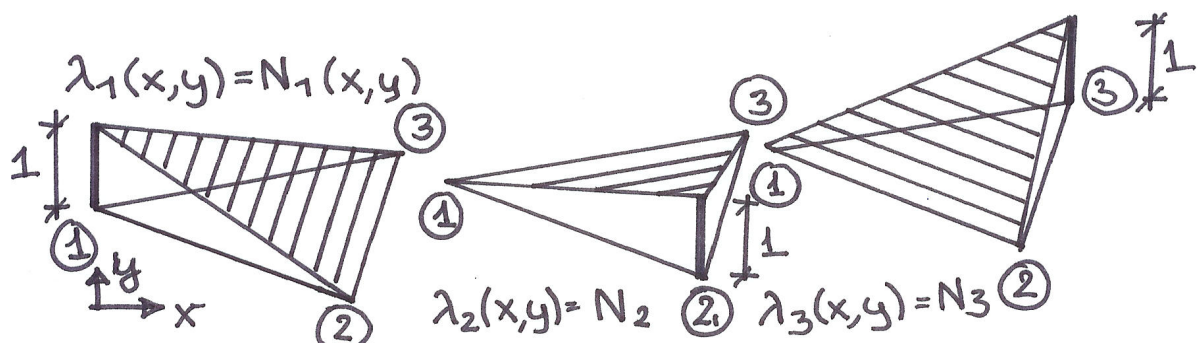
$$\lambda_3 = [0, 0, 1]^t$$

Elementmittelpunkt $\lambda_m = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]^t$

die Flächenkoordinaten λ können direkt als Formfunktionen N_I verwendet werden, sie haben die erforderliche Eigenschaft

$$N_I(\lambda) = \lambda_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } I = J \\ 0 & \text{wenn } I \neq J \end{cases} = \delta_{IJ}$$

Formfunktionen für lineare Dreieckselemente



Problem Darstellung der Formfunktionen $N_I(\lambda) = A_I/A$ als Funktionen der kartesischen Koordinaten $N_I(x, y)$

Gesamtfläche A

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Teilflächen A_I , Beispiel A_1

$$A_1 = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [A_1^0 + \alpha_1 x + \beta_1 y]$$

entwickelt nach der 1. Zeile

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{bmatrix} x + \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} y \right]$$

allgemeine Darstellung der Koeffizienten für Teilfläche A_1

$$A_1^0 = \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = y_2 - y_3$$

$$\beta_1 = x_3 - x_2$$

allgemein gilt

$$A_I = \frac{1}{2} [A_I^0 + \alpha_I x + \beta_I y]$$

allgemeine Darstellung der Koeffizienten

$A_1^0 = \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$ $\alpha_1 = y_2 - y_3$ $\beta_1 = x_3 - x_2$	mit	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;">$I + 1$</th> <th style="border: none;">$I + 2$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">$I = 1$</td> <td style="border: none; text-align: center;">2</td> <td style="border: none; text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">$I = 2$</td> <td style="border: none; text-align: center;">3</td> <td style="border: none; text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">$I = 3$</td> <td style="border: none; text-align: center;">1</td> <td style="border: none; text-align: center;">2</td> </tr> </tbody> </table>		$I + 1$	$I + 2$	$I = 1$	2	3	$I = 2$	3	1	$I = 3$	1	2
		$I + 1$	$I + 2$											
	$I = 1$	2	3											
	$I = 2$	3	1											
$I = 3$	1	2												

Elementformfunktionen für lineare Dreieckselemente

$$N_I(x, y) = \frac{1}{2 A_e} [A_I^0 + \alpha_I x + \beta_I y]$$

Gradient der Formfunktionen bezüglich physikalischer Koordinaten x und y

$$\nabla N_I(x, y) = \frac{1}{2 A_e} [\alpha_I, \beta_I]^t$$

Elementsteifigkeitsmatrix

$$K_{IJ}^e = \int_{\mathcal{B}} \nabla N_I k \nabla N_J dA$$

$$K_{IJ}^e = \frac{1}{2 A_e} [\alpha_I, \beta_I] k \frac{1}{2 A_e} \begin{bmatrix} \alpha_J \\ \beta_J \end{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} dA$$

$$K_{IJ}^e = \frac{k}{4 A_e} [\alpha_I \alpha_J + \beta_I \beta_J]$$

$$K_{IJ}^e = \frac{k}{4 A_e} \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_1 + \beta_1 \beta_1 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 & \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 \\ \alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 & \alpha_2 \alpha_2 + \beta_2 \beta_2 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 & \alpha_3 \alpha_2 + \beta_3 \beta_2 & \alpha_3 \alpha_3 + \beta_3 \beta_3 \end{bmatrix}$$

Elementlastvektor

$$F_I^e = \int_{\mathcal{B}} N_I Q dA + \int_{\partial \mathcal{B}} N_I \bar{q} dS$$

Flächenanteil aus Wärmequelle Q

$$F_{IQ}^e = \int_{\mathcal{B}} N_I Q dA$$

hier, z.B. für $Q = Q_0 = \text{const}$

$$F_{IQ}^e = \frac{1}{3} Q_0 A [1, 1, 1]^t$$

Wärmequelle zu gleichen Anteilen auf die Knoten $I = 1, 2, 3$ verteilt

Kantenanteil aus Wärmefluss $\bar{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$

$$F_{Iq}^e = \int_{\partial\mathcal{B}} N_I \bar{q} \, dS$$

hier, z.B. für $\bar{q} = \bar{q}_0 = \text{const.}$ über den Elementrand 2 – 3

$$F_{Iq}^e = \frac{1}{2} \bar{q}_0 [0, 1, 1]^t$$

Wärmefluss zu gleichen Anteilen auf die Knoten $I = 2, 3$ verteilt

resultierendes Gleichungssystem

$$\sum_{J=1}^{n_{nod}} K_{IJ} \Theta_J = F_I \quad \mathbf{K} \cdot \Theta = \mathbf{F}$$

Lösung für die unbekanntenen Knotentemperaturen

$$\Theta_J = \sum_{I=1}^{n_{nod}} K_{JI}^{-1} F_I \quad \Theta = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}$$

Beispiel: Dreieckselement, Gradient und Divergenz

Dreieckselement im physikalischen Raum

gegeben

Knoten	x	y
1	2	2
2	6	2
3	2	5

Dreiecksfläche

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [30 + 4 + 4 - 12 - 4 - 10] = 6$$

Koeffizienten der Ansatzfunktionen, z.B. für N_1

$$A_1^0 = \det \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 26$$

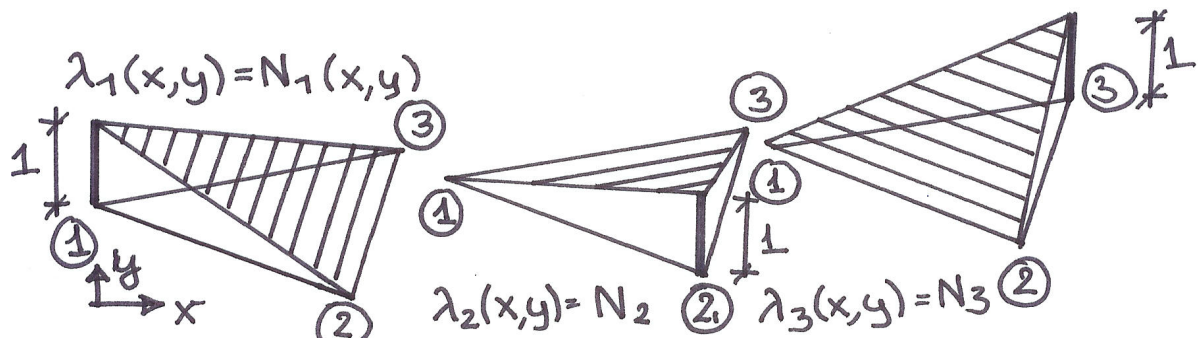
$$\alpha_1 = 2 - 5 = -3, \quad \beta_1 = 2 - 6 = -4$$

Ansatzfunktionen N_I

$$N_1(x, y) = \frac{1}{12} [26 - 3x - 4y]$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{12} [-6 - 3x + 0y]$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{12} [-8 + 0x - 4y]$$



$N_1(x, y)$

$N_2(x, y)$

$N_3(x, y)$

Temperaturverlauf $\Theta(x, y)$
gegeben

Knoten	Θ
1	10
2	6
3	16

$$\Theta_h^e(x, y) = \sum_{I=1}^3 \Theta_I N_I(x, y)$$

$$\Theta_h^e(x, y) = \Theta_1 N_1(x, y) + \Theta_2 N_2(x, y) + \Theta_3 N_3(x, y)$$

$$\begin{aligned} \Theta_h^e(x, y) &= \frac{1}{12} 10 [26 - 3x - 4y] \\ &\quad + \frac{1}{12} 6 [-6 - 3x + 0y] \\ &\quad + \frac{1}{12} 16 [-8 + 0x - 4y] \\ &= \frac{1}{12} [96 - 12x + 24y] = 8 - x + 2y \end{aligned}$$

Temperaturverlauf $\Theta_h^e(x, y) = 8 - x + 2y$ ist elementweise linear

Gradient der Temperatur $\nabla \Theta = \Theta_{,i}$

$$\nabla \Theta_h^e(x, y) = \sum_{I=1}^3 \Theta_I \nabla N_I(x, y)$$

Gradient der Formfunktionen $\nabla N_I(x, y) = [N_{I,x}, N_{I,y}]^t$

$$\nabla N_1 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla N_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla N_3 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \Theta_h^e = \frac{10}{12} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + \frac{6}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{16}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

Gradient der Temperatur $\nabla \Theta_h^e = [-1, +2]^t$ ist elementweise konstant

Funktion $\Theta_h^e(x, y)$ fällt in x -Richtung konstant mit -1 und steigt in y -Richtung konstant mit $+2$

Divergenz des Wärmeflussvektors $\operatorname{div} \mathbf{q} = q_{i,i}$
gegeben

Knoten	q_x	q_y
1	2	2
2	1	0
3	0	2

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_h^e = \nabla \mathbf{q}_h^e : \mathbf{I} = \sum_{I=1}^3 \mathbf{q}_I \cdot \nabla N_I(x, y)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q}_h^e &= \frac{1}{12} [2, 2] \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} [1, 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} [0, 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= [-6 - 8 + 3 + 8] = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

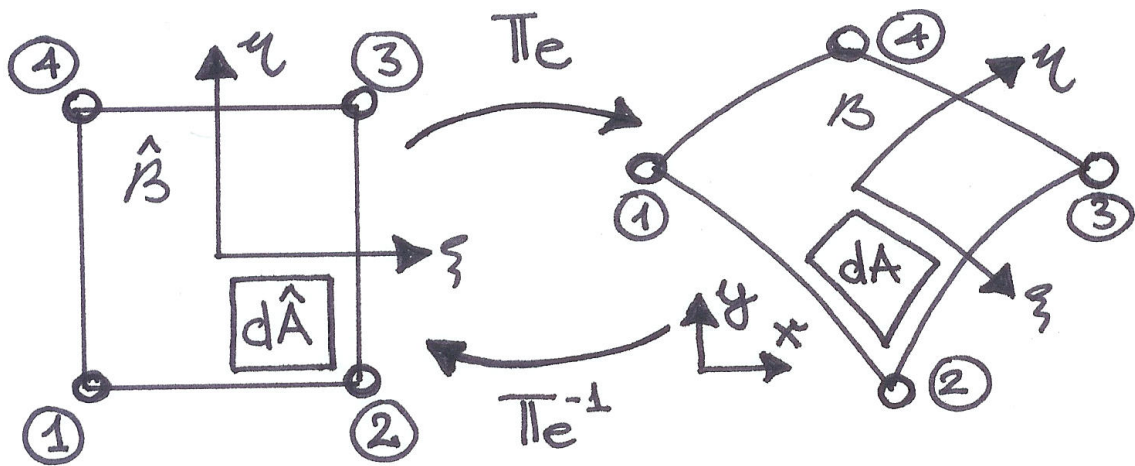
Divergenz des Wärmeflussvektors $\operatorname{div} \mathbf{q}_h^e = -1/4$ ist elementweise konstant

5.6 Bi-lineare Viereckselemente

Herleitung Formfunktionen bi-linearer Viereckselemente

Elementorientierte Betrachtung

systematische Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix K_{IJ}^e und des Elementlastvektors F_{Ie} unter Verwendung eines Referenzelementes mit lokalen isoparametrischen Elementkoordinaten ξ und η



quadratisches Referenzelement \hat{B}_e
 isoparametrischer Raum
 lokale Koordianten ξ, η
 mit $-1 \leq \xi, \eta \leq +1$

beliebiges Element B_e
 physikalischer Raum
 globale Koordinaten x, y

Zusammenhang zwischen Koordianten

das gesamte FE-Netz kann basierend auf dem normierten Referenzelement \hat{B}_e mit Hilfe der Transformation T_e beschrieben werden, $e = 1, 2, \dots, n_{el}$, es gilt

$$T_e : \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

Zusammenhang zwischen Linienelementen

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{aligned}$$

in Matrixdarstellung

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}$$

mit Jacobi Matrix \mathbf{J}

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Anforderung an die Abbildung T_e : $\det(\mathbf{J}) > 0$ mit

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

d.h. die Umkehrfunktion T_e^{-1} soll existieren, so dass

$$T_e^{-1} : \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

also gilt

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

mit inverser Jacobi Matrix \mathbf{J}^{-1}

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Zusammenhang zwischen Flächenelementen

$d\hat{A} = d\xi \, d\eta \dots$ isoparametrisches Flächenelement

$dA = \det(\mathbf{J}) \, d\hat{A} \dots$ physikalisches Flächenelement

Isoparametrisches Konzept

Konstruktion der Abbildung T_e , Interpolation der Funktionen $x(\xi, \eta)$ und $y(\xi, \eta)$ entsprechend der Approximation der Lösungs- und Testfunktionen, "isoparametrisch", gleiche Ansätze und gleiche Parametrisierung

$$T_e : \begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I(\xi, \eta) x_I \\ y(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I(\xi, \eta) y_I \end{cases}$$

$N_I(\xi, \eta) \dots$ Formfunktionen

$x_I, y_I \dots$ Knotenkoordinaten

Eigenschaft der Testfunktionen

$$N_I(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } I = J \\ 0 & \text{wenn } I \neq J \end{cases} = \delta_{IJ}$$

Formfunktionen des bi-linearen Viereckselementes

$$N_1 (\xi, \eta) = \frac{1}{4} [1 - \xi] [1 - \eta]$$

$$N_2 (\xi, \eta) = \frac{1}{4} [1 + \xi] [1 - \eta]$$

$$N_3 (\xi, \eta) = \frac{1}{4} [1 + \xi] [1 + \eta]$$

$$N_4 (\xi, \eta) = \frac{1}{4} [1 - \xi] [1 + \eta]$$

Beispiel: Viereckselemente

Element 1

Knoten	x	y
1	3	0
2	3	1
3	0	1
4	0	0

Zusammenhang zwischen Koordinaten

$$T_1 : \begin{cases} x = 3 N_1 + 3 N_2 = \frac{1}{2} [1 - \eta] \\ y = N_2 + N_3 = \frac{1}{2} [1 + \xi] \end{cases}$$

Jacobi Matrix

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ +\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{3}{4} = \text{const}$$

Abbildung T_1 reine Streckung und Stauchung mit $A_1/A = 3/4$

Element 2

Knoten	x	y
1	0	0
2	1	0
3	2	2
4	0	1

Zusammenhang zwischen Koordinaten

$$T_2 : \begin{cases} x = N_2 + 2 N_3 = \frac{1}{4} [3 + 3\xi + \eta + \xi\eta] \\ y = 2 N_3 + N_4 = \frac{1}{4} [3 + \xi + 3\eta + \xi\eta] \end{cases}$$

Jacobi Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 + \eta & 1 + \xi \\ 1 + \eta & 3 + \xi \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta > 0$$

Abbildung T_2 zulässig, da $\min(\xi, \eta) = -1$ und dafür $\min(\det(\mathbf{J})) = +1/4 > 0$

Element 3

Knoten	x	y
1	0	0
2	0	1
3	3	1
4	3	0

Zusammenhang zwischen Koordinaten

$$T_3 : \begin{cases} x = 3 N_3 + 3 N_4 = \frac{3}{2} [1 + \eta] \\ y = N_2 + N_3 = \frac{1}{2} [1 + \xi] \end{cases}$$

Jacobi Matrix

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = -\frac{3}{4} < 0$$

Abbildung T_3 unzulässig, da Durchdringung, Vorsicht!
Numerierung im Urzeigersinn widerspricht Numerierung
im Gegenuhrzeigersinn des Referenzelementes!

Element 4

Knoten	x	y
1	0	0
2	3	0
3	1	1
4	0	2

Zusammenhang zwischen Koordinaten

$$T_4 : \begin{cases} x = 3 N_2 + N_3 = \frac{1}{4} [4 + 4\xi - 2\eta - 2\xi\eta] \\ y = N_3 + 2 N_4 = \frac{1}{4} [3 - 1\xi + 3\eta - 1\xi\eta] \end{cases}$$

Jacobi Matrix

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 - \frac{1}{2}\eta & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\eta & +\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\xi \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = \frac{1}{8} [5 - 3\xi - 4\eta]$$

Abbildung T_4 unzulässig, da für ein Teilgebiet gilt $\det(J) < 0$, z.B. am Knoten 3 gilt $\det(J) = -1/4$, Ursache: Winkel am Knoten 3 $\alpha_3 > \Pi$, für zulässiges Element muss gelten $\alpha_I < \Pi$ für alle Knoten I

Elementsteifigkeitsmatrix

$$K_{IJ}^e = \int_B k \left[\frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial N_J}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial N_J}{\partial y} \right] dx dy$$

Problem: Gradient der Formfunktionen $N_I(\xi, \eta)$ bezüglich der physikalischen Koordinaten x, y , dazu Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_I}{\partial x} &= \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} &= \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned}$$

in Matrixschreibweise

$$\nabla N_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} & \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

mit inverser Jacobi Matrix

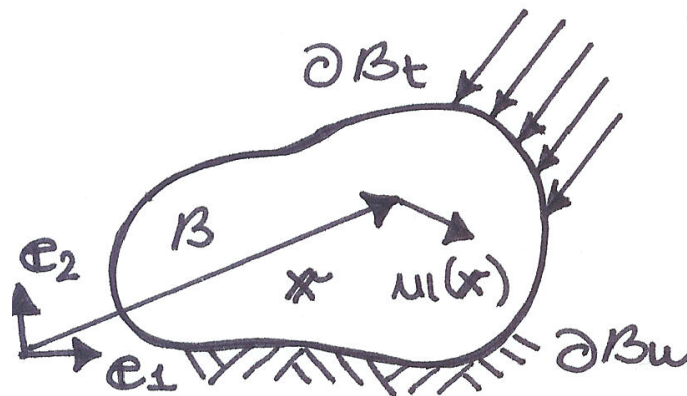
$$\nabla N_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} & \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-t} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Transformation des Flächenelementes

$$dA = dx dy = \det(\mathbf{J}(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

6 2d Kontinuumselemente - Scheibenelemente

6.1 Differentielle Form



Problemstellung finde $u = u(x)$, so dass

$\operatorname{div} \sigma + b = 0$	$\sigma_{ij,j} + b_i = 0_i$	in B
$u = \bar{u}$	$u_i = \bar{u}_i$	auf ∂B_u Dirichlet RB
$\sigma \cdot n = \bar{t}$	$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$	auf ∂B_t Neumann RB

$u(x)$... Verschiebungsvektor am Punkt x

$$u(x) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$... Verzerrungs-/Dehnungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$

Verzerrungstensor ist symmetrisch $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^t, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$... Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Spannungstensor ist symmetrisch $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t, \sigma_{12} = \sigma_{21}$

$\mathbf{t}(\mathbf{x})$... Spannungsvektor

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$$

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$...Normalenvektor eines Flächenelements

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{b}(\mathbf{x})$... Lastvektor, z.B. aus Gravitation

E, ν ... Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl

6.2 Variationelle Form

Skalarmultiplikation mit vektorwertiger Testfunktion $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [v_1, v_2]^t$ und Integration über das Gebiet \mathcal{B} , Testfunktion von gleicher Ordnung wie Lösungsfunktion, i.e. Vektor $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u_1, u_2]^t$

Problemstellung finde $u = u(x)$, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} v \cdot [\operatorname{div} \sigma + b] \, dA &= 0 \\ \int_{\mathcal{B}} v_i [\sigma_{ij,j} + b_i] \, dA &= 0 \quad \text{in } \mathcal{B} \\ u &= \bar{u} \quad u_i = \bar{u}_i \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}_u \\ \sigma \cdot n &= \bar{t} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}_t \end{aligned}$$

für alle zulässigen Testfunktionen $v(x)$

6.3 Schwache Form

partielle Integration vergl. Kettenregel $v \sigma' = [v\sigma]' - v' \sigma$

$$\int_{\mathcal{B}} v_i \sigma_{ij,j} \, dA = \int_{\mathcal{B}} [v_i \sigma_{ij}]_{,j} \, dA - \int_{\mathcal{B}} v_{i,j} \sigma_{ij} \, dA$$

Gauss'scher Integralsatz

$$\int_{\mathcal{B}} [v_i \sigma_{ij}]_{,j} \, dA = \int_{\partial \mathcal{B}} v_i \sigma_{ij} n_j \, dS$$

Neumann Randbedingungen, d.h. $\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$ auf $\partial \mathcal{B}_t$ und
homogene Dirichlet Randbedingungen, d.h. $v_i = 0_i$ auf $\partial \mathcal{B}_u$

$$\int_{\partial \mathcal{B}} v_i \sigma_{ij} n_j \, dS = \int_{\partial \mathcal{B}_t} v_i \bar{t}_i \, dS$$

also

$$- \int_{\mathcal{B}} v_{i,j} \sigma_{ij} \, dA + \int_{\mathcal{B}} v_i b_i \, dA + \int_{\partial \mathcal{B}_t} v_i \bar{t}_i \, dS = 0$$

vergleiche Wärmeleitung

$$- \int_{\mathcal{B}} v_j q_i \, dA + \int_{\mathcal{B}} v Q \, dA + \int_{\partial \mathcal{B}_t} v \bar{q} \, dS = 0$$

Problemstellung finde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, so dass

$$\begin{array}{rcl}
 \int_{\mathcal{B}} \nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} \, dA & = & \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, dA + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dS \\
 \int_{\mathcal{B}} v_{i,j} \sigma_{ij} \, dA & = & \int_{\mathcal{B}} v_i b_i \, dA + \int_{\partial \mathcal{B}} v_i \bar{t}_i \, dS & \text{in } \mathcal{B} \\
 \mathbf{u} & = & \bar{\mathbf{u}} \\
 u_i & = & \bar{u}_i & \text{auf } \partial \mathcal{B}_u
 \end{array}$$

für alle zulässigen Testfunktionen $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ auf $\partial \mathcal{B}_u$

Abforderung an die Funktionen \mathbf{v} und \mathbf{u}

$$\mathbf{v} \in \mathcal{H}_0^1(\mathcal{B}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_u$$

$$\mathbf{u} \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_u$$

Bemerkung Neumann RB in schwacher Form, also im integralen Sinne, erfüllt, treten hier nicht mehr explizit auf

ausgeschriebene Darstellung des ersten Terms

$$\int_{\mathcal{B}} v_{i,j} \sigma_{ij} \, dA = \int_{\mathcal{B}} v_{1,1} \sigma_{11} + v_{1,2} \sigma_{12} + v_{2,1} \sigma_{21} + v_{2,2} \sigma_{22} \, dA$$

unter Ausnutzung der Symmetrie des Spannungstensors

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

$$\int_{\mathcal{B}} v_{i,j} \sigma_{ij} \, dA = \int_{\mathcal{B}} v_{1,1} \sigma_{11} + v_{2,2} \sigma_{22} + [v_{1,2} + v_{2,1}] \sigma_{12} \, dA$$

Übergang auf Matrix-Vektor Notation / Voigt'sche Notation

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^t$$

und

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = [v_{1,1}, v_{2,2}, [v_{1,2} + v_{2,1}]]^t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = [u_{1,1}, u_{2,2}, [u_{1,2} + u_{2,1}]]^t$$

und damit

$$\int_{\mathcal{B}} v_{i,j} \sigma_{ij} dA = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\varepsilon}^t(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\sigma} dA$$

also gilt

$$\boxed{\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\varepsilon}^t(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\sigma} dA = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} dA + \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{t}} dS}$$

konstitutives Gesetz: ebener Spannungszustand $\sigma_{33} = 0$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{bmatrix}$$

bzw

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$$

und damit

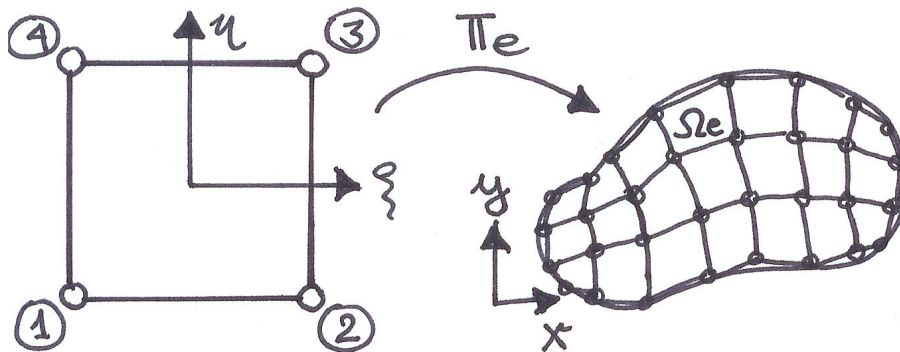
$$\boxed{\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\varepsilon}^t(\boldsymbol{v}) \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) dA = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} dA + \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{t}} dS}$$

Bemerkung Formulierung ist symmetrisch in \boldsymbol{v} und \boldsymbol{u}

6.4 Finite Element Approximation

Bi-lineare isoparametrische Vierknotenelemente

Diskretisierung des 2d-Gebietes



Referenzelement

physikalisches Gebiet

Koordinatentransformation

$$T_e : \begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 x_I N_I(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 y_I N_I(\xi, \eta) \end{cases}$$

mit bi-linearen Formfunktionen $N_I(\xi, \eta)$

$$N_I = \frac{1}{4} [1 + \xi_I \xi] [1 + \eta_I \eta]$$

vergleiche Wärmeleitung

Approximation des Verschiebungsfeldes

Komponentenweise Approximation mit bi-linearen Formfunktionen ("isoparametrisches Konzept")

$$u_i^h(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 u_{iI} N_I(\xi, \eta) \quad \text{mit} \quad u_{iI} = [u_{xI}, u_{yI}]^t$$

d.h. Verschiebungen in x - und y -Richtung

$$u_x^h(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 u_{xI} N_I(\xi, \eta)$$

$$u_y^h(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 u_{yI} N_I(\xi, \eta)$$

Verschiebungen und Testfunktionen in Vektornotation

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 \mathbf{u}_I N_I(\xi, \eta)$$

$$\mathbf{v}^h(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 \mathbf{v}_I N_I(\xi, \eta)$$

Approximation des Verzerrungsfeldes

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^h \\ \epsilon_{yy}^h \\ \epsilon_{xy}^h + \epsilon_{yx}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,x}^h \\ u_{y,y}^h \\ u_{x,y}^h + u_{y,x}^h \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h) = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^4 u_{xI} N_{I,x} \\ \sum_{I=1}^4 u_{yI} N_{I,y} \\ \sum_{I=1}^4 u_{xI} N_{I,y} + u_{yI} N_{I,x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h) = \sum_{I=1}^4 \underbrace{\begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{B}_I} \begin{bmatrix} u_{xI} \\ u_{yI} \end{bmatrix}$$

Verzerrungen und Gradient der Testfunktionen in Matrixnotation

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^h) = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I(\xi, \eta) \cdot \boldsymbol{u}_I$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^h) = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I(\xi, \eta) \cdot \boldsymbol{v}_I = \sum_{I=1}^4 \boldsymbol{v}_I^t \cdot \mathbf{B}_I^t(\xi, \eta)$$

mit den B-Matrizen / diskreten Knotenoperatormatrizen

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix}$$

räumliche Gradienten der Formfunktionen $N_I(\xi, \eta)$ bezüglich der physikalischer Koordinaten x, y

Einsetzen in schwache Form und Ausklammern

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\varepsilon}^t(\boldsymbol{v}) \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \, dA = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}^t \cdot \boldsymbol{b} \, dA + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \boldsymbol{v}^t \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \, dS$$

also

$$\sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \boldsymbol{v}_I^t \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}_I^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_J \, dA}_{:=\mathbf{K}_{IJ}^e} \cdot \boldsymbol{u}_J = \sum_{I=1}^4 \boldsymbol{v}_I^t \cdot \underbrace{\left[\int_{\mathcal{B}} N_I \boldsymbol{b} \, dA + \int_{\partial\mathcal{B}_t} N_I \bar{\boldsymbol{t}} \, dS \right]}_{:=\mathbf{F}_I^e}$$

Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_{IJ}^e \quad \mathbf{K}_{IJ}^e = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}_I^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_J \, dA$$

globale Stema Elementsteifigkeitsmatrix

Lastvektor

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{F}_I^e \quad \mathbf{F}_I^e = \int_{\mathcal{B}} N_I \mathbf{b} \, dA + \int_{\partial \mathcal{B}_t} N_I \bar{\mathbf{t}} \, dS$$

globaler Vektor Elementlastvektor

6.5 Numerische Integration

Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{IJ}^e = \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} \mathbf{B}_I^t(\xi, \eta) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_J(\xi, \eta) \det \mathbf{J}(\xi, \eta) \, d\xi d\eta$$

erfordert Integration von gebrochen rationalen Funktionen,
anders als für 1d Probleme nicht immer analytisch möglich
→ **numerische Integration**

Quadraturformeln für den eindimensionalen Fall

$$\int_a^b f(\xi) \, d\xi \approx [b - a] \sum_{i=0}^n f(\xi_i) w_i$$

mit

ξ_i ... Stützstellen, Auswertungspunkte der Funktion f
 w_i ... Gewichte der jeweiligen Stützstellen

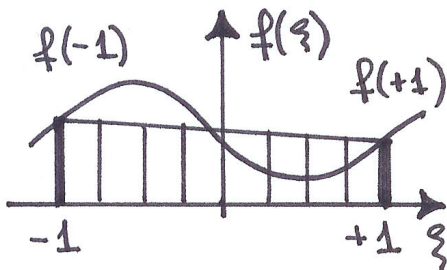
Newton Cotes Quadratur

äquidistante Stützstellen, Stützstellen mit gleichem Abstand

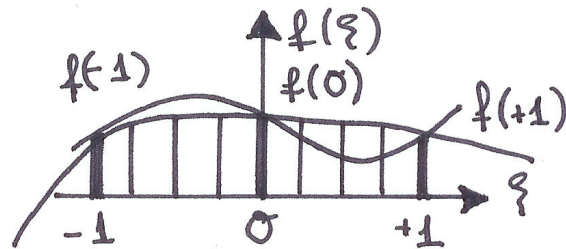
$$\xi_i = -1 + 2 \frac{i}{n}$$

und damit

$$\int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx 2 \sum_{i=0}^n f(\xi_i) w_i$$



zwei Stützstellen



drei Stützstellen

- Beispiel: Trapezregel, 2 Stützstellen, $n = 1$

$$\begin{aligned} \int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi) d\xi &\approx 2 [f(\xi_0) w_0 + f(\xi_1) w_1] \\ &= 2 [f(-1) \frac{1}{2} + f(+1) \frac{1}{2}] \\ &= f(-1) + f(+1) \end{aligned}$$

- Beispiel: Simpsonregel, 3 Stützstellen, $n = 2$

$$\begin{aligned} \int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi) d\xi &\approx 2 [f(\xi_0) w_0 + f(\xi_1) w_1 + f(\xi_2) w_2] \\ &= 2 [f(-1) \frac{1}{6} + f(0) \frac{4}{6} + f(+1) \frac{1}{6}] \end{aligned}$$

allgemein gilt bei n Stützstellen werden Polynome vom Grad $[n - 1]$ exakt integriert!

Gauss Legendre Quadratur

optimierte Lage der Stützstellen

allgemein gilt bei n Stützstellen werden Polynome vom Grad $[2n - 1]$ exakt integriert!

- Beispiel: 1-Punkt-Integration, $n = 1$

$$\int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx 2 [f(0) 1]$$

- Beispiel: 2-Punkt-Integration, $n = 2$

$$\int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx 2 \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{2} + f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{2} \right]$$

- Beispiel: 3-Punkt-Integration, $n = 3$

$$\int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx 2 \left[f\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \frac{5}{18} + f(0) \frac{8}{18} + f\left(+\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \frac{5}{18} \right]$$

Quadraturformeln für mehrdimensionale Integrale

Anwendung der eindimensionalen Quadraturformeln für alle Richtungen

$$\int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m f(\xi_r, \eta_s) w_r w_s$$

üblicherweise gleiche Integration in alle Richtungen, d.h. $n = m$, Ausnahme: Strukturelemente, z.B. Schalen

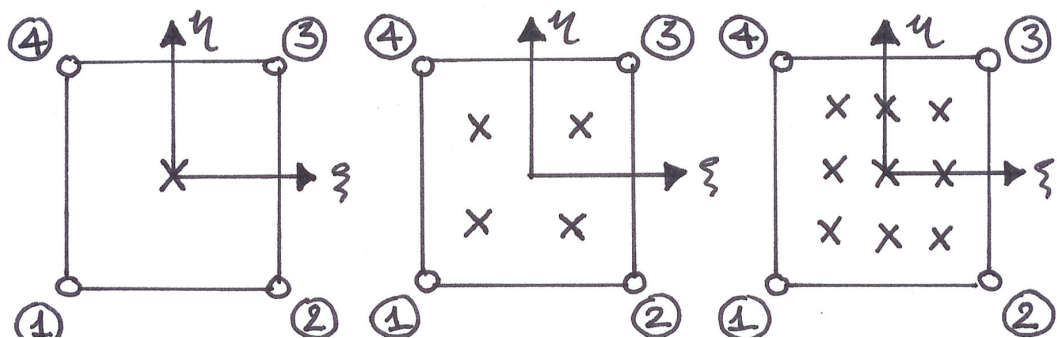
Stützstellen sind auf Rechteckgitter angeordnet

- Beispiel: 1×1 -Punkt-Integration, $n = 1 \times 1$

$$\int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx 4 [f(0,0) 1]$$

- Beispiel: 2×2 -Punkt-Integration, $n = 2 \times 2$

$$\int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



1×1 -Punkt-Int.

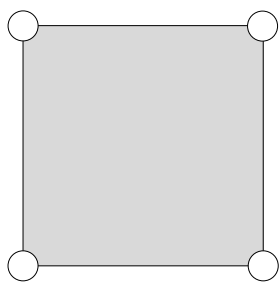
2×2 -Punkt-Int.

3×3 -Punkt-Int.

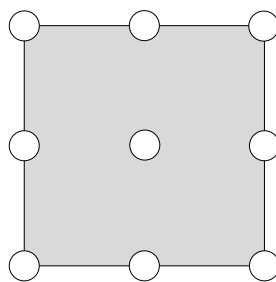
6.6 Gängige Elementfamilien

Lagrange Viereckselemente

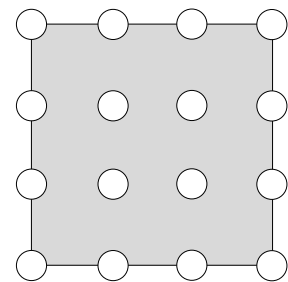
Viereckselemente basierend auf Lagrange'schen Formfunktionen



4 Knoten



9 Knoten



16 Knoten

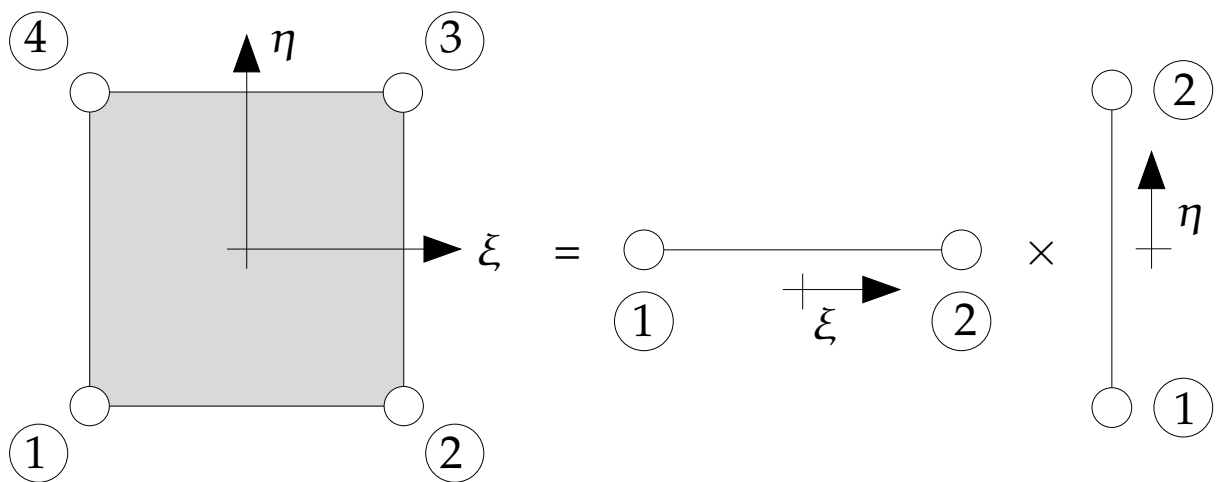
Allgemeiner Konstruktion der Formfunktionen $N_I(\xi, \eta)$

Bi-lineares 4-Knoten-Element

ergibt sich aus linearen Lagrange Polynomen $\hat{N}_I(\xi)$

$$\hat{N}_1(\xi) = \frac{1}{2} [1 - \xi]$$

$$\hat{N}_2(\xi) = \frac{1}{2} [1 + \xi]$$



$$N_1(\xi, \eta) = \hat{N}_1(\xi) \cdot \hat{N}_1(\eta) = \frac{1}{4} [1 - \xi] [1 - \eta]$$

$$N_2(\xi, \eta) = \hat{N}_2(\xi) \cdot \hat{N}_1(\eta) = \frac{1}{4} [1 + \xi] [1 - \eta]$$

$$N_3(\xi, \eta) = \hat{N}_2(\xi) \cdot \hat{N}_2(\eta) = \frac{1}{4} [1 + \xi] [1 + \eta]$$

$$N_4(\xi, \eta) = \hat{N}_1(\xi) \cdot \hat{N}_2(\eta) = \frac{1}{4} [1 - \xi] [1 + \eta]$$

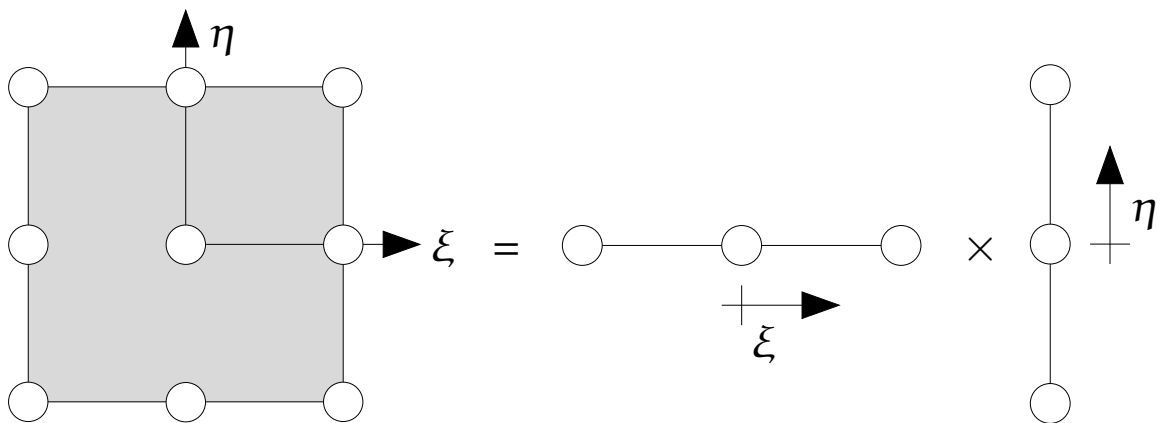
Bi-quadratisches 9-Knoten-Element

ergibt sich aus quadratischen Lagrange Polynomen $\hat{N}_I(\xi)$

$$\hat{N}_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi [\xi - 1]$$

$$\hat{N}_2(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$\hat{N}_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi [\xi + 1]$$



$$N_1(\xi, \eta) = \hat{N}_1(\xi) \cdot \hat{N}_1(\eta) = \frac{1}{4} [\xi^2 - \xi] [\eta^2 - \eta]$$

$$N_2(\xi, \eta) = \hat{N}_3(\xi) \cdot \hat{N}_1(\eta) = \frac{1}{4} [\xi^2 + \xi] [\eta^2 - \eta]$$

$$N_3(\xi, \eta) = \hat{N}_3(\xi) \cdot \hat{N}_3(\eta) = \frac{1}{4} [\xi^2 + \xi] [\eta^2 + \eta]$$

$$N_4(\xi, \eta) = \hat{N}_1(\xi) \cdot \hat{N}_3(\eta) = \frac{1}{4} [\xi^2 - \xi] [\eta^2 + \eta]$$

$$N_5(\xi, \eta) = \hat{N}_1(\xi) \cdot \hat{N}_1(\eta) = \frac{1}{2} [1 - \xi^2] [\eta^2 - \eta]$$

$$N_6(\xi, \eta) = \hat{N}_3(\xi) \cdot \hat{N}_1(\eta) = \frac{1}{2} [\xi^2 + \xi] [1 - \eta^2]$$

$$N_7(\xi, \eta) = \hat{N}_3(\xi) \cdot \hat{N}_3(\eta) = \frac{1}{2} [1 - \xi^2] [\eta^2 + \eta]$$

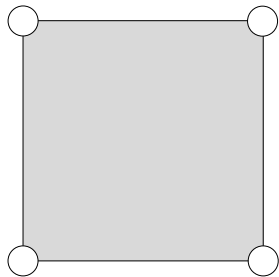
$$N_8(\xi, \eta) = \hat{N}_1(\xi) \cdot \hat{N}_3(\eta) = \frac{1}{2} [\xi^2 - \xi] [1 - \eta^2]$$

$$N_9(\xi, \eta) = \hat{N}_1(\xi) \cdot \hat{N}_3(\eta) = [1 - \xi^2] [1 - \eta^2]$$

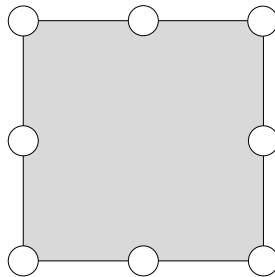
Bemerkung die Beiträge des Innenknotens 9 sind beim Zusammenbau vollständig vom Gesamtsystem entkoppelt, der Innenknoten trägt nicht zur Verbesserung der Genauigkeit der Lösung bei, erweitert also die Grösse des Gleichungssystem unnötig, aufgrund ihrer Form werden die zugehörigen Ansatzfunktionen N_9 auch als "bubble functions" bezeichnet.

Serendipity Elemente

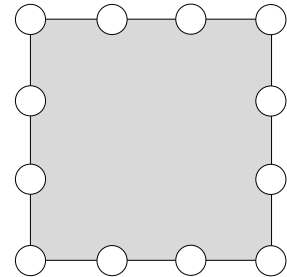
Lagrange Elemente ohne (unnötige) Innenknoten



4 Knoten

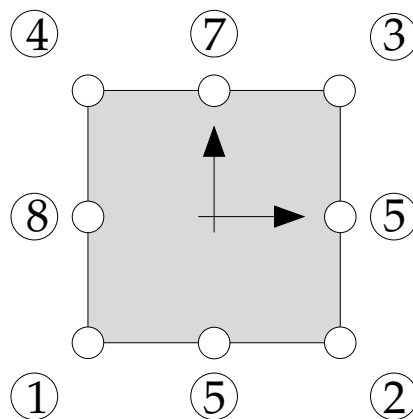


8 Knoten



12 Knoten

Serendipity 8-Knoten Element



$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [1 - \xi] [1 - \eta] [-1 - \xi - \eta]$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [1 + \xi] [1 - \eta] [-1 + \xi - \eta]$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [1 + \xi] [1 + \eta] [-1 + \xi + \eta]$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [1 - \xi] [1 + \eta] [-1 - \xi + \eta]$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [1 - \xi^2] [1 - \eta]$$

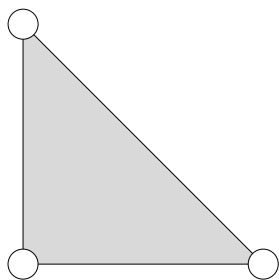
$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [1 + \xi] [1 - \eta^2]$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [1 - \xi^2] [1 + \eta]$$

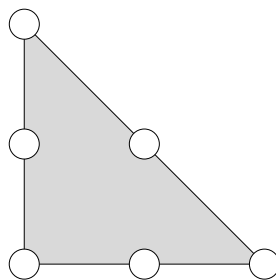
$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [1 - \xi] [1 - \eta^2]$$

Bemerkung man erhält die Formfunktionen N_1 bis N_8 nicht durch einfaches Streichen der Formfunktion N_9 sondern durch "Kondensation" der Beiträge der inneren Knoten

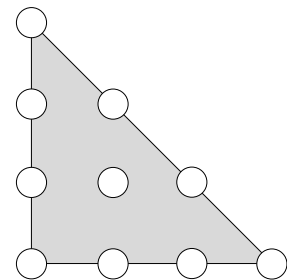
Dreieckselemente



3 Knoten



6 Knoten



9 Knoten

Lineares 3-Knoten Element

Erinnerung Dreiecks-/Flächenkoordinaten

$$N_1 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 (x, y)$$

$$N_2 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_2 (x, y)$$

$$N_3 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_3 (x, y)$$

mit $\lambda_I = A_I/A$ für $I=1,2,3$ mit $\sum_{I=1}^3 \lambda_I = 1$

Konstruktion der Formfunktionen $N_I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = N_I(x, y)$

$$N_1 (x, y) = \frac{1}{2A_2} [x_2 y_3 - x_3 y_2] + [y_2 - y_3]x + [x_3 - x_2]y$$

$$N_2 (x, y) = \frac{1}{2A_2} [x_3 y_1 - x_1 y_3] + [y_3 - y_1]x + [x_1 - x_3]y$$

$$N_3 (x, y) = \frac{1}{2A_2} [x_1 y_2 - x_2 y_1] + [y_1 - y_2]x + [x_2 - x_1]y$$

numerische Integration, hier sinnvoll: 1-Punkt-Integration

$$\lambda_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right] \quad w_1 = 1$$

Quadratisches 6-Knoten Element

Konstruktion der Formfunktionen $N_I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = N_I(x, y)$

Bedingung $N_I(\lambda_2, \lambda_2 \lambda_3) = \delta_{IJ}$

Überlegung Formfunktionen an Eckknoten, Beispiel N_1

$$@\lambda_1 = 0 \quad \text{Knoten 2, 3, 5} \quad N_1(0, \lambda_2, \lambda_3) = 0$$

$$@\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \text{Knoten 4, 6} \quad N_1\left(\frac{1}{2}, \lambda_2, \lambda_3\right) = 0$$

$$@\lambda_1 = 1 \quad \text{Knoten 1} \quad N_1(1, \lambda_2, \lambda_3) = 1$$

aus Überlegungen folgt $N_1 = \lambda_1 [2 \lambda_1 - 1]$

Überlegung Formfunktionen an Kantenmittelknoten, Beispiel N_4

$$@\lambda_1 = 0 \quad \text{Knoten 2, 3, 5} \quad N_1(0, \lambda_2, \lambda_3) = 0$$

$$@\lambda_2 = 0 \quad \text{Knoten 1, 3, 6} \quad N_1(\lambda_1, 0, \lambda_3) = 0$$

$$@\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \text{Knoten 4} \quad N_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda_3\right) = 1$$

aus Überlegungen folgt $N_4 = \lambda_1 \lambda_2$

$$N_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 [2\lambda_1 - 1]$$

$$N_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_2 [2\lambda_2 - 1]$$

$$N_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_3 [2\lambda_3 - 1]$$

$$N_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 4\lambda_1\lambda_2$$

$$N_5(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 4\lambda_2\lambda_3$$

$$N_6(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 4\lambda_3\lambda_1$$

durch einfaches Einsetzen der λ_I Parametrisierung in x, y

numerische Integration, hier sinnvoll: 3-Punkt-Integration

$$\lambda_1 = \left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad w_1 = \frac{1}{3}$$

$$\lambda_2 = \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right] \quad w_2 = \frac{1}{3}$$

$$\lambda_3 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right] \quad w_3 = \frac{1}{3}$$

6.7 Implementierung in MATLAB

krag8.m

Diskretisierung und Berechnung einer Klagscheibe mit 8 isoparametrischen 4-Knoten Scheibenelementen

```
% Initialisierung
clear K clear F clear Ke clear Fe clear bc
clear disp clear edof clear ex clear ey

emod = input('Elastizitaetsmodul = ');
nu = input('Querkontraktionszahl = ');

nel = 8;
node = 15;
ndof = 2*node;

K = zeros(ndof,ndof);
F = zeros(ndof,1);

% Knotenkoordinaten und Topologie
% Element 1
edof(1,:) = [1 1 2 7 8 9 10 3 4];
ex(1,:) = [0 12 12 0];
ey(1,:) = [0 0 6 6];
% Element 2
edof(2,:) = [2 3 4 9 10 11 12 5 6];
ex(2,:) = [0 12 12 0];
ey(2,:) = [6 6 12 12];
```

```
% Element 3
edof(3,:) = [3 7 8 13 14 15 16 9 10];
ex(3,:) = [12 24 24 12];
ey(3,:) = [ 0 0 6 6];
% Element 4
edof(4,:) = [4 9 10 15 16 17 18 11 12];
ex(4,:) = [12 24 24 12];
ey(4,:) = [ 6 6 12 12];
% Element 5
edof(5,:) = [5 13 14 19 20 21 22 15 16];
ex(5,:) = [24 36 36 24];
ey(5,:) = [ 0 0 6 6];
% Element 6
edof(6,:) = [6 15 16 21 22 23 24 17 18];
ex(6,:) = [24 36 36 24];
ey(6,:) = [ 6 6 12 12];
% Element 7
edof(7,:) = [7 19 20 25 26 27 28 21 22];
ex(7,:) = [36 48 48 36];
ey(7,:) = [ 0 0 6 6];
% Element 8
edof(8,:) = [8 21 22 27 28 29 30 23 24];
ex(8,:) = [36 48 48 36];
ey(8,:) = [ 6 6 12 12];

% Materialmatrix
fact = emod/((1+nu)*(1-2*nu));
D = fact*[1-nu nu 0; nu 1-nu 0; 0 0 (1-2*nu)/2];
```



```
% Aufbau der Elementmatrizen und Zusammenbau
ir = 2;
% Schleife ueber Elemente
for i = 1:nel
[ Ke,Fe ]=elmt01(ex(i,:),ey(i,:),ir,D);
[ K,F ] = assem(edof(i,:),K,Ke,F,Fe);
end

% Loesung des LGS unter Beruecksichtigung der RB
% RB: Linker Rand eingespannt
bc = [1 0; 2 0; 3 0; 4 0; 5 0; 6 0];
% Belastung: Einzellast im Knoten 14
F(28) = F(28) + 40;

[disp,Q] = solveq(K,F,bc);

% Elementverschiebungen
ed=extract(edof,disp);
% Plot des deformierten Netzes, skaliert mit
magnfac
[magnfac]=drawmom(ex,ey,ed);
```

elmt01.m

Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementlastvektors für isoparametrisches 4-Knoten Element

```
function [Ke,Fe]=elmt01(ex,ey,ir,D,be)
%-----
% INPUT:
% ex = [x1 x2 x3 x4] ... x-Knotenkoordinaten
% ey = [y1 y2 y3 y4] ... y-Knotenkoordinaten
% ir ... Anzahl der Integrationspunkte pro Richtung
% D ... [3x3] Materialmatrix
% be = [bx; by] ... Volumenlastvektor
% OUTPUT:
% Ke ... [8x8] Elementsteifigkeitsmatrix
% Fe ... [1x1] Elementlastvektor
%-----

% Volumenlastvektor
if nargin==4 b=zeros(2,1); else b=be; end

% Gauss Punkte
ngp=ir*ir;
if ir==1
g1=0.0; w1=2.0;
gp=[ g1 g1 ]; w=[ w1 w1 ];
elseif ir==2
g1=0.577350269189626; w1=1;
gp(:,1)=[-g1; g1;-g1; g1];
gp(:,2)=[-g1;-g1; g1; g1];
```

```

w(:,1)=[ w1; w1; w1; w1];
w(:,2)=[ w1; w1; w1; w1];
elseif ir==3
g1=0.774596669241483; g2=0.;
w1=0.5555555555555555; w2=0.8888888888888888;
gp(:,1)=[-g1;-g2; g1;-g1; g2; g1;-g1; g2; g1];
gp(:,2)=[-g1;-g1;-g1; g2; g2; g2; g1; g1; g1];
w(:,1)=[ w1; w2; w1; w1; w2; w1; w1; w2; w1];
w(:,2)=[ w1; w1; w1; w2; w2; w2; w1; w1; w1];
else
disp('Used number of integration points not
implemented');
return
end

wp=w(:,1).*w(:,2);
xsi=gp(:,1); eta=gp(:,2); r2=ngp*2;

% Formfunktionen
N(:,1)=(1-xsi).*(1-eta)/4;
N(:,2)=(1+xsi).*(1-eta)/4;
N(:,3)=(1+xsi).*(1+eta)/4;
N(:,4)=(1-xsi).*(1+eta)/4;

% Partielle Ableitungen der N nach xsi
dNr(1:2:r2,1)=-(1-eta)/4;
dNr(1:2:r2,2)= (1-eta)/4;
dNr(1:2:r2,3)= (1+eta)/4;
dNr(1:2:r2,4)=-(1+eta)/4;

```

```
% Partielle Ableitungen der N nach eta
dNr(2:2:r2+1,1)=-(1-xxi)/4;
dNr(2:2:r2+1,2)=-(1+xxi)/4;
dNr(2:2:r2+1,3)= (1+xxi)/4;
dNr(2:2:r2+1,4)= (1-xxi)/4;

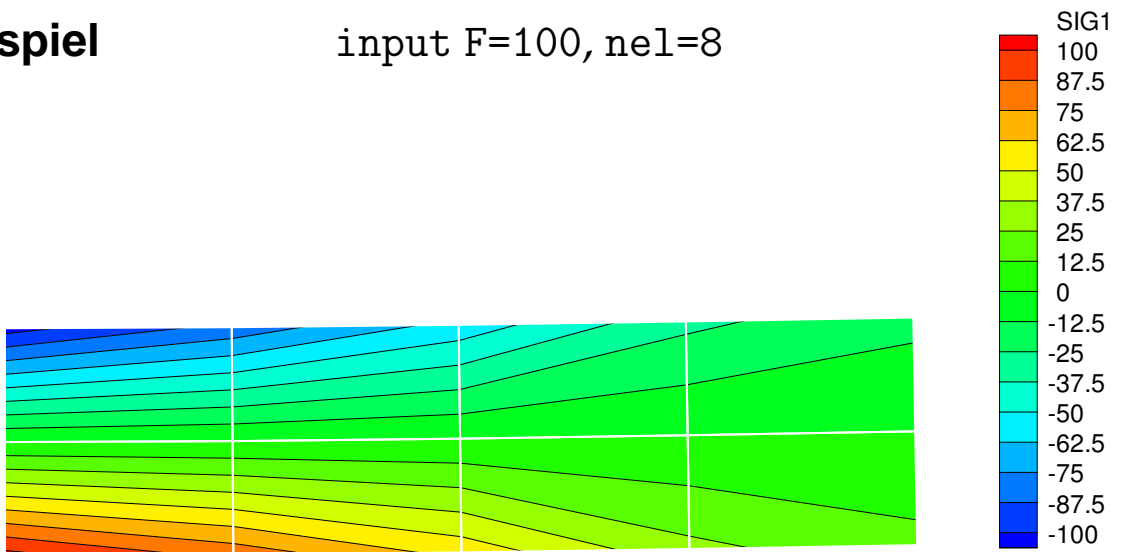
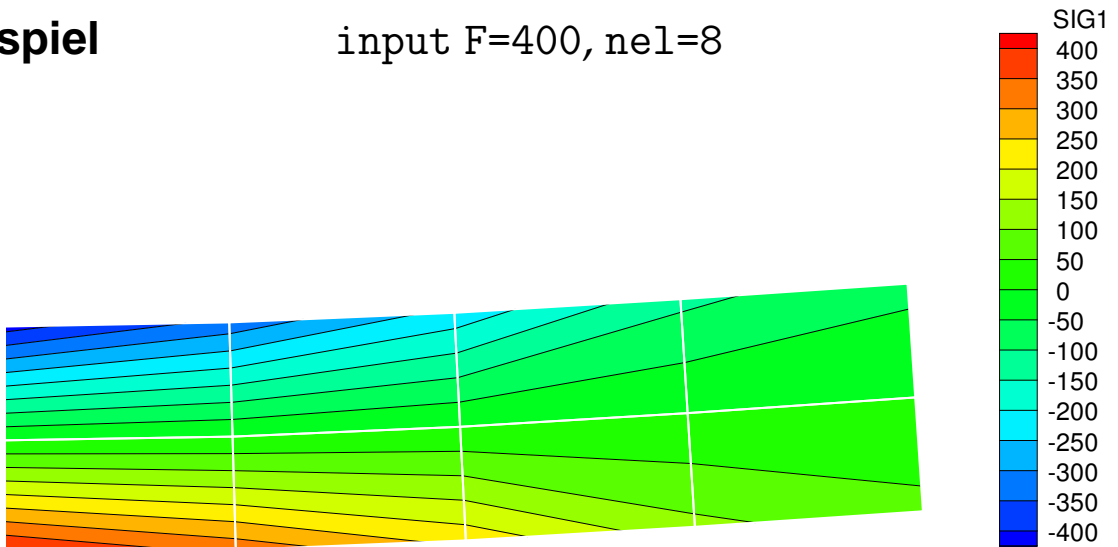
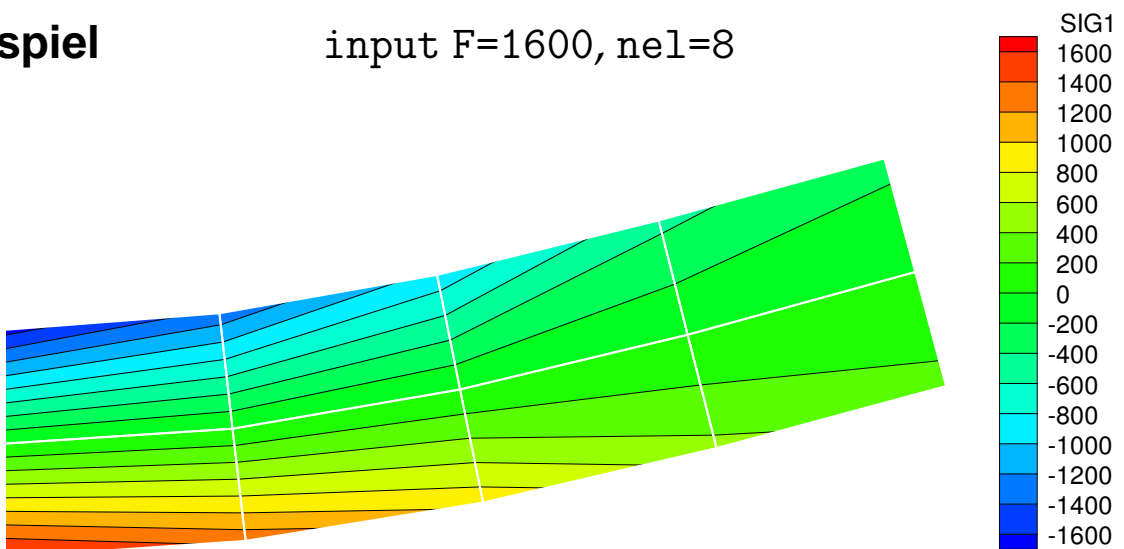
% Transponierte Jacobimatrix
JT=dNr*[ex;ey]';
Ke=zeros(8,8);
fe=zeros(8,1);

% Elementmatrizen, Schleife ueber alle IP
for i=1:ngp
    indx=[ 2*i-1; 2*i ];
    detJ=det(JT(indx,:));
    if (detJ<10*eps); disp('det J < 0!'); end
    JTinv=inv(JT(indx,:));
    dNx=JTinv*dNr(indx,:);

    B(1,1:2:8-1)=dNx(1,:);
    B(2,2:2:8) =dNx(2,:);
    B(3,1:2:8-1)=dNx(2,:);
    B(3,2:2:8) =dNx(1,:);

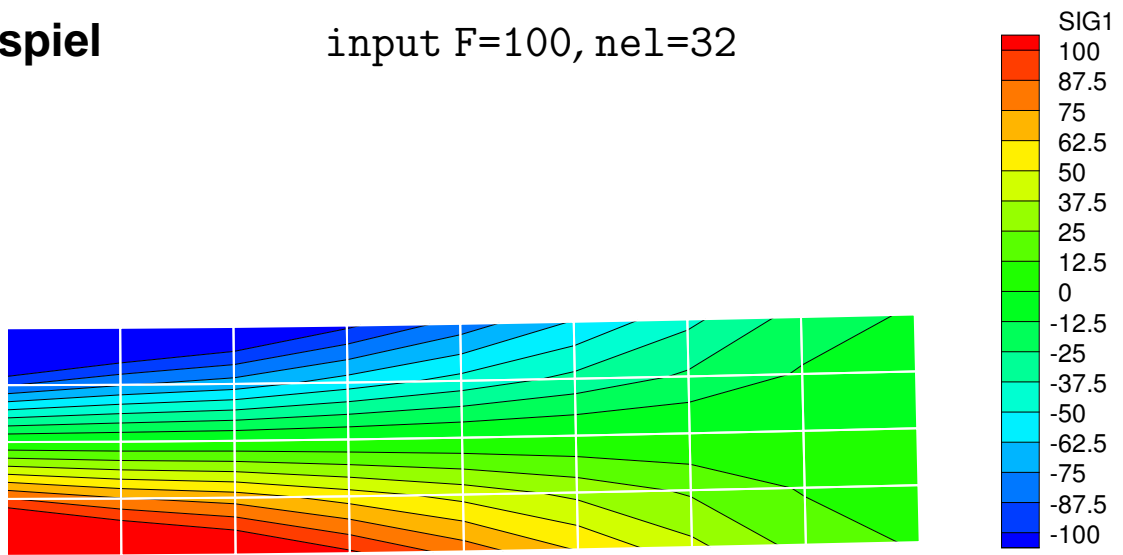
    N2(1,1:2:8-1)=N(i,:);
    N2(2,2:2:8) =N(i,:);

    Ke=Ke+B'*D*B*detJ*wp(i);
    Fe=fe+N2'*b*detJ*wp(i);
end
```

Beispielinput $F=100$, $nel=8$ **Beispiel**input $F=400$, $nel=8$ **Beispiel**input $F=1600$, $nel=8$ 

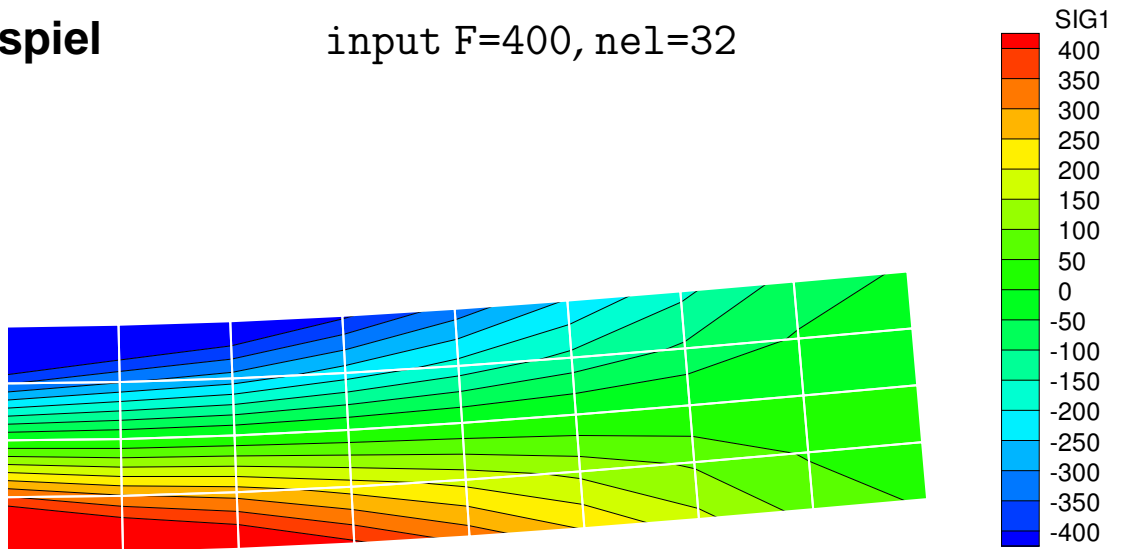
Beispiel

input F=100, nel=32



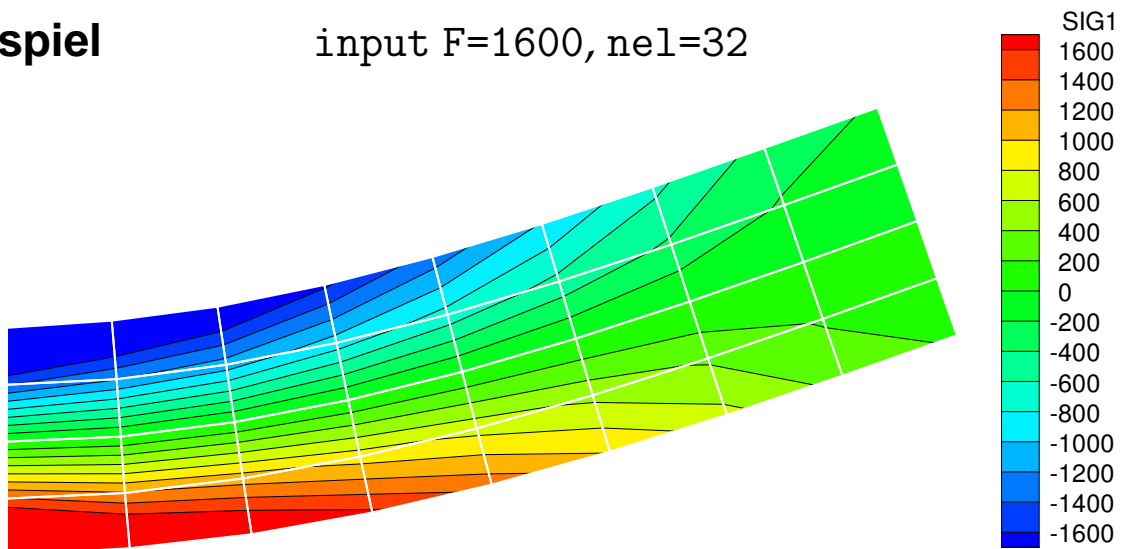
Beispiel

input F=400, nel=32



Beispiel

input F=1600, nel=32



Literaturverzeichnis

- [1] Bathe, K. J. [1995]. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [2] Bathe, K. J. [2002]. *Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag, Berlin.
- [3] Belytschko, T., W. K. Liu & B. Moran [2000]. *Nonlinear Finite Element Analysis for Continua and Structures*. John Wiley & Sons.
- [4] Bonet, J. & R. D. Wood [1997]. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press.
- [5] Cook, R. D. [1995]. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley & Sons.
- [6] Cook, R. D., D. S. Malkus, M. E. Plesha & R. J. Witt [2002]. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.
- [7] Crisfield, M. A. [1996]. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons.

- [8] Gross, D., W. Hauger, W. Schnell & P. Wriggers [2004]. *Technische Mechanik IV*. Springer Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, fifth edition.
- [9] Holzapfel, G. A. [2000]. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons.
- [10] Hughes, T. J. R. [2000]. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [11] Wriggers, P. [2001]. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag, Berlin.
- [12] Zienkiewicz, O. C. & R. L. Taylor [2000]. *The Finite Element Method, Volume I: The Basis*. Butterworth Heinemann, fifth edition.
- [13] Zienkiewicz, O. C. & R. L. Taylor [2000]. *The Finite Element Method, Volume II: Solid Mechanics*. Butterworth Heinemann, fifth edition.
- [14] Zienkiewicz, O. C. & R. L. Taylor [2000]. *The Finite Element Method, Volume III: Fluid Dynamics*. Butterworth Heinemann, fifth edition.