SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 9 für G8 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

1. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

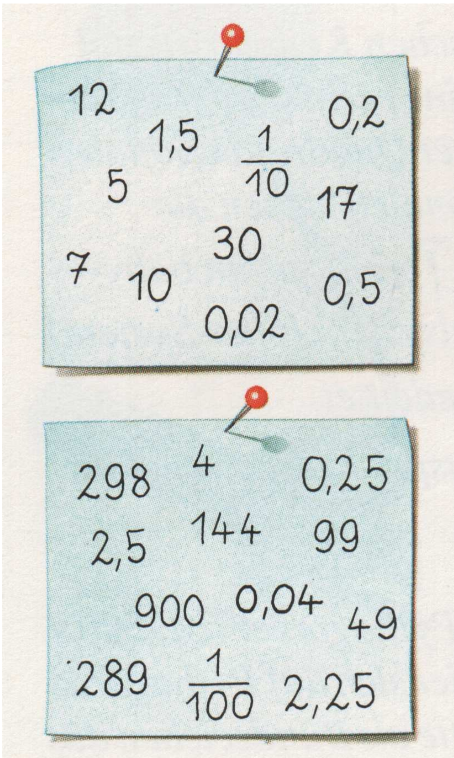
Algebra

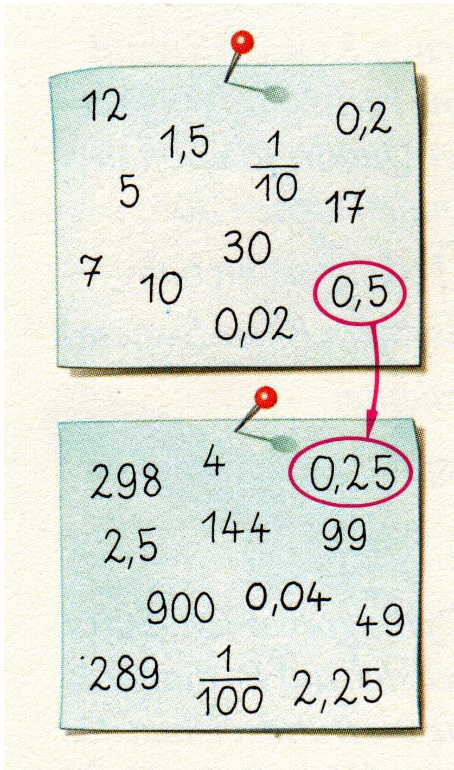
1. Die reellen Zahlen

1.1. Quadratwurzel

1. **Zahlenpartner**

   Wie lassen sich die Zahlen auf dem oberen und unteren Notizzettel einander sinnvoll zuordnen?





   Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

   Variationen:

   (a) einfachere Zahlen
   (b) ein weiteres offensichtliches Beispiel einfügen
   (c) weiteren Pfeil einzeichnen
   (d) Pfeile ganz weglassen
   (e) Zahlen betrachten, die keinen Partner haben

(f) Zuordnungstabelle

2. **Vermischtes zum Thema Wurzeln**

   Ziehe die Wurzeln:

   (a) $\sqrt{8100}$

   (b) $\sqrt{81}$

   (c) $\sqrt{0,81}$

   (d) $\sqrt{0,0081}$

   (e) $\sqrt{\frac{25}{16}}$

   (f) $\sqrt{0,000009}$

   (g) $\sqrt{x^2}$ für $x = -3$

   (h) $\sqrt{\frac{125}{245}}$

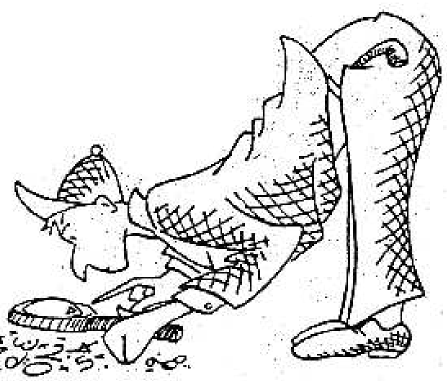
   Quelle: mathematik lehren 70 (1995)

3. **Übungen zu Wurzeln und Potenzen**

COPY
52 Praxis Schule 1/96 Mathematik

Wie heißt der Geheimagent?

$2^3 \cdot 2^4$	2^{12}	T	0^{-2}	0	K
	2^7	B		n.l.	H
	4^7	M		1	M
$\sqrt[3]{0}$	n.l.	O	$a^7 \cdot a^{-3} \cdot a^2$	a^{12}	B
	0	I		a^{-42}	A
	1	A		a^6	L
$\sqrt[2]{\sqrt[4]{16}}$	1	N	$\sqrt[4]{64\,z^4}$	$64\,z$	T
	$\sqrt[2]{2}$	L		$\sqrt[4]{64}z$	A
	$\sqrt[6]{16}$	M		$4\,z$	V
$\dfrac{11^5}{11^{-2}}$	11^3	N	$\sqrt[3]{27\,x^3\,y^9}$	$27\,x\,y^3$	E
	11^{-3}	M		$\sqrt{27}\,x\,y^3$	R
	11^7	L		$3\,x\,y^3$	U
$\sqrt[6]{1}$	1	Y	$\dfrac{4^{-2}}{4^2} : 4^{-2}$	4^{-2}	E
	6	I		4^2	G
	n.l.	E		$\frac{1}{4^{-2}}$	R
$\left(\sqrt[2]{4}\right)^2$	2	S	_ _ _ _ _		
	16	A	_ _ _		
	4	D	_ _ _ _ _ _ _		
$\sqrt{-9}$	3	U			
	-3	V			
	n.l.	E			
3^0	0	P			
	1	R			
	3	S			
$\dfrac{1^3}{4}$	$\frac{1}{48}$	H			
	$\frac{1}{4}$	S			
	$\frac{3}{48}$	E			
2^{-3}	$\frac{1}{8}$	C			
	8	A			
	n.l.	R			



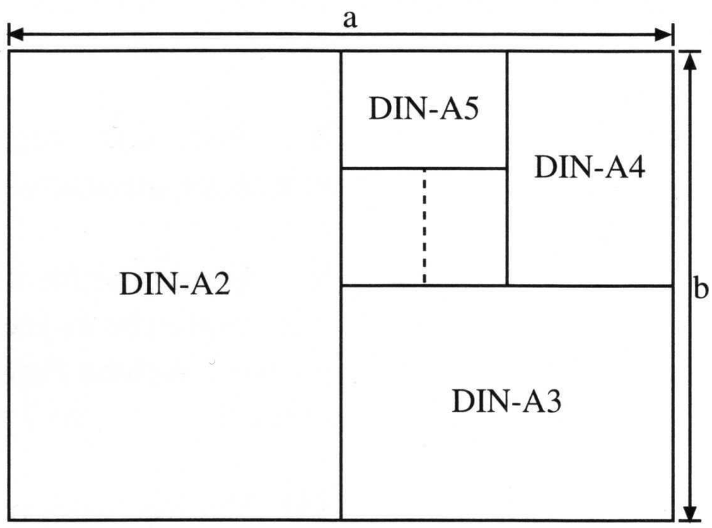
westermann

Quelle: Westermann

4. **Kartonformen**

   In Deutschland werden bestimmte Papiergrößen nach der DeutschenIndustrieNorm (DIN) bezeichnet. Für DIN-A Formate von Papier gelten folgende Bedingungen:

   - Die Rechtecke sind einander ähnlich.
   - Durch Halbieren der längeren Seite erhält man das nächstkleinere DIN-A Format.
   - Ein Rechteck des Formats DIN-A 0 ist $1\,\mathrm{m}^2$ groß.

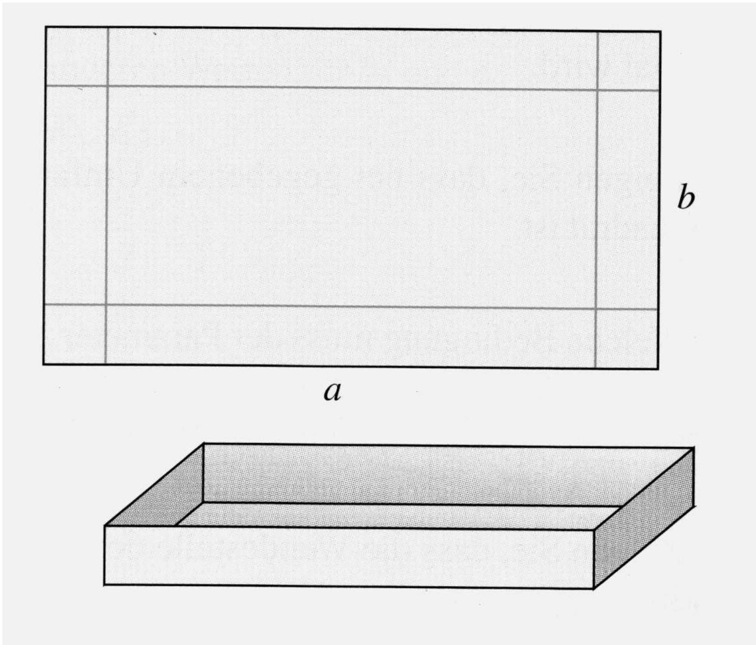


DIN-A1-Blatt

   (a) Bestimme den Verkleinerungsfaktor, den man am Fotokopierer einstellen muss, um ein DIN-A4 Blatt auf DIN-A5 zu verkleinern.

   (b) Wie ist das beim Verkleinern von DIN-A2 auf DIN-A3?

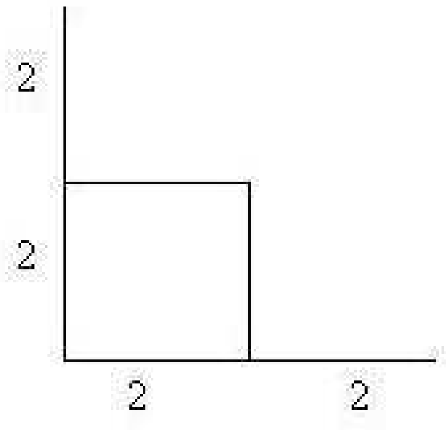
   (c) Eine Fabrik stellt aus DIN-A4 Pappstücken oben offene quaderförmige Pappkästen mit maximalem Volumen her (siehe Abbildung). Dabei wird an jeder Ecke ein Quadrat als Klebefalz benutzt. Den wie vielfachen Rauminhalt hätte ein solcher Kasten aus DIN-A3 Papier?



5. **Sokrates und der Sklave Menon**

   Lies den folgenden Dialog. In der unten stehenden Skizze kannst du den Gedankengang nachzeichnen, so kannst du ihn besser nachvollziehen. Der Dialog ist nicht vollständig abgedruckt. Versetze dich in die Lage des Sklaven Menon und versuche, das Problem zu lösen.
   Kommst du alleine nicht weiter, darfst du dir Hilfen holen (Hilfe 1, Hilfe 2) - hier wird der Dialog fortgesetzt.

Dialog zwischen Sokrates und dem Sklaven Menon



Sokrates: (zum Sklaven) Sage, siehst du dieser viereckigen Fläche an, dass sie ein Quadrat ist?
Menon: Ja.
Sokrates: Nehmen wir einmal an, diese Seite ist zwei Fuß lang und diese Seite ebenfalls.
Wie viel Quadratfuß wäre die ganze Fläche?
Menon: Vier, mein Sokrates.
Sokrates: Ließe sich nun nicht ein zweites, doppelt so großes Quadrat herstellen?
Menon: Ja.
Sokrates: Wie viel Fuß wird es also enthalten?
Menon: Acht.
Sokrates: Wohlan denn, versuche mir zu sagen, wie lang jede Seite sein wird. Die Seite unseres Quadrates hier ist zwei Fuß lang; wie lang wird also nun die Seite des doppelten sein?
Menon: Offenbar doppelt so lang.
Sokrates: Sage mir: Die doppelte Seite soll deiner Behauptung zufolge das doppelte Quadrat ergeben?
Menon: Ich bleibe dabei.
Sokrates: Erhält nun nicht diese Seite die doppelte Länge, wenn wir ihr eine gleich große Strecke anfügen?
Menon: Gewiss.
Sokrates: Diese verdoppelte Strecke also, behauptest du, soll das achtfüßige Quadrat ergeben, wenn man vier gleich große Seiten bildet?
Menon: Ja.
Sokrates: Lass uns also auf ihr ein Quadrat mit lauter gleichen Seiten konstruieren. Dann muss doch wohl dies hier das Quadrat sein, welches du für ein achtfüßiges ausgibst?
Menon: Allerdings.
Sokrates: Sind in ihm nicht alle vier Quadrate enthalten, deren jedes diesem vierfüßigen gleich ist?
Menon: Ja.
Sokrates: Wie groß also muss es sein? Nicht viermal so groß?
Menon: Du hast Recht.
Sokrates: Denn viermal vier ist sechzehn. Nicht wahr?
Menon: Ja.
Sokrates: Welche Linie aber ergibt das achtfüßige? Diese ergibt doch das vierfache?
Menon: Ja.

Sokrates:	Es muss also doch die Seite des achtfüßigen Quadrates größer sein als diese zweifüßige hier, kleiner aber als die vierfüßige?
Menon:	Notwendigerweise.
Sokrates:	Versuche also zu sagen, wie lang sie nach deiner Meinung sein muss.
Menon:	Drei Fuß lang.
Sokrates:	Wenn sie also drei Fuß lang sein soll, so müssen wir doch die Hälfte von dieser anfügen, um sie dreifüßig zu machen? Denn diese Seite beträgt zwei, diese da einen Fuß. Und ebenso an dieser Seite hier. Dies hier sind zwei, dies ist ein Fuß. Und so ergibt sich denn dies von dir gemeinte Quadrat.
Menon:	Ja.
Sokrates:	Wenn es nun auf dieser Seite drei Fuß lang ist und auf dieser auch, so muss die ganze Fläche doch dreimal drei Fuß groß sein?
Menon:	Offenbar.
Sokrates:	Dreimal drei macht aber wie viel Fuß?
Menon:	Neun.
Sokrates:	Das doppelte aber müsste wie viel Fuß sein?
Menon:	Acht.
Sokrates:	Also auch die dreifüßige Seite ergibt noch nicht das achtfüßige Quadrat.
Menon:	Aber beim Zeus, mein Sokrates, ich weiß es nicht.

... Versuche vorerst das Problem selbständig zu lösen. Benutze Hilfe 1 *erst, wenn du nicht mehr weiter weißt. Setze dann den Dialog fort. Versetze dich dabei in die Lage von Sokrates und erkläre deine Lösung möglichst gut.*

Hilfe 1

Sokrates:	Ist dies nicht unser vierfüßiges Quadrat?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Wir können ihm doch daneben und drüber ein zweites und drittes anfügen.
Menon:	Ja.
Sokrates:	Und ein viertes hinzufügen, sodass wieder ein Quadrat entsteht?
Menon:	Ja.
Sokrates:	So wären das also vier gleiche Quadrate?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Wie viel mal so groß ist nun also dies Ganze als das ursprüngliche hier?
Menon:	Viermal so groß.
Sokrates:	Es sollte aber nur doppelt so groß sein.
Menon:	Ja, gewiss.
Sokrates:	Lässt sich nicht jedes der vier Quadrate in zwei gleichgroße Hälften teilen?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Es ließen sich doch vier gleich lange Diagonalen ziehen, die ihrerseits wieder ein Quadrat ergeben?
Menon:	So ist es.
Sokrates:	Überlege also: Wie groß ist dieses Quadrat?

... Stelle vorerst eigene Überlegungen an. Danach darfst du Hilfe 2 *heranziehen.*

Hilfe 2

Menon:	Ich kann nicht darauf kommen.
Sokrates:	Sind dies nicht vier Quadrate und umschließen nicht die vier Diagonalen von jedem Quadrat die Hälfte?
Menon:	Gewiss.
Sokrates:	Wie viele solcher Hälften sind nun in dem neuen Quadrat enthalten?
Menon:	Vier.
Sokrates:	Wie viele aber in dem ursprünglichen Quadrat?
Menon:	Zwei.
Sokrates:	Vier aber sind im Verhältnis zu den zwei?
Menon:	Das Doppelte.
Sokrates:	Ist dies aber der Fall, so muss die Diagonale die Seite des doppelten Quadrats bilden.
Menon:	Ohne Zweifel, Sokrates!

Quelle: Curriculum Geschichte I: Altertum. Diesterweg (1975), S.79ff

6. Welche Gleichung der Form $x^2 = a$ hat als Lösung

   (a) -2 ? (b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$?

7. Schreibe als Quadratwurzel und gib an den Stellen „ ..... “ jeweils an, wann dies möglich ist:

   0,02; $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$; a^3, falls ....;

   $a - 2b$, falls ....; $-x^3$, falls ....; $x \cdot |x|$, falls ....

8. Schreibe folgende Terme jeweils als Wurzel, falls dies möglich ist:
   (a) xz, wobei $x, z \in \mathbb{Q}^-$
   (b) p^2, wobei $p \in \mathbb{Q}^-$
   (c) yz^2, wobei $y \in \mathbb{Q}^+, z \in \mathbb{Q}^-$
   (d) $|q| \cdot p^3$, wobei $p, q \in \mathbb{Q}^-$
   (e) $-rs$, wobei $r, s \in \mathbb{Q}^-$

9. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Gib gegebenenfalls an, was zusätzlich vorausgesetzt werden muß, damit die Aussagen wahr werden.
   (a) Ist $0 < x < y$, so ist $\sqrt{x} < \sqrt{y}$
   (b) Es gilt stets $\sqrt{x} < x$.
   (c) $\left(\sqrt{-x}\right)^2 = \sqrt{x^2}$

10. Zeige, daß die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ eine irrationale Zahl ist.

    Gehe dazu von der Annahme $x = \dfrac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{N}$, p, q teilerfremd, aus und führe dies zu einem Widerspruch.

11. Ist eine positive Zahl irrational, so ist auch ihre Quadratwurzel irrational.
    (a) Beweise diesen Satz!
    (b) Prüfe, ob auch die Umkehrung richtig ist! Begründe deine Antwort!

12. Bestimme die Definitionsmenge von:

    (a) $\sqrt{c+4}$ (b) $\sqrt{-c^2}$ (c) $\sqrt{(-c)^2}$ (d) $\sqrt{c^3}$

13. Bestimme die Definitionsmenge des folgenden Terms:

$$\sqrt{\frac{-2}{x \cdot (x-4)}}$$

14. Bestimme ausführlich die Definitionsmenge ($G = \mathbb{R}$):

$$\sqrt{\frac{-7}{(5+x) \cdot (3-x)}}$$

15. Bestimme die Definitionsmenge für den folgenden Term!
Grundmenge ist $\mathbb{R}$. Eine Vereinfachung des Terms ist *nicht* verlangt!

$$\frac{5x}{2-\sqrt{x}} - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3}}$$

1.2. Menge der reellen Zahlen

1. a sei eine positive, nicht ganze rationale Zahl, d.h. $a \in \mathbb{Q}^+$ und $a \notin \mathbb{N}$. Die Bruchdarstellung $a = \frac{Z}{N}$ sei vollständig gekürzt, d.h. die Primfaktorzerlegungen

$$Z = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \quad \text{und} \quad N = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$$

enthalten keinen gemeinsamen Faktor.

(a) Beweise, dass auch a^2 keine natürliche Zahl ist ($a^2 \notin \mathbb{N}$) und formuliere das Ergebnis in einem prägnanten Satz.

(b) Gibt es eine rationale Zahl, deren Quadrat 10 ist?

(c) Gibt es eine rationale Zahl, deren Quadrat 1000 ist?

(d) Gibt es eine rationale Zahl, deren Quadrat 10^n ($n \in \mathbb{N}$) ist?

2. **Konstruktion irrationaler Zahlen**

Konstruiere eine Zahl, die nicht abbricht und nicht periodisch ist.

3. Untersuche, ob x rational ist! Schreibe zu jeder Antwort eine kurze, aber logisch einwandfreie Begründung! Falls x rational ist, ist x als vollständig gekürzter Bruch darzustellen!

(a) $x = 2,314113111411113111114.......$

(b) $x = -0,0545454.......$

(c) $x = 0,12636363.......$

(d) $x^2 = 21$

(e) $x^2 = -4$

1.3. Intervallschachtelungen

1. **Intervallschachtelung mit Telefonnummern**

   Wie kann die (sechsstellige) Telefonnummer von Sabine 'erraten' werden, wenn Sabine nur mit 'Höher' oder 'Niedriger' antwortet?

   Variationen:

   (a) Tel-Nr. eines Schülers verwenden

   (b) Wie oft muss man bei einer sechsstelligen Zahl höchstens nachfragen? Antwort: Zwanzig Mal

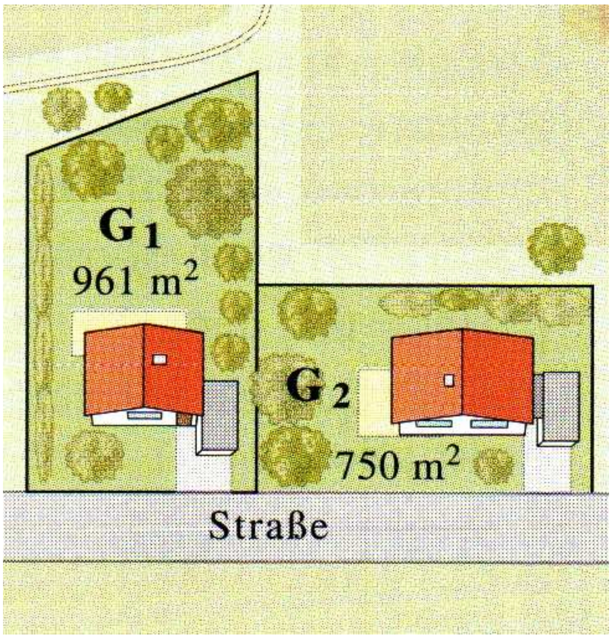
2. **Straßenreinigungsgebühr**

   Denke dir die beiden Grundstücke G_1 und G_2 aus dem nebenstehenden Beispiel jeweils in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat mit den Seitenlängen a_1 bzw. a_2 verwandelt.

   (a) Gib die Seitenlänge a_1 an.

   (b) Zwischen welchen Werten (in vollen Metern) liegt die Seitenlänge a_2?

   (c) Gib die Seitenlänge a_2 auf volle Meter gerundet an. Ermittle dazu zunächst eine Dezimalstelle mehr.



Zur Öffnung bieten sich insbesondere die folgenden Artikel aus der Lokalpresse an:

Von Gerechtigkeit keine Rede

„Straßenreinigung - ‚Wollen keine Gebühren schinden'" (18.2.)

Der erschreckende Bericht über die Stellungnahme des Herrn Bürgermeisters Gehb zu der Berechnung der Straßenreinigungsgebühren - nach der Quadratmeter-Wurzel - kann nicht unwidersprochen bleiben. Ist doch schon die Quadratwurzel unzutreffend; Grundstücke sind keine Quadrate.

Von Gerechtigkeit kann keine Rede sein. Wieso wurde eine Ungerechtigkeit beseitigt, wo 20 000 mehr und 12 000 weniger bezahlen müssen. Bei den Frontmetern seien nie die Grundstücksgrößen berücksichtigt worden. Was hat die Grundstücksgröße mit dem Dreck auf der Straße zu tun? Übersehen ist doch ihre Wichtigkeit zur Frischluftbildung. Die Quadratmeter-Wurzel bringt erneut Ungerechtigkeit. Ist es gerecht, die großen unbebauten Grundstücke für die kleinen bebauten - und von vielen bewohnt - (Dreckverursacher) zahlen zu lassen?

Das 900 Quadratmeter Grundstück als Beispiel bestätigt doch eingehend die Ungerechtigkeit. Wenn das Fehlen der Grundstücksgröße bei den Frontmetern Anlaß einer Beanstandung war, müßte diese Größe umsomehr bei Anwendung der Quadratmeterwurzel beachtet werden. Die Größe darf doch an keiner Stelle verdoppelt werden, auch nicht bei Eckgrundstücken. Selbst bei verschiedenen Reinigungsstufen der beiden Straßen muß dies entfallen. Bei dem 900 Quadratmeter Grundstück - 90.10 m - sind die Quadratmeter den Seiten entsprechend aufzuteilen 9:1 (= 0,9 x 900 = 810 Quadratmeter und 0,1 x 900 = 90 Quadratmeter) und zu verrechnen.

Die Beanstandungen von SPD, CDU und FDP sind berechtigt. Grundstücke werden nur von einer Seite erschlossen; es gibt nur einen Zugang! Diese Regelung gehört abgeschafft. Falsche Veranlagungen haben Geldschinden als Folge! 500 statt 2 500 Widersprüche sind doch kein Sturm im Wasserglas aber ein Beweis, daß viele den Widerspruch unterlassen haben. Ein Widerspruch ist längst keine Kuriosität, wenn der Einlegende weniger zu zahlen hat. Als gerecht Denkender - dem es nicht nur um das Geld geht - hält er solches für notwenig, wenn die Gerechtigkeit auf der Strecke geblieben ist.

Es sind nicht die Grundstücke, sondern die Menschen zur Zahlung heranzuziehen; diese veranlassen die Verschmutzungen. Da bei der Stadt das Geld knapp ist und noch lange bleien wird, ist die Reinigung zu privatisieren. Ein Weg wäre, die Eigentümer übernehmen die Arbeiten selbst (wie bei Streupflicht, Schneebeseitigung). Wer sie nicht ausführen kann oder will, schließt mit Firmen Verträge ab. Beträge bleiben umlagepflichtig.

Sollte die Reinigung bei der Stadt bleiben, müßten die Kosten auf alle Bürger umgelegt werden; Kinder ab Forderung auf Kindergartenplatz. Ständig Bettlägerige wären befreit! Einzug der Gebühren über die Hauswirte, wie die Telekom ihre Kabelgebühren einzieht.

Karl Liese
Mittelbing 12 A
Kassel

HNA 1.3.97

ExtraTip

ales — 22 August 1999 — 0561 7070-0

Wurzel des Übels

Straßenreinigungsgebühr läßt Kasseler Rentner keine Ruhe

Von CHRISTIAN WOLTERS

■ KASSEL – Gleiches Recht für alle. Daran liegt dem Kasseler Rentner Karl Burghardt (78) so viel, daß er sich schon seit 13 Jahren freiwillig mit Quadratwurzeln, Hinterliegern, Eckgrundstücken und der Straßenreinigungs-Gebührensatzung herumschlägt. Noch immer sagt er: „In Kassel wird nicht jeder Grundstückseigner gleich behandelt.“

Jaja, diese Satzung ist schon kompliziert. Und doch erklärt Karl Burghard gern noch einmal, wie „das mit der Straßenreinigungsgebühr“ funktioniert: „Die Quadratwurzel aus der Grundstücksfläche mal Zahl der Seiten, an denen ihr Grundstück erschlossen ist. Und das mal 6,36 Mark.“

Just die sogenannten mehrfach erschlossenen Grundstücke sind es, die dem streitbaren Rentner keine Ruhe lassen: „Die einen werden dreifach veranlagt, weil ein Fahrradweg ihr Grundstuck umschließt, die anderen liegen zwischen zwei Straßen und zahlen nur den einfachen Betrag.“ Willkur sieht der Rentner hier am Werk. Er will von Hunderten von Kasseler Grundstücken wissen, die nicht satzungsgemäß veranlagt werden.

Sein einziges Problem: aufgrund des Steuergeheimnisses erhält er keine Auskünfte seitens der Stadt. Nur die Grundstückseigner selbst konnten Auskünfte einholen und sich zu einer Klage entschließen.

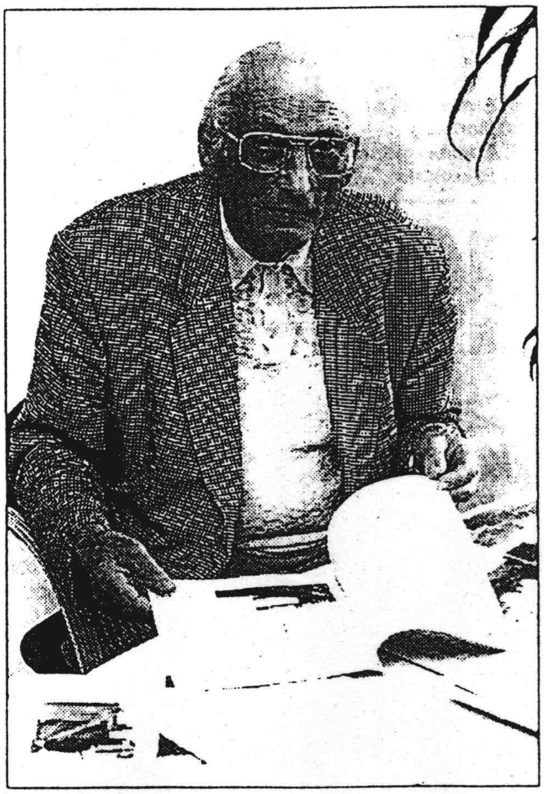
Daß nach der Beschwerdewelle 1994 kein Kasseler diese Möglichkeit wahrnimmt, hat fur Rolf Hedderich, Amtsleiter Kämmerei und Steuern bei der Stadt Kassel, einen guten Grund: „Wir wenden unsere Satzung ordnungsgemäß an“, versicherte er auf Anfrage des EXTRA TIP. Bisher habe man in keinem einzigen Fall einen Veranschlagungsfehler festgestellt. „Die Bürger haben die neue Satzung akzeptiert.“

Nur die Wurzel

Rentner Burghardt will Hedderich da nicht folgen: „Manche haben doch noch gar nicht begriffen, daß sie seit 1994 doppelt oder dreifach zahlen“, sagt er und rät allen Kasselern: „Schauen sie sich ruhig mal ihren Festsetzungsbescheid genauer an.“

Bei Kassels Kommunalpolitikern will Burghardt nun dafür sorgen, daß die ungeliebte Satzung doch noch geändert wird. „Gerecht wäre es, wenn nur noch die Quadratwurzel zur Berechnung der Gebühren herangezogen würde“, sagt er. Sein Traum: „Schluß mit der Mehrfach-Veranlagung.“

Amtsleiter Hedderich macht ihm allerdings wenig Hoffnung. Zur Zeit sei die Straßenreinigungssatzung kein Thema bei den politischen Entscheidungsträgern. Und obendrein Folge die Kämmerei Burghardts Vorschlägen, führte dies zu erheblichen Steuerausfällen. „Und das wird das Regierungspräsidium kaum genehmigen.“

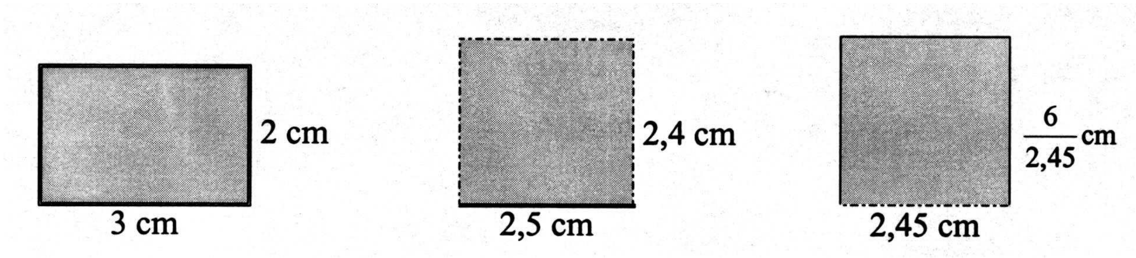


Karl Burghardt scheut keine noch so komplizierte Rechnung: Er will gerechte Gebühren.

Foto: Schachtschneider

Quelle: Elemente der Mathematik 9 (1995)

3. **Heron-Algorithmus**



Bestimme die Seitenlängen des nächsten Rechtecks in der Reihe.
Was fällt dir auf?

Quelle: Lambacher Schweizer (1997)

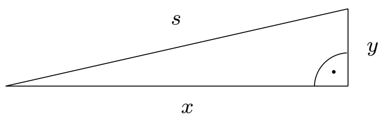
1.4. numerische Berechnungen von Wurzeln

1. (a) Berechne $x = \sqrt{17}$ mit dem Newtonverfahren und dem Startwert $x_1 = 4$. Mache die Probe nach jedem Iterationsschritt.

   (b) h sei eine kleine Zahl, d.h. $|h| \ll 1$. Wir suchen einen Näherungswert für $x = \sqrt{1+h}$. Beginne mit $x_1 = 1$ und berechne mit dem Newtonverfahren den verbesserten Wert x_2. Vereinfache das Ergebnis.

   Berechne mit der gefundenen Formel einen Näherungswert für $a = \sqrt{1{,}005}$. Um wieviel Prozent weicht dieser Näherungswert vom Taschenrechnerwert für a ab?

2. Die Strecke s in nebenstehender Abbildung ist um



$$\delta = s - x = x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - 1 \right)$$

länger als x. Berechne δ mit Hilfe der linearen Näherung für $x = 10\,\mathrm{km}$ und $y = 1\,\mathrm{mm}$.

3. (a) Berechne mit dem Taschenrechner:

$$\sqrt{1,0000001 \cdot 0,9999999}$$

   (b) Zeige, daß für zwei positive, verschiedene Zahlen p und q gilt

$$pq < \left(\frac{p+q}{2}\right)^2$$

und begründe damit, daß ihr geometrisches Mittel strikt kleiner sein muß als ihr arithmetisches Mittel.

(c) Begründe, daß das Ergebnis der ersten Teilaufgabe nicht 1 sein kann.

4. Bestimme mit dem Heron-Verfahren den Wert von $\sqrt{7}$ auf 6 Dezimalen genau.Wähle dazu als Startwert $x = 1$.

5. Ein Rechteck hat die Breite 2 cm und die Länge 5 cm. Bestimme mit dem Heronverfahren die Maße eines flächengleichen Rechtecks, bei dem sich die Längen der Seiten höchstens um $0,01$ cm unterscheiden. Halte dazu deine Zwischenergebnisse in einer Tabelle fest, die jeweils Länge und Breite enthält.

6. Beim Heronschen Verfahren zur Bestimmung der Wurzel aus a kann man Startwerte $x_0 = a$ und $y_0 = 1$ wählen und $\sqrt{a}$ mit Hilfe der Iteration

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{sowie} \quad y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}} \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

berechnen.

(a) Begründe: Das arithmetische Mittel aus den Werten x_n und y_n ist jeweils x_{n+1}, das geometrische Mittel ist immer $\sqrt{a}$.

(b) Für beliebige positive Zahlen p und q ist das arithmetische Mittel immer größer oder gleich dem geometrischen Mittel. Überprüfe zum Nachweis zunächst die Ungleichung:

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq \geqq 0$$

und beweise damit die Behauptung.

(c) Begründe mit Hilfe der letzten Teilaufgabe, daß x_n für $n \geqq 1$ immer größer und y_n immer kleiner als $\sqrt{a}$ ist.

7. **Das Newton-Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel**

Um die Wurzel aus einer Zahl $a > 0$ zu berechnen, starten wir mit einem möglichst genauen Näherungswert $x_1 \approx \sqrt{a}$. x_1 unterscheidet sich vom wahren Wert der Wurzel um die kleine Zahl ε, d. h.

$$\sqrt{a} = x_1 + \varepsilon \qquad \text{(I)}$$

Um den ungefähren Wert von ε zu erhalten, quadriert man zunächst (I). Unter der Voraussetzung, daß $|\varepsilon|$ sehr klein gegen x_1 ist, kann man ε^2 vernachlässigen und die so entstandene Gleichung nach ε auflösen. Damit erhält man dann die bessere Näherung $x_2 = x_1 + \varepsilon$ für $\sqrt{a}$.

(a) Beweise:

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right)} \qquad \text{(II)}$$

Das Newton-Verfahren besteht nun darin, Gleichung (II) immer wieder auf den verbesserten Näherungswert anzuwenden, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist: $x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right)$, $x_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_3 + \frac{a}{x_3} \right)$ usw.

(b) Berechne $\sqrt{10}$ mit dem Startwert $x_1 = 3$. Rechne solange, bis sich das Ergebnis auf dem Taschenrechner nicht mehr ändert! Berechne auch den relativen Fehler der einzelnen Näherungswerte. Verwende den Speicher deines Taschenrechners.

(c) Berechne $\sqrt{2}$ mit dem Startwert $x_1 = 1$.

8. **Die lineare Näherung**

Um die Wurzel einer nahe bei Eins gelegenen Zahl $1 + x$ mit $|x| \ll 1$ zu berechnen, gibt es eine einfache Näherungsformel der Form

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + a\,x \quad \text{(I)}$$

(a) Quadriere (I) und vernachlässige den wegen $|x| \ll 1$ sicher sehr kleinen Summanden, der x^2 enthält! Vergleiche die linke und die rechte Gleichungsseite und bestimme dann a!

(b) Berechne mit der gefundenen Näherungsformel $\sqrt{1,002}$ und $\sqrt{0,99996}$ und vergleiche mit den Taschenrechnerergebnissen! Berechne die relativen Fehler der Näherungswerte!

(c) Die lineare Näherung liefert oft viel genauere Ergebnisse als die direkte Rechnung mit dem Taschenrechner. Als Beispiel sei folgender Ausdruck einmal mit dem Taschenrechner und einmal mit der linearen Näherung berechnet :

$$y = \left(1 - \sqrt{1 - 10^{-16}} \right) \cdot 10^{20}$$

Das auf 24 Dezimalstellen genaue Ergebnis lautet übrigens

$$y = 5000,000000000000125000000000\,.$$

(d) Eine Atomuhr wird mit der Geschwindigkeit v über eine Strecke s transportiert. Dabei mißt eine relativ zur Erde ruhende zweite Atomuhr die Transportzeit $t = \frac{s}{v}$. Die Relativitätstheorie Einsteins lehrt, daß die von der bewegten Uhr für den gleichen Vorgang gemessene Zeit durch

$$\boxed{t' = t \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$ und $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Lichtgeschwindigkeit) gegeben ist.
Berechne den Unterschied $\Delta t = t - t'$ der von beiden Uhren gemessenen Zeiten für $s = 300\,\mathrm{km}$ mit $v = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und für $s = 40000\,\mathrm{km}$ mit $v = 432\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$!

9. **Die quadratische Näherung**

   Um die Wurzel einer nahe bei Eins gelegenen Zahl $1+x$ mit $|x| \ll 1$ zu berechnen, kann man neben der linearen Näherung auch mit der genaueren quadratischen Näherung arbeiten:
   $$\sqrt{1+x} \approx 1 + a\,x + b\,x^2 \quad \text{(I)}$$

   (a) Quadriere (I) und vernachlässige die wegen $|x| \ll 1$ sicher sehr kleinen Summanden, die x^3 oder x^4 enthalten! Vergleiche die linke und die rechte Gleichungsseite und bestimme dann a und b!

   (b) Berechne mit der gefundenen Näherungsformel $\sqrt{1,02}$ und $\sqrt{0,996}$ und vergleiche mit den Taschenrechnerergebnissen! Berechne die relativen Fehler der Näherungswerte!

   (c) Mit der linearen und quadratischen Näherung für $\sqrt{1+x}$ lassen sich auch die Wurzeln beliebiger Zahlen näherungsweise berechnen, wie folgendes Beispiel zeigt:
   $$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx 3\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot 9} - \frac{1}{8\cdot 9^2}\right) = 3,162037$$
   Dieses Ergebnis stimmt auf vier geltende Ziffern mit dem exakten Wert überein. Berechne mit der gleichen Methode Näherungen für $\sqrt{17}$ und $\sqrt{99}$ und vergleiche mit den Taschenrechnerergebnissen!

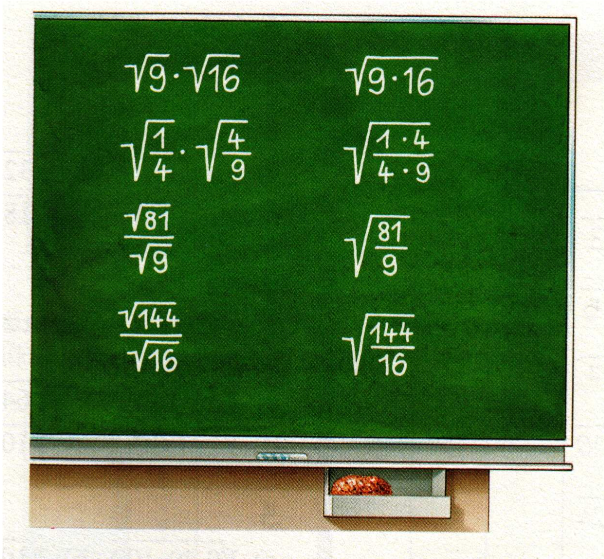
   (d) Leite nach dem obigen Muster eine quadratische Näherungsformel für den Bruch
   $$\frac{1}{1+x} \quad \text{mit} \quad |x| \ll 1$$
   her! Berechne damit $\dfrac{1}{1,005}$ und $\dfrac{1}{0,94}$ und vergleiche mit den exakten Ergebnissen!

1.5. Umformen und Vereinfachen von Wurzeltermen

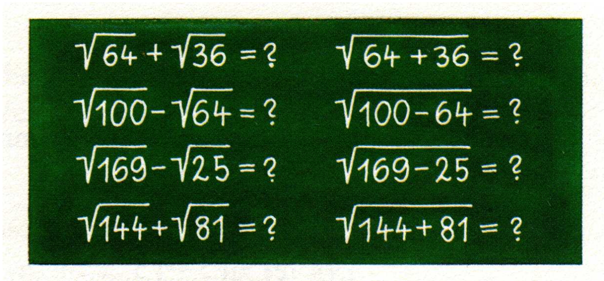
1.5.1. Wurzeln zusammenfassen

1. **Wurzelregeln**

   Vergleiche die Terme der linken und rechten Tafelhälfte miteinander.
   Was vermutest du?



Vergleiche die Terme der linken und rechten Tafelhälfte miteinander.
Was vermutest du?



Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

2. **Übungen zur Multiplikation und Division von Wurzeln**

Welcher Film läuft im Kino?

(a) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{126}=\square$

(b) $\sqrt{396} : \sqrt{11} = \square$

(c) $\square \cdot \sqrt{289} = 34$

(d) $\sqrt{675} : \sqrt{\square} = 15$

(e) $\sqrt{117} \cdot \sqrt{\square} = 39$

(f) $\sqrt{\square 80} : \sqrt{5} = 14$

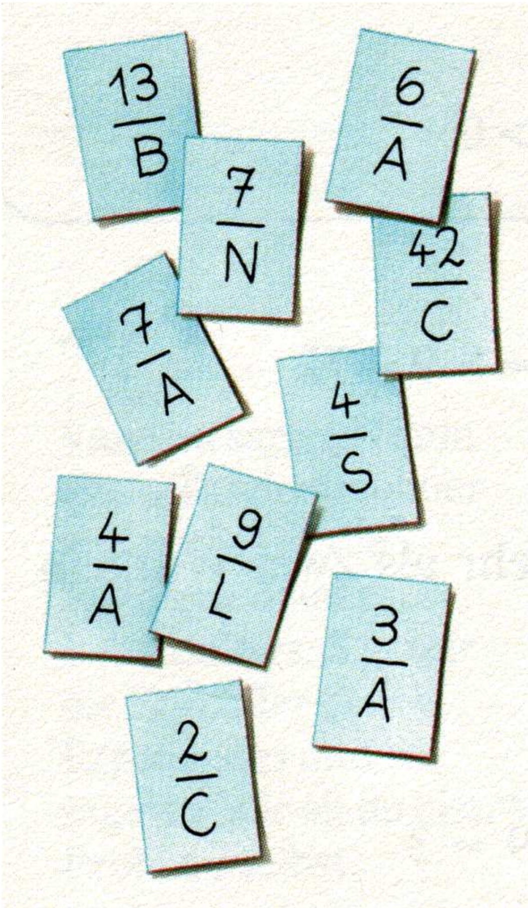
(g) $\sqrt{14\square} \cdot \sqrt{3} = 21$

(h) $\sqrt{50\square} : \sqrt{3} = 13$

(i) $\sqrt{92} \cdot \sqrt{\square 3} = 46$

(j) $\sqrt{396} : \sqrt{\square 4} = 3$

Wenn du richtig gerechnet hast, verraten es dir die Lösungsbuchstaben!



Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

3. Wo liegt der Fehler? Begründe deine Antwort kurz.

$$(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{7} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\cdot 7} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2\cdot 7} = (1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{7}$$

Deswegen ist

$$\sqrt{2} - 1 = 1 - \sqrt{2},$$

also

$$2\sqrt{2} = 2$$

und daher

$$\sqrt{2} = 1$$

4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sqrt{(9-x)^2} = (\sqrt{9-x})^2$$

Begründe deine Antwort kurz.

5. Ziehe unter die Wurzel und gib mit Begründung an, ob das Ergebnis eine rationale Zahl ist!

$$(5 + 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

1.5.2. Radizieren

1. (a) Lösung der Gleichung $\sqrt[4]{x} = \sqrt{14}$ über $G = \mathbb{R}_0^+$
   (b) Diskriminante der Gleichung $x^2 - 5x + 0,5 = 0$
   (c) $\sqrt[3]{79507}$
   (d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} + \sqrt{\sqrt[3]{10^{12}}} - \sqrt{1600} =$
   (e) $6! + 1!$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

2. Vereinfache soweit wie möglich, wenn nötig mit Fallunterscheidung.

$$-\sqrt{(-9x^3)^2}$$

3. Vereinfache und radiziere soweit wie möglich:
   (a) $\sqrt{16x^2 + 56x + 49}$
   (b) $\sqrt{\sqrt{81c^2}}$
   (c) $\sqrt{0,00000175}$

(d) $\left(\sqrt{\frac{1}{a^3}} \cdot \sqrt{\frac{b^6}{c}}\right) : \sqrt{\frac{bc}{a^4}}$

(e) $3\sqrt{75} + \sqrt{147} - 4\sqrt{27} - \sqrt{3}$

4. Ergänze jeweils den Radikanden um <u>einen</u> Term zu einem vollständigen Quadrat, radiziere dann und stelle das Ergebnis ohne Betrag dar:
   $\sqrt{x^4 + x^2 \cdot y^2 + \dots}$; $\sqrt{9x^2 + 4,5x + \dots}$ $(x, y \in \mathbb{Q})$

5. Radiziere und vereinfache soweit wie möglich:
$$\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} - \sqrt{x^2}, \quad x < 0$$

6. Berechne für $x < 0$:
$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{25} - \frac{2}{5}x} - \sqrt{\frac{1}{25}x^2}$$

7. Radiziere und vereinfache so weit wie möglich:
$$\sqrt{4a^2} - \sqrt{a^2 - 4a + 4}, \quad (a < 0)$$

8. Vereinfache soweit wie möglich:
$$\sqrt{(3x)^2} - \sqrt{1 - 18x + 81x^2} + |6x|; \quad x < 0$$

9. Radiziere und vereinfache soweit wie möglich:
$$\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} - \sqrt{x^2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

10. Im folgenden bezeichne x stets eine negative rationale Zahl. Berechne die beiden Terme und stelle das Ergebnis möglichst einfach und ohne Betrag dar:
    (a) $\sqrt{0,01x^2 - x + 25} - \sqrt{1,44x^2} - |x - 5|$
    (b) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} - \sqrt{(-2x^2)^2}$

11. Vereinfache:
$$\sqrt{275}+\sqrt{343}-\sqrt{112}-\sqrt{99}$$

12. Vereinfache und fasse so weit wie möglich zusammen:
$$\sqrt{300}-4\sqrt{28}+3\sqrt{63}-2\sqrt{108}$$

13. Radiziere und vereinfache soweit wie möglich:
$$\sqrt{\frac{27a^3+81a^2b}{(a+3b)^3}}, \quad a,b>0$$

14. Vereinfache soweit wie möglich:
$$\sqrt{\frac{4a^2\cdot(x-3)}{(x+3)}}\cdot\sqrt{(x^2-9)\cdot a^2}; \quad x<-3$$

15. Ziehe unter die Wurzel und vereinfache:
$$\frac{4(b-1)}{a^2}\sqrt{\frac{a^3}{8(b^2-1)}},\ \text{für } b>1$$

16. Vereinfache und führe eine Fallunterscheidung durch um das Ergebnis betragsfrei darzustellen:
$$\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\cdot\sqrt{x^2-9}$$

17. Berechne und fasse soweit wie möglich zusammen:
$$a^2\sqrt{1,21}+3\cdot\left(1,1\sqrt{a^4}-2\sqrt{0,5b^8}\right)-\sqrt{2}b^4+3,3\sqrt{a^4}$$

18. Radiziere so weit wie möglich und bestimme jeweils zusätzlich die Bedingungen an die Variablen, damit der Term definiert ist:

(a) $\sqrt{(-4)^2x^{14}y^{27}z^7}$ (b) $\sqrt{a^4b^3-a^4b^2}$

19. Radiziere, gegebenenfalls mit Fallunterscheidung:

$$\sqrt{4x^2 + 64 - 32x}$$

20. Gib an, für welche Werte der Variablen die folgenden Wurzelterme definiert sind und radiziere dann so weit wie möglich:

(a) $\sqrt{\dfrac{x^5 y^2}{z^4}}$ (b) $\sqrt{\dfrac{(a^2+2)\cdot b^3}{c^2 - 8c + 16}}$

21. Radiziere mit ausführlicher Fallunterscheidung so weit wie möglich:

$$\sqrt{64k^2 - 128k^2c + 64k^2c^2}$$

22. Radiziere und stelle das Ergebnis ohne Betrag dar:
    (a) $\sqrt{x^2y^4}\ \ , x \in \mathbb{Q}^-$
    (b) $\sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1}$
    (c) $\sqrt{9x^4 - 6x^2y + y^2}$

23. Berechne ausführlich (keine Beträge im Ergebnis!):
    (a) $\sqrt{0,25x^2 - x + 1} - \sqrt{(-x)^2}\ , \qquad x \in \mathbb{Q}^-$
    (b) $\sqrt{x^4} + \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}\ , \qquad x \in \mathbb{Q}$ und $|x| < 1$

24. Berechne und fasse soweit wie möglich zusammen:

$$\sqrt{(-3x)^2} - \sqrt{1 - 18x + 81x^2} + |12x|; \quad x < 0$$

1.5.3. Rationalmachen des Nenners

1. Stelle rationale Nenner her und vereinfache soweit wie möglich:

$$\text{(a)} \quad \frac{240}{\sqrt{180}} \qquad \text{(b)} \quad \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{98}+\sqrt{72}}$$

2. Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{3+2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

3. Stelle einen rationalen Nenner her und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{16-12\sqrt{8}}{4\sqrt{18}-\sqrt{128}}$$

4. Stelle einen wurzelfreien Nenner her und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}$$

5. Mache den Nenner rational und vereinfache:

$$\frac{\sqrt{11}-3}{3+\sqrt{11}}$$

6. Stelle einen wurzelfreien Nenner her und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{x^2-x\sqrt{y}+y}{x-\sqrt{y}}$$

7. Stelle einen wurzelfreien Nenner her und vereinfache:

$$\frac{\sqrt{xy}+x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

8. Stelle einen rationalen Nenner her und vereinfache ohne zu runden:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{8}+\sqrt{6}}{\sqrt{8}-\sqrt{6}}}$$

9. Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{x\sqrt{98}-4\sqrt{2x^2}-\sqrt{14x}}{3\sqrt{7x}-7};\ x>0$$

10. Beseitige die Wurzeln im Nenner und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{p\sqrt{p}+p-\sqrt{p}-1}{p+1+2\sqrt{p}} \qquad (p\in\mathbb{R}^+,\ p\neq 1)$$

11. Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{10}}}$$

12. Stelle einen rationalen Nenner her und stelle das Ergebnis möglichst einfach dar:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$$

13. Stelle einen rationalen Nenner her und gib das Ergebnis in möglichst einfacher Form an:

$$\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}-1}$$

14. Für Taschenrechner und Programme, die mit Wurzeln formal rechnen, ist es wichtig, jeden Term der Form

$$\frac{a+b\sqrt{r}}{c+d\sqrt{r}}, \quad a,b,c,d\in\mathbb{Q} \quad \text{und} \quad r\in\mathbb{Q}$$

wieder in der Form $a'+b'\sqrt{r}$, $a',b'\in\mathbb{Q}$ schreiben zu können. Drücke a' und b' mit Hilfe von a, b, c und d aus.

1.5.4. Kombinierte Aufgaben umfangreicherer Art

1. Vereinfache und schreibe das Ergebnis betragsfrei:

   (a) $(x-3)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$ (b) $(x-3)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{(x-3)^2}}$ (c) $(x^2-4)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{(x-2)^2}}$

2. (a) Bestimme die Definitionsmenge, vereinfache und schreibe das Ergebnis betragsfrei:
   $$f(x) = x - \sqrt{x^2}$$
   (b) Für welche Werte der Variablen ist folgender Term definiert? Radiziere teilweise und schreibe das Ergebnis ohne unnötige Betragsstriche:
   $$T = \sqrt{75x^7y^{10}}$$
   (c) Schreibe ohne Wurzeln im Nenner:
   $$a = \sqrt{7} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}}$$

3. Bringe unter <u>eine</u> Wurzel:

   (a) $(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$

   (b) $(3+\sqrt{5})\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(5+3\sqrt{5})}$

4. Berechne und fasse soweit wie möglich zusammen:
   $$\left(\sqrt{27p}-2\sqrt{12p}\right) : \sqrt{3p}$$

5. Fasse soweit wie möglich zusammen:
   $$(3\sqrt{5}-\sqrt{8})^2-(2\sqrt{5}-\sqrt{2})(2\sqrt{5}+\sqrt{2})+(1+\sqrt{10})^2$$

6. Multipliziere aus und vereinfache soweit wie möglich:
   $$\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{14}\right)^2-\sqrt{7}\left(3\sqrt{28}-8\sqrt{27}+\sqrt{175}\right)$$

7. (a) Vereinfache so weit wie möglich:

$$(2\sqrt{12} + 5\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{8} - 4\sqrt{27})$$

   (b) Gegeben ist der Term $\sqrt{\dfrac{pq}{3r}} : \sqrt{\dfrac{27p}{qr}}$, wobei $p < 0$ und $q < 0$.

   (α) Für welche Werte von r ist der Term definiert?

   (β) Vereinfache den Term so weit wie möglich und stelle das Ergebnis ohne Betrag dar!

8. Bestimme die Lösungsmenge (rationale Nenner herstellen!):

$$(2\sqrt{5} + \sqrt{10}) : \sqrt{0,5} = 2\sqrt{10} : x$$

9. Berechne folgenden Term und gib das Ergebnis in möglichst einfacher Form an:

$$\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{64}} \cdot \frac{a^2b^2}{18}\sqrt{\frac{81x^2y^2}{a^2b^2}}$$

10. Vereinfache soweit wie möglich. Welche Einschränkungen müssen für die Vorzeichen der Variablen x, y, z gemacht werden?

$$\sqrt{\frac{xy^2z}{16}} \cdot (\sqrt{\frac{4x}{5z}} : \sqrt{\frac{5}{x}})$$

11. Ziehe unter die Wurzel und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{15} - 4}{0,2x^3y^2z} : \sqrt{\frac{155 - 40\sqrt{15}}{0,4xy^3z^5}} \qquad (x, y, z > 0)$$

12. Stelle rationale Nenner her und fasse zusammen:

   (a) $10\sqrt{24} - 14\sqrt{\dfrac{32}{147}} - 7\sqrt{32\dfrac{2}{3}}$

   (b) $\dfrac{12 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - 6\sqrt{\dfrac{1}{3}} + \dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3} - 1}$

13. Stelle rationale Nenner her, kürze und fasse zusammen:

$$\frac{18+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+6\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}-1}$$

14. Stelle rationale Nenner her und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}-1}+10\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{20+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

15. Stelle rationale Nenner her und fasse weitmöglichst zusammen:

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}-\frac{6-2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{6}}$$

16. Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{3+\sqrt{10}}{3-\sqrt{10}}+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\sqrt{160}$$

17. Gib die Definitionsmenge des Terms an und vereinfache ihn soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

18. Gib die Definitionsmenge des Terms an und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{x-9}}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x-9}}$$

19. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{-\sqrt{320}}{6+2\cdot\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{125}-25}{\sqrt{5}}-10\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{20}}$$

20. In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Graph einer quadratischen Funktion symmetrisch zur Geraden $x = 4$ und schneidet die x-Achse im Punkt $(1|0)$. Erstelle eine saubere Überlegungsskizze und gib die Funktionsgleichung in Abhängigkeit von der y-Koordinate y_S des Scheitelpunktes an!

21. Berechne und gib das Ergebnis mit rationalem Nenner an:
$$\frac{10 + 5\sqrt{10}}{2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{5\sqrt{10}}$$

22. Stelle zunächst wurzelfreie Nenner her und fasse dann zusammen:
$$\frac{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}} + \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}$$

23. Stelle zunächst wurzelfreie Nenner her und fasse dann zusammen:
$$\frac{\sqrt{\sqrt{b}}}{\sqrt{a} - \sqrt{\sqrt{b}}} - \frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{a - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b}}{a^2 - b}$$

24. Berechne folgenden Term und stelle das Ergebnis möglichst einfach und mit wurzelfreiem Nenner dar! Zähler und Nenner des Ergebnisterms sollen dabei als Produkte erscheinen!
$$\frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a}}{\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{ab} - a\sqrt{b}}{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}$$

25. Stelle zunächst wurzelfreie Nenner her, fasse dann zusammen und gib das Ergebnis in möglichst einfacher Form an:
$$\frac{5\sqrt{a} + a}{\sqrt{ab}} - b \cdot (\sqrt{a} + 1) \cdot \sqrt{\frac{1}{b^3}}$$

26. Stelle zunächst wurzelfreie Nenner her und fasse dann zusammen:
$$\frac{\sqrt{c} + \sqrt{cd}}{cd \cdot (2\sqrt{c} - \sqrt{d})} - \frac{\sqrt{d} + 1}{(4c - d) \cdot \sqrt{cd}}$$

27. Gegeben ist folgender Term:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(a) Welchen Bedingungen müssen a, b genügen, damit der Term überhaupt definiert ist?

(b) Berechne den Term und stelle das Ergebnis ohne Wurzeln im Nenner dar!

2. Funktionale Zusammenhänge

2.1. Graphen quadratischer Funktionen und deren Nullstellen

2.1.1. binomische Formeln

2.1.2. Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen

Funktionsgraphen

1. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für die Funktion f bzw. g an, die die jeweils angegebene Eigenschaft haben soll. Eine Definitionsmenge braucht nicht angegeben zu werden; es wird die für den jeweiligen Term maximal mögliche vorausgesetzt.

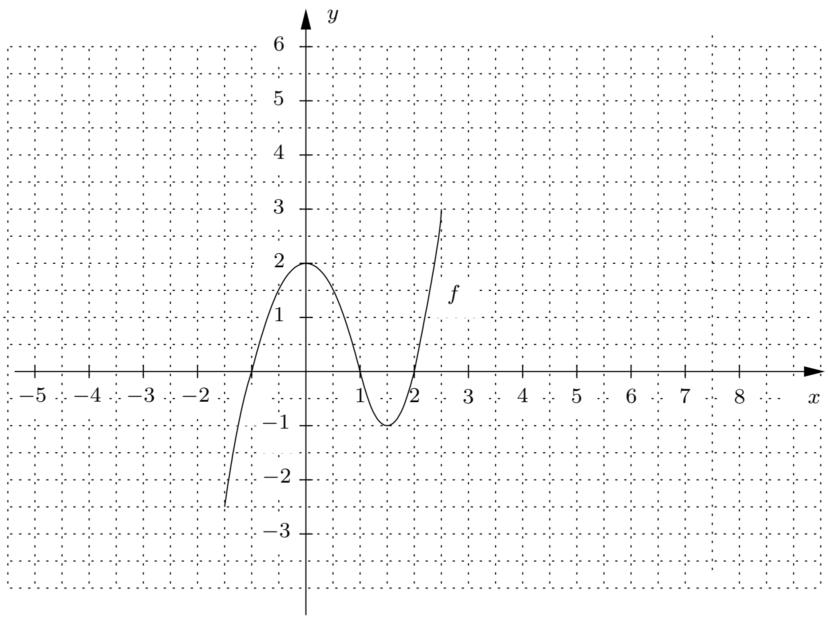
   (a) Die Funktion f hat genau die zwei Nullstellen 3 und 0.

   (b) Die Funktion g ist bei x = 2 nicht definiert.

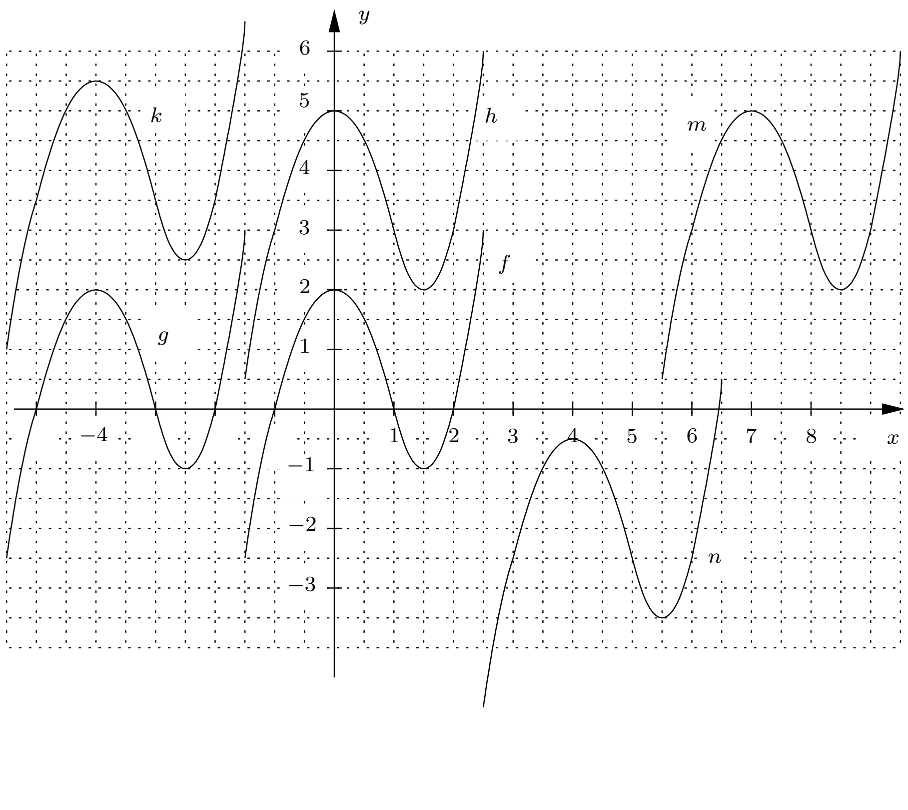
   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2008

2. Zeichne die Grafen der Funktionen g, h, k, m und n mit den Termen

$$g(x) = f(x + 3{,}5) \qquad h(x) = f(x) + 3{,}5 \qquad k(x) = f(x + 4) + 3$$
$$m(x) = f(x - 5{,}5) + 5 \qquad n(x) = f(x - 5) - 2$$



3. Drücke die Terme der Funktionen g, h, k, m und n durch f aus:

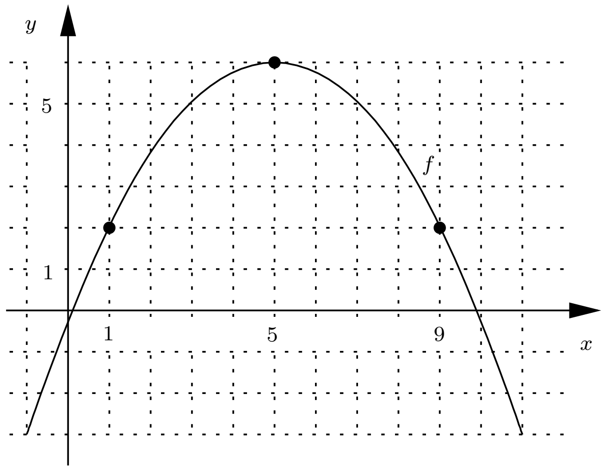


4. Zeichne die Normalparabel und löse damit näherungsweise die Gleichungen

$$x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{24}{5} = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - \frac{3}{4}x - 3 = 0.$$

Überprüfe die grafisch gefundenen Lösungen durch Rechnung.

5. Nebenstehend ist der Graf der quadratischen Funktion f gezeichnet.
   (a) Ermittle die Gleichung von f in der Scheitelform.
   (b) Berechne die Nullstellen von f exakt und auf Tausendstel gerundet.



6. Wir betrachten die quadratische Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$$

   (a) Ermittle die Gleichung von f in der Scheitelform und gib die Scheitelkoordinaten an.
   (b) Berechne die Nullstellen von f und schreibe die Gleichung von f in der faktorisierten Form hin.
   (c) Zeichne den Grafen von f in der Einheit 1 cm.

7. **Die Fehmarnsundbrücke - der größte Kleiderbügel der Welt**

Die Fehmarnsundbrücke verbindet die Insel Fehmarn mit dem deutschen Festland. Technische Angaben:

Brückenlänge insgesamt: 963,4 m

Scheitelhöhe des Bogens über dem Meeresspiegel: 68 m

Durchfahrtshöhe für Schiffe: 23 m

Spannweite des Bogens: 248 m

Höhe des Bogens über der Fahrbahn: 45 m

Der Brückenbogen hat die Form einer Parabel. Bestimme eine Funktionsgleichung, die den Brückenbogen beschreibt.

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

8. Betrachte die beiden linearen Funktionen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x - 3$ und die quadratische Funktion $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
   (a) Zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem.
   (b) Welche Zusammenhänge zwischen den Graphen gibt es?

9. Betrachte die Gerade $g(x) = 4x - 1$ und die Parabel $p(x)y = x^2 - 2x + 5$.
   (a) Für welche Werte von x ist die Differenz der Funktionswerte von $g(x)$ und $p(x)$ am kleinsten?

(b) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man den Graphen von $g(x)$ um a in y-Richtung verschiebt?

(c) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man den Graphen von $g(x)$ um b in x-Richtung verschiebt?

10. **Lagebeziehungen von Parabeln**

Betrachtet die Parabel $p(x) = 0,5x^2 - 3$ und die Gerade $g(x) = 0,5x + 2$.

(a) Zeichne die Parabel $p(x)$ und die Gerade $g(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Gib die Gleichung einer anderen Gerade an, die die Parabel p ebenfalls in zwei Punkten schneidet und parallel zu g ist. Gib jeweils die Gleichung einer Geraden an, die die Parabel p in keinem bzw. in genau einem Punkt schneidet und parallel zu p ist.

(c) Gib den Funktionsterm einer Parabel an, die vollständig oberhalb der Parabel p verläuft.

(d) Entscheide in jedem Fall, ob die Aussage wahr oder falsch ist:

- Eine Parabel, die nach unten geöffnet ist und deren Scheitel unterhalb des Scheitels von p liegt, hat sicher keinen Schnittpunkt mit p.
- Eine Parabel, die nach oben geöffnet ist und eine größere Öffnungsweite als p hat, hat sicher einen Schnittpunkt mit p.
- Eine Parabel, die die gleiche Öffnungsweite hat wie p und nach unten geöffnet ist, kann Schnittpunkte mit p besitzen, muss aber nicht.

11. Parabel als Ortskurve

(a) Zeichne die Parabel $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ in ein Koordinatensystem

(b) Berechne den Abstand von fünf Punkten der Parabel vom Punkt $A(0|1)$. Was fällt auf? Interpretiere die Vermutung aus (b) geometrisch.

(c) Berechne allgemein den Abstand eines Punktes der Parabel $p(x)$ vom Punkt A und zeige die Vermutung aus (b).

12. **Graphen und Schnittpunkte gesucht**

Bestimme für folgende Funktionen die Definitionsmengen. Skizziere die Graphen und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte.

(a) $a_1(x) = x^2 - 1$, $a_2(x) = (x-1)^2$

(b) $b_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $b_2(x) = (x-1)^2$

(c) $c_1(x) = \frac{2}{x-1}$, $c_2(x) = \frac{1}{x+3} + 2$

(d) $d_1(x) = (x-3)(x+1)$, $d_2(x) = -2x + 6$

13. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:
    $p_1(x) = x^2 - 3$, $p_2(x) = x^2 - 1$, $p_3(x) = x^2 + 1$, $p_4(x) = x^2 + 3$

    (b) Wie entstehen die jeweiligen Parabeln aus der Normalparabel?

    (c) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = x^2 + c$?

    (d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man c verändert?

14. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:
    $p_1(x) = x^2 - 3x$, $p_2(x) = x^2 - 1x$, $p_3(x) = x^2 + 1x$, $p_4(x) = x^2 + 3x$

    (b) Wie entstehen die jeweiligen Parabeln aus der Normalparabel?

    (c) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = x^2 + bx$?

    (d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man b verändert?

15. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:

    i. $p_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$, $p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $p_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1x$, $p_4(x) = \frac{1}{2}x^2x$, $p_5(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1x$, $p_6(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$, $p_7(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$

    ii. $p_8(x) = 3x^2 + 2x$, $p_9(x) = 2x^2 + 2x$, $p_{10}(x) = 1x^2 + 2x$, $p_{11}(x) = 2x$, $p_{12}(x) = -1x^2 + 2x$, $p_{13}(x) = -2x^2 + 2x$, $p_{14}(x) = -3x^2 + 2x$

    (b) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = ax^2 + bx$?

    (c) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man b verändert?

    (d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man a verändert?

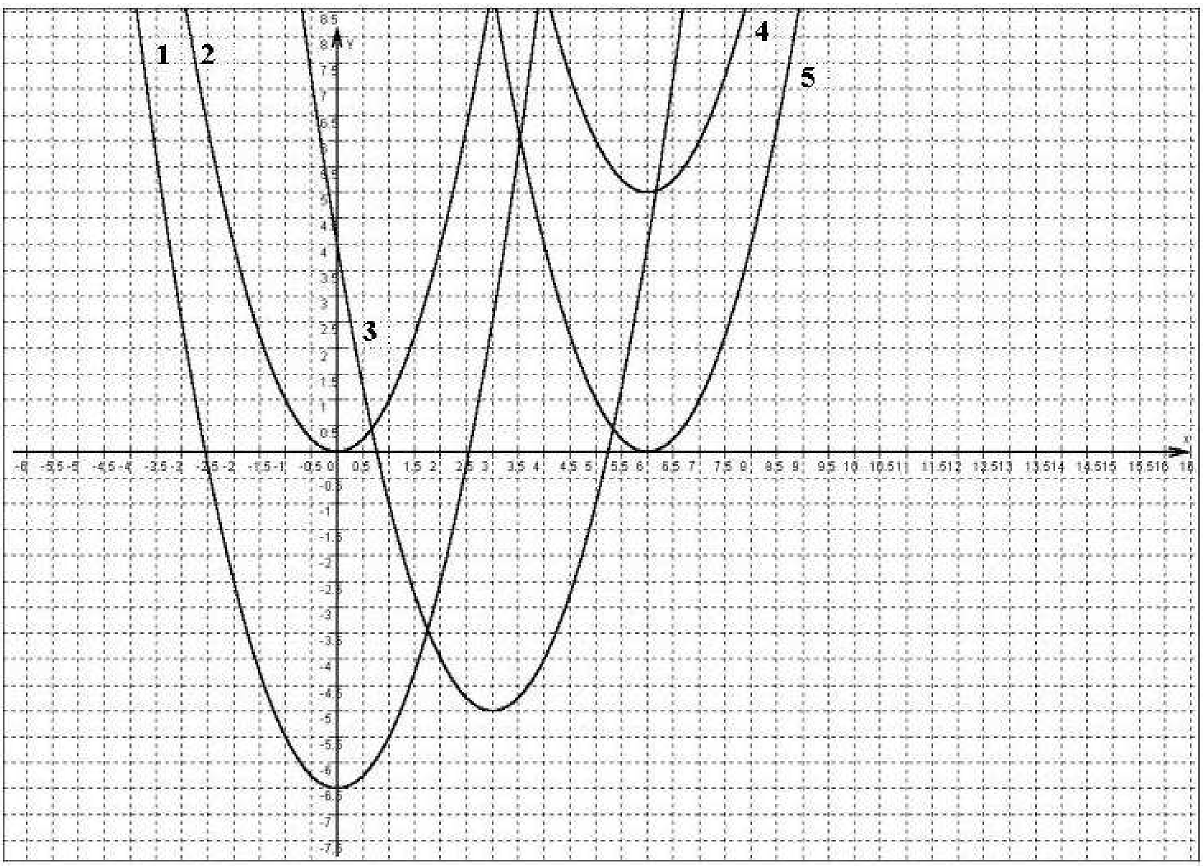
16. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Entscheide, ob folgende Aussagen über den Graphen von f jeweils richtig oder falsch sind.

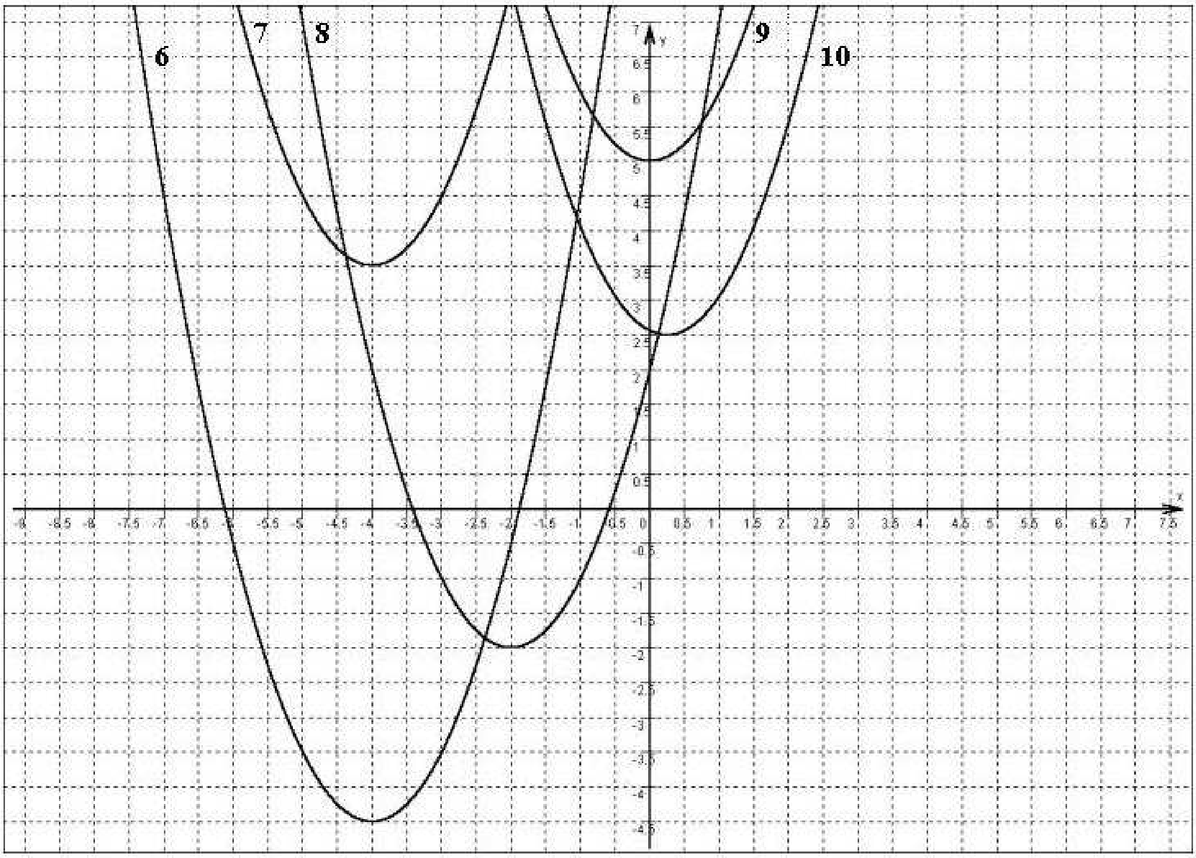
	richtig	falsch
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt. (0|9)	[ ]	[ ]
Der Punkt (4|6) liegt auf dem Graphen.	[ ]	[ ]
Für $x \in]-3;3[$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.	[ ]	[ ]
Der Graph ist zur y-Achse symmetrisch.	[ ]	[ ]

Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

17. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph**

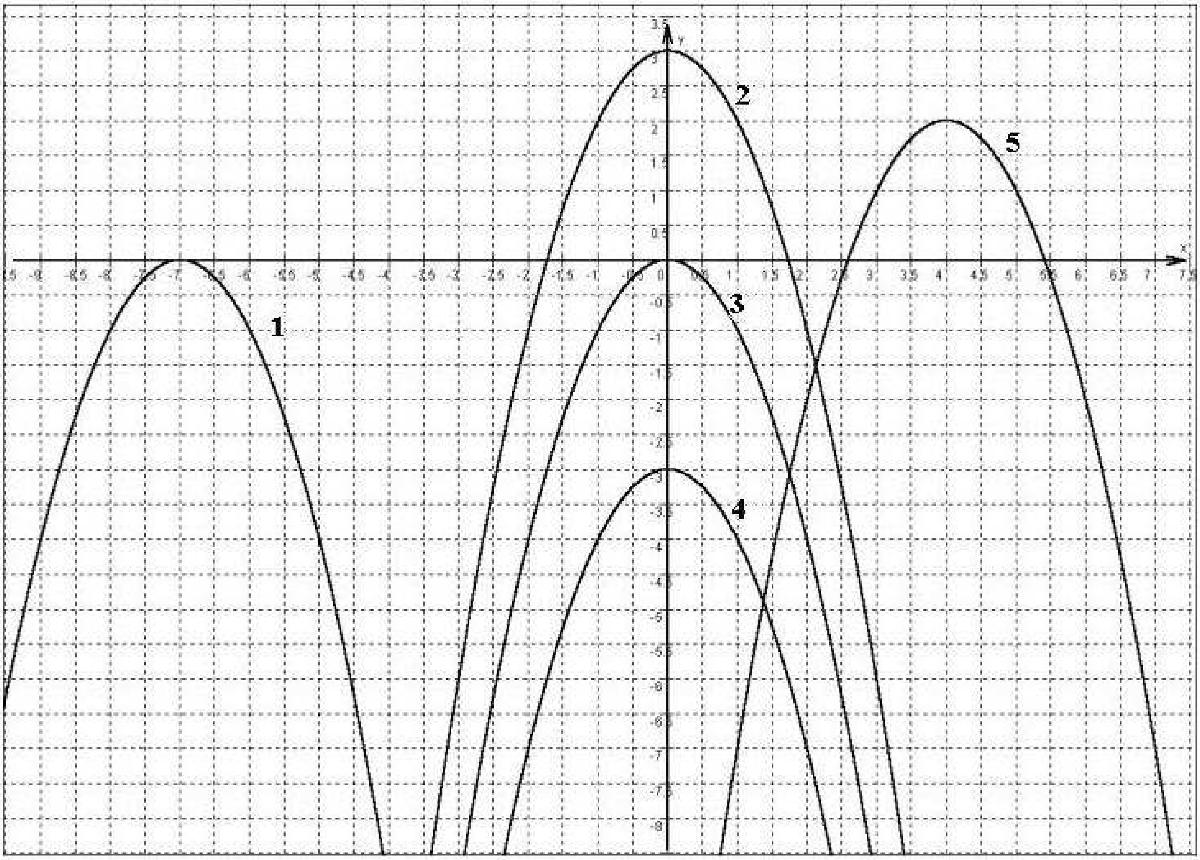
Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.

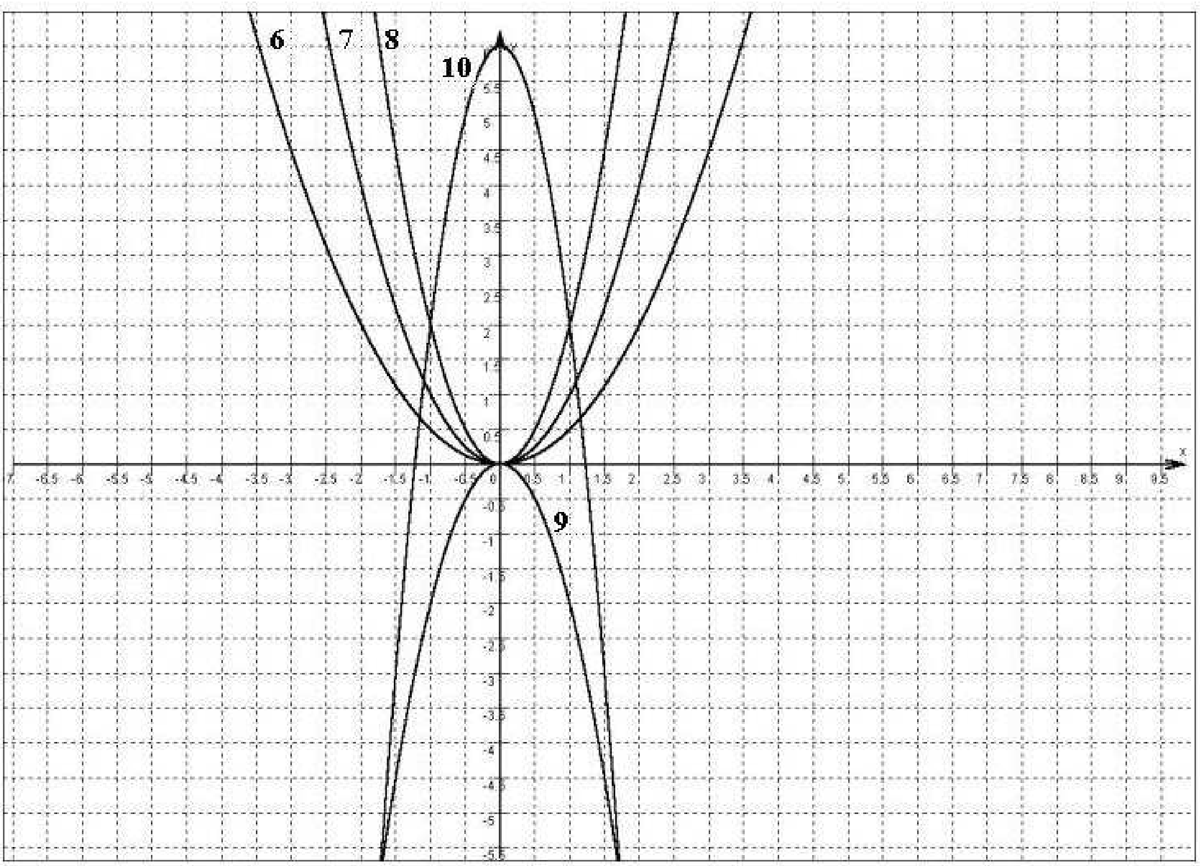




18. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph**

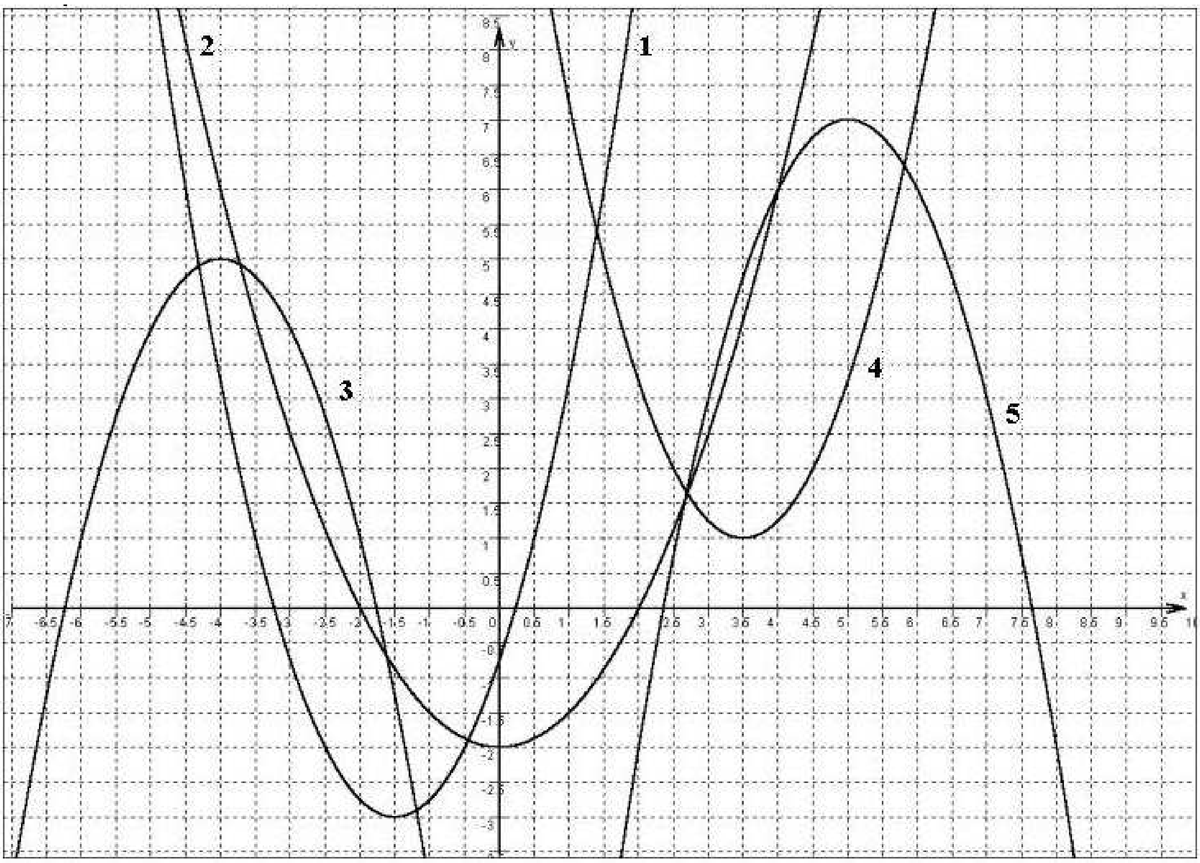
Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1-10$.

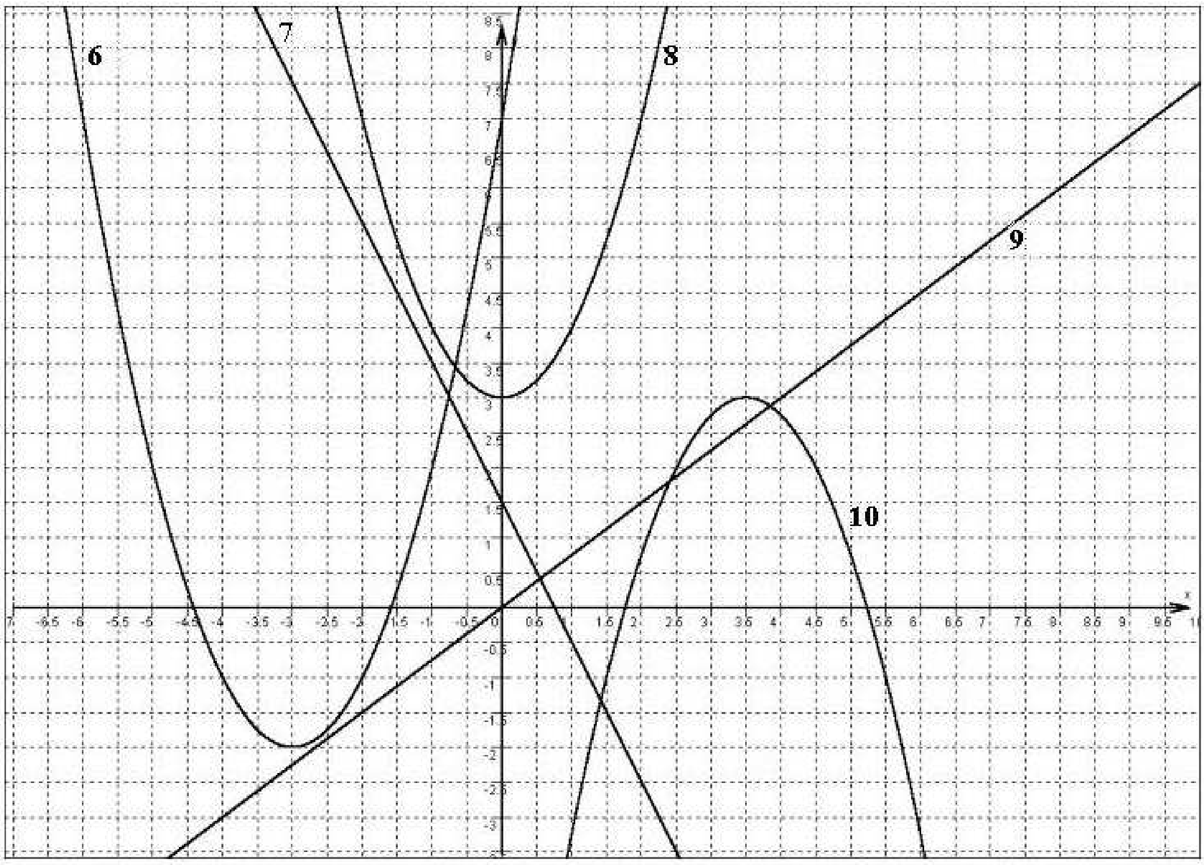

1
2
3
4
5



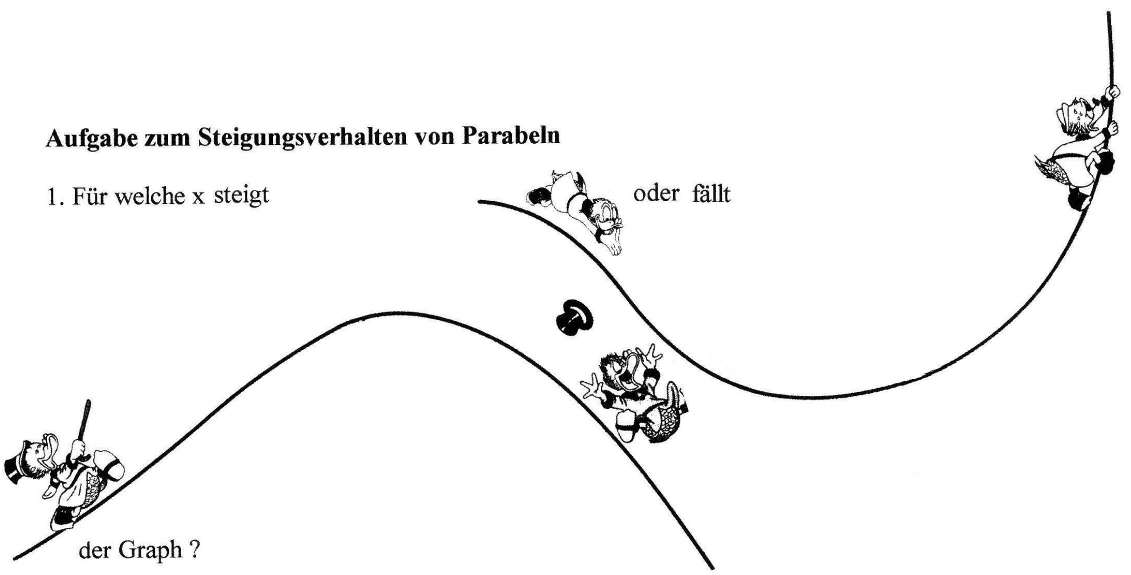
19. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph**

    Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.


1
2
3
4
5



20. Steigungsverhalten quadratischer Funktionen



(a)

Beschreibung der Funktion	**fällt**	**steigt**
(a) $f(x) = x^2$		
(a) $f(x) = x^2$		
(b) $f(x) = x^2 + 2$		
(c) $f(x) = (x-3)^2$		
(d) $f(x) = (x-3)^2 + 1$		
(e) $f(x) = x^2 + 2x - 8$		
(f) Hochpunkt der Parabel: $H(7 \vert 4,5)$		
(g) Tiefpunkt der Parabel: $T(-2,5 \vert 3)$		
(h) Schnittpunkte mit der 1.Achse: $S_1(-2 \vert 0)$ und $S_2(10 \vert 0)$		
(i)		
(j)		

(b) Gib mehrere Funktionsgleichungen an, für die folgende Aussagen zutreffen:

Steigungsverhalten	**Funktionsgleichungen**
(a) Der Graph fällt für $x < -4$ und steigt für $x > -4$	
(b) Der Graph steigt für $x < 2$ und fällt für $x > 2$	
(c)	

21. **Quadratische Funktionen und deren Graphen (Parabeln)**

Funktionsgleichung	Lage des Scheitelpunktes	Steigungsverhalten: Die Parabel…		Verschiebung der Normalparabel
		… fällt	… steigt	
$f(x) = x^2$	$T(0\|0)$	für $x < 0$	für $x > 0$	keine
$f(x) = x^2 + 1$				
$f(x) = x^2 - 2$				
$f(x) = (x + 2)^2$				
$f(x) = (x - 3)^2$				
$f(x) = (x - 2)^2 + 1$				
$f(x) = (x - 3)^2 - 2$				
$f(x) = (x + 4)^2 + 3$				
	$T(1\|3)$			
	$T(-2\|-5)$			
		$x < 2$	$x > 2$	
				um 2 nach links und um 3 nach unten
$f(x) = x^2 + 6x + 9$				
$f(x) = x^2 - 3x + 2,25$				
$f(x) = x^2 - 4x - 5$				
$f(x) = x^2 + 6x + 5$				
	$H(0\|0)$			
		$x > 1$	$x < 1$	

22. **Quadratische Funktionen und deren Graphen (Parabeln)**

Funktionsgleichung	Lage des Scheitelpunktes	Steigungsverhalten: Die Parabel...		Verschiebung der Normalparabel
		... fällt	... steigt	
$f(x) = -x^2$	$H(0\|0)$	für $x > 0$	für $x < 0$	Spiegelung an der 1.Achse
$f(x) = -(x^2 + 1)$				
$f(x) = -x^2 + 1$				
$f(x) = -(x-2)^2$				
$f(x) = -(x+3)^2$				
$f(x) = -(x-2)^2 + 1$				
$f(x) = -((x-3)^2 - 2)$				
	$H(1\|-2)$			
	$T(1\|-2)$			
	$T(-2\|-5)$			
		$x > 2$	$x < 2$	
				an der 1.Achse gespiegelt, um 4 nach rechts verschoben
				um 2 nach links verschoben, an der 1.Achse gespiegelt
				an der 1. Achse gespiegelt, um 3 nach unten verschoben
				um $2,5$ nach unten verschoben, an der 1. Achse gespiegelt

23. **Silbenrätsel für Mathe Profis**

In dem folgenden Text über lineare und quadratische Funktionen sind einige wichtige Begriffe verlorengegangen. Glücklicherweise sind die Silben der fehlenden Wörter bekannt. Viel Spaß beim Ausfüllen!
a - bel - bel - ben - de - dra - ga - ge - ge - gen - gung - le - ler - li - mal - ne - ne - nor - null - o - pa - pa - po - punkt - qua - ra - ra - ra - re - recht - sche - schei - si - stei - stei - stel - tan - te - tel - ten - ti - tiv - tiv - un - waa

Bei den folgenden Sätzen geht es stets um eine Funktion f mit $f(x) = mx + b$.

(a) Eine solche Funktion heißt eine .... Funktion.

(b) Der Graph einer solchen Funktion ersten Grades ist eine ....

(c) Den x-Wert des Schnittpunktes eines Graphen mit der x-Achse nennt man ....

(d) Die Konstante m in der Funktionsgleichung $f(x) = mx+b$ gibt die .... des Graphen an.

(e) Wenn der Funktionsgraph von links nach rechts fallend verläuft, dann ist m ....

(f) Je größer der Betrag von m ist, desto .... verläuft der Funktionsgraph.

(g) Wenn $m = 0$ ist, dann verläuft der Funktionsgraph ....

Bei den folgenden Sätzen geht es stets um eine Funktion g mit $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

(h) Eine solche Funktion heißt eine .... Funktion.

(i) Der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades ist eine ....
Der höchste bzw. tiefste Punkt eines solchen Funktionsgraphen heißt ....

(j) Wenn $a_2 < 0$ ist, ist der Funktionsgraph nach .... geöffnet.

(k) Wenn $a_2 > 0$ ist, ist der Funktionsgraph nach .... geöffnet.

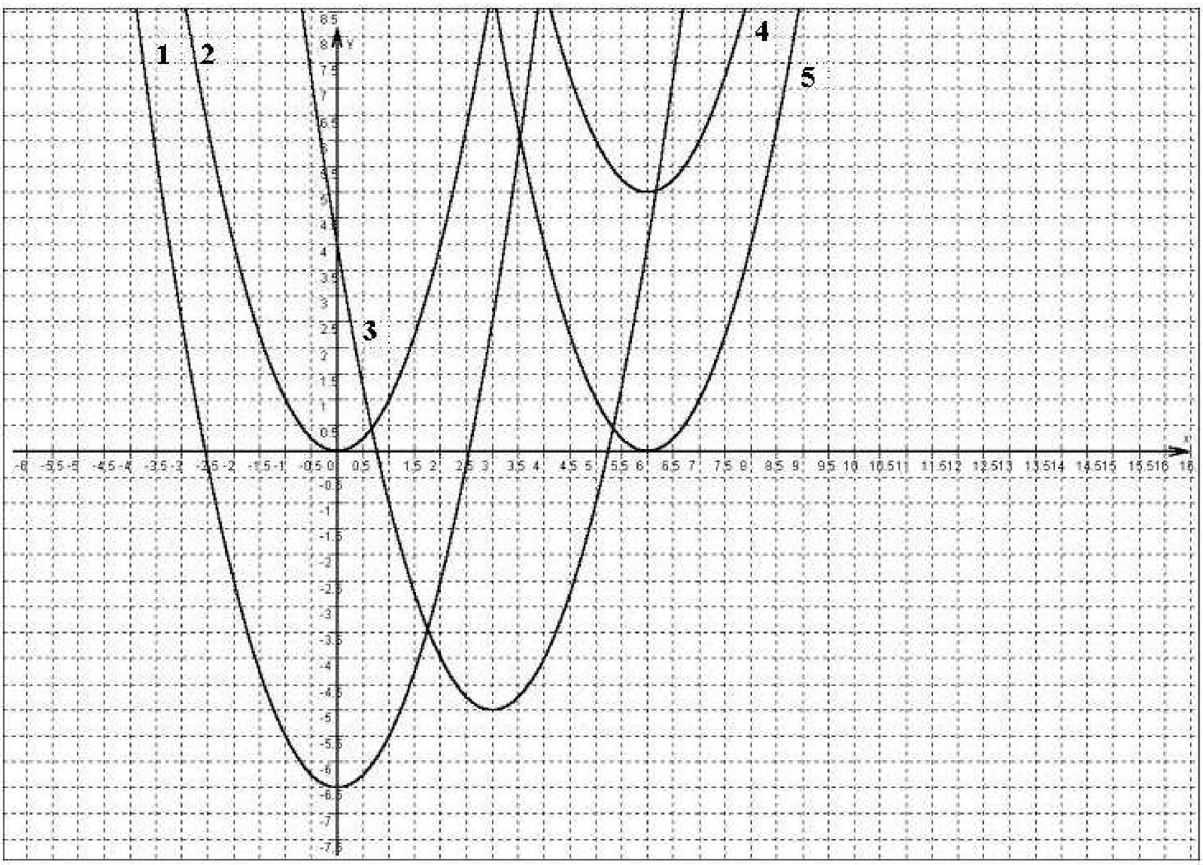
(l) Wenn $a_2 = 1$ und $a_1 = a_0 = 0$ sind, nennt man den Graphen dieser Funktion eine ....

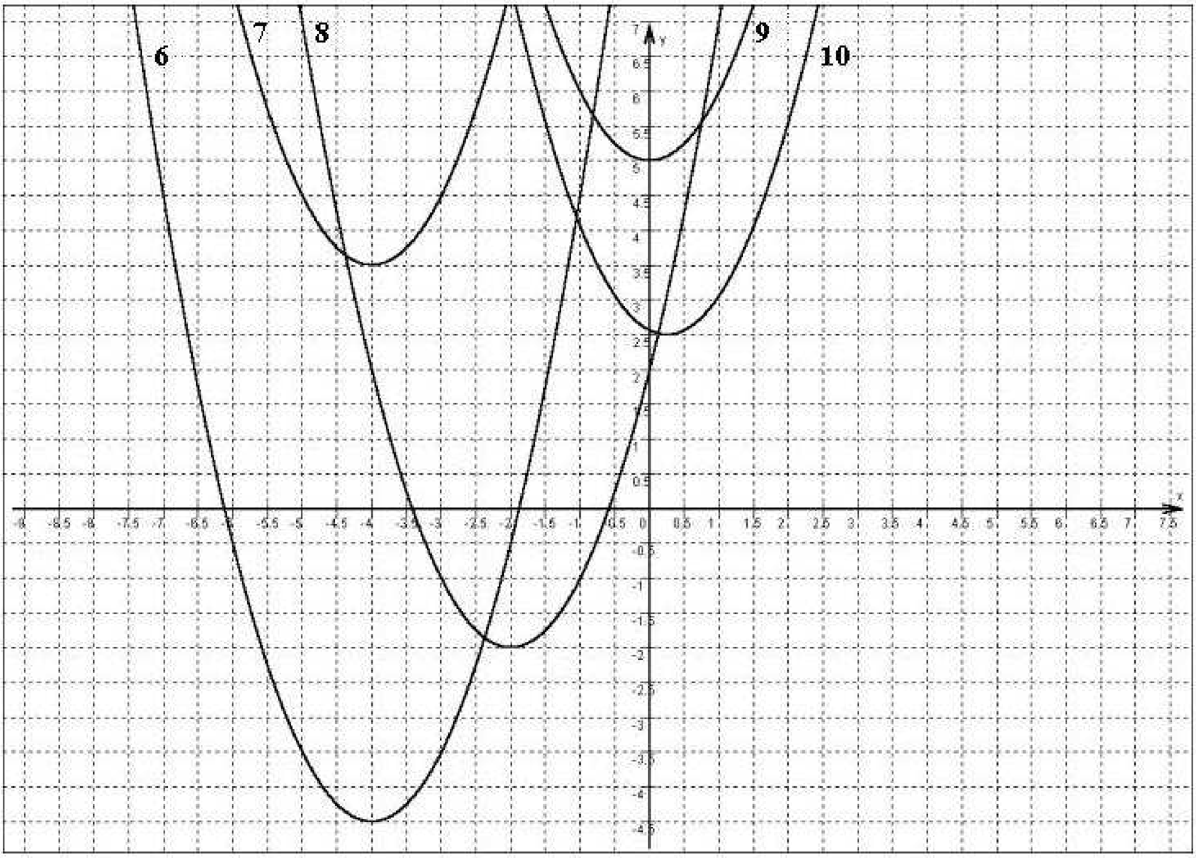
(m) Eine quadratische Funktion besitzt keine Nullstelle, wenn der Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse liegt und a_2 .... ist.

(n) Erhält man bei der Berechnung der Schnittpunkte einer linearen Funktion und einer Parabel nur einen einzigen Schnittpunkt, so ist die Gerade in diesem Punkt eine .... der Parabel.

24. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph**

Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.


1
2
3
4
5



25. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

Der Brückenbogen der Fuldabrücke bei Guntershausen (Fig. 2) hat ebenfalls die Form einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$.

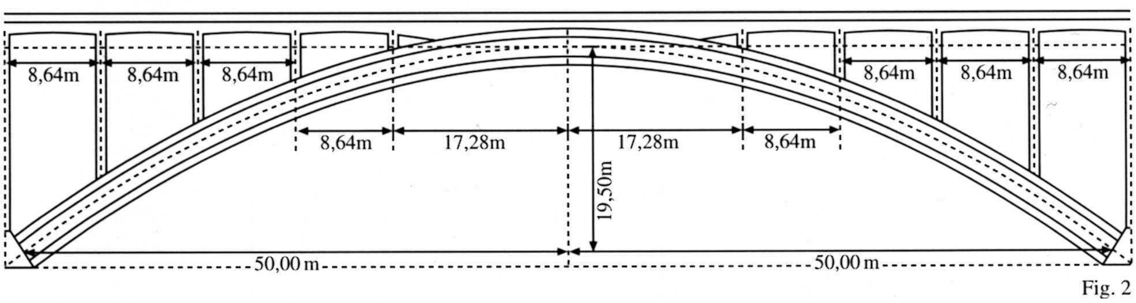


Fig. 2

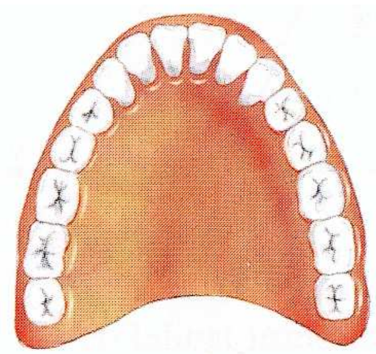
Bestimme a und berechne die fehlenden Pfeilerhöhen.

26. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

Eine Normalparabel wird um 1 nach links, um 4 nach oben verschoben, dann an der 1. Achse gespiegelt und schließlich parallel zur 2. Achse mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt. Zeichne schrittweise den Graphen, gib Lage und Art des Scheitels an.

27. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

    Ein regelmäßiges Gebiss hat näherungsweise die Form einer Parabel. Versuche für das rechts abgebildete eine Funktion zu finden, die die ungefähre Lage der Zähne beschreibt.



28. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

    Beim Schießen einer Kugel senkrecht nach oben wird die Zuordnung Zeit t nach Abschuss (in s) $\rightarrow$ Höhe h über der Abschussstelle (in m) durch die Gleichung $h = 51,2t - 5t^2$ beschrieben.

    (a) In welcher Höhe befindet sich die Kugel nach 4 Sekunden? Wann erreicht sie die gleiche Höhe beim Zurückfallen?

    (b) Nach welcher Zeit erreicht die Kugel ihren höchsten Punkt? In welcher Höhe befindet sie sich dann?

    (c) Zu welchen Zeiten beträgt die Höhe 50 m?

29. **Multiple-Choice-Test zu quadratischen Gleichungen und Funktionen**

    Kreuze alle richtigen Aussagen an. Je Teilaufgabe können keine bis alle Aussagen richtig sein.

    (a) Eine Gleichung der Form $x^2 = e$ hat

        i. keine Lösung für $e < 0$

        ii. keine Lösung für $e = 0$

        iii. zwei Lösungen für $e > 0$

        iv. eine einzige Lösung für $e \neq 0$

v. mindestens eine Lösung

vi. nie die Lösung 0

(b) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 1$

i. ist nach oben geöffnet

ii. geht durch den Ursprung

iii. schneidet die erste Achse zwei Mal

iv. ist symmetrisch zur 2. Achse

v. hat seinen Scheitel bei $(11|-6)$

vi. hat ein Maximum

(c) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 - 3$

i. ist eine verschobene Normalparabel

ii. hat seinen Scheitel bei $(2|-3)$

iii. geht durch den Punkt $(-10|-15)$

iv. geht nicht durch den Ursprung

v. ist identisch mit $g(x) = x^2 + 4x - 1$

vi. hat kein Maximum

(d) Die Nullstellen jeder quadratischen Funktion mit zwei Nullstellen

i. sind symmetrisch zur ersten Achse

ii. sind symmetrisch zur zweiten Achse

iii. liegen vom Scheitelpunkt gleich weit entfernt

iv. lassen sich durch zwei Bruchzahlen angeben

v. lassen sich durch zwei reelle Zahlen angeben

(e) Die verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(-2|1)$

i. hat den Funktionsterm $(x-2)^2 - 1$

ii. hat den Funktionsterm $(x+2)^2 - 1$

iii. hat den Funktionsterm $(x+2)^2 + 1$

iv. hat den Funktionsterm $x^2 + 4x + 5$

v. hat den Funktionsterm $-x^2 + x + 5 + 3x + 2x^2$

vi. hat den Funktionsterm $2x^2 + 8x + 10$

(f) Der Scheitel einer verschobenen Normalparabel liegt auf der Parallelen zur y-Achse, die durch den Punkt $P(3|0)$ geht. Der Punkt $Q(7|18)$ liegt auch auf dieser Parabel. Welche der unten angegebenen Punkte liegen noch auf dieser Parabel?

i. $A(2|3)$

ii. $B(3|2)$

iii. $C(4|3)$

iv. $D(7|7)$

v. $F(-1|18)$

vi. $G(0|0)$

(g) Für jede quadratische Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $a \neq 0$ gilt

i. ihr Graph ist nach unten geöffnet für alle $a < 1$

ii. ihr Graph ist nach oben geöffnet für alle $a > 1$

iii. ihr Graph ist eine Parabel

iv. sie hat genau einen Schnittpunkt mit der 2. Achse

v. ihre Symmetrieachse ist eine Parallele zur 1. Achse

vi. sie schneidet die 2. Achse bei c

(h) Welcher Funktionsterm gehört *nicht* zu einem der untenstehenden Graphen

i. $x^2 - 5$

ii. $(x + 2)^2 - 3$

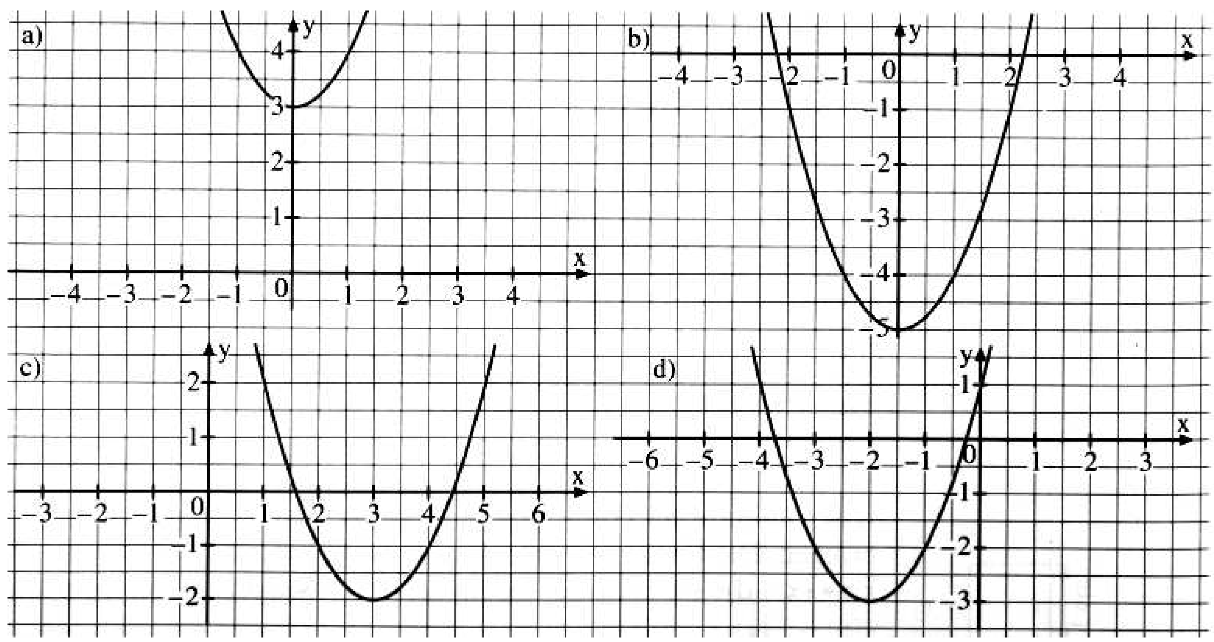
iii. $x^2 + 3$

iv. $x^2 - 6x + 7$

v. $x^2 - 5$

vi. $(x - 3)^2 - 2$

vii. $x^2 + 4x + 1$



30. **Mit Graphen zeichnen**

    Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen im angegebenen Definitionsbereich:

$f_1(x) = 4$	$-4 \leq x \leq 6$
$f_2(x) = 6 - \frac{2}{5}\lvert x-1\rvert$	$-4 \leq x \leq 6$
$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 5$	$3 \leq x \leq 5$
$f_4(x) = \frac{1}{2}x + 3,5$	$-3 \leq x \leq -1$
$f_5(x) = \frac{1}{25}(4x^2 - 8x - 6)$	$-1,5 \leq x \leq 3,5$
$f_6(x) = \frac{1}{25}(8x^2 - 6x - 92)$	$-4 \leq x \leq 6$
$f_7(x) = \frac{1}{9}(14x^2 - 28x + 5)$	$-0,5 \leq x \leq 2,5$

31. Der Graph einer quadratischen Funktion ist kongruent zur Normalparabel und enthält die Punkte $A(-6|1)$ und $B(-1|1)$ eines kartesischen Koordinatensystems (Längeneinheit: 1 cm).

    (a) Fertige ohne größere Rechnung eine saubere Zeichnung der möglichen Graphen an! Beschreibe kurz dein Vorgehen!

    (b) Wie lauten die (möglichen) Funktionsgleichungen?

32. In einem kartesischen Koordinatensystem hat der Graph einer quadratischen Funktion seinen Scheitel im Punkt $S(3|4)$ und enthält ferner die Punkte $A(1|3)$ und $B(5|3)$. Erstelle eine übersichtliche Zeichnung und gib die Funktionsgleichung an!

33. In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Graph einer quadratischen Funktion symmetrisch zur Geraden $x = 4$ und schneidet die x-Achse im Punkt $(1|0)$. Erstelle eine saubere Überlegungsskizze und gib die Funktionsgleichung in Abhängigkeit von der y-Koordinate y_S des Scheitelpunktes an!

34. In einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ist folgende Punktmenge mit Farbe sauber und eindeutig zu kennzeichnen:

$$\left\{(x|y)\,\middle|\, -2 < x \leqq 8\,;\quad 0 \leqq y = \left|0,25 \cdot (x-3)^2 - 4\right| \ \wedge\ y \leqq 3\right\}$$

Ausschließlich rechnerische Aufgaben

1. Ermittle den Funktionsterm, die Scheitelkoordinaten und die Nullstellen einer Parabel durch die Punkte A(0|11,5), B(10|31,5) und C(20|47,5).

2. Berechne die Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen

    (a) $a_1(x) = 5x^2 + 3x + 1$, $a_2(x) = 4x^2 + x$

    (b) $b_1(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 2$, $b_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + 2$

(c) $c_1(x) = -2x^2 - x + 8$, $c_2(x) = 0,5x^2 - 0,25x - 0,5$
(d) $d_1(x) = 2x^2 + \frac{17}{20}x + 12$, $d_2(x) = x^2 + 0,85x - 5$

3. Berechne die Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen
   (a) $a_1(x) = 2x + 0,7$, $a_2(x) = -5x + 12$
   (b) $b_1(x) = 9x^2 + 26x - 100$, $b_2(x) = -10x + 89$
   (c) $c_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $c_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$
   (d) $d_1(x) = 2x - 3$, $d_2(x) = \frac{1}{x} + 2$

4. **Parabel gesucht**
   Berechne die Gleichung einer Parabel, von der folgendes bekannt ist.
   (a) Scheitel $S(1|-2)$, Punkt $A(0|3)$ liegt auf der Parabel
   (b) Punkte $B(-2|-3)$, $C(0|3)$ und $D(5|-5)$ liegen auf der Parabel
   (c) Parabel schneidet die x-Achse in den Punkte $N_1(3|0)$ und $N_2(1|0)$; Punkt $E(0|6)$ liegt auf der Parabel
   (d) Parabel berührt die x-Achse, Punkt $F(0|-2)$ liegt auf der Parabel
   (e) Parabel ist nach oben geöffnet und entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 2 nach rechts und 3 nach unten

5. Bestimme die Scheitelpunktsform folgender Funktionen und gib jeweils die Koordinaten des Scheitels an:
   (a) $x \mapsto 3x^2 - 6x - 3$
   (b) $x \mapsto 2x^2 + 4x - 3$

6. Eine quadratische Funktion ($D = \mathbb{R}$) ist gegeben durch die Zuordnung:

$$x \longmapsto -1,5x^2 + 9x - 12$$

   Bestimme den Scheitel der zugehörigen Parabel und beschreibe die Parabel.

7. Von einer Parabel ist der Scheitel $S(2|3)$ gegeben sowie ein Punkt $A(3|0)$ auf der Parabel. Bestimme die zu dieser Parabel gehörende Funktionsgleichung!

8. Der Graph einer Funktion $y = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel $S(10|-1)$ und geht durch den Punkt $P(9|2)$.

(a) Bestimme a, b und c.

(b) Der Graph wird nun an der x-Achse gespiegelt.
Wie lautet die neue Funktionsgleichung?

9. Hat die Funktion $y = -0,8x^2 + 0,2x + 4$ einen größten oder kleinsten Funktionswert? Begründung! Bestimme diesen Wert und gib an, für welchen x-Wert sie ihn annimmt. In welchem Bereich (der x-Werte) steigt, in welchem fällt der Graph der Funktion?

10. (a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 1$.

    Bestimme die Scheitelkoordinaten und beantworte folgende Fragen:
    Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?
    Ist der Graph enger oder weiter als die Normalparabel?
    In welchen Bereichen steigt bzw. fällt der Graph?

    (b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen der Funktionen $f_1(x) = 5x^2 - 4$ und $f_2(x) = 5x^2 - 10x + 2$.

    (c) Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel $S(-2|9)$ und geht durch den Punkt $P(-7|-41)$. Berechne a, b und c!

11. (a) Der Graph der Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ berührt die x-Achse im Punkt $P(7|0)$ und geht durch den Punkt $Q(2|-75)$.
    Bestimme a, b und c und gib diese Funktion an!

    (b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -1,5x^2 + 9x - 12$.
    Bestimme die Koordinaten des Scheitels sowie die Bereiche auf der x-Achse, in denen die Funktion steigt bzw. fällt.

12. Gegeben sind die Parabeln $p_1: \ y = 0,5x^2 + x + 1,5$ und $p_2: \ y = -x^2 + 4x$
    Untersuche rechnerisch, ob sich die Parabeln schneiden.
    Gib gegebenenfalls die Koordinaten gemeinsamer Punkte an.

13. Bilde ein Produkt, dessen erster Faktor um 1 größer als x und dessen zweiter Faktor um 3 kleiner als x ist. Für welche Zahl x ist der Wert dieses Produkts am kleinsten?

14. Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ ist eine quadratische Funktion $y = tx^2 - 2tx$ gegeben.

    (a) Bestimme für $t = -2$ die Nullstellen und den größten Funktionswert der Funktion.

(b) Für welchen Wert von t hat die Funktion den größten Funktionswert 3?

Umfangreichere Aufgaben

1. **Kinokrieg**

   Kassel besitzt inzwischen zwei große Kinocenter mit zahlreiche Kinosälen.
   Da bangen die kleinen Kinos um ihre Einnahmen.
   Eines dieser kleinen Kinos hat bei einem Eintrittspreis von 8 € durchschnittlich 95 Besucher pro Vorstellung.

   Eine Marktstudie ergibt folgendes:
   Würde der Besitzer den Eintrittspreis um 0,50 €; 1 €; 2 € usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10 Personen; 20 Personen; 40 Personen usw. zurück.

   Welche Preiserhöhung bringt die höchsten Einnahmen?

2. Gegeben ist die Funktion $f : y = x^2 + x - 3,75$.
   (a) Bestimme die maximale Definitions- und Wertemenge der Funktion.
   (b) Gib die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(s_1|s_2)$ an.
   (c) Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall $[s_1 - 3; s_1 + 3]$.
   (1 Längeneinheit = 1 cm)
   (d) Bestimme <u>rechnerisch</u> die Nullstellen der Funktion f.

3. Gegeben ist die Funktion $p : y = -0,5x^2 + x + 1,5$.
   (a) Zeige, daß der Punkt $S(1|2)$ Scheitel der zu p gehörenden Parabel ist.
   (b) Bestimme die Symmetrieachse, Wertemenge und die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.
   (c) Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall $[-3; 5]$ ohne Verwendung einer Wertetabelle. (1 Längeneinheit = 1 cm)

4. (a) Bestimme c so, daß der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + c$ durch den Punkt $P(-2|3)$ verläuft!
   (b) Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2 - 3$, $f_2(x) = x^2 + 6x + 9$ und $f_3(x) = -x + 3$ in ein Koordinatensystem!
   (Platzbedarf: $-6 \leq x \leq 6$; $-4 \leq y \leq 8$)
   (c) Berechne den x-Wert, für den f_1 und f_2 den gleichen Funktionswert annehmen!
   (d) Ermittle graphisch die Menge der x-Werte, für die f_3 kleinere Funktionswerte hat als f_1!

5. (a) Bestimme c so, daß der Punkt $P(8|c)$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 7x + 12,25$ liegt!

   (b) Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2 - 4$, $f_2(x) = x^2 - 8x + 16$ und $f_3(x) = -2x - 1$ in ein Koordinatensystem!
   (Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 7$; $-5 \leq y \leq 8$)

   (c) Berechne den x-Wert, für den f_1 und f_2 den gleichen Funktionswert annehmen!

   (d) Ermittle graphisch die Menge der x-Werte, für die f_3 kleinere Funktionswerte hat als f_1!

6. Gegeben ist die quadratische Funktion
   $y = -\dfrac{2}{3}x^2 - 3x + \dfrac{13}{8}$ mit der Definitionsmenge $D = [-6; 0]$.

   (a) Zeichne den Graphen nach Berechnung der Scheitelkoordinaten sowie der Randpunkte sauber in ein Koordinatensystem ein!

   (b) Gib die Wertemenge W an!

   (c) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{7}{3}$ schneidet den Funktionsgraphen in zwei verschiedenen Punkten P und Q.
   Trage P und Q in die Zeichnung ein und <u>berechne</u> die Koordinaten dieser Punkte!

7. (a) Wie lautet die Gleichung der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + px + q$, deren Graph den Punkt $S(-\frac{5}{3}| - \frac{7}{18})$ als Scheitel besitzt?

   (b) Bestimme für die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + 6x + \frac{23}{2}$ die Scheitelkoordinaten und zeichne den Graphen in ein Koordinatensystem!
   (Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 10$)

   (c) Ermittle für die Funktion $f(x) = x^2 - 4x - 5$ im Intervall $I = [-1; 3]$ den kleinsten und den größten Funktionswert und gib die Teilintervalle von I an, in denen die Funktion monoton wachsend bzw. abnehmend ist!

8. Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion lautet
   $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$.

   (a) Bestimme die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel, berechne deren Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichne die Parabel dann im Intervall $-2 \leqq x \leqq 8$ mit Hilfe weiterer geeigneter Parabelpunkte (Wertetabelle!) in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ein!

   (b) Für welche Werte von $t (t \in \mathbb{R})$ ist die Gerade $y = x + t$ Tangente an die Parabel? Berechne die Koordinaten des Berührpunktes B und trage die Tangente in die bereits angelegte Zeichnung ein!

(c) Wie lautet die Gleichung derjenigen Kurve, die entsteht, wenn man die gegebene Parabel

(α) an der x-Achse spiegelt?

(β) an der y-Achse spiegelt?

(γ) an der Geraden $y = 2$ spiegelt?

9. Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion lautet
$y = x^2 + 5x + 4,75$.

(a) Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes der zugehörigen Parabel und zeichne diese sauber und genau in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ein.

(b) Berechne die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse des Koordinatensystems!

Durch die Gleichung $y = -2x + t$ ($t \in \mathbb{R}$) ist eine Schar paralleler Geraden gegeben.

(c) Zeichne <u>eine</u> solche Gerade in das angelegte Koordinatensystem ein!
Für welche Werte von t schneidet eine Schargerade die Parabel aus Teilaufgabe (a) in genau 2 verschiedenen Punkten?

10. (a) Bestimme ausführlich die Gleichung derjenigen Parabel, welche durch die Punkte $P(-1|2)$, $Q(3|-22)$, $R(-7|-7)$ verläuft!
(Ergebnis: $y = -\dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{9}{2}x - \dfrac{7}{4}$)

(b) Zeichne die Parabel aus Aufgabe (a) nach Berechnung der Scheitelkoordinaten sauber und genau in ein Koordinatensystem ein (Längeneinheit 1 cm auf beiden Achsen!)

(c) Gib ohne weitere Rechnung jeweils eine Gleichung derjenigen Parabel an, welche aus der obigen Parabel durch Spiegelung

(α) an der x-Achse, (β) an der y-Achse

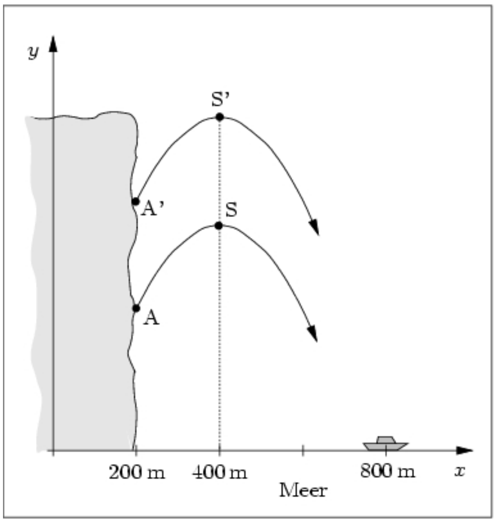
des Koordinatensystems hervorgeht!

11. (a) Bestimme die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ der Parabel, die den Scheitel $S(-\frac{3}{2}|-\frac{7}{4})$ besitzt und durch den Punkt $P(-\frac{5}{2}|\frac{21}{4})$ verläuft!

(b) Bestimme für die Funktion $f(x) = x^2 + 9x + \frac{73}{4}$ den Scheitel und die Nullstellen. Zeichne den Graphen dann in ein Koordinatensystem.
(Platzbedarf: $-8 \leq x \leq 4$; $-4 \leq y \leq 7$)

12. Gegeben ist die Parabelschar $P_k:\ y = (x+k)^2 + k + 2 \qquad (k \in \mathbb{R})$.
    (a) Welche gemeinsamen Eigenschaften haben alle Parabeln dieser Schar?
    (b) Wo liegen alle Scheitelpunkte dieser Parabelschar?
    (c) Bestimme k so, daß die Parabel $y = -x^2 + 6x - 6$ eine Scharparabel berührt!
    (d) Berechne die Berührpunkte und fertige in einem Koordinatensystem eine saubere Zeichnung an (Längeneinheit 1 cm)!

13. Die Flugbahn einer Kanonenkugel ist eine Parabel. Der Scheitel der Flugbahn hat die Koordinaten S(400 m | 675 m), der Abschusspunkt liegt in einer Felswand bei A(200 m | 375 m).



    (a) Berechne die Gleichung der Flugbahn in der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$.
    (b) Bei welcher x-Koordinate fällt die Kugel ins Meer?
    (c) Die Flugbahn wird parallel zur y-Achse soweit nach oben verschoben, bis der Auftreffpunkt im Meer bei $x = 800$ m liegt.
    Berechne die Höhe h' des neuen Abschusspunktes A'(200 m | h').
    (d) Zeichne die beiden Flugbahnen in **ein** Koordinatensystem (1 cm $\widehat{=}$ 100 m).

2.1.3. Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

rein quadratische Gleichungen

1. Bestimme die Lösung der folgenden Gleichung

$$x - 3 = \frac{4 - 3x}{x} \qquad (G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Quadratische Ergänzung

1. Löse folgende Gleichung mit Hilfe quadratischer Ergänzung:

$$x^2 + \sqrt{10} \cdot x + 0,25 = 0$$

2. Löse mit quadratischer Ergänzung und mache die Probe:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

3. Löse mit quadratischer Ergänzung in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 3kx - 10k^2 = 0$$

4. Löse folgende Gleichung mit Hilfe quadratischer Ergänzung, wobei der Parameter a von Null verschieden sei:

$$a \cdot x^2 + 2x - \frac{1}{a} = 0$$

5. Löse zunächst die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ mit Hilfe quadratischer Ergänzung! Entscheide dann, welche Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b bestehen muß, damit diese Gleichung genau eine Lösung besitzt!

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

1. Berechne die Lösungsmenge: $8x^2 + 2x - 3 = 0$

2. Löse mit der Lösungsformel:
   (a) $5x^2 + 6x - 8 = 0$
   (b) $-\frac{1}{6}y^2 = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}$

3. Bestimme die Lösungsmenge:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 2x^2$$

4. Bestimme die Lösungsmenge! Die Ergebnisse sind mit rationalem Nenner anzugeben!

$$10z = 2\sqrt{5} + \sqrt{5}z^2$$

5. Löse folgende Gleichung (Ergebnisse mit rationalem Nenner!):

$$(\sqrt{2} - 1) \cdot x^2 - (\sqrt{2} + 1) \cdot x + 0,5 = 0$$

6. Bestimme die Lösungsmenge:

$$(1 - 2x) \cdot \left(4 - \frac{8}{9}x\right) = \left(2 - \frac{5}{3}x\right)^2$$

7. Bestimme die Lösungen der Gleichung:

$$(3x + 5)^2 - x(7x - 7) = 29x + 45$$

8. Bestimme die Lösungen der Gleichung:

$$x(2,5x - 2) - 2(x - 1)^2 = \frac{x}{4}(x - 8) - (1,5x - 8)^2 + 32$$

9. Gib die Definitionsmenge an und bestimme die Lösungsmenge:

$$\frac{x + 21}{x - 3} + \frac{16x}{6 - 2x} = 3x + 2; \quad G = \mathbb{Q}$$

10. Bestimme die Lösungsmenge in der Grundmenge $\mathbb{R}$:

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot x - x}{\sqrt{2} - x} - \frac{12 - 3 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 3x} = 1 + 2x$$

11. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$\frac{165}{x + 10} - 5 = \frac{48}{x + 3}$$

12. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$\frac{3x+1}{4x-6}+\frac{7x+2}{6x+9}=\frac{8x^2-3x+2}{4x^2-9}$$

13. Löse die folgende Bruchgleichung:

$$\frac{4x-2}{x^2-4}=\frac{7x-22}{2-x}-\frac{1-2x}{x+2}$$

14. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{17\,x-33}{-2\,x-3}=\frac{7\,x-7}{-x-2}$$

15. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{85\,x-119}{15\,x-21}=\frac{7\,x+3}{65\,x-91}$$

16. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{6\,x-4}{15\,x-10}=\frac{x-1}{2\,x-5}$$

17. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{7\,x-3}{6\,x-4}=\frac{3\,x+1}{15\,x-10}$$

18. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{85\,x-119}{15\,x-21}=\frac{-10\,x+14}{65\,x-91}$$

19. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{21\,x-49}{9\,x-21}=\frac{63\,x-147}{27\,x-63}$$

20. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{21\,x+14}{15\,x+10}=\frac{14\,x-21}{10\,x-15}$$

21. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{21\,x+14}{15\,x+10}=\frac{6\,x-9}{4\,x-6}$$

1. Löse folgende Gleichung über $G=\mathbb{R}$:

$$3b\cdot(x-2a)-2a\cdot(3b-x)=x^2-6ab\ ;\quad a,b\quad \text{sind Formvariablen}$$

2. Löse folgende Gleichung mit der Lösungsvariablen x und dem reellen Parameter a:

$$a^2\cdot(x^4+1)=(a^4+1)\cdot x^2$$

3. Für welche $a\in\mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $ax^2-x-0,25=0$ genau eine Lösung? Gib diese Lösungen an!

4. Für welche Parameterwerte $k\in\mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $kx^2+(k-1)x+k=0$ genau eine Lösung? Wie lautet jeweils diese Lösung?

5. Für welche Parameterwerte $t\in\mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $x(3x+4t)=15+10tx+18t$ genau eine Lösung? Wie lautet jeweils diese Lösung?

6. Für welche Parameterwerte $t\in\mathbb{R}$ besitzt die Gleichung

$$(3+t)\cdot x^2-x+\frac{t}{7}=0$$

genau eine Lösung? Wie lautet jeweils diese Lösung?

7. Bestimme $\beta \in \mathbb{R}$ so, daß folgende quadratische Gleichung keine Lösung besitzt:

$$(2\beta - 1) \cdot x^2 - 2x + (2\beta + 1) = 0$$

8. Gib die Anzahl der Lösungen und die Lösungsmenge in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ an!

$$ax^2 + 2x + 2 = 0$$

Der Satz von Vieta

1. Gegeben ist die Gleichung

$$0,5x^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - p\right) \cdot x + \sqrt{6} = 0.$$

   Eine Lösung sei $x_1 = \sqrt{3}$. Berechne die andere Lösung sowie den Wert von p!

2. Die quadratische Gleichung $x^2 - 2x + c = 0$ hat die Lösung $s_1 = 1 + \sqrt{2}$.
   Bestimme die zweite Lösung s_2 und c!

3. Wie lautet die Normalform der quadratischen Gleichung, deren Lösungen
   (a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sind?
   (b) 6 und -15 sind?

4. Zerlege den Term $4x^2 - 8x + 1$ in Linearfaktoren!

5. Finde die Lösungen der quadratischen Gleichung $3x^2 + 3x - 18 = 0$ mit Hilfe des Satzes von Vieta!

6. Bestimme die zweite Lösung, den fehlenden Koeffizienten und gib die Ergebnisse mit rationalem Nenner an:
   (a) $x^2 - 10x + q = 0$; $\quad x_1 = 5 - \sqrt{2}$
   (b) $x^2 + \sqrt{2}x + q = 0$; $\quad x_1 = \sqrt{2}$
   (c) $x^2 + px + 15 = 0$; $\quad x_1 = -5 - \sqrt{10}$

7. Bestimme den fehlenden Koeffizienten b und die zweite Lösung x_2 der Gleichung $x^2 + bx - 12 = 0$, wenn $x_1 = -\frac{4}{3}$ Lösung ist.

8. Bestimme den fehlenden Koeffizienten b und die zweite Lösung x_2 der Gleichung $x^2 - 14x + c = 0$, wenn $x_1 = 7 + \sqrt{2}$ Lösung ist.

9. Die Gleichung
$$x^2 + bx + c = 0, \quad b, c \in \mathbb{Q},$$
habe die Lösung $x_1 = 1 + \sqrt{2}$.
   (a) Zeige: $b = -2, \quad c = -1$.
   (b) Bestimme die zweite Lösung x_2 der Gleichung!

10. Die eine Lösung der quadratischen Gleichung $8x^2 + 6x + 0,5r = 0$ ist doppelt so groß wie die andere. Berechne die beiden Lösungen sowie den Wert von r.

11. Bestimme m so, daß in der quadratischen Gleichung
$$3\,x^2 + 6\,x - m = 0$$
die eine Lösung die andere um 4 übertrifft!

12. (a) Gib die Normalform der quadratischen Gleichung an, die folgende Lösungen besitzt:
$x_1 = 3 + \sqrt{6}$ und $x_2 = 2 - \sqrt{6}$
   (b) Bestimme die beiden Lösungen und den fehlenden Koeffizienten der Gleichung $x^2 - 20x + q = 0$ so, daß die eine Lösung dreimal so groß wie die andere Lösung ist!

13. An der Tafel stand die quadratische Gleichung:
$$5x^2 - \spadesuit x + 56 = 0.$$
Leider wurde der Koeffizient von x von einem Schüler verwischt. Es ist aber bekannt, daß sich die beiden Lösungen dieser Gleichung um 1,2 unterscheiden.
Berechne die Lösungen dieser Gleichung und den fehlenden Koeffizienten!

14. Die quadratische Gleichung $x^2+ax+b = 0$ habe die von Null verschiedenen Lösungen x_1 und x_2.

(a) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen a, b, x_1, x_2?

(b) Wie lautet diejenige quadratische Gleichung, welche als Lösungen die Kehrwerte der Lösungen der obigen quadratischen Gleichung hat?
(Die Koeffizienten der gesuchten quadratischen Gleichung sind durch a und b auszudrücken!)

Faktorzerlegung quadratischer Terme

1. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$:
$$\frac{2}{2x-3} + \frac{1}{1+x} = \frac{3}{2x^2-x-3}$$

2. Zerlege in Linearfaktoren:
$$2x^2 - 4x - 70$$

3. Zerlege den Term $18x^2 - 9x + 1$ in Linearfaktoren!

Sonstige Lösungsmethoden

1. Bestimme alle Lösungen der Gleichung
$$x^5 + 3x^3 - 40x = 0$$

2. Löse folgende Gleichungen:
   (a) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^2 = 12$
   (b) $(x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 4 = 0$

3. Löse mit Hilfe einer geeigneten Substitution:
   (a) $2x^4 - 11x^2 = -15$
   (b) $2x - 5\sqrt{x} - 12 = 0$

4. Löse mit Hilfe einer geeigneten Substitution:
$$2x - 5\sqrt{x} - 12 = 0$$

5. Löse folgende Gleichung über $G = \mathbb{R}$:

$$3 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{7}{3} = 0$$

6. Löse folgende Gleichung und mache die Probe:

$$\sqrt{\frac{6x-5}{6x-4}} - \sqrt{\frac{6x-4}{6x-5}} = \frac{5}{6}$$

1. Berechne die Lösungsmenge: $\sqrt{x} = x + \frac{4}{25}$
2. Berechne die Lösungsmenge: $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$
3. Berechne die Lösungsmenge: $\sqrt{x+5} = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-2}$
4. Berechne die Lösungsmenge: $\sqrt{x+23} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-22}$
5. Berechne die Lösungsmenge: $\sqrt{x+314} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-313}$
6. Bestimme Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Gleichung:

$$\sqrt{2x^2-8} : \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = 1$$

7. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge! (Vergiß die Probe nicht!)

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$$

8. Berechne die beiden Zahlen, deren arithmetisches Mittel 24 und deren geometrisches Mittel $6\sqrt{15}$ beträgt.

9. Bestimme Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Wurzelgleichung:

$$\sqrt{2x+5} - \sqrt{8+4x} = 1$$

10. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge! (Vergiß die Probe nicht!)
$$\sqrt{2x+13} - \sqrt{10+x} = 1$$

11. Gegeben ist die Wurzelgleichung
$$-\sqrt{2-x} + \frac{6}{\sqrt{4-x}} - \sqrt{4-x} = 0\ .$$
    (a) Löse die Gleichung über $G = \mathbb{R}$!
    (b) Führe eine ausführliche Probe durch!

12. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! (Probe!)
$$\sqrt{4x-5} + 7 = 0$$

13. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! (Probe!)
$$5\sqrt{3x - \frac{2}{3}} + 11 = 17 + 2\sqrt{3x - \frac{2}{3}}$$

14. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! (Probe!)
$$\sqrt{7x-14} + 5 = 5 + \sqrt{3x}$$

15. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! (Probe!)
$$\sqrt{x^2-49} = x - 5$$

1. Löse durch Ausklammern:
$$2x^3 - 32x = 0$$

2. Bestimme Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Gleichung:
$$\frac{4+4x}{5x+6} = \frac{x}{1-x}$$

3. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung (Grundmenge ist $\mathbb{R}$):
$$\frac{x^2}{x^2-x-6} + \frac{1}{x-3} = \frac{x}{2(x+2)}$$

2.2. Quadratische Funktionen in Anwendungen

2.2.1. Textaufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen

1. **Geizige und Snobs beim Einkaufen**

   Zur Münchner Sportmesse FITSAMA werden $k_0 = 100\,000$ Besucher erwartet. Der Autor Mike Velo stellt sein neues Buch *Fit ohne Chemie?* vor. Mike möchte den Preis x des Buches so kalkulieren, dass seine Einnahmen E maximal werden. Dazu verwendet er die Funktion $k : x \to k(x)$, die angibt, wie viele Besucher der Messe sein Buch kaufen.

   (a) Zuerst nimmt Mike an, dass k bis zur Nullstelle eine lineare Funktion ist, für $x = 0$ jeder das Buch nimmt und für $x \geqq 50$ € keiner mehr sein Buch kauft. Für welches $x = x_0$ ist E maximal und wie groß sind seine maximalen Einnahmen? Zeichne die Grafen der Funktionen $k(x)$ und $E(x)$ in geeigneten Einheiten.

   (b) Mikes Frau gibt zu bedenken, dass nicht nur Geiz-ist-geil-Kunden die Messe besuchen, sondern auch einige Snobs darunter sind, die eine Ware nur dann schätzen, wenn sie auch teuer genug ist. Gemeinsam entwickeln sie folgende Käuferfunktion:

   $$k(x) = k_0 - ax - \frac{b}{x} \quad \text{mit} \quad a = 1200\,\frac{1}{€} \quad \text{und} \quad b = 400\,000\,€$$

   Für welches $x = x_1$ ist jetzt E maximal und wie groß sind die maximalen Einnahmen? Vergleiche $E(x_1)$ mit $E(x_0)$. Zeichne die Grafen der Funktionen $k(x)$ und $E(x)$ in geeigneten Einheiten. Welche Definitionsmenge ist für k nur sinnvoll?

   (c) Veruche dahinter zu kommen, welche Annahmen der Käuferfunktion aus Teilaufgabe (b) zugrunde liegen.

2. (a) Lisa und Georg unterhalten sich über den Inhalt ihrer Geldbeutel (alles in €). Lisa: „Wenn ich zu meinem Betrag seinen Kehrwert addiere, erhalte ich ...“. Georg hat die von Lisa genannte Zahl verstanden und antwortet nach kurzer Rechnung: „Komisch, obwohl ich viermal so viel besitze wie du, kommt bei mir das gleiche Ergebnis heraus, wenn ich meinen Geldbetrag und seinen Kehrwert addiere.“ Berechne die Reichtümer der beiden.

   (b) Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

   $$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ und } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

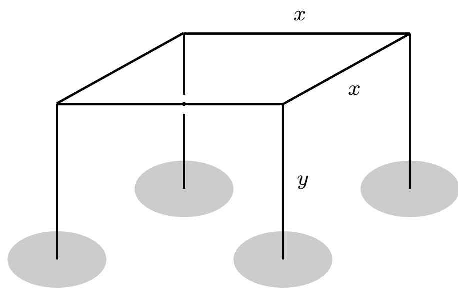
   i. Für welche x ist $f(nx) = \beta f(x)$ mit $n > 1$? Für welche β gibt es überhaupt Lösungen? Zeige, dass die Lösung von Teilaufgabe (a) ein Spezialfall ist.

   ii. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $f(x) = a$ in Abhängigkeit von a? Was folgt daraus für die Wertemenge von f?

iii. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-5, 5]$ und Veranschauliche das Ergebnis von Teilaufgabe (a).

3. Ein rechteckiges Grundstück der Fläche $1026\,\text{m}^2$ hat den Umfang $130\,\text{m}$. Berechne die Länge und die Breite des Grundstücks.

4. Hans hat ein $u = 18\,\text{m}$ langes Kantholz und möchte daraus nebenstehend skizzierten Unterstand mit quadratischer Grundfläche (Kantenlänge x) und der Höhe y bauen. Die Seitenflächen und die Deckfläche sollen mit einer Zeltplane bespannt werden.



   (a) Beweise mit *begründeten* Ansätzen für die benötigte Fläche A der Plane:

$$A(x) = xu - 3x^2$$

   Welche Definitionsmenge D_A ist konstruktionsbedingt nur sinnvoll?

   (b) Berechne die Werte $x = x_\text{m}$ und $y = y_\text{m}$, für die $A(x)$ maximal ist. Wie groß ist die maximale Fläche $A(x_\text{m})$? Zeichne den Grafen von A im Definitionsbereich D_A ($x = 1\,\text{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$, $A = 5\,\text{m}^2 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$).

   (c) Drücke das von der Zeltplane und dem Boden eingeschlossene Volumen V durch x aus. Untersuche mit einer geeigneten Methode, ob $V(x_\text{m})$ der maximale Wert von V ist.

5. (a) Von der Flugbahn der Kugel einer Spielzeugkanone kennt man den Abschusspunkt A $(-30|0)$ und weiter die Punkte B $(0|39)$ und C $(30|60)$. Alle Koordinaten verstehen sich in Zentimetern. Ermittle die Gleichung $f(x)$ der parabelförmigen Flugbahn.

   (b) Berechne die Koordinaten des höchsten Punktes H der Flugbahn und des Auftreffpunktes T auf dem Boden ($y = 0$).

   Zeichne die Flugbahn im Maßstab 1:20.

6. Die Punkte $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C(8|3)$ und $D(0|15)$ sind Ecken eines Trapezes.

   Jeder Punkt der Trapezseite $\overline{CD}$ ist Eckpunkt eines Rechtecks, das dem Trapez einbeschrieben ist. Die Seiten der einbeschriebenen Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachen. Der Punkt A ist Eckpunkt eines jeden einbeschriebenen Rechtecks.

   (a) Zeichnen Sie das Trapez und berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

(b) Der Punkt $P(2|y)$ liegt auf der Seite $\overline{CD}$ und ist somit Eckpunkt eines einbeschriebenen Rechtecks. Tragen Sie das zugehörige Rechteck in die Figur ein und bestimmen Sie den Flächeninhalt.

(c) Bewegt sich der Punkt $P(x|y)$ auf der Strecke $\overline{CD}$, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Durch welche Gleichung $F(x)$ lässt sich der Flächeninhalt F berechnen?

(d) Bestimmen Sie das einbeschriebene Rechteck so, dass es den größtmöglichen Flächeninhalt hat.

Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

7. **Skipiste**

Im italienische Bornio findet jährlich ein Abfahrtsrennen im Rahmen des Skiweltcups statt. Die Abfahrtsstrecke ist insgesamt 3270 m lang. Der Start begindet sich in 2255 m Höhe, das Ziel in einer Höhe von 1245 m. Die maximale Steigung beträgt 63%.

(a) Berechne die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Rennläufers im $\frac{km}{h}$, der die Strecke in 1 Minute und 54,23 Sekunden bewältigte.

(b) Erläutere, was ,,Steigung 63%” bedeutet. Bestimme den Winkel, den eine Strecke der Steigung 63% mit der Horizontale Bildet.

(c) Berechne die Steigung des Abfahrtstrecke von Bormio, wenn sie mit gleicher Länge geradlinig vom Start zum Zielpunkt verliefe.

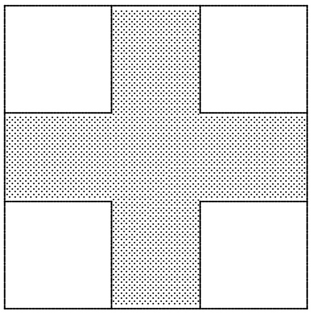
Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

8. Wie viele Telefonanschlüsse sind in einer Ortschaft vorhanden, wenn 499 500 gegenseitige Gesprächsverbindungen möglich sind?

9. Welche rationale Zahl hat folgende Eigenschaft:
Das Produkt der um 1 kleineren Zahl und der um 1 größeren Zahl ist um 31 größer als das halbe Quadrat der gesuchten Zahl!
Fertige einen x-Ansatz an!

10. In einem Quader mit der Oberfläche $286\,\text{cm}^2$ ist die mittlere Kante $7\,\text{cm}$ lang. Sie unterscheidet sich von der größten Kante ebensoviel wie von der kleinsten. Wie lang sind die Kanten dieses Quaders?

11. In ein weißes Quadrat der Seitenlänge $s = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$ ist ein schwarzes Kreuz symmetrisch eingezeichnet (vgl. Abbildung). Wie breit ist das Kreuz, wenn der Flächeninhalt des Kreuzes genauso groß ist wie der des Hintergrundes?



12. Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 5 kleiner als die Zehnerziffer. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Zehnerziffer, so ergibt sich die 56fache Quersumme. Wie heißt die Zahl?

13. Bei einer dreistelligen Zahl ist die Zehnerziffer um 4 größer als die Einerziffer. Die Zahl ist gleich ihrer Spiegelzahl. Dividiert man die Zahl durch diejenige (zweistellige) Zahl, welche aus der ursprünglichen Zahl durch Streichen der Zehnerziffer hervorgeht, so erhält man um 5 weniger als die Quersumme der ursprünglichen Zahl beträgt. Wie lautet die ursprüngliche Zahl? (x-Ansatz!)

14. Im dekadischen Zahlensystem („Zehnersystem") bedeutet beispielsweise die Zahldarstellung 475, daß $475 = 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$ gilt.
    Im Duodezimalsystem („Zwölfersystem") würde die Zahldarstellung 475 bedeuten, daß $475 = 4 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12 + 5$ gilt.

    In welchem Zahlensystem hat die Zahl 132 den (dekadischen) Wert 56, in welchem Zahlensystem die Zahl 543 den (dekadischen) Wert 148?

15. Die Zinsen eines Kapitals von 800 € werden am Ende jeden Jahres zum Kapital geschlagen und dieses zusätzlich noch um 100 € vermehrt, so daß es am Anfang des dritten Jahres auf 1069,28 € angewachsen war. Wie hoch war der (über dem gesamten Zeitraum als konstant angenommene) Zinssatz?

16. Eine Sammellinse der Brennweite f cm entwirft von einem Körper, der g cm von ihr entfernt ist, ein Bild in der Entfernung b cm. Hierbei gilt die Gleichung $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.
    Wie weit ist der Körper von der Linse entfernt, wenn deren Brennweite 14,4 cm beträgt und b um 54 cm kleiner ist als g?

17. Zwei Körper, welche den Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks vom Scheitel des rechten Winkels aus mit den Geschwindigkeiten 8 cm bzw. 6 cm pro Sekunde in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, begegnen sich nach 9 Sekunden. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks, wenn die eine Kathete um 17 cm länger ist als die andere?

18. Um eine Strecke von 1800 m zurückzulegen, muß das Vorderrad eines Fahrzeugs, dessen Umfang um 1 m kleiner ist als der des Hinterrades, 150 Umdrehungen mehr machen als dieses. Wie oft dreht sich jedes der beiden Räder auf dieser Strecke?

19. Das Verkehrsflugzeug für die Strecke von München nach Stuttgart braucht für die 150 km lange Flugstrecke bei Gegenwind der Stärke $25\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um 5 min länger als bei Windstille. Wie groß ist die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs? Es soll angenommen werden, daß diese immer konstant ist.

20. Ein Vater ist 60 Jahre, sein Sohn 15 Jahre alt. Vor n Jahren war der Vater n-mal so alt wie der Sohn. Berechne n und mache die Probe!

21. Ein Vater ist 40 Jahre, sein Sohn 15 Jahre alt. In n Jahren wird der Vater n-mal so alt sein, wie es der Sohn vor n Jahren war. Berechne n und mache die Probe!

22. Ein Schüler hatte für einen Ferienaufenthalt 252 € gespart. Nachdem sich die Tageskosten um 7 € erhöht hatten, mußte er seinen Aufenthalt um drei Tage verkürzen. Wie viele Tage wollte er ursprünglich bleiben?

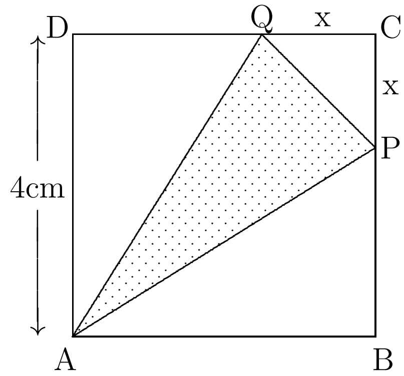
23. Für einen Klassenausflug wurde ein Bus um 336 € gemietet. Da am Ausflugstag drei Schüler fehlen, muß der Fahrpreis pro Schüler um 2 € erhöht werden. Wie viele Schüler wollten ursprünglich an der Fahrt teilnehmen?

24. Max wandert morgens von einer Jugendherberge ab. Sein Freund Hans verläßt die Jugendherberge 50 Minuten später und holt Max nach 12 km um 11.00 Uhr ein. 50 Minuten nach dem Einholen ist Hans seinem Freund Max bereits 1 km voraus.
Wie viele km legen beide in der Stunde zurück und wann marschierten sie von der Jugendherberge ab?

2.2.2. Extremalwertaufgaben

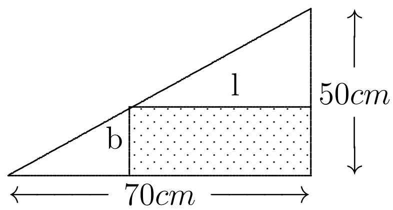
1. Zeige: Von allen Rechtecken mit Umfang 8 cm hat das Quadrat mit Seitenlänge 2 cm den größten Flächeninhalt.

2. Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 4 cm. Trägt man von der Ecke C auf beiden anliegenden Seiten jeweils x cm ab, so erhält man die Punkte P und Q. Für welchen x-Wert hat das Dreieck APQ den größten Flächeninhalt? Wie groß ist dieser?



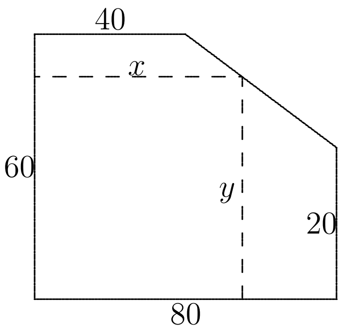
3. Die Funktionen f und g sind durch die Terme $f(x) = x^2 + 2,5x + 1,5$ und $g(x) = 0,5 \cdot (x-2)^2 + 4$ gegeben.
   (a) Die Nullstellen von f bilden mit einem beliebigen Punkt $P(x|y)$ des Graphen G_g ein Dreieck. Gib die Koordinaten desjenigen Punktes P von G_g an, für den die Dreiecksfläche minimal wird. (Kurze Begründung!)
   (b) Berechne für diesen Fall die Dreiecksfläche.

4. Aus einer dreieckigen Marmorplatte soll eine rechteckige Platte herausgesägt werden.



   (a) Zeige mit Hilfe des Strahlensatzes, daß für die Länge l und die Breite b des Rechtecks gilt: $5l + 7b = 350\,\text{cm}$.
   (b) Wie muß man Länge und Breite wählen, damit man die rechteckige Platte mit dem größten Flächeninhalt bekommt? Wie groß ist dieser?

5. Aus der abgebildeten Platte (alle Maße in mm) soll in der angedeuteten Weise ein Rechteck ausgeschnitten werden (rechte obere Ecke auf der abgeschrägten Seite).



(a) Stelle eine Funktion $f : x \longmapsto y$ auf, die der Seitenlänge x die Höhe y des Rechtecks zuordnet.

(b) Bestimme damit eine Funktion $g : x \longmapsto A$, die der Seitenlänge x die Fläche A des Rechtecks zuordnet.

(c) Für welche Länge x ist die Fläche maximal?

(d) Gib einen zur Aufgabenstellung passenden Definitionsbereich der Flächenfunktion g an und zeichne sie in diesem Bereich. (Rechtswert im Maßstab 1 : 1, Hochwert $100\text{mm}^2 \mathrel{\widehat{=}} 1\text{cm}$)

2.2.3. lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

1. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

   (a) $a + b + c = 3$
   $a + b = 1 + c$
   $b = 1 + a + c$

   (b) $u + 3v + 2w = 6$
   $2u = 6 - v - 3w$
   $3u + w = 6 - 2v$

2. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

   (a) $l = n$
   $2m + 2n = 0$
   $3l + n = 2m$

   (b) $l = n - 4,5$
   $2m + 2n = 9$
   $3l + n = 2m + 7,5$

   (c) $l = n - 12$
   $2m + 2n = -2$
   $3l + n = 2m - 4$

3. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

(a) $x + 4y + 7z = 12$
$2x + 5y + 8z = 15$
$3x + 6y + 10z = 19$

(b) $x + 4y + 7z = 12$
$2x + 5y + 8z = 15$
$3x + 6y + 9z = 19$

4. **Dreiecke mit verschlüsselten Maßangaben**

Acht Dreiecke verraten so viel von ihren Maßen, dass man sie konstruieren kann. Allerdings haben sie ihre Angaben ein wenig verschlüsselt. - Berechne die Maße und konstruiere dann die Dreiecke.
Übrigens: Eins der Dreiecke hat sich wohl geirrt. Mit seinen Maßen ist beim besten Willen kein Dreieck zu konstruieren. Welches Dreieck ist es?

Dreieck 1:
Die Seite c ist 8 cm lang. a und b sind zusammen 10 cm lang, b ist 3 cm größer als a.

Dreieck 2:
Die Höhe h_c und die Seite a sind gleich lang, und zwar 4 cm. Die vierfache Länge von b ist gleich der siebenfachen Länge von a.

Dreieck 3:
Es gilt: $a < b < c$. Je zwei Seiten unterscheiden sich jeweils um 3 cm oder um 6 cm. a ist halb so groß wie c.

Dreieck 4:
Der Umfang beträgt 20 cm. c ist 4 cm länger als b. Die dreifache Länge von b ist um 2 cm länger als die doppelte Länge von c.

Dreieck 5:
Die Winkel α und β sind gleich groß. Die doppelte Länge von a ist die dreifache Länge von c. Der Umfang des Dreiecks beträgt 16 cm.

Dreieck 6:
Der Winkel α beträgt 60°. Die sechsfache Länge von h_c ist die dreifache Länge von c. Die Differenz von h_c und c beträgt 4 cm.

Dreieck 7:
a und b sind zusammen 21 cm lang. Die Länge von b beträgt 75% der Länge von a. c^2 ist um 1 größer als das Vierfache von a.

Dreieck 8:
Der Umfang des Dreiecks beträgt 12 cm. Die Länge von c beträgt 80% der Länge von b. a und b zusammen sind doppelt so lang wie c. Quelle: www.a-paulitsch.de/website/rundumsdreie

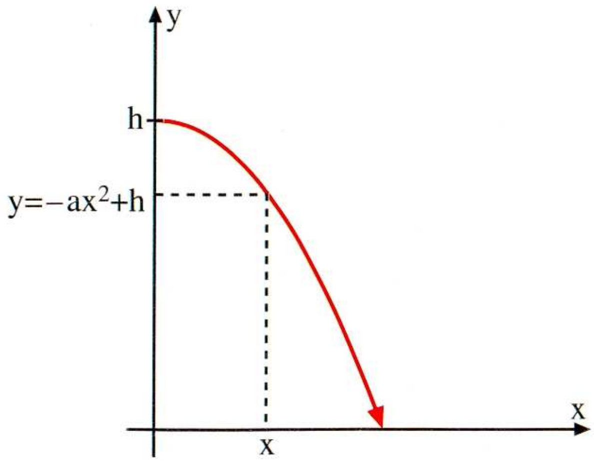
5. **Aufgabe zur Anwendung**

   Das *Alte Land* ist ein wichtiges Obstanbaugebiet in Norddeutschland. Hier befindet sich eine kleine Fabrik, die aus dort angebautem Obst drei Sorten von Produkten herstellt: Obstsalat, Multivitaminsaft und Marmelade.
   In der Hauptsaison sollen aus Äpfeln, Birnen und Kirschen pro Monat 100 kg Obstsalat, 500 l Saft (1 l $\cong$ 1 kg) und 200 kg Marmelade hergestellt werden. Für den Obstsalat werden zu gleichen Anteilen Äpfel, Birnen und Kirschen verwendet. Pro Liter Multivitaminsaft werden an Gewicht dreimal so viele Äpfel wie Kirschen und doppelt so viele Birnen wie Kirschen verwendet. Für die Herstellung der Marmelade kommen auf ein Kilogramm jeweils gleich viele Äpfel und Birnen.
   Welche Fruchtmengen sind für die Herstellung dieser Produkte erforderlich?

2.2.4. gemeinsame Punkte von Funktionsgraphen

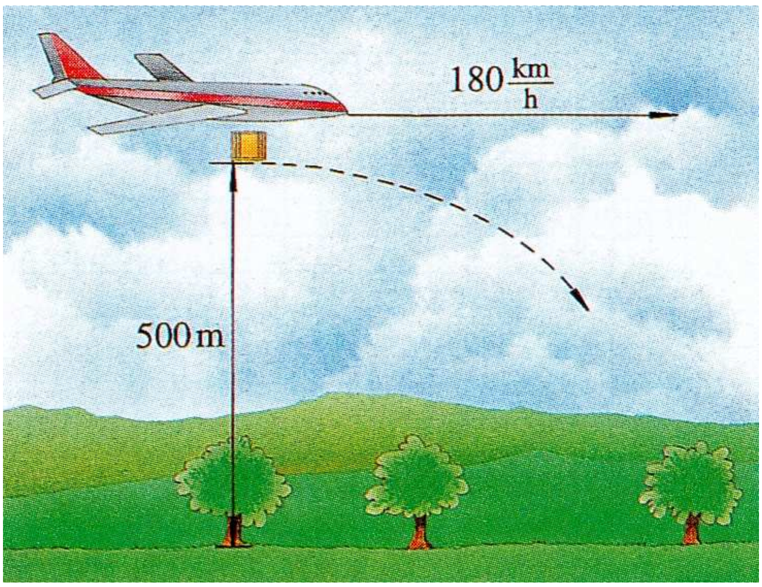
1. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

   Wirft man einen Gegenstand parallel zur Erde, so hat seine Flugbahn die Form einer halben Parabel. Die Gleichung dieser Parabel

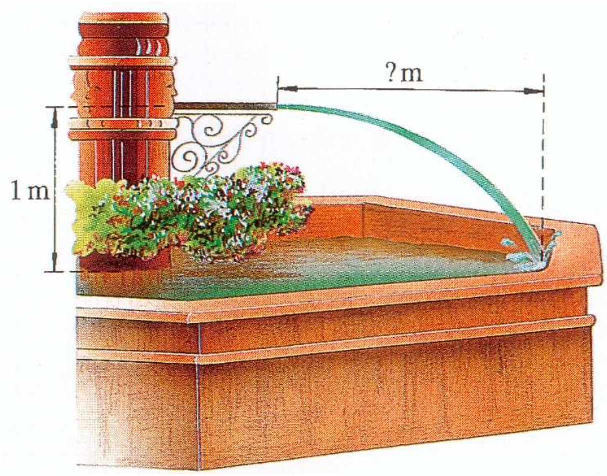


hat die Form $y = -ax^2 + h$.
Für den Wert von a gilt: $a \approx \frac{5}{v^2}$.
Dabei ist v die Abwurfgeschwindigkeit (in $\frac{m}{s}$), x die Entfernung vom Abwurfpunkt in vertikaler Richtung (in m) und y die Höhe (in m), h ist die Abwurfhöhe (in m).

(a) Ein Flugzeug, das mit der Geschwindigkeit von $180\,\frac{km}{h}$ (relativ zur Erde) fliegt, wirft ein Versorgungspaket ab. Wie weit von dem linken Baum entfernt landet das Paket?



(b) Bei dem Springbrunnen tritt das Wasser aus dem Rohr mit der Geschwindigkeit $3{,}5\,\frac{m}{s}$ aus.
Wie weit muss der Rand des Wasserbeckens mindestens von der Rohröffnung entfernt sein?



2.2.5. Bruchgleichungen

Definitionsmenge

1. Gib jeweils die Definitionsmenge an:

$$\frac{4x-3}{2x+5} \quad ; \quad \frac{1}{-x^2+6x-9}$$

2. Gib jeweils die Definitionsmenge an:

$$\frac{5x+2}{2x-3} \quad ; \quad \frac{1}{-x^2+4x-4}$$

3. Gib jeweils die Definitionsmenge an:

$$\frac{38x}{x^2-9} \quad ; \quad \frac{12b}{19+19b^2+38b}$$

4. Gib jeweils die Definitionsmenge an:

$$\frac{83x}{x^2-4} \quad ; \quad \frac{12a}{18a^2+18+36a}$$

5. Bestimme jeweils ausführlich die Definitionsmenge folgender Bruchterme:

(a) $\frac{14x}{25x^2-1}$ (b) $\frac{2}{3x-6x^2+3x^3}$ (c) $\frac{1}{x^3-x-2x^2+2}$

Multipikation und Division

1. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{4x-(x+1)^2}{9y^2+x^2} : \frac{6x^2-6}{(3y+x)^2-6xy}$$

2. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{4x^2-4x+1}{x^4-1} \cdot \frac{(2x-1)^2+8x}{1-4x^2} : \frac{2x-1}{x^2-1}$$

3. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{(x+2)^2-8x}{x^2+9y^2} : \frac{24-6x^2}{6xy-(x+3y)^2}$$

Addition und Subtraktion

1. Fasse zusammen und gib das Ergebnis in gekürzter Form an:

$$\frac{(2a-3b)^2}{3a^2b} - \frac{(2a+3b)^2}{3a^2b}$$

2. Fasse zusammen und gib das Ergebnis in gekürzter Form an:

$$\frac{2a^2-12b^2}{a^2-16b^2} - \frac{2a-3b}{2a-8b} - 1$$

3. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{2x+3}{6x-4} - \frac{5-4x}{9x+6} + \frac{62-12x^2-7x}{24-54x^2}$$

4. Bestimme den Hauptnenner, fasse zusammen und kürze:

$$\frac{3x}{(x-y)^2} - \frac{2}{x-y} - \frac{3y}{(y-x)^2}$$

5. Bestimme den Hauptnenner, fasse zusammen und kürze soweit wie möglich:

$$\frac{-m}{2m+2x} - \frac{3m}{3x-3m} + \frac{m^2}{m^2-x^2}$$

6. Bestimme den Hauptnenner und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{1-n^2} - 1$$

7. Vereinfache soweit wie möglich und gib die Definitionsmenge D_0 des ursprünglichen Terms sowie D_1 des vereinfachten Terms an:

$$\frac{2\,x}{4\,x^2-1} - \frac{x}{4\,x^2-4\,x+1} - \frac{1}{4\,x+2}$$

8. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{-15y+10x}{-4x^2+9y^2} - \frac{27y-12x}{(4x-9y)^2} - \frac{6x}{-3xy-2x^2}$$

9. Fasse zusammen und vereinfache!

$$\frac{3a-8}{a^2-8a+16} - \frac{2a+12}{a^2-16} - \frac{1}{2a+8}$$

Bruchterme vereinfachen

Bruchterme zusammenfassen

1. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\left[\frac{5x+2y}{5x-2y}-\frac{8y^2+20xy}{25x^2-4y^2}\right]:\frac{5x+2y}{12y^2+60xy+75x^2}$$

2. Vereinfache soweit wie mööglich:

$$\left(1+\frac{y}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{2xy-x^2}{x^3-x^2y}:\frac{x^2-4y^2}{x^2-y^2}\right)$$

3. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\left[\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right):\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{ax}\right)\right]\cdot\frac{x^2-y^2}{abx-a^2y}$$

4. Berechne und vereinfache soweit wie möglich:

$$\left(\frac{1-x}{3y-8x}-\frac{x-1}{3y+8x}\right):\left(\frac{1}{8x^2-3xy}\cdot\frac{6x}{y}\right)$$

5. Vereinfache soweit wie möglich: $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$

6. Berechne und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{(x-y)^2}{4xy}+1}$$

7. Vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\frac{y^3-y^2z}{z^2}}{\frac{y^3-yz^2}{z}}$$

8. Vereinfache möglichst weitgehend:

   (a) $\dfrac{1}{6a} + \dfrac{3a^2b + ab^2}{4a + 4b} : \dfrac{3a^2b^2}{a + b}$ (b) $\dfrac{\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 - y^2) - \dfrac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{x^3 + xy^2}$

9. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{1}{2x} - \frac{x^2 + xy - x - y}{2x^3 - 8x} : \frac{x - 1}{8 - 4x}$$

10. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\dfrac{xy + 1}{y^2 - 1} + \dfrac{x}{y^2 + y}}{\dfrac{1}{y^2 + y}} - \frac{x}{y - 1} : \frac{1}{y^2 + y}$$

11. Vereinfache soweit wie möglich!

    (a) $\left(\dfrac{y - 5x}{y + 5x} + \dfrac{20xy}{y^2 - 25x^2}\right) : \dfrac{5x + y}{25x^2 - 10xy + y^2}$

    (b) $\dfrac{\frac{22a}{7a^2 - 7} - \frac{3}{a - 1}}{\frac{21 - a}{a - 1}}$

12. Fasse soweit wie möglich zusammen!

    (a) $\dfrac{1 - x}{x^2 + x} - \dfrac{2x - 3}{2x - 2x^2} - \dfrac{2x^2 + x - 5}{2x^3 - 2x}$

    (b) $\dfrac{100x^2 - 36y^2}{85ab^2} : \dfrac{(3y - 5x)^2}{51a^2}$

13. Fasse soweit wie möglich zusammen!

    (a) $\dfrac{3 - 2a}{2a^2 - 2a} - \dfrac{2a^2 + a - 5}{2a - 2a^3} + \dfrac{a - 1}{a^2 + a}$

    (b) $\dfrac{(5a - 4b)^2}{39x^2y} : \dfrac{64b^2 - 100a^2}{65xy^2}$

14. Gib die Bedingungen an, die für a und b gelten müssen und vereinfache den Term soweit wie möglich!

$$\left(\frac{5a}{b} - \frac{b}{5a}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{b-5a} + \frac{25a^2}{b^2 - 25a^2}\right) : \left(1 + \frac{2b}{5a}\right)$$

15. Vereinfache soweit wie möglich!

$$\left(\frac{b-4a}{b+4a} + \frac{16ab}{b^2 - 16a^2}\right) : \frac{4a+b}{16a^2 - 8ab + b^2}$$

Bruchgleichungen lösen

1. Jemand behauptet, einen Bruch mit folgenden Eigenschaften gefunden zu haben:

   Der Bruch hat den Wert $\frac{1}{3}$. Vermindert man Zähler und Nenner des Bruches um 1 und subtrahiert den neu entstandenen Bruch vom doppelten Wert des ursprünglichen Bruches, so erhält man $\frac{1}{9}$ des Kehrwertes des ursprünglichen Bruches.

   Zeige mit Hilfe einer ausführlichen Rechnung, daß es einen solchen Bruch nicht geben kann!

2. Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge des angegebenen Bruchterms:

$$-\frac{2}{t+3} + \frac{4t+1}{t^2-9} - \frac{2t-5}{2t-6} = -1$$

3. Gib die Definitionsmenge an und berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{4\,x^2 - 81} - \frac{14 - 3\,x}{6\,x - 27} = \frac{2\,x - 1}{4\,x + 18}$$

4. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge über $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x}{4x-6} - \frac{x+5}{6x+9} = 2 - \frac{17x^2 - 4}{12x^2 - 27}$$

5. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge:

$$\frac{3x}{3x+2} - \frac{2-3x}{9x^2+12x+4} = 1$$

6. Gib für folgende Gleichung die Definitions- und die Lösungsmenge an ($G = \mathbb{Q}$)!

$$\frac{5x+2}{36-12x} - \frac{15}{6x^2-54} = \frac{5x+20}{12x+36} - \frac{5}{6}$$

7. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an ($G = \mathbb{Q}$)!

$$\frac{5x+10}{12x+18} - \frac{5}{6} = \frac{5x+1}{18-12x} - \frac{5}{8x^2-18}$$

8. Löse nach x auf und bestimme die Lösungsmenge in Abhängigkeit von r:

$$\frac{r-x}{x+r} - \frac{x+r}{r-x} = \frac{4(r^2+r)}{x^2-r^2}$$

9. Gib jeweils die Definitions- und Lösungsmenge an. Führe Fallunterscheidungen durch, wo es nötig ist.
   (a) $\dfrac{3x-4a}{x-a} - \dfrac{2x+3a}{x} \;=\; 1$
   (b) $\dfrac{1}{x} \;=\; \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

10. Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge (Fallunterscheidung!):

$$\frac{x-7}{x-a} + \frac{x+7}{x+b} \;=\; 2$$

11. Wir betrachten die Gleichung: $$\frac{6\,x}{12\,x^2-75} - \frac{b}{4\,x^2-20\,x+25} = \frac{1}{2\,x+5} \qquad (1)$$
    (a) Bestimme die Definitionsmenge D der Gleichung und berechne x zunächst ohne Berücksichtigung jeglicher Fallunterscheidung! Der Rechenweg zählt, nicht das Ergebnis!

(b) Das Ergebnis von Teilaufgabe (a) lautet: $x = \dfrac{5\,b + 25}{10 - 2\,b}$

Bestimme jetzt die Lösungsmenge der Gleichung (1) mit Berücksichtigung aller Fälle für den Parameter b!

12. Löse nach T_2 auf und gib die Bedingung an, unter der das Auflösen nur möglich ist!

$$S = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

13. Löse nach m auf und gib die Bedingung an, unter der das Auflösen nur möglich ist!

$$f = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) R$$

14. Gib die Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$\frac{b}{ax - a^2} - \frac{x - a}{b} = \frac{bx - a^3 - ax^2}{a(bx - ab)} \quad \text{mit } a,\, b > 0$$

3. Erweiterung des Potenzbegriffs

3.1. allgemeine Wurzeln

1. In dieser Aufgabe ist $a > 0$ und $b < 0$. Berechne die Lösungsmenge:

   (a) $x^4 = a$ (b) $x^8 = b$ (c) $x^7 = a$ (d) $x^5 = b$

2. (a) Lösung der Gleichung $\sqrt[4]{x} = \sqrt{14}$ über $G = \mathbb{R}_0^+$
   (b) Diskriminante der Gleichung $x^2 - 5x + 0,5 = 0$
   (c) $\sqrt[3]{79507}$
   (d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} + \sqrt{\sqrt[3]{10^{12}}} - \sqrt{1600} =$
   (e) $6! + 1!$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

3.2. Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten

3.2.1. Rechengesetze - Herleitung und Illustration

1. M sei die Menge aller Potenzen, die jede der drei Ziffern 4, 3 und 2 genau einmal und sonst keine Ziffer enthalten. Die Potenzen dürfen Klammern, aber keine Rechenzeichen enthalten. Die beiden Potenzen $(3^2)^4$ und 32^4 sind z.B. Elemente von M.
   (a) Wie viele verschiedene Reihenfolgen der drei Ziffern gibt es? Wie viele verschieden aussehende Potenzen mit diesen drei Ziffern sind also möglich?
   (b) Suchen Sie die beiden größten und das kleinste Element von M, wobei alle Versuche genau zu protokollieren und Strategien der Suche kurz zu erläutern sind!

2. Jemand glaubt, dass $\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{a+b}$ ist $(a, b \in \mathbb{R})$. Überzeugen Sie ihn durch ein einfaches Zahlenbeispiel, dass er nicht recht hat!
   Nennen Sie eine Rechenregel, die so ähnlich aussieht und richtig ist!

3. Die Gleichung $3^2 + 4^2 = 7^2$ ist anscheinend falsch.
   (a) Gibt es Zahlen a und b, für die die entsprechend gebildetete Gleichung $a^2+b^2 = (a+b)^2$ richtig ist? Begründen Sie Ihre Vermutung.
   (b) Wann gilt die Gleichung $a^3 + b^3 = (a+b)^3$

4. Unter welchen Bedingungen für $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:
   $$\text{(a)} \quad \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \qquad \text{(b)} \quad \sqrt[m]{x^n} = |x|^{\frac{n}{m}}$$

5. Im Unterricht wurde das 1. Monotoniegesetz für Potenzen besprochen und bewiesen. Hiernach gilt für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$:
   $x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n$
   Führen Sie den Beweis nochmals im Detail durch!

6. Im Unterricht wurde das 2. Monotoniegesetz für Potenzen besprochen und bewiesen. Hiernach gilt für $x \in \mathbb{R}^+$ und beliebige natürliche Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:
   $$n_1 < n_2 \implies \begin{cases} x^{n_1} < x^{n_2} & \text{wenn} \quad 1 < x < \infty \\ x^{n_1} > x^{n_2} & \text{wenn} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$
   Führen Sie den Beweis nochmals im Detail durch!

7. Ordnen Sie der Größe nach und begründen Sie:
   $(\frac{1}{2})^{403}$, $(\frac{1}{4})^{203}$, $(\frac{1}{8})^{120}$, 16^{102}, $(-\frac{1}{4})^{201}$, 4^{-210}, $(-2)^{360}$

8. Ordnen Sie ohne Benutzung des Taschenrechners folgende Potenzen der Größe nach, mit kurzer Begründung:
   $$0{,}25^{2{,}8};\ 5^{-3{,}1};\ 4^{-3{,}1};\ 5^{-4{,}1}$$

3.2.2. Nur Multiplikation und Division

Exponenten ganzzahlig

1. Es gibt $x = 26^{1000}$ verschiedene Texte mit einer Länge von 1000 Buchstaben. Nach einer geeigneten Umformung ist x mit Hilfe des Taschenrechners in der Gleitkommadarstellung ($a \cdot 10^n$ mit $1 \leqq a < 10$ und $n \in \mathbb{N}$) mit drei geltenden Ziffern hinzuschreiben.

2. Berechne mit dem Taschenrechner (5 gültige Ziffern):

$$\sqrt[5]{\frac{2{,}47^4 - 0{,}1662^{-2} \cdot 0{,}47^3}{0{,}21^3}}$$

3. Vereinfachen Sie:

$$\left[\frac{a^2(bc)^4}{(ab)^4c^3}\right] \cdot \left[\frac{a^5b^0c^2}{a^7c^6}\right]^3$$

4. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Endergebnis ohne Bruchstrich:

$$\frac{(3u^4v^{-1})^2}{(9u^{-2}v^{-3})^{-1}} : \frac{(2u^{-6}v^3)^{-3}}{(2u^5v^{-2})^4}$$

5. Vereinfachen und schreiben Sie das Ergebnis ohne Bruchstrich:

$$\frac{0{,}8a^6b^{-5}c^3}{3^{-3}a^{-3}b^4} : \frac{9b^{-1}}{a^{-4}c^2}$$

6. Vereinfachen Sie:

$$\left[\left(\frac{2a^{-1}b^2}{3a^5c^{-3}}\right)^3 : \left(\frac{3a^6b^{-4}}{7a^{-2}c^4}\right)^{-2}\right] \cdot \left(\frac{-c^0}{7a}\right)^{-1}$$

7. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$(3a - 7b)^{2n+1} \cdot (7b - 3a)^{2n+1}$$

8. Vereinfachen Sie:

$$\frac{r^{3m+2}}{a^{m+3}} : \frac{r^{2m-2}}{a^{m+2}}$$

9. Vereinfachen Sie:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{-y^{2m+4}}{x^{n-2}}\right)^4 : \left[\left(\frac{y^{m-8}}{x^{n+2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4x^{-2n+1}}{3y^{-3m}}\right)^{-3}\right]$$

10. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($a, b \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{x^{2a+5}}{(-y^3)^{2b+5} \cdot [(-z)^4]^{3b+3}} : \frac{x^{2a}}{(yz)^{6b+10} \cdot [(-z)^3]^{2b-1}}$$

11. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich:

$$(-1{,}5)^{-6} \cdot \left[(2{,}5a)^n \cdot \frac{b}{(-1)^{n-1} \cdot (x+y)^{n+1}}\right]^6 : \left[\left(a - \frac{1}{2}a\right)^{-n} \cdot \frac{(-y-x)^{n+1} \cdot b^{-1}}{15^{n-1} \cdot 3^{-n}}\right]^{-6}$$

12. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\left(\frac{6a^2b^{-2}}{c^{n+1}d^{2n}}\right)^3 : \left[\frac{2(cd)^n}{(ab)^{-1}} \cdot \frac{c^n d^{2n}}{3ab^{-2}}\right]^{-2}$$

13. Vereinfachen Sie soweit wie möglich und schreiben Sie ohne Nenner:

$$\left(-\frac{5a^k c^m}{3b^{-n}}\right)^{-4} \cdot \left[\frac{1}{(9c^{2m})^2} : \left(\frac{b^{-n}}{25}\right)^2\right]$$

14. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Ergebnis ohne Verwendung von Klammern und Brüchen:

$$\left(\frac{r^{3n}s^{-7}}{5s^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{r^{1-n}}{s^6}\right)^2$$

15. Geben Sie ohne Bruchstrich an:

$$\frac{-5a^m b^{-n} d^3}{8c^{-2}} : \frac{10a^{-n} b^m d^{-4}}{24c^{-1}}$$

16. Schreiben Sie möglichst einfach mit positiven Exponenten:

$$\left\{\left[\frac{(-3)(-a)^{-2}c^{4-2m}d^0}{16b^{-3}d^{-2}}\right]^{-2} \cdot \left[\frac{-9(-c)^{-3}}{8a^{-5}b^9}\right]^3\right\} : \left[\frac{a^5b^{-7}}{c^{5-m}}\right]^4$$

17. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich! Im Ergebnis sollen nur positive Exponenten auftreten!

$$\left[\left(\frac{5x^0 \cdot 100}{0{,}02^{-2} \cdot (-y)^{l-3}}\right)^4 : \left(\frac{y^{5-2l}}{-(-yx^2)^0}\right)^2\right]^{-5} \cdot (-0{,}02^{-30})^{-1} \cdot (-5)^{-20}$$

18. Vereinfachen Sie:

$$\left[(-1)^{2n+1} - (-1)^{2n}\right]^5; \quad n \in \mathbb{N}$$

Exponenten rational oder reell

1. In einem Physikbuch findet man für die sogenannte Fermi-Energie folgende Formel (alle auftretenden Variablen sind positiv):

$$E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Löse nach V auf und schreibe das vereinfachte Ergebnis in der Form

$$\text{Bruch} \cdot (\text{Bruch})^3 .$$

Das Volumen V ist der Rauminhalt eines Würfels mit der Kantenlänge a. Berechne einen Ausdruck für a.

2. Vereinfachen Sie ($a \in \mathbb{R}^+$): (a) $\left(a^2\right)^{\sqrt{2}} \cdot a^{\sqrt{2}}$ (b) $\left(\sqrt{a}\right)^3 : \sqrt[3]{a^2}$
Berechnen Sie die Lösungsmenge ohne Verwendung des Taschenrechners: (c) $x^8 = 16$ (d) $8^x = 16$

3. Vereinfachen Sie ($b \in \mathbb{R}^+$): $(b^2)^{-0{,}27} : b^{0{,}46}$

4. Vereinfachen Sie:

$$\left[\left(\sqrt[4]{a}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$$

5. Berechnen Sie folgenden Term und schreiben Sie den Zahlenwert im Ergebnis als Dezimalzahl:

$$\left(0{,}000\,000\,512 \cdot x^{\frac{3}{8}} \cdot u^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4}{9}}$$

6. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis unter Verwendung des Wurzelzeichens:
$$\sqrt[6]{6 \cdot \sqrt[4]{6 \cdot \sqrt[3]{6}}}$$

7. Vereinfachen Sie folgenden Term:
$$\frac{a^{-\frac{7}{8}} \cdot b}{c^{-\frac{1}{2}}} : \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{3}{4}}}{a}$$

8. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne negative Exponenten:
$$\left(\frac{4x^{-3}y^2}{z^5}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{16y^{-2}}{x^{-6}z^4}\right)^{\frac{1}{6}}$$

9. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne Nenner ($x, y \in \mathbb{R}^+$):
$$\frac{\left(\frac{1}{27}x^{\frac{3}{8}}y^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(81x^{-\frac{5}{6}}y\right)^{-\frac{3}{4}}}$$

10. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne Nenner ($a, b \in \mathbb{R}^+$):
$$\frac{\left(16a^{-\frac{5}{6}}b\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(\frac{1}{8}a^{\frac{3}{8}}b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}}$$

11. Schreiben Sie mit nur einem Wurzelzeichen und rationalem Nenner ($a > 0$):
$$\frac{\left(a : \left(\sqrt[7]{\sqrt{a}}\right)^{11}\right)^3}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[7]{a^5}}$$

12. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und stellen Sie das Ergebnis mit rationalem Nenner dar:
$$(a^4b^{-5})^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{(b\sqrt{b})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{a^2b^5}}$$

13. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
$$\left(\frac{\left(a^{-\frac{1}{8}}\sqrt[5]{b^4}\right)^2}{a^{\frac{3}{4}}\sqrt{a^{-5}b^{\frac{1}{5}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

14. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne Nenner $(a, b, c \in \mathbb{R}^+)$:
$$\frac{\left(a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}} : \frac{\left(c^{\frac{5}{4}}a^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{3}}}{\left(b^{\frac{1}{4}}a^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

15. Schreiben Sie das Ergebnis mit nur einem Wurzelzeichen:
$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{a^3}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^3}{a^5}}}$$

16. Schreiben Sie das Ergebnis mit nur einem Wurzelzeichen:
$$\sqrt[5]{c^4 \cdot \sqrt[3]{c^2}} \cdot \sqrt{c \cdot \sqrt[4]{c^3}} : \sqrt[24]{c^{41}}$$

17. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis nennerfrei an $(u, x \in \mathbb{R}^+)$:
$$\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{x}{u}\right)^{-\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{1}{ux}\right)^{-2\frac{m}{n}}$$

18. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis unter Verwendung des Wurzelzeichens:
$$\frac{x^2y^2}{ab^2} \cdot \left(\frac{a^{m+1}b^{2m+1}}{x^{2m}y^{2m+1}}\right)^{\frac{1}{m}}$$

19. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich! Radizieren Sie soweit wie möglich!
$$\sqrt[4]{a\sqrt[6]{b^2 \cdot a}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[8]{a^{11} \cdot b^{-1}}} \cdot \sqrt{b^2 \cdot \sqrt[4]{a^2}}$$

20. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($x, y \in \mathbb{R}^+$):

$$\frac{\sqrt{64x^{10}y^{12}}}{\left(x^{\frac{10}{2}}y^{\frac{20}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}} - \left(125x^5y^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(5^6xy^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

21. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($a, b \in \mathbb{R}^+$):

$$\left(3^6a^2b\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(27a^4b^2\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{81a^8b^4}}{\left(a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{10}{6}}\right)^{\frac{3}{5}}}$$

3.2.3. Alle Grundrechnungsarten treten auf

Alle Grundrechnungsarten - Faktorzerlegung

1. Zerlegen Sie soweit wie möglich in Faktoren:

$$108u^2v^3 - 3v^5$$

2. Faktorisieren Sie vollständig:

$$16z^{k+2} - 16z^k + 4z^{k-2}$$

3. Berechnen Sie und schreiben Sie als Potenz:

$$[-9(-x^2)^3 + (-4x^3)^2] \cdot \left(\frac{1}{0{,}5}\right)^2$$

4. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis nennerfrei an ($s, t \in \mathbb{R}^+$):

$$\left(s^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(s^{\frac{2}{3}} + (st)^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{2}{3}}\right)$$

5. Zerlegen Sie Zähler und Nenner vollständig in Faktoren und kürzen Sie:

$$\frac{9a^{2n+1} - a}{a^2 - 3a^{n+2}}$$

6. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. Die Ergebnisse sollen vollständig gekürzt und ohne Nenner geschrieben werden.

$$\frac{a^{2m+1} - a^{m+1}}{a^m - a^{3m}}$$

7. Vereinfachen und kürzen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{b^{2m} - a^{2n}}{b^{2m} + 2a^n b^m + a^{2n}}$$

8. Vereinfachen Sie:

$$\frac{(a^2 + 6a + 9)^{2m+1}}{(-a - 3)^{2m+1}}; \quad m \in \mathbb{N}$$

9. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich:

$$\frac{81x^{9p} - 256x^{5p}}{(16x^{4p} - 24x^{5p} + 9x^{6p}) \cdot (9x^{3p} + 16x^p)}$$

10. Zerlegen Sie Zähler und Nenner in Faktoren und kürzen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{x^{2m+5} - 2x^{m+5}y^s + x^5y^{2s}}{x^{2m+8} - y^{2s}x^8}$$

11. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{u - 2u^{\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{1}{3}} + u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}}{u - u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}}$$

12. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} + (ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a - b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

13. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} - \sqrt[5]{32a} + 1}{(a - a^{\frac{3}{5}}) : \sqrt[5]{a^3}}; \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

14. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}} - 4y^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}$$

15. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \cdot \left[\left(2{,}7 \cdot 10^4\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{30}\right]^{\frac{6}{5}} \cdot \left(\frac{10^{-\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

16. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{a^{\frac{5}{2}} \cdot x^8 - \left[\sqrt{2} \cdot a^{\frac{5}{4}} \cdot x^2 \cdot y^{\frac{3}{2}}\right]^2 + \sqrt{a^5 \cdot y^{12}}}{(a^{-1})^{-2} \cdot (x^4 + (-y)^3)}$$

17. Vereinfachen Sie und beachten Sie Fallunterscheidungen:

$$\frac{\sqrt{x^4} - \sqrt{y^6}}{x^4 - y^6}$$

18. Vereinfachen Sie und beachten Sie Fallunterscheidungen:

$$\frac{\sqrt{x^4} + \sqrt{y^6}}{x^4 - y^6}$$

19. Kürzen Sie folgenden Bruchterm so weit wie möglich:

$$\frac{(-a^4)^{2k+1} \cdot (a^{2m-2n} - 2 \cdot a^{2m} + a^{2m+2n})}{(a^{2m-2n} - a^{2m+2n}) \cdot [(-a)^{k+1}]^8}$$

20. Man stelle das Ergebnis als <u>eine</u> Wurzel mit möglichst einfachem Radikanden dar!

$$\frac{\left[a^{\frac{3}{4}} \cdot b \cdot (b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}}{(b-a)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[(b-a)^{1-3n} \cdot a^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{2n}}$$

Alle Grundrechnungsarten - Bruchrechnung

1. Bringen Sie auf den kleinsten gemeinsamen Nenner und vereinfachen Sie:

$$\frac{y^{n-2}}{1-y} - \frac{y^{n-1}}{1+y} + \frac{y^n}{y^2-1}$$

2. Bringen Sie auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfachen Sie:

$$\frac{1}{x^{n-2}} - \frac{2x^{n+2}+5x^3}{x^{2n}} + \frac{3x^{n-1}+5}{x^{2n-3}}$$

3. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{6^{2k-1}+1}{6^{2k}} - \frac{1-6^{2k-3}}{2\cdot 6^{2k-1}} + \frac{6^2+36^k}{3\cdot 6^{2k+1}}$$

4. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{2-x^{k-1}}{x^{k-2}} - \frac{1}{x^{k+4}} - \frac{4-3x^k}{x^{k-1}} - \frac{2x^6-4x^5-1}{x^{k+4}}$$

5. Fassen Sie zusammen und kürzen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{b^{3-3n}-1}{b^{2-n}} + \frac{1+b^{-4n+4}}{b^n} - \frac{b^{n-1}+1}{b^{2n-1}}$$

6. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{2-b}{b^{-n}} + \frac{b^2+1}{b^{-n+1}} - \frac{b+b^2}{b^{-n+2}}$$

7. Fassen Sie zu <u>einem</u> Bruchterm zusammen und vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$\frac{2x^{n+1}+3x^6+2x^5+1}{2x^{n+2}} - \frac{2x^{n-4}+3}{3x^{n-3}} - \frac{2x^{n-5}+9}{6x^{n-4}}$$

8. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{a^n}{(a-b)^{n-2}} - \frac{2a^{n+1}}{(a-b)^{n-1}} + \frac{2a^{n+2}}{(a-b)^n}$$

9. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. Die Ergebnisse sollen vollständig gekürzt sein und ohne Nenner geschrieben werden.

$$\frac{b^{-2}}{(a-b)^{2n}} + \frac{2-2a^2b^{-2}}{(b-a)^{2n+2}} + \frac{2b^{-1}}{(a-b)^{2n+1}}$$

10. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis ohne Minuszeichen in den Exponenten an:

$$\frac{a^{-p}-a^{-q}}{a^{-p}+a^{-q}} - \frac{a^{-2p}+a^{-2q}}{a^{-2p}-a^{-2q}} + \frac{a^{-p}+a^{-q}}{a^{-p}-a^{-q}}$$

11. Fassen Sie zu <u>einem</u> Bruchterm zusammen und stellen Sie das Ergebnis möglichst einfach dar:

$$\frac{x^{a-b-1}}{x^{a-1}\cdot\left(x^a-x^b\right)} - \frac{1}{x^{a+b}+x^{2b}} - \frac{1}{x^{2a}-x^{2b}}$$

12. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\left[\left(\frac{y^4}{b}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{y^3}{b^2}\right)^{-\frac{2}{5}}\right]^{\frac{6}{2}} - \frac{\left(y^{\frac{2}{5}}\right)^2 \cdot b^{\frac{6}{7}}}{\left(y^2\cdot b\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot b^{-\frac{1}{7}}}$$

13. Vereinfachen Sie mit Hilfe einer Fallunterscheidung:

$$(x-2a)^n + (2x-4a)^n - (2a-x)^n$$

Teil II.

Stochastik

4. Zusammengesetzte Zufallsexperimente

4.1. elementare zusammengesetzte Zufallsexperimente

1. Wenn der ,,1. FC Hacke" nur ein kleines bisschen besser ist als die ..Borussia Grätsch 1860", sodass für ,,Hacke" bei jedem Spiel eine Chance von 51 Prozent besteht, das Spiel zu gewinnen - wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Serie von acht Spiele der ,,1. FC Hacke" alle Spiele gewinnt?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

2. (a) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei 4 Würfen mit **einem** Würfel mindestens einmal eine Sechs zu werfen.
   (b) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei 4 Würfen mit **zwei** Würfeln ein Sechserpasch zu werfen.
   (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 4 Würfen mit **einem** Würfel mindestens einmal eine Sechs zu werfen.
   (d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 4 Würfen mit **zwei** Würfeln ein Sechserpasch zu werfen.

   Quelle: Ulrike Schätz, delta 9, Mathematik für Gymnasien, C. C. Buchner Verlag, Bamberg

3. Das Geburtstagsproblem
   (a) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass unter 30 (unter 40, unter 50, ...)Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben.
   (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_2, dass 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.
   (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_3, dass 3 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.
   (d) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_4, dass 4 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

(e) Setzte die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 25, 30, 40, 50, 60 und 80 Personen fort und veranschauliche die Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle und graphisch.

Quelle: Ulrike Schätz, delta 9, Mathematik für Gymnasien, C. C. Buchner Verlag, Bamberg

4. Vierfeldertafeln

(a) Ergänze die Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B	0,21		
$\overline{B}$		0,52	0,77
			1

und gib $p(A \cup B)$ an

(b) Gib $p(\overline{A} \cap B)$ an

	A	$\overline{A}$	
B	0,20		0,55
$\overline{B}$	0,13		
			1

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

5. Vierfeldertafeln

(a) Ergänze die Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B			0,55
$\overline{B}$	0,13		
		0,65	1

und gib $p(A)$ an

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt weder A noch B ein?

	A	$\overline{A}$	
B	0,22		0,55
$\overline{B}$	0,13		
			1

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

4.2. Pfadregeln

1. Lisa fährt drei Tage in die Berge zu einem Kurzurlaub. Die Wetterprognose sieht folgende Regenwahrscheinlichkeiten für die Urlaubstage vor:

Wochentag:	Mo	Di	Mi
Regenwahrscheinlichkeit:	10 %	25 %	30 %

(a) Verwende die Symbole r für „Regentag“ und n für „Nichtregentag“ und erstelle ein Baumdiagramm des dreistufigen Zufallsexperimets „Urlaubswetter“. Welche Mächtigkeit hat der zum Experiment gehörige Ergebnisraum Ω?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 bleibt es den ganzen Urlaub über trocken?

(c) Schreibe das Ereignis E_1 : „höchstens ein Regentag“ als Menge hin und berechne seine Wahrscheinlichkeit.

(d) Charakterisiere das Gegenereignis E_2 von E_1 in Worten und berechne dann $P(E_2)$.

2. Alfons kauft sich einen klapprigen Gebrauchtwagen, der im Mittel bei zehn Fahrten über je 100 km genau einmal mindestens eine Panne hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Alfons auf der 1000 km langen Fahrt von Garmisch nach Flensburg mindestens eine Panne? Erläutere deine Ansätze!

3. Der Girgl und der Fex sind leidenschaftliche Wilderer. Der Girgl trifft eine Gams mit der Wahrscheinlichkeit 60 %, der Fex mit 80 %. Die beiden Freunde gehen gemeinsam auf die Jagd, der Girgl hat drei, der Fex zwei Patronen dabei. Als sie einen Gamsbock sehen, beginnen sie abwechselnd auf ihn zu schießen, der Girgl beginnt. Nach einem Treffer ist die Gams tot und das Schießen beendet.

   (a) Erstelle ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment „Gamsschießen“. Verwende die Symbole g, f, $\overline{g}$ und $\overline{f}$ für das Treffen bzw. Nichttreffen des jeweiligen Schützen und schreibe den kompletten Ergebnisraum Ω hin. Gib auch die Mächtigkeit von Ω an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 überlebt die Gams?

   (b) Schreibe das Ereignis E: „Die Gams wird vom Fex erlegt.“ in der Mengenschreibweise hin und berechne seine Wahrscheinlichkeit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_{g} wird die Gams dann vom Girgl geschossen?

4. Eva und Sissi gehen zum Essen. Als es ans Bezahlen geht, zieht Sissi ein Kartenspiel hervor. Sie nimmt drei rote und drei schwarze Karten, mischt sie gut durcheinander und legt den Stapel mit dem Rücken nach oben auf den Tisch. Sissi klärt Eva auf: „Wir ziehen abwechselnd je eine Karte, bis eine rote Karte auftaucht. Die Zieherin der ersten roten Karte bezahlt das Essen. Du beginnst.“

   (a) Verwende die Symbole r und s für das Ziehen einer roten bzw. schwarzen Karte und erstelle ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment „Kartenziehen“. Schreibe den kompletten Ergebnisraum Ω hin und gib seine Mächtigkeit an. Schreibe die Ereignisse E = „Eva bezahlt“ und S = „Sissi bezahlt“ in der Mengenschreibweise hin und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten.

(b) Einige Mahlzeiten später merkt Eva, dass sie öfter bezahlt als Sissi und schlägt eine Variante des Spiels vor: „Wer die zweite rote Karte zieht, bezahlt, unabhängig davon, wer die erste rote Karte gezogen hat.“ Löse Teilaufgabe (a) noch einmal für die neue Spielvariante.

5. In einer Schüssel befinden sich zehn rote und zehn weiße Kugeln. Es werden zufällig drei Kugeln aus der Schüssel gezogen und in ein Glas gelegt.

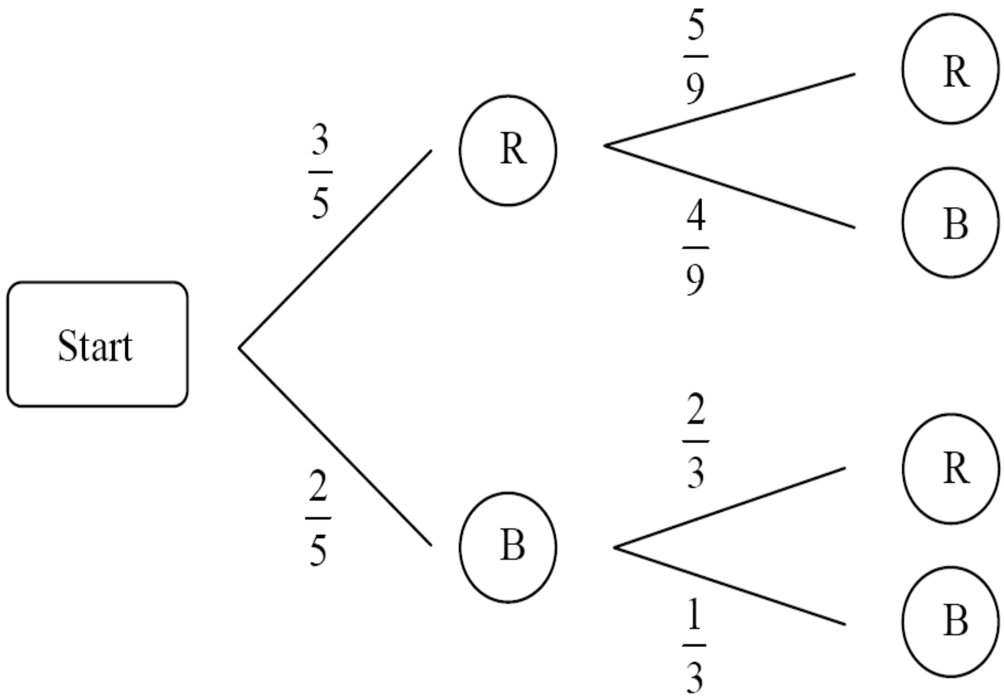
   (a) Berechne mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. Schreibe die Ereignisse auch in der Mengenschreibweise hin.

   E_1 : „Im Glas sind drei rote Kugeln.“
   E_2 : „Im Glas sind zwei rote und eine weiße Kugel.“
   E_3 : „Im Glas sind eine rote und zwei weiße Kugeln.“
   E_4 : „Im Glas sind drei weiße Kugeln.“

   (b) Das beschriebene Zufallsexperiment wird fünf mal ausgeführt, wobei die drei Kugeln im Glas vor jedem Experiment wieder in die Schüssel gegeben werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nie eine weiße Kugel im Glas?

   (c) Wie viele rote Kugeln müssen sich vor jedem Experiment mindestens in der Schüssel befinden (Gesamtzahl der Kugeln immer noch zwanzig), damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe (b) größer als zehn Prozent ist?

6. Aus einer Urne mit 6 roten und 4 blauen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln gezogen. Zu diesem Zufallsexperiment gehört das nachstehende Baumdiagramm.



(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.

(b) Wurde in diesem Zufallsexperiment mit oder ohne Zurücklegen gezogen? Begründen Sie Ihre Entscheidung anhand des Baumdiagramms.

Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2008

7. Über den berühmten Bergsteiger Wolfgang Bergfried stand unter der Überschrift ,,Überlebte - Alle 14 Achttausender" vor einigen Jahren in der Zeitung:

   Wenn man bedenkt, dass die Todesquote bei den Achttausender-Bergsteigern $3,4\%$ *beträgt, hätte Wolgang Bergfried bei seinen bisher* 29 *Expeditionen zu den höchsten Bergen der Welt mit* 99% *Wahrscheinlicheit umkommen müssen"*

   (a) Wie kommt der Reporter zu dieser Aussage.

   (b) Berechnen Sie den richtigen Wert für die Wahrscheinlichkeit nach 29 Expeditionen umgekommen zu sein.

   EPA Mathematik. 2002

8. (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zwei zufällig ausgewählte Personen am selben Tag Geburtstag?

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zwei zufällig ausgewählte Personen im selben Monat Geburtstag?

   Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

9. (a) In einer Schule haben 10% der 900 Schüler ein Mofa, 80% ein Fahrrad; 90% der Fahrradbesitzer haben kein Mofa. Wie viele Schüler haben weder ein Mofa noch ein Fahrrad?

   (b) In einem Flugzeug mit 250 Plätzen sind 241 Plätzebelegt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Lage der neun freien Plätze gibt es?

   Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

10. (a) 22% der in Deutschland geprägten 2 €Münzen werden in München hergestellt. Alex hat drei deutsche 2 €Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind davon zwei in München geprägt?

    (b) In der Bevölkerung gibt es etwa 5% Linkshänder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern kein Linkshänder ist?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern mindestens ein Linkshänder ist?

(d) Jedem fünften Fitnessriegel liegt ein Sammelbild bei. Wie viele Riegel muss Ben mindestens kaufen, um mit mindestens 50% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Bild zu erhalten?

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

11. Ein Laplace-Würfel wird solange geworfen, bis entweder eine 6 erscheint oder viermal nacheinander keine 6 erscheint. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel 1, 2, 3, bzw. 4 mal geworfen wird.

12. „ Ein unmöglicher Saustall"

    In einem großen Saustall wirft jede Sau zweimal im Jahr 5 Ferkel. Die Wahrscheinlichkeit für ein männliches Ferkel beträgt 0,45.

    (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens ein weibliches Ferkel ist?

    (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens ein weibliches Ferkel **und** mindestens ein männliches Ferkel ist?

    (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf drei weibliche und zwei männliche Ferkel sind?

    (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens drei weibliche Ferkel sind?

Teil III.

Geometrie

5. Satzgruppe des Pythagoras

5.1. Konstruktionsaufgaben

5.1.1. Wurzelkonstruktionen

1. Konstruiere eine Strecke der Länge $\sqrt{40}\,\text{cm}$ auf zwei verschiedene Arten.

2. Konstruiere eine Strecke der Länge $(\sqrt{19}+\sqrt{10})\,\text{cm}$.
   Die einzelnen Konstruktionsschritte sind knapp zu beschreiben!

3. Konstruiere eine Strecke der Länge $(\sqrt{74}-\sqrt{15})\,\text{cm}$.
   Die einzelnen Konstruktionsschritte sind knapp zu beschreiben!

4. Konstruiere eine Strecke der Länge $\frac{2}{3}\sqrt{39}\,\text{cm}$.
   Die einzelnen Konstruktionsschritte sind knapp zu beschreiben!

5.1.2. Flächenverwandlungen

1. Verwandle ein Quadrat der Seitenlänge 7,5 cm in ein inhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite 5,5 cm lang ist. Erläutere kurz dein Vorgehen!

2. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $c = 10\,\text{cm},\ b = 9\,\text{cm},\ a = 8,5\,\text{cm}$. Verwandle das Dreick ABC in ein inhaltsgleiches Quadrat! Die einzelnen Verwandlungsschritte sind dabei stichpunktartig anzugeben!

3. Die Fläche eines Quadrates ist $25\,\text{cm}^2$. Konstruiere mit Hilfe des Höhensatzes ein flächengleiches Rechteck mit dem Umfang 22 cm.

4. Gegeben ist ein Quadrat vom Inhalt $A_Q = 29\,\text{cm}^2$.
   Verwandle das Quadrat in ein inhaltsgleiches Rechteck vom Umfang $U_R = 28\,\text{cm}$.
   Eine genaue und nachvollziehbare Konstruktion ist verlangt! Keine Konstruktionsbeschreibung!

5.1.3. Sonstige Konstruktionsaufgaben

1. Konstruiere ein Quadrat, das der Differenz der Quadrate mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm flächengleich ist.

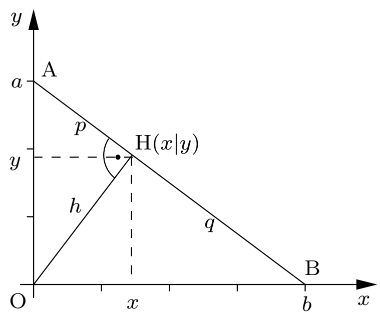
5.2. Mathematische Anwendungen

5.2.1. Berechnungen am Dreieck

1. Im Dreieck $\triangle$OBA mit O $(0|0)$, B $(b|0)$ und A $(0|a)$ ist H $(x|y)$ der Fußpunkt der Höhe von O auf AB. Weitere Bezeichnungen:

$$h = \overline{\mathrm{OH}},\ p = \overline{\mathrm{AH}},\ q = \overline{\mathrm{HB}} \text{ und } c = \overline{\mathrm{AB}}.$$

Drücke c, h, p, q und die Koordinaten von H durch a und b aus. Jeder Ansatz ist durch Nennung des Satzes und des Dreiecks, auf das er sich bezieht, kurz zu begründen. Vereinfache die Ergebnisse! Berechne c, h, p, q und die Koordinaten von H für $a = 3$ und $b = 4$.



2. Im unteren Teil hat die Straße von Berchtesgaden zum Rossfeld eine Steigung von 25%.

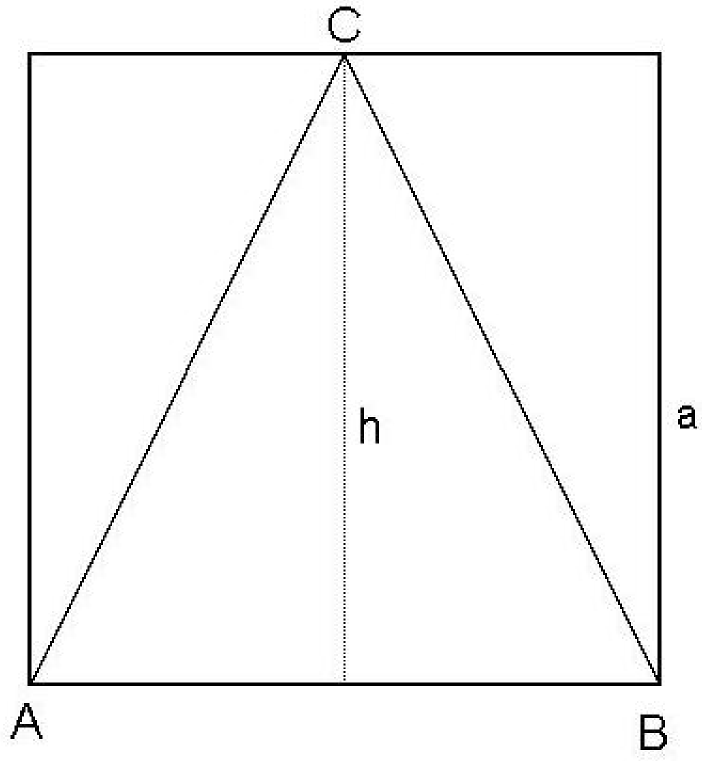
(a) Zeigen Sie, dass die Steigung von 25% im abgebildeten Verkehrsschild nicht richtig dargestellt ist. Messen Sie dazu geeignete Strecken in einem Steigungsdreieck. Machen Sie im Bild kenntlich, welche Strecken Sie abgemessen haben.

(b) Welcher der folgenden Terme gibt an, wie viele Meter man auf der unteren Rossfeldstraße zurücklegen müsste, um einen Höhenunterschied von 100 m zu erzielen?

$4 \cdot 100m$ $\quad$ $0,25 \cdot 100m$ $\quad$ $\sqrt{400^2 \cdot 100^2}$ $\quad$ $\sqrt{400^2 + 100^2}$ $\quad$ $\sqrt{400^2 - 100^2}$

Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2008

3. **Dreiecke im Quadrat**



Oben abgebildet siehst du ein Dreieck, dass in ein Quadrat „eingepasst“ wurde.

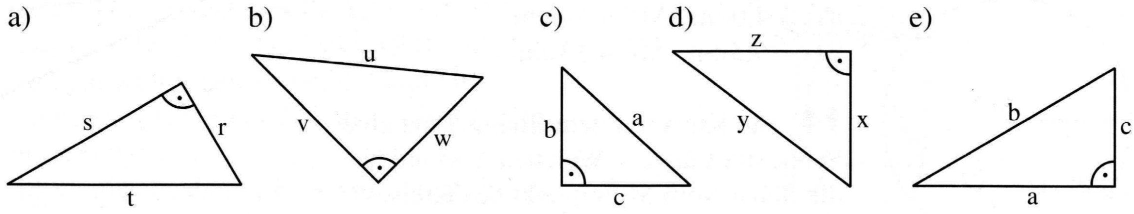
(a) Mache möglichst viele (mindestens 5) mathematische Aussagen über die Figuren (z.B. über Flächeninhalte, Winkel,...).

(b) Verschiebe den Punkt C auf der Höhenlinie h so, dass das entstehende Dreieck $\triangle ABC'$ gleichseitig ist. Wie groß ist dann h'? Beantworte die Frage mit und ohne Trigonometrie!

(c) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt das neue Dreieck ein?

4. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

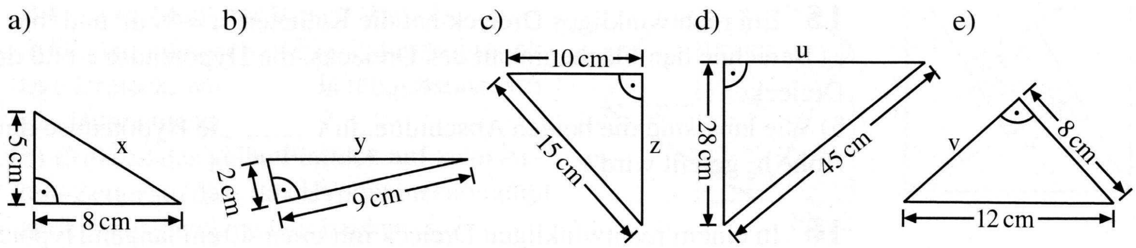
Gib für die rechtwinkligen Dreiecke jeweils die Gleichung nach dem Satz des Pythagoras an.



Quellen: Welt der Mathematik 9 (1990), Mathematik heute 9 (1996), Lambacher Schweizer 9 (1997), Schnittpunkt 9 (1995), MUED

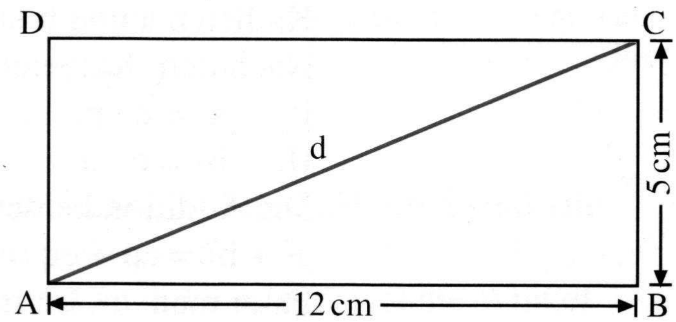
5. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

   Berechne bei den rechtwinkligen Dreiecken die fehlenden Seitenlängen.



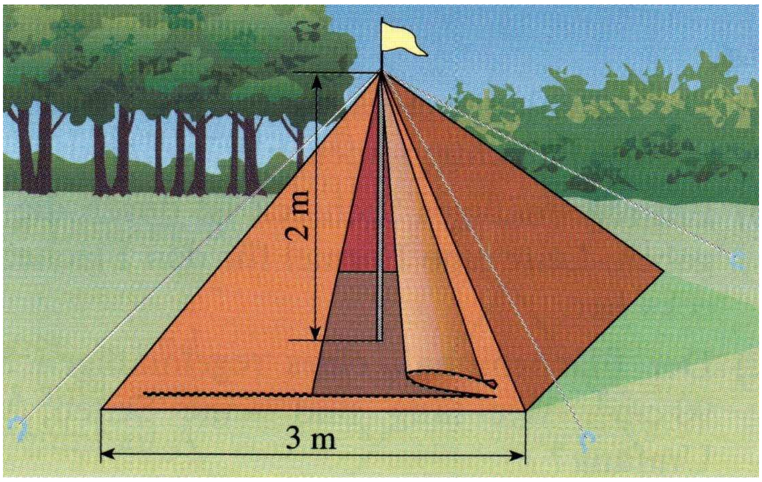
6. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

   Berechne die Länge der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$.



7. **Pyramiden**

   Wie viel Zeltstoff benötigt man für die Herstellung des Zeltes?

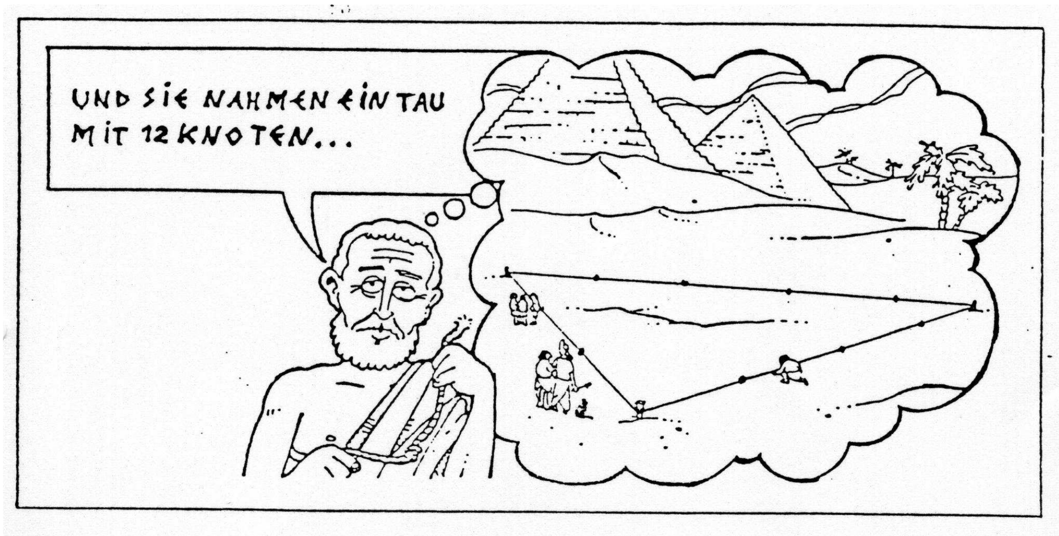


Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

8. **Die ägyptischen Seilspanner**

   Lies die folgenden Zeitungsartikel.
   Erkläre,worum es geht. Ein Artikel enthält Fehler.

   Die ägyptischen Seilspanner (um 2000 v. Chr.) hatten eine sehr genaue Methode um rechte Winkel zu konstruieren. Sie benutzten dazu ein Seil mit Knoten in gleichen Abständen.



   (a) Warum soll es wichtig sein, genau rechte Winkel konstruieren zu können? Hast du eine Idee, wie das heute die Maurer machen?

(b) Nimm ein langes Stück Bindfaden und markiere darauf 12 gleich große Abschnitte. Finde möglichst viele Dreiecke, so dass jeder der drei Eckpunkte genau bei einem Knoten liegt. Welches haben wohl die ägyptischen Seilspanner benutzt und warum gerade dieses?

Quelle: MUED

Variationen:

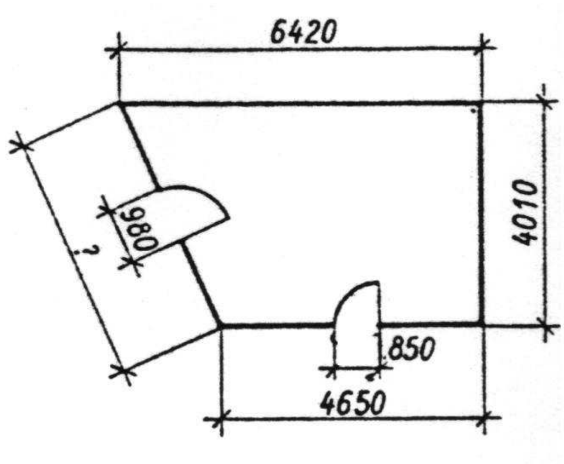
(a) Selbst Schnur hestellen, Schüler Tripel finden lassen.

(b) Alle 15 Dreiecke finden lassen, die man mit weniger als 12 Knoten legen kann.

(c) Streichhölzer statt Schnur verwenden.

9. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

In einem Wohnraum werden Fußsockelleisten montiert. Wie viele Meter dieser Leisten werden in der Kalkulation verrechnet, wenn die beiden Türen ausgespart werden und ein Verschnittzuschlag von 15% einbezogen wird?

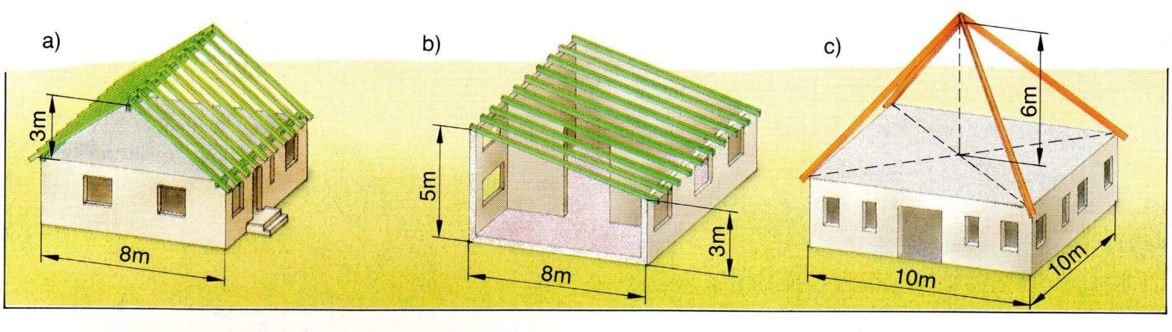


10. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

Elfmeter! Olaf knallt den Ball in einer Höhe von 1, 50 m an den Pfosten. Welche Strecke legt der Ball dabei mindestens zurück?
Das Tor ist 7, 32, m breit und 2, 44, m hoch.

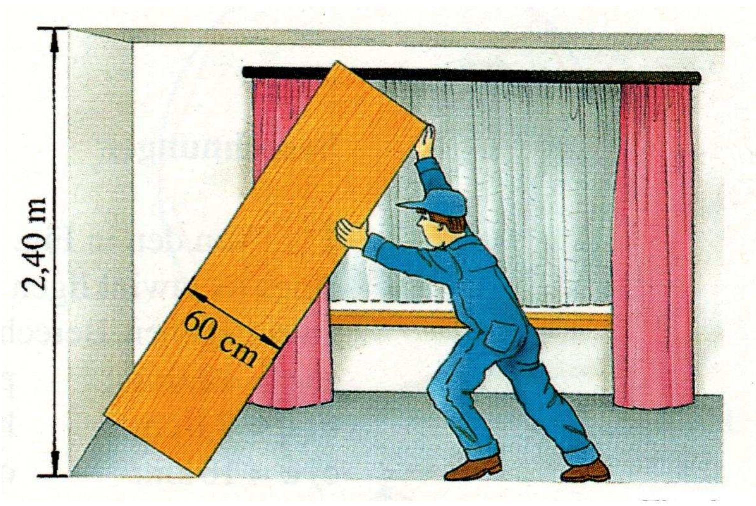
11. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

Berechne für jedes abgebildete Gebäude die Länge eines Dachsparren. Jeder Dachsparren soll dabei 40 cm überstehen.



12. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

    Wie hoch darf der Schrank höchstens sein, damit man ihn wie angegeben aufstellen kann?



13. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

    Auf einem ebenen Feld stehen zwei Türme, einer 60 Fuß hoch, der andere 80 Fuß hoch. Ihr Abstand beträgt 100 Fuß. Für die beiden Vögel ist der Weg von der Turmspitze bis zu einem Brunnen zwischen den Türmen gleich weit. Wie weit ist der Brunnen von den Türmen entfernt?