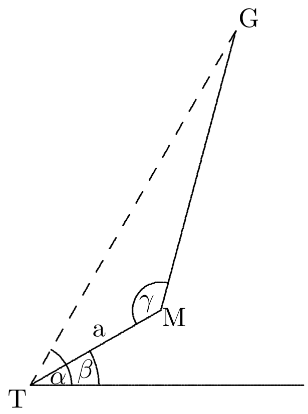
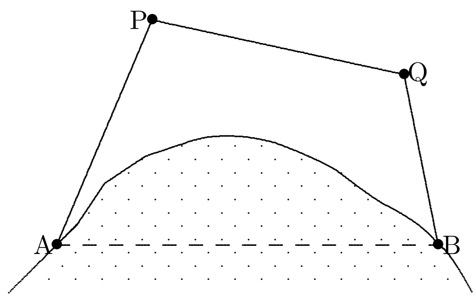
Vermessungsaufgaben

1. Vom Punkt T der Talstation einer Tragseilbahn aus sieht man den Gipfel G eines Berges unter dem Höhenwinkel $\alpha = 60^o$.
   Die Seilbahn fährt zunächst $a = 994\,\text{m}$ weit unter einem Steigungswinkel von $\beta = 30^o$ zur Mittelstation M. Dort ist der Winkel $\gamma = \sphericalangle GMT = 135^o$, wobei die Punkte T, M und G in einer vertikalen Ebene liegen.
   Wie hoch liegt der Gipfel G im Vergleich zur Talstation T?



Lösung: 2352 m

2. Über einen Teich soll von A nach B eine Brücke gebaut werden.
   Der Vermessungsingenieur misst:
   $\overline{AP} = 287\,\text{m}$
   $\overline{PQ} = 326\,\text{m}$
   $\overline{QB} = 135\,\text{m}$
   $\sphericalangle APQ = 105^o$
   $\sphericalangle PQB = 127^o$
   Berechnen Sie die Länge der Brücke $\overline{AB}$!

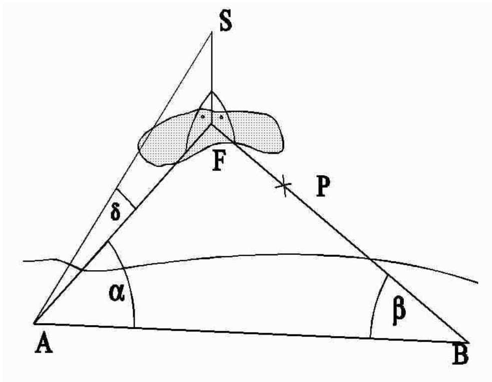


Lösung: 510 m; Diagonale einzeichnen!

3. Auf einer dem Festland vorgelagerten Insel im Meer steht ein Leuchtturm der Höhe $h = \overline{FS}$ (vgl. "räumliche" Abbildung). Um h zu bestimmen steckt man am Strand eine Standlinie $[AB]$ der Länge 420 m ab und misst die Winkel $\alpha = 48{,}7^0$, $\beta = 77{,}2^0$ und den Höhenwinkel $\delta = 6{,}2^0$.

(a) Berechnein Sie die Höhe h des Leuchtturms gerundet auf Meter. (Ergebnis: 55 m)

(b) Eine Fähre, die die Linie $[BF]$ befährt, sendet im Punkt $P \in [BF]$ ein Nebelhornsignal aus, das in S genau 1,0 s nach dem Aussenden empfangen wird (Schallgeschwindigkeit $v = 330\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Wie weit war die Fähre von F und bzw. von A entfernt?



Lösung: $h = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \tan\delta \cdot \overline{AB} = 55$ m

$\overline{PF} = \sqrt{\overline{PS}^2 - h^2} = 325$ m,

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{PF}^2 - 2\overline{AF}\cdot\overline{PF}\cos(180^o - \alpha - \beta)} = 411$ m

4. Von einer geraden Landstraße zweigt in P nach rechts vorne eine gerade Seitenstraße nach A ab. Geht man auf der Landstraße 4 km weiter, so führt ein Fußweg unter einem Winkel von 60° nach rechts vorne ebenfalls nach A. Seitenstraße und Fußweg treffen sich in A unter 45°. Nach B, das 5 km von A entfernt ist, führt von P aus eine 6 km lange Seitenstraße unter einem Winkel φ nach vorne links.
Erstellen Sie eine saubere Planskizze und berechnen Sie dann den Winkel φ auf Grad genau!

Lösung: 38°

5. Die Lage eines Punktes P auf einer Karte soll durch "Vorwärtseinschneiden" bestimmt werden. Dazu misst man von zwei trigonometrischen Punkten A und B aus die Winkel $\varepsilon = \sphericalangle BAP$ und $\delta = \sphericalangle PBA$. Im folgenden werden Koordinaten relativ zu A benutzt: $A(0|0)$ und $B(2188{,}12|-815{,}88)$ (Einheit 1m). Es sei $\varepsilon = 95{,}1^0$ und $\delta = 18{,}4^0$.

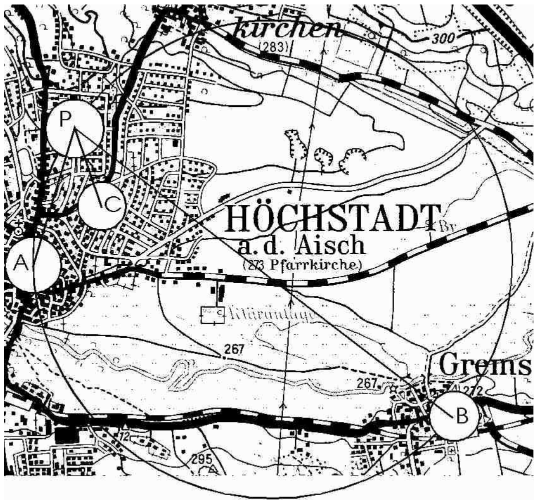
(a) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{AB}$ und den Winkel von $[AB$ gegen die x-Achse.

(b) Berechnen Sie $\overline{AP}$ und die Koordinaten von P.

Lösung: (a) $\overline{AB} = 2335$m, Winkel $339{,}6^0$

(b) $\overline{AP} = 804$m mit Hilfe des Sinussatzes, Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse: $74{,}7^0$, Koordinaten $P(213|775)$.

6. Beim "Rückwärtseinschneiden" werden die Koordinaten des Standorts P durch Winkelpeilung zu drei trigonometrischen Punkten A, B und C bestimmt. Im folgenden wird A als Koordinatenursprung) benutzt (Einheit 1m): $A(0|0)$, $B(2188{,}12|-815{,}88)$, $C(402{,}26|403{,}66)$.
Gemessen werden $\alpha = \sphericalangle APC = 42{,}1^0$ und $\beta = \sphericalangle CPB = 24{,}4^0$.



(a) Die Gerade PC schneidet den Umkreis des Dreiecks ABP im Punkt Q. Fertigen Sie eine Skizze und bestimmen Sie ohne Rechnung die Winkel $\sphericalangle QAB$ und $\sphericalangle ABQ$.

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Halbgeraden $[AB$ und der x-Achse sowie die Entfernung $\overline{AB}$. (*Ergebnis:* $339{,}6^0$, $\overline{AB} = 2335{,}3$m)

(c) Berechnen Sie $\overline{AQ}$ und die Koordinaten von Q. (*Ergebnis:* $Q(1210|-1204)$.)

(d) Berechnen Sie $\varepsilon = \sphericalangle BQC$ und $\delta = \sphericalangle CQA$ und begründen Sie anschließend $\sphericalangle BAP = \varepsilon$ sowie $\sphericalangle PBA = \delta$.

(e) Geben Sie an, wie die Koordinaten von P jetzt mit Hilfe der Winkel ε, δ sowie der Koordinaten von A und B berechnet werden können. Keine Rechnung!

Lösung:
(a) Nach dem Umfangswinkelsatz: $\sphericalangle QAB = \beta$, $\sphericalangle ABQ = \alpha$.

(b) $\overline{AB} = 2335{,}3$m, Winkel $339{,}6^0$

(c) Mit dem Sinussatz $\overline{AQ} = 1707$m, der Winkel von $[AQ$ gegen die x-Achse ist $339{,}6^0 - \beta = 315{,}2^0 = -44{,}8^0$. Dies ergibt die Koordinaten $Q(1210|-1204)$.

(d) Mit den Polarwinkeln der Vektoren $\overrightarrow{QB}$ und $\overrightarrow{QC}$ oder mit dem Cosinussatz erhält man $\varepsilon = 95{,}0^0$ und mit der Winkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich $\delta = 18{,}5^0$. Die letzte Behauptung folgt wieder aus dem Umfangswinkelsatz

(e) Man berechnet $\overline{AP} = 806{,}5$m mit dem Sinussatz, der Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse ist $\varepsilon - 20{,}45^0$. daraus können die Koordinaten von P bestimmt werden.

Bemerkung: Dieses Verfahren, die Koordinaten eines Punkts durch Rückwärtseinschneiden zu bestimmen, heißt "Collinssche Lösung". Dazu werden in zwei Schritten, jeweils von der Basisstrecke $[AB]$ aus, Punkte durch "Vorwärtseinschneiden" festgelegt (erst Q, dann P).