Vektoranalysis

Autor: Clément GALOPIN
clement.galopin@epost.ch
Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

Vorwissen

Der Schrankensatz in $\mathbb{R}^n$

Die Norm einer linearen Abbildung $T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ist $\|T\| := \sup\{\|T(x)\|;\ x \in \mathbb{R}^p$ und $\|x\| \leq 1\}$. Diese Norm besitzt die Eigenschaft, dass $\|T(x)\| \leq \|T\|\ \|x\|$.

Der Dualraum $(\mathbb{R}^p)^*$ liefert reellwertige lineare Abbildungen während deren Argumente von $\mathbb{R}^p$ geliefert werden; diese Rollen von $\mathbb{R}^p$ und $(\mathbb{R}^p)^*$ lassen sich aber auch vertauscht ansehen[1]. Deswegen können wir die Norm auf $\mathbb{R}^p$ folgenderweise schreiben:

$\|x\| := \sup\{\|y(x)\|;\ y \in (\mathbb{R}^p)^*$ und $\|y\| \leq 1\}$.

Dieser seltsame Ausdruck einer Norm in $\mathbb{R}^p$ wird uns ermöglichen, den verallgemeinerten Schrankensatz zu beweisen, während sich im reellen Fall der Schrankensatz mithilfe vom Satz von Rolle vergleichsweise einfach beweisen lässt.

Behauptung (Schrankensatz): Seit f eine differenzierbare Abbildung auf einem offenen Gebiet $D \in \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}^p$. Falls $[a, a+h] \subset D$, gilt dann

$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|h\| \cdot \sup_{x \in [a,a+h]} \|f'(x)\|$.

Beweis: Wir wenden den oben eingeführten Ausdruck einer Norm an:

$$\|f(a+h) - f(a)\| = \sup\{\|y \circ f(a+h) - y \circ f(a)\|;\ y \in (\mathbb{R}^p)^* \text{ und } \|y\| \leq 1\}.$$

Dabei ist $y \circ f$ eine reellwertige Funktion, für welche der mithilfe vom Satz von Rolle im reellen Fall bewiesene Schrankensatz gilt: Es gibt einen $\alpha \in]a, a+h[$ mit $y \circ f(a+h) - y \circ f(a) = (y \circ f)'(\alpha)h$. Und da y eine lineare Abbildung ist, gilt $(y \circ f)'(\alpha)h = y \circ f'(\alpha)h$.

Substituierung (erste Zeile der unten stehenden Entwicklung) und Anwendung der Eigenschaft der Norm einer linearen Abbildung (zweite Zeile) ergeben:

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a)\| &= \sup\{\|y \circ f'(\alpha)h\|;\ y \in (\mathbb{R}^p)^* \text{ und } \|y\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|y\|\ \|f'(\alpha)\|\ \|h\|;\ y \in (\mathbb{R}^p)^* \text{ und } \|y\| \leq 1\} \\ &= \|h\|\ \|f'(\alpha)\| \end{aligned}$$

Dabei gilt $\|f'(\alpha)\| \leq \sup\{\|f'(x)\|; x \in D \subset \mathbb{R}^p\} =: \|f'\|_D$ für ein zusammenhängendes Gebiet D, das sowohl a als auch $a+h$ beinhaltet. Die Behauptung ist somit bewiesen. □

[1] Die Standardbasis $(dx^1, \dots, dx^p)$ des Dualraums $(\mathbb{R}^p)^*$ wird nämlich durch die Standardbasis $(e_1, \dots, e_p)$ von $\mathbb{R}^p$ *eineindeutig* durch $dx^i(e_j) = \delta^i_j$ definiert, wobei δ^i_j das Kronecker-Symbol ist. dx^i können wir mit dem Standardskalarprodukt als $dx^i: x \mapsto \langle e_i, x\rangle$ ansehen. Geben wir uns einmal dieses Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^p$, wird dann jede duale Abbildung $f_v \in (\mathbb{R}^p)^*$ von einem Vektor $v \in \mathbb{R}^p$ bestimmt, indem sich f_v als $x \mapsto \langle v, x\rangle$ schreiben lässt. In diesem Skalarprodukt spielt der v gegenüber dem x keine bevorzugte Rolle und wir können also ebenfalls jeder dualen Abbildung $f_x \in (\mathbb{R}^p)^*$ einen $x \in \mathbb{R}^p$ eindeutig zuordnen. Somit ist aber x selbst eine Funktion.

Bemerkung: Dieser Beweis macht Gebrauch von zwei unterschiedlichen Normen einer linearen Abbildung, während der Beweis von Konrad Königsberger in: *Analysis 2* nur die Maximumsnorm anwendet – dafür aber einen mathematischen Trick, von dem man sich lange fragen kann, wie man auf die Idee kommt. Dabei ist die Anwendung mehrerer Normen wegen der Äquivalenz der Normen ganz korrekt.

Der Fixpunktsatz für Kontraktionen

Kontraktionen

Definition: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f: M \to M$ heisst Kontraktion, wenn es eine Zahl $\lambda < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$, $d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$.
Weiter werden wir $\|\dots\|$ für die Metrik $d(\dots)$ schreiben.

Beispiel: Sei $K \subset M$ eine kompakte konvexe Menge. $f: K \to M$ ist eine Kontraktion, (genau dann) wenn $f(K) \subset K$ und $\|f'\|_K < 1$ gilt. Da K konvex ist, darf man nämlich den Schrankensatz anwenden.

Der Fixpunktsatz

Behauptung: Sei $f: M \to M$ eine Kontraktion. Es gibt genau einen Punkt $x \in M$ mit $f(x) = x$.

Beweis: Existenz: $\forall x \in M$ konvergiert die rekursive Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ denn sie ist eine Cauchy-Folge[2]: $d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda \cdot d(x_n, x_{n-1})$. Eindeutigkeit: Seien zwei Fixpunkte…

Definition: Die Funktion f ist ein Diffeomorphismus, wenn sie eine Umkehrfunktion besitzt und beide stetig differenzierbar – also C^1-Funktionen – sind.

Ableiten und invertieren

Sei $f: X \to Y$ ein Diffeomorphismus. Für g die Umkehrfunktion von f gilt $f \circ g(y) = y$ und $g \circ f(x) = x$. Setzen wir $y = f(x)$. Ableiten ergibt $df(x) \circ dg(y) = id_Y$ respektive $dg(y) \circ df(x) = id_X$. In der Matrizendarstellung (bezüglich Basen[3]) heisst es $f'(x) \cdot g'(y) = I_Y$ respektive $g'(y) \cdot f'(x) = I_X$. Wenn wir nur den dimensionalen Aspekt dieser zwei Matrizengleichungen betrachten, können wir daraus nicht schliessen, dass die Matrizen $f'(x)$ und $g'(y)$ zwei zueinander inversen linearen Abbildungen sind. Die Identitätsmatrizen I_X und I_Y könnten nämlich unterschiedliche Dimensionen haben und die Matrizen $f'(x)$ und $g'(y)$ eine $m \times n$- respektive eine $n \times m$-Matrix sein. Dass $f'(x)$ und $g'(y)$ Quadratmatrizen sind, kommt daraus, dass die Identitätsmatrix eine invertierbare Matrix

---

[2] Konvergenzkriterium von Cauchy: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ sodass $(N < n < m) \Rightarrow \|a_n - a_m\| < \varepsilon$. In unserem Fall, $(m = k + n) \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i < \|x_n - x_{n+1}\| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \|x_n - x_{n+1}\| \cdot \frac{1}{1-\lambda}$. Wir wählen also N derart, dass $\|x_N - x_{N+1}\| \leq \varepsilon / \frac{1}{1-\lambda} = \varepsilon(1 - \lambda)$, denn für diesen N gilt: $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Somit ist bewiesen, dass $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ haben wir nämlich einen passenden N gefunden.

[3] Die Funktion $df(x) \circ dg(y) = id_Y$ ist ein Endomorphismus vom Tangentialraum T_yY an der Stelle y und dieser Tangentialraum ist zu einem $\mathbb{R}^d$ isomorph. Tangentialräume werden in den nächsten Seiten ausführlich behandelt. „bezüglich Basen“ heisst also „bezüglich zwei Basen von T_yY“.

ist. Repräsentiert nämlich eine invertierbare Matrix eine Funktion, die sich als Verknüpfung zweier linearen Funktionen darstellen lässt, sind dann die Matrizen dieser zwei Funktionen ebenfalls invertierbar. Aus der Tatsache, dass $f'(x)$ und $g'(y)$ Quadratmatrizen derselben Dimension sind, folgt, dass die Identitätsmatrizen I_X und I_Y dieselbe Dimension haben. Wir können also $f'(x) \cdot g'(y) = I_Y = g'(y) \cdot f'(x)$ schreiben und erst daraus schliessen, dass die Matrizen $f'(x)$ und $g'(y)$ zwei zueinander inversen linearen Abbildungen sind. Es gilt $(df(x))^{-1} = dg(y)$ und $(dg(y))^{-1} = df(x)$.

Diese Tatsache wird im Zusammenhang mit dem in den nächsten Seiten eingeführten Begriff des Tangentialvektors in der Form $(df(p))^{-1} = d(f^{-1})(f(p))$ angewendet. Diese Umschreibung des Ausdrucks $(df(p))^{-1}$ bietet die willkommene Wahl, sich mental entweder die Ableitung einer Umkehrfunktion oder die Umkehrfunktion einer Ableitung vorzustellen. Was fällt einem leichter?

Von der Analysis in $\mathbb{R}^n$ in die Vektoranalysis

Der lokale Umkehrsatz

Sei $f: X \to Y$ eine C^1-Funktion. In der Ausgangslage ist nur bekannt, dass das Differential $df(x_0)$ an jeder Stelle x_0 ein Isomorphismus ist. Wir zeigen, dass f eine C^1-Umkehrfunktion $g: Y \to X$ besitzt, dass f also ein Diffeomorphismus ist.

Wir geben uns einen y und wollen ihm ein Urbild zuordnen. Mit anderen Worten: wir wollen den x finden, so dass die Gleichung $f(x) = y$ stimmt. Wie können wir den Fixpunktsatz für diese Aufgabe anwenden? Wir müssen eine Kontraktion φ_y derart definieren, dass $\varphi_y(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Wir betrachten deshalb $\varphi_y(x) \coloneqq f(x) - x - y$. Was fehlt aber, damit φ_y eine Kontraktion ist? Wir merken zuerst, dass φ_y eine Funktion von X nach Y und also nicht mal von einem topologischen Raum in sich selbst ist. Zudem muss $\|\varphi_y\|$ in einer konvexen Umgebung streng kleiner als 1 sein. Diese zwei Anforderungen werden der Zweck einer ersten Korrektur von der Definition von φ_y sein. Diese konvexe Umgebung muss darüber hinaus von φ_y in sich selbst abgebildet werden. Dies wird der Zweck einer zweiten Korrektur sein.

Zur ersten Korrektur: Anstelle von f betrachten wir die Funktion $f^*(x) \coloneqq df(x_0)^{-1} \circ [f(x - x_0) - f(x_0)]$. Diese Funktion, die von der freien Wahl eines Punktes $x_0 \in X$ abhängt, ist eine Funktion von X nach X, was eine notwendige Eigenschaft für unsere Kontraktion ist. Eine nächste Eigenschaft von f^* ist, dass $df^*(0) = id_X$. Wählen wir einen $y \in X$. Für $\varphi_y(x) \coloneqq f^*(x) - x - y$ ist der Wert $\|d\varphi_y\|$ Null an der Stelle $x = 0$ und ist wegen der Stetigkeit von f in einer kompakten Kugel $K_r \subset X$ vom Radius r um 0 streng kleiner als 1. In dieser kompakten Kugel K_r gilt $\|d\varphi_y(x)\| < 1$.
Zur zweiten Korrektur: Die Funktion $\varphi_y: K_r \to X$ ist dann eine Kontraktion, vorausgesetzt, dass φ_y eine Funktion von K_r in sich selbst ist. Dies stellt die Frage: für welche y ist φ_y eine solche Funktion? Für alle y in K_r? Dass $\varphi_y(x)$ in der Kugel K_r sein soll, bringt uns dazu, die Ungleichung $(\circ)$ zu schreiben:

$$(\circ) \qquad \|\varphi_y(x)\| \leq \|f^*(x)\| + \|x\| + \|y\| \leq r$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\varphi_y(x)\| \leq \Big\| f^*(x) - \underbrace{f^*(0)}_{=0} \Big\| + \|x\| + \|y\| \leq r$$

$$(*) \qquad \Leftrightarrow \quad \|\varphi_y(x)\| \leq \underbrace{2 \cdot \|x - 0\|}_{\substack{\text{Schrankensatz:} \\ \text{in } K_r \text{ gilt nämlich} \\ 1 \leq \|(f^*)'\| < 2}} + \|x\| + \|y\| = 3\|x\| + \|y\| \leq r$$

Somit haben wir $\|\varphi_y(x)\|$ mit einem Ausdruck majoriert, welcher nur von $\|x\|$ und $\|y\|$ abhängt. Wählen wir x und y zum Beispiel mit $\|x\| < \frac{r}{6}$ respektive $\|y\| < \frac{r}{2}$, befindet sich zwar $\varphi_y(x)$ in K_r, jedoch nicht unbedingt in der kleineren Kugel von Radius $r/6$. Es kann also gut sein, dass sich dann die zweite Iteration $\varphi_y \circ \varphi_y(x)$ ausserhalb von K_r befindet. Angesichts dieses Problems soll deshalb eine gute Majorisierung von $\|\varphi_y(x)\|$ so sein, dass wir x wohl überall in der Kugel K_r und nicht nur in einem Teil davon wählen dürfen. Erst dann können wir sagen, für welche x und y der Betrag von $\varphi_y(x)$ kleiner als r ist und daraus richtig schlussfolgern, φ_y sei eine Funktion von K_r in sich selbst.

Möchten wir $\|x\| < r$ anstatt $\|x\| < \frac{r}{6}$ wählen dürfen, wo müssten wir dann y wählen? Mit der Ungleichung $(*)$ lässt sich keine zufrieden stellende Lösung finden. Können wir vielleicht $(*)$ durch eine Verallgemeinerung abschwächen, um dann eine Lösung zu finden? Sicher können wir es, indem wir r nicht als fest gegeben betrachten, sondern variieren lassen. In diesem Fall sollten wir nicht lediglich y für einen festen r suchen, sondern beide y und r suchen, damit $\varphi_y(K_r) \subset K_r$ gilt.

Wählen wir einen kleineren r als Radius der Kugel, können wir anstatt den Faktor 2 in der Ungleichung $(*)$ einen kleineren Faktor α betrachten und hoffen, dass es dann aufgeht. Weil jedoch $1 \leq \|(f^*)'\|$ in jeder Kugel K_r gilt, muss α grösser als 1 sein.
Somit schauen wir uns die Sache abstrakter an: anstatt $3\|x\| + \|y\| \leq r$ in der Ungleichung $(*)$ betrachten wir $(1+\alpha)\|x\| + \|y\| \leq r$. Dabei[4] soll die Zahl α derart sein, dass es eine Fraktion $\frac{r}{m}$ von r gibt, die sowohl $\frac{r}{m} \geq \|y\|$ als auch $\|x\| \leq r$ genügt. Die erste Anforderung besagt, dass y nur innerhalb einer kleinen Kugel um 0 gewählt werden darf, die zweite Anforderung, dass x in der ganzen Kugel K_r gewählt werden darf. Bringen wir diese Informationen zusammen:

$$(1+\alpha)\|x\| + \|y\| \leq r \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{r - \|y\|}{\|x\|} - 1.$$

Die letzte Ungleichung schränkt die Wahl von α umso stärker ein, wenn der Ausdruck $\frac{r-\|y\|}{\|x\|} - 1$ umso kleiner ist und das ist der Fall, wenn $\|x\|$ und $\|y\|$ maximal sind. Da $\|x\| \leq r$ und $\|y\| \leq \frac{r}{m}$ verlangt wird, ist r der maximal mögliche Wert von $\|x\|$ und $\frac{r}{m}$ derjenige von $\|y\|$. In diesem Fall beträgt $\frac{r-\|y\|}{\|x\|} - 1$ den Wert $\frac{r-\frac{r}{m}}{r} - 1$. Unser α darf also überall gewählt werden, wo die Bedingung $\alpha \leq \frac{r-\frac{r}{m}}{r} - 1$ erfüllt ist, was äquivalent zur Bedingung $\alpha \leq -\frac{1}{m}$ ist.

Leider ist die Bedingung $\alpha \leq -\frac{1}{m}$ mit derjenigen, dass α grösser als 1 sein muss, unverträglich. Diese Tatsache bedeutet, dass die Ungleichung $(*)$ zu restriktiv ist, auch wenn man den Radius r frei wählen darf. Es wird einem schnell klar, dass sich die Ungleichung $(\circ)$ nicht anpassen lässt. Manchmal ist es mit den Ungleichungen so, dass sie zu „grosszügig" gemacht werden. Das rechte Glied $\|f^*(x)\| + \|x\| + \|y\|$ ist zwar grösser als das linke Glied der Ungleichung $(\circ)$, jedoch auch zu gross um vom Nutzen zu sein. Um überhaupt eine Ungleichung zu bekommen, war also die Anwendung der Dreiecksungleichung auf das linke Glied zu radikal. Wie können wir sonst eine Ungleichung mit $\|\varphi_y(x)\|$ als kleineres Glied schreiben? Wie wäre es mit:

[4] α ist von r bestimmt. Wegen der Stetigkeit von f^* können wir aber die Sache umgekehrt betrachten und zuerst den α frei wählen, da es für jeden α einen r gibt so, dass $(1+\alpha)\|x\| + \|y\| \leq r$ gilt. Deshalb dürfen wir mit dem α anfangen.

$$\|\varphi_y(x)\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)\| + \|\varphi_y(0)\| \,?$$

Diese Ungleichung ist weniger „grosszügig“ als ($\circ$). Denn $\|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)\| + \|\varphi_y(0)\| = \|f^*(x) - x - y - (f^*(0) - 0 - y)\| + \|f^*(0) - 0 - y\| = \|f^*(x) - x - y + y\| + \|y\| = \|f^*(x) - x\| + \|y\|$ ist kleiner als $\|f^*(x)\| + \|x\| + \|y\|$.

Anstatt ($\circ$) können wir also Folgendes schreiben[5]:

$$\|\varphi_y(x)\| \leq \left\|\varphi_y(x) - \underbrace{\varphi_y(0)}_{=y}\right\| + \|y\| \leq \|d\varphi_y\|_{K_r} \cdot \|x - 0\| + \|y\| \leq r, \text{ wobei } \|d\varphi_y\|_{K_r} < 1.$$

Von dem her können wir $\|x\|$ kleiner als $r/(2 \cdot \|d\varphi_y\|_{K_r})$ und $\|y\|$ kleiner als $r/2$ wählen. Wenn der Radius r der Kugel K_r so festgelegt wird, dass $\|d\varphi_y\|_{K_r} < 1/2$, dürfen wir sogar x in der ganzen Kugel wählen und behaupten, φ_y sei eine Funktion von K_r in sich selbst. Somit haben wir unsere Kontraktion vollständig definiert.

Ferner ordnen wir jedem y mit $\|y\| < r/2$ den Fixpunkt von φ_y zu. Lokal um $x = 0$ haben wir auf diese Weise eine Umkehrfunktion g^* von f^* definiert. Daraus entnehmen wir leicht die Umkehrfunktion g von f um die Stelle $x = x_0$. Es bleibt zu zeigen, dass diese Umkehrfunktion stetig ist.

□

Zurück zu unserer eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f: X \to Y$. Jetzt wissen wir, dass das Differential $df(x)$ an jeder Stelle x ein Isomorphismus ist und dass eine stetige Umkehrfunktion $g: Y \to X$ vorhanden ist. Wir zeigen, dass g stetig differenzierbar ist.
Wir schreiben die Differenzierbarkeit von f in x folgenderweise: $f(x+h) = f(x) + df(x)h + R(h)$. Wir versuchen dann, das Pendant für die Differenzierbarkeit von g in $y = f(x)$ zu schreiben. Dabei nehmen wir als Pendant von h den Wert $k = f(x+h) - f(x)$.[6] Wir prüfen schlussendlich, dass der Rest die Bedingung eines Restes wirklich erfüllt:

$$\begin{cases} g(y+k) = x + h = g(y) + h & (1) \\ h = \left(df(x)\right)^{-1} \cdot \left(f(x+h) - f(x) - R(h)\right) & (2) \\ \left(df(x)\right)^{-1} = dg(y) & (3) \end{cases} \Rightarrow g(y+k) = g(y) + dg(y)k \overbrace{- dg(y) \cdot \underbrace{R(h)}_{=R(g(y+k)-g(y))}}^{=:R^*(k)}$$

Der Rest ist also $R^*(k) := -dg(y) \cdot R(g(y+k) - g(y))$. Bleibt zu prüfen: $\lim_{k \to 0} \frac{R^*(k)}{\|k\|} = 0$.
Und da die Ableitung eine Zusammensetzung stetiger Funktionen ist, ist auch sie stetig.

□

[5] Es ist klar, dass eine Anwendung des Schrankensatzes auf ($\circ$) die einzige Methode ist, die Funktion f^* loszuwerden und ein rechtes Glied der Ungleichung mit nur noch $\|x\|$ und $\|y\|$ zu bekommen. Die Anwendung der Dreiecksungleichung auf $\|\varphi_y(x)\|$ ist es aber, die die Funktion f^* erscheinen lässt, und wir wissen jetzt, dass damit keine brauchbare Ungleichung entsteht. Auf $\|\varphi_y(x)\|$ wenden wir die Dreiecksungleichung also nicht. Eine Funktion gibt es dann trotzdem, die wir loszuwerden haben, nämlich φ_y. Es liegt dann nahe, den Schrankensatz anzuwenden, um diese Funktion loszuwerden.

[6] Es gilt nämlich $g(y+k) = x + h \Leftrightarrow f(x+h) = y + k$ (zu zeigen). Wir haben also $k = f(x+h) - f(x)$ und auch $h = g(y+k) - g(y)$.

Der Satz über implizite Funktionen

Wir fragen nach der Lösbarkeit von $f(x,y)=0$ (nach y oder x) in der Nähe einer Nullstelle (a,b) von f. Zuerst betrachten wir den Fall $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Der Anfangsbereich hat nicht dieselbe Dimension wie der Endbereich und f kann demzufolge nicht umkehrbar sein. Würden wir aber statt f die Funktion

$$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R};\quad F(x,y):=(x,f(x,y))$$

betrachten, könnten wir uns fragen, wie f sein sollte, damit F umkehrbar ist. Dank des lokalen Umkehrsatzes reicht es, sich zu fragen, wie f sein sollte, damit $dF(a,b)$ ein Isomorphismus ist:

$F'(a,b)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\end{bmatrix}$. Diese Matrix hat Dimension 2, genau dann wenn $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$.

Für den allgemeinen Fall : $\underbrace{\mathbb{R}^n}_{x}\times\underbrace{\mathbb{R}^m}_{y}\to\underbrace{\mathbb{R}^n}_{x}\times\underbrace{\mathbb{R}^m}_{f(x,y)}$ haben wir:

$$F'(a,b)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & & & & & \\ & \mathbf{1} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & \mathbf{1} & & & \\ \frac{\partial x f_1(a,b)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x f_1(a,b)}{\partial x_n} & \frac{\partial x f_1(a,b)}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x f_1(a,b)}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x f_m(a,b)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x f_m(a,b)}{\partial x_n} & \frac{\partial x f_m(a,b)}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x f_m(a,b)}{\partial y_m} \end{array}\right].$$

Man sieht es bei der oben liegenden Matrix: Damit im allgemeinen Fall $dF(a,b)$ ein Isomorphismus ist, damit also die Matrix quadratisch von Dimension $n+m$ ist, muss $f'(a,b)$ surjektiv sein. $dF(a,b)$ ist dann lokal umkehrbar und es gibt die Umkehrung $G(\xi,\eta)$, die die selbe Bauart hat wie $F(x,y)$:

$G(\xi,\eta)=(\xi,g(\xi,\eta))$.

Es gilt also: $f(x,y)=0\Leftrightarrow F(x,y)=(x,0)\Leftrightarrow(x,y)=G(x,0)\Leftrightarrow y=g(x,0)$.

□

Der Untermannigfaltigkeitsbegriff

Die Methoden der Analysis sind primär für Funktionen der Form $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gedacht worden und lassen sich auf Funktionen der Form $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ erweitern. Allgemein auf Funktionen der Form $f:\prod_{k=1}^n I_k\to\prod_{k=1}^m J_k$ erweitern, wobei die I_k und J_k Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind und das Produkt das Kreuzprodukt ist. Viele Mengen entsprechen aber der Form $\prod_{k=1}^n I_k$ gar nicht. Denken wir z.B. an den Einheitskreis S_1 und allgemein an eine Fläche. Wir möchten trotzdem Funktionen $f:M\to N$ zwischen Flächen untersuchen können. Damit wir die Methoden der Analysis anwenden können, müssen wir zuerst die Flächen M und N flach machen, d.h. in die Form $\prod_{k=1}^n I_k$ bringen.

Definition: Eine Menge M eines topologischen Raumes X heisst d-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine Umgebung $U \subset X$, eine Umgebung V in irgendeinem $\mathbb{R}^n, n \geq d$, und ein Diffeomorphismus $h: U \to V$ gibt, so dass gilt:

$$h(M \cap U) = \mathbb{R}_d \cap V, \qquad \text{wobei } \mathbb{R}_d \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)\}.$$

Die Funktion h heisst eine Karte von M um den Punkt a. Wir können ohnehin annehmen, dass immer für den topologischen Raum X der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ steht. Dass h ein Diffeomorphismus ist, heisst, dass $dh(a)$ für jeden a invertierbar ist. Wie können wir für eine gegebene Fläche M eine Karte finden? Die Idee lernen wir hier in der Darstellungsform eines Beispiels kennen.

Beispiel: Der Graph einer Funktion ist eine Untermannigfaltigkeit. Wir betrachten nämlich die Karte $h(x, f(x) - y)$. Die Dimension ist dabei die des Raumes, wo der Punkt x lebt.

Die Idee hinter dieser einfachen Formel ist grundlegend für alle Untermannigfaltigkeiten. Denn diese entsprechen mindestens lokal einem Graphen: wenn auf der Umgebung $U \subset M$ eine Karte von M definiert ist, ist sie dann die Karte eines Graphen. Wir werden es mit dem nächsten Beispiel sehen.

Behauptung: Wenn M eine Untermannigfaltigkeit ist, so auch $j(M)$, mit j ein Isomorphismus.

Definition: Ein Punkt $x \in X$ heisst ein regulärer Punkt von $f: X \to Y$, wenn das Differential $df(x)$ surjektiv ist. Ferner heisst ein Punkt $y \in Y$ ein regulärer Wert von f, wenn alle $x \in f^{-1}(y)$ reguläre Punkte sind. Ansonsten sprechen wir von singulären Punkten und singulären Werten.

Beispiel und Behauptung: Die Niveaumenge eines regulären Werts ist eine Untermannigfaltigkeit.

Beweis: Wir betrachten allgemein eine C^1-Funktion $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Die allgemeine Form der Funktion F ist $F: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^m$, eventuell mit $n_1 = 0$, was dann heissen würde, dass $\mathbb{R}^{n_1} = \emptyset$. Die Niveaumenge von einem $a \in \mathbb{R}^m$ entspricht deshalb $F(x, y) = a$ und wir können das Ergebnis über die impliziten Funktionen anwenden, wenn wir die zwei Annahmen treffen, dass $n_2 = m$ und dass dF surjektiv ist. Die Funktion $F^*(x, y) \coloneqq (x, F(x, y))$ ist dann lokal invertierbar mit Umkehrfunktion $G^*(\xi, \eta) \coloneqq (\xi, G(\xi, \eta))$ und es gilt $(x, y) \in F^{-1}(a) \Leftrightarrow F(x, y) = a \Leftrightarrow F^*(x, y) = (x, a) \Leftrightarrow (x, y) = G^*(x, a) = (x, G(x, a))$, zusammenfassend: jeder Punkt von $F^{-1}(a)$ ist auch Punkt eines Graphen, was aus $F^{-1}(a)$ eine Untermannigfaltigkeit macht. Soweit so gut. Kann man aber diese zwei Annahmen schwächen?

Diese zwei Anforderungen reduzieren sich auf eine: die Funktion $dF: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ muss surjektiv sein. n_2 können wir nämlich immer gleich m setzen. Warum denn?

Weil dF eine lineare Funktion ist, ist die Einschränkung von dF auf $\mathbb{R}^n \setminus Kern(dF)$ ein Isomorphismus. Es gilt: $\dim\big(\mathbb{R}^n \setminus Kern(dF)\big) = \dim\big(Bild(dF)\big) = m.$ Wir können deshalb folgende Zerlegung des Definitionsbereichs betrachten: $\mathbb{R}^n = \big(\mathbb{R}^n \setminus Kern(dF)\big) \oplus Kern(dF)$. Die Funktion $i: \big(\mathbb{R}^n \setminus Kern(dF)\big) \times Kern(dF) \to \mathbb{R}^n; \qquad i: (x, y) \mapsto x + y$ ist ein Isomorphismus, weil der Wertebereich eine direkte Summe ist.

Für $z = x + y$ mit $x \in \mathbb{R}^n \setminus Kern(dF)$ und $y \in Kern(dF)$ gilt dann

$$F(z) = F \circ i(x, y)$$

und die Funktion $F \circ i$ hat die gewünschten Eigenschaften.

□

Beispiel einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$: der Einheitskreis S_1 (als Niveaumenge von $F(x, y) = x^2 + y^2$ für das Niveau 1).

Die Graphen und die Urbilder von regulären Werten differenzierbarer Funktionen sind zwei Quellen von Untermannigfaltigkeiten. Wenn wir uns bereits mehrere Untermannigfaltigkeiten geben, können wir auch versuchen, aus diesen neue zu definieren. So gibt es zwei Untermannigfaltigkeiten hervorbringende Prozesse, nämlich das Bilden von Summen und dasjenige von Produkten. Unter einer Summe zweier Untermannigfaltigkeiten verstehen wir deren disjunkte Vereinigung. Eine Karte dieser Summe ist eine bestehende Karte von der einen oder der anderen Untermannigfaltigkeit. Und als einfachstes nichttriviales Beispiel eines Produktes haben wir den Torus $S_1 \times S_1$. Eine Karte ist dabei ein Diffeomorphismus der Form $U \times U' \to V \times V'$, welcher mit $h \times k$ notiert wird und wobei $h: U \to V$ und $k: U' \to V'$ Karten von respektive der ersten und der zweiten Untermannigfaltigkeit sind.[7]

Wie der Tangentialraum ein erstes Mal ins Spiel kommt

Betrachten wir eine Funktion $f: M \to N$ zwischen zwei Untermannigfaltigkeiten. M kann z.B. der Einheitskreis S_1 sein und N eine Ellipse. Nur bezüglich Karten können wir diese Funktion mit den Werkzeugen der Analysis untersuchen. Diese Werkzeuge können wir nämlich primär nur an Funktionen der Form $\prod_{k=1}^{n} I_k \to \prod_{k=1}^{m} J_k$ anwenden, wobei die I_k und J_k Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, und weder der Kreis noch die Ellipse haben die Form $\prod_{k=1}^{n} I_k$.

Wir können also lediglich $k \circ f \circ h^{-1}$ untersuchen (die Flachmachung von f), wobei die Wahl der Karten k und h selbstverständlich eine Rolle spielt. Die Fragestellung lautet deshalb: Wie können wir eine Kartenunabhängige Untersuchungsmethode für die Funktion f finden, damit wir Aussagen über f selbst machen können?

Das Differential $d(k \circ f \circ h^{-1})(x)$ entspricht wegen der Kettenregel folgender Verknüpfung linearer Abbildungen: $dk(f \circ h^{-1}(x)) \cdot df(h^{-1}(x)) \cdot d(h^{-1})(x)$. Was bringt uns dieser Sachverhalt? Die Funktion f lässt sich zwar selbst nicht direkt untersuchen, diese Anwendung der Kettenregel zeigt uns jedoch, dass sich wohl ihr Differential an der Stelle $p = h^{-1}(x)$ separat betrachten lässt. Wir können nämlich $df(p)$ als eine Funktion mit Anfangsbereich $d(h^{-1})(x)(\mathbb{R}_d)$, gleich also[8] $(dh(p))^{-1}(\mathbb{R}_d)$,

[7] Wir unterscheiden $h \times k$ von (h, k); das erstere Objekt ist eine Funktion zwischen zwei Kreuzmengen (d.h. zwischen zwei Mengen von Paaren) während das letztere ein Paar von Funktionen und selbst also keine Funktion ist.

[8] Siehe Seite 3: Es gilt nämlich $d(h^{-1})(x) = (dh(p))^{-1}$ für $p = h^{-1}(x)$.

wobei d die Dimension der Karte h ist, und Endbereich $dk\left(f\circ h^{-1}(x)\right)^{-1}(\mathbb{R}_c)=(dk(f(p)))^{-1}(\mathbb{R}_c)$, wobei c die Dimension der Karte k ist, ansehen. Die obige Fragestellung wird deshalb: Dürfen wir vergessen, dass p für $h^{-1}(x)$ steht?

Die Antwort: Ja. Vorausgesetzt, das Differential $df(p)$ ist wohldefiniert: für zwei beliebige Paaren (h_1,x_1) und (h_2,x_2) mit $p={h_1}^{-1}(x_1)={h_2}^{-1}(x_2)$ muss die Funktion $df({h_1}^{-1}(x_1))$ dieselbe sein, wie $df({h_2}^{-1}(x_2))$. Insbesondere müssen beide Funktionen dieselben Anfangs- und Endbereiche haben. Weil Differentiale lineare Abbildungen sind, folgt aus dieser Bedingung, dass $d({h_1}^{-1})(x_1)$ und $d({h_2}^{-1})(x_2)$ auf demselben Vektorraum leben müssen. Wenn wir also $df(p)$ wohl definieren möchten, sollen wir zuerst einen Weg finden, den Anfangs- und den Endvektorraum kartenunabhängig zu definieren.

Für die differenzierbare Funktion $f\colon M\to N$ und für eine d-dimensionale Karte (h,U) um $p=h^{-1}(x)\in M$ müssen also die zwei Mengen $\left\{d({h_i}^{-1})(x_i)(z); z\in\mathbb{R}_d\right\}$, für $i=1{,}2$, Teilmengen des Anfangsvektorraums der linearen Abbildung $df(p)$ sein. Und weil diese Mengen gleich wie $d({h_i}^{-1})(x_i)(\mathbb{R}_d)=(dh_i(p))^{-1}(\mathbb{R}_d)$ sind und also Vektorräume sind, müssen sie Untervektorräume vom Anfangsvektorraum der Abbildung $df(p)$ sein. Nun ist es so, dass diese zwei Untervektorräume in Wirklichkeit ein und derselbe Untervektorraum[9] sind. Und weil die zwei Karten h_1 und h_2 für beliebige zwei Karten stehen, ist dieser Untervektorraum gleich dem gesamten Anfangsvektorraum von $df(p)$.

Wir nennen diesen Anfangsvektorraum den Tangentialraum von M am Punkt p und notieren T_pM. Für den Endvektorraum machen wir die gleiche Überlegung. Wir nennen ihn den Tangentialraum von N am Punkt $f(p)$ und notieren $T_{f(p)}N$. Wir haben also $df(p)\colon T_pM\to T_{f(p)}N$.

[9] Das Differential des Kartenwechsels $h_2\circ {h_1}^{-1}$ bei $h(p)$ ist eine Abbildung $\mathbb{R}_d\to\mathbb{R}_d$. Dasjenige von ${h_i}^{-1}$ bei $h(p)$, $i=1{,}2$, ist eine Abbildung $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_d$. Aus $(dh_2(p))^{-1}=(dh_1(p))^{-1}\circ\left(d\left(h_2\circ {h_1}^{-1}(h_1(p))\right)\right)^{-1}$ folgt die Behauptung.

Der einbettende Raum $\mathbb{R}^n$ wird verlassen

Der Mannigfaltigkeitsbegriff

Eine originale Konstruktion

Der Untermannigfaltigkeitsbegriff kommt von der Aufgabe, Funktionen zwischen Flächen, welche der Form $\prod_{k=1}^{n} I_k$ (die I_k sind Teilmengen von $\mathbb{R}$) nicht entsprechen, trotzdem analytisch zu untersuchen. Es wird ein Kartenbegriff entwickelt, welcher eine offene Teilmenge des die Fläche einbettenden euklidischen Raums mit einer offenen Teilmenge eines gleichdimensionalen euklidischen Raums diffeomorph verbindet. Die Karte einer Untermannigfaltigkeit ist nämlich eine invertierbare Funktion mit folgender Form: $h: \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}_d$, wobei d die Dimension der Untermannigfaltigkeit ist. Die Forderung, dass die durch die Karte diffeomorph verbundenen Teilmengen offen sind, stellt sicher, dass diese Teilmengen die „gleiche Dimension" haben wie der ganze Raum, von dem sie eine Teilmenge sind[10] und somit dass die Karte lokal einem Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entspricht. Karten lassen sich dann mittels derselben Idee wie für die Flachmachung eines Graphen konkret angeben. Die Einbettung der Fläche in einem euklidischen Raum entspricht der Notwendigkeit, dass die Karte eine Funktion der Form $\prod_{k=1}^{n} I_k \to \prod_{k=1}^{m} J_k$ ist, wobei die I_k und J_k Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, wenn diese Karte konkret angegeben werden muss.

Können wir uns überhaupt einen anderen Kartenbegriff vorstellen? Können wir einen Diffeomorphismus zwischen einer Fläche und einem $\mathbb{R}^d$ definieren – ganz ohne Einbettung?

Idee: Anstatt Punkte p der Fläche M können wir Tangentialräume T_pM betrachten. Der Tangentialraum an einem Punkt beschreibt nämlich, wie sich die nächsten Punkte bezüglich dieses Punktes positionieren. Machen wir eine Analogie. Sind die Punkte Perlen auf einer Kette, können wir die Zusammensetzung der ganzen Kette auf zwei Weisen erfahren, je nach dem, was wir zuerst kennen. Kennen wir die Position jeder Perle, haben wir selbstverständlich auch die Zusammensetzung der ganzen Kette. Kennen wir für jede Perle die relative Position der Perle, die sich unmittelbar an ihrer linken Seite befindet sowie diejenige der Perle, die sich unmittelbar an ihrer rechten Seite befindet, können wir die Kette Perle nach Perle rekonstruieren. In dem letzten Fall haben wir die Menge der Perlen mit einer Ordnung versetzt und die Position jeder Perle ergibt sich durch ihre Verkettung mit der vorigen Perle.

Der Vorteil dieser Vorstellung ist, dass ein Tangentialraum mit einem $\mathbb{R}^d$ isomorph ist. Diese Tatsache können wir versuchen zu gebrauchen, wenn wir einen Diffeomorphismus zwischen einer Fläche und einem $\mathbb{R}^d$ definieren möchten.

[10] Die gleiche Dimension im folgenden Sinn: Wenn n die Dimension des euklidischen Raums ist, ist dann das n-Volumen einer Teilmenge ungleich Null, diese Teilmenge also bezüglich diesem Mass keine Nullmenge ist.

Es gilt $\left(dh(p)\right)^{-1} = d(h^{-1})(h(p))$. Der Ausdruck $\left(dh(p)\right)^{-1}(v)$ ist also die Richtungsableitung[11] von h^{-1} in der Richtung v und an der Stelle $h(p)$. Und der Tangentialraum $T_pM = \left(dh(p)\right)^{-1}(\mathbb{R}^d)$ ist die Menge aller möglichen Richtungsableitungen von h^{-1} an der Stelle $h(p)$: $T_pM = \left\{\left(dh(p)\right)^{-1}(v);\ v \text{ ein Vektor von } \mathbb{R}_d\right\}$. Und folgende Menge $\left\{\left(dh(p)\right)^{-1}(v);\ p \in M\right\}$ entspricht einer Kette in der früheren Analogie. Diese „Kette" lässt sich auch als die Funktion $p \mapsto \left(dh(p)\right)^{-1}(v)$ ausdrücken. Wir sehen es: die ganze Fläche[12] wird von folgender Menge beschrieben (die Fläche ist dann auf einem einzigen Kartengebiert (U, h) definiert):

$$S \coloneqq \left\{f_v\text{: Fläche} \longrightarrow \mathbb{R}_d;\ p \mapsto \left(dh(p)\right)^{-1}(v);\ v \text{ ein Vektor von } \mathbb{R}_d\right\}.$$

S ist klar ein Vektorraum; ist S aber mit einem $\mathbb{R}^d$ isomorph? Wir setzen voraus, dass die lineare Abbildung $\left(dh(p)\right)^{-1}$ für jeden p den konstanten Rang d hat. Betrachten wir dann die Abbildung $i\colon \mathbb{R}^d \to S;\ \ i\colon v \mapsto f_v$. Sie ist linear mit $Ker(i) = \{0\}$. Die Abbildung $i^{-1}\colon S \to \mathbb{R}^d$ ist also die gesuchte Karte und wir haben einen Weg gefunden, die Fläche ganz ohne einbettenden euklidischen Raum zu definieren und dann flach zu machen.

... Ganz ohne? Der Tangentialraum T_pM wird doch mittels einer Karte definiert, welche einen die Fläche einbettenden euklidischen Raum voraussetzt. Würden wir aber einen Weg finden, den Tangentialraum auf eine andere Weise zu definieren, hätten wir es wirklich geschafft. Die Suche nach einem neuen Tangentialraumbegriff wird weiter thematisiert; zuerst aber sollen wir erklären, warum wir mit eingebetteten Flächen nicht ganz zufrieden sind.

Warum suchen wir einen Kartenbegriff ohne einbettenden euklidischen Raum?

Summen und Produkte von Untermannigfaltigkeiten sind immer noch Untermannigfaltigkeiten. Der Tangentialraum von einer Summe an einem gegebenen Punkt ist der Tangentialraum von derjenigen Untermannigfaltigkeit, auf welcher dieser Punkt lebt. Der Tangentialraum vom Produkt zweier Untermannigfaltigkeiten $M_1 \times M_2$ am Punkt $p = (p_1, p_2)$ ist die direkte Summe der Tangentialräume $T_{p_i}M_i,\ i = 1{,}2$. Der Tangentialraum eines Quotienten einer Untermannigfaltigkeit[13] hat i.a. keine geometrische Bedeutung mehr. Es gibt sogar „Flächen", die gar nicht als eingebettete Flächen in einem $\mathbb{R}^n$ verstanden werden oder, besser, verstanden werden müssen. Nicht jede „Fläche" wird nämlich primär in folgender Form definiert: $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \mathrm{F}(x_1, \dots, x_n) = 0\}$, bei der sie klar als Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ verstanden wird. Denn manche „Flächen" werden anders konstruiert (denken wir an die Quotientenbildung). Zwecks Untersuchung mit den Werkzeugen der Analysis müssen auch diese

[11] Sei eine Funktion f mit $df(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es sei daran erinnert, dass $df(a)h$ zwar ein Punkt in $\mathbb{R}^m$ ist, jedoch auch eine (Richtungs-)Ableitung. Es gilt nämlich $df(a)h = \partial_h f(a) \coloneqq \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$. Das sieht man leicht für einen Vektor $h = e_i$ der Standardbasis. Diese Ableitung ist die Funktion $\partial_h f(a)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

[12] Die Form der Fläche aber nicht ihre Position in einem einbettenden $\mathbb{R}^n$. Dieser spielt aber gar keine Rolle, wird sogar ignoriert. Man spricht dann von einer „Fläche an sich".

[13] Denken wir an dem reellen projektiven Raum: siehe Jänich, Vektoranalysis, Seite 16.

Flächen flach gemacht werden können. Im Weiteren wird der Begriff einer „Fläche an sich“ entwickelt, dies im Gegensatz zu einer in einem euklidischen Raum verstandenen eingebetteten Fläche.

Definitionen

<u>Definition:</u> Sei X ein topologischer Raum. Unter einer n-dimensionalen Karte für X versteht man einen Homöomorphismus $h : X \supset U \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Dabei heisst U das Kartengebiet. Wir notieren die Karte mit (U, h), wobei die Bezeichnung für das Kartengebiet mitgeführt wird.

Seien (U, h) und (V, k) zwei n-dimensionalen Karten für X. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \supset h(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{n}};\ f = k \circ h^{-1}$ heisst der Kartenwechsel von h nach k. Im Weiteren wird angenommen, dass alle Karten Diffeomorphismen der Klasse $\mathcal{C}^{\infty}$ sind.

<u>Definition:</u> Eine Menge n-dimensionaler Karten, deren Kartengebiete ganz X überdecken, heisst ein n-dimensionaler Atlas für X. Der Atlas heisst differenzierbar, wenn alle Karten differenzierbar miteinander wechseln.

Zwei Atlanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind äquivalent, wenn auch $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ differenzierbar ist. Betrachten wir die Menge $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ aller Karten, die mit allen Karten von $\mathfrak{A}$ differenzierbar wechseln. Die Elemente von $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ wechseln dann auch untereinander differenzierbar (Kartenwechsel von h nach k mittels Hilfskarte aus $\mathfrak{A}$, gleiche Methode wie für den Nachweis der Transitivität der Äquivalenzrelation) und $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ ist ein maximaler Atlas für X. $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ ist die Vereinigung aller Atlanten der Äquivalenzklasse $[\mathfrak{A}]$. Beide enthalten dieselbe Information; $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ hat jedoch den Vorteil, wenigstens noch ein Atlas zu sein. Daher die Definition:

<u>Definition:</u> Unter einer n-dimensionalen differenzierbaren Struktur für einen topologischen Raum X verstehen wir einen maximalen n-dimensionalen differenzierbaren Atlas (auch möglich: eine Äquivalenzklasse).

<u>Definition:</u> Unter einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit verstehen wir ein Paar $(M, \mathcal{D})$, wobei M ein Hausdorffraum ist, der zusätzlich das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und $\mathcal{D}$ eine differenzierbare Struktur für M ist. Die Struktur wird in der Notation unterdrückt und man spricht einfach von der Mannigfaltigkeit M, wie analog von einer Gruppe G oder einem Vektorraum V.

Differenzierbare Abbildungen

Anpassung der Grundbegriffe

Auf einer Mannigfaltigkeit sei eine Abbildung irgendwohin (sagen wir nach X), $f : M \to X$ gegeben, deren Verhalten in der Nähe eines Punktes $p \in M$ wir studieren wollen. Dann können wir eine Karte (U, h) um p wählen und die Abbildung damit herunterholen, d.h. $f \circ h^{-1}$ betrachten. Von allen Eigenschaften, die $f \circ h^{-1}$ lokal bei $h(p)$ hat, sagt man dann, f habe sie bei p bezüglich der Karte (U, h). Wenn diese Eigenschaft unabhängig von der Wahl der Karte ist, dann sagen wir, f habe diese Eigenschaft bei p.

Definition: Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heisst bei p differenzierbar ($\mathcal{C}^\infty$), wenn für eine (dann jede!) Karte (U, h) um p die heruntergeholte Funktion $f \circ h^{-1}$ in einer Umgebung von $h(p)$ differenzierbar ist.

Ist $f : M \to N$ eine stetige Funktion zwischen Mannigfaltigkeiten, gilt dann: für alle $p \in M$ und jede Karte (V, k) um $f(p)$ gibt es eine Karte (U, h) um p mit $f(U) \subset V$.

Definition: Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten nennt man einen Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv ist mit f und f^{-1} beide differenzierbar.

Der Rang

Wenn wir mit einer konkreten Funktion f arbeiten müssen, wenn wir eine ganz konkrete Matrix ermitteln wollen, hilft uns der Mannigfaltigkeitsbegriff nicht, sondern nur der Begriff einer Untermannigfaltigkeit.

Sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen einer j-dimensionalen und einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit. Die j-dimensionale Untermannigfaltigkeit M sei in einem $\mathbb{R}^J$ und die k-dimensionale Untermannigfaltigkeit N in einem $\mathbb{R}^K$ eingebettet. Die Ableitung an der Stelle x der durch die Karte (U, h) heruntergeholten Funktion f ist: $d[f \circ h^{-1}(x)] = df(h^{-1}(x)) \circ d(h^{-1})(x)$. Sie ist eine lineare Funktion von $\mathbb{R}_j^J$ bis $T_{h^{-1}(x)}M$. Ihre Matrix (bzgl. Basen) heisst die Jacobi-Matrix von der heruntergeholten Funktion f an der Stelle x :

$$[f \circ h^{-1}(x)]' = f'(h^{-1}(x)) \cdot [h^{-1}]'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_K}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_K}{\partial z_J} \end{bmatrix} (h^{-1}(x)) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_J}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_J}{\partial x_J} \end{bmatrix}^{-1} (x) \,.$$

Die Jakobi-Matrix hängt von der Wahl der Karte ab; ihr Rang jedoch nicht (denn die Kartenwechsel sind Diffeomorphismen). Der Rang hängt auch nicht von der Wahl der Basen von $\mathbb{R}_j^J$ und $T_{h^{-1}(x)}M$ ab[14]. Wir können deshalb vom Rang der Funktion $v \mapsto df(p) \cdot v$ sprechen.

Definition: Der Rang von f bei $p = h^{-1}(x)$ wird dann als der Rang von $df(p)$ definiert.

Definition: Ein Minor einer Matrix ist die Determinante einer Untermatrix dieser Matrix, die durch Wegstreichen von ganzen Zeilen und Spalten dieser Matrix entsteht.
Eine Matrix hat genau dann den Rang r, wenn es einen von Null verschiedenen Minor der Ordnung r gibt und wenn alle Minoren der Ordnung $>$ r verschwinden[15].

Wenn $f \in \mathcal{C}^1$, ist die Determinante von $f'(x)$ eine reelle stetige Funktion von x.

---

[14] Die Wahl der Basis von $\mathbb{R}_j^J$ wird jedoch prinzipiell nicht geändert: die Karte h wäre sonst keine Karte mehr! Eine Karte ist nämlich ein Flachmacher und bildet deshalb lokal eine Fläche in einem Raum, in dem jeder Vektor die Form $(\underbrace{*, \cdots, *}_{k\ Stellen}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{K-k\ Stellen})$ hat. Ein Basiswechsel würde diese Form i. Allg. vernichten. Eine Karte ist deshalb für eine bestimmte Basiswahl eines $\mathbb{R}_j^J$ definiert.

[15] Siehe Algèbre linéaire I, Serge Lang, Seite 200.

Der Satz vom konstanten Rang

Der folgende Satz ist die Grundlage für die Anwendung der sogenannten lokalen Koordinaten in der Physik.

Hat die differenzierbare Abbildung $f: M \to N$ in einer Umgebung von $p \in M$ konstanten Rang r, so ist sie bezüglich geeigneter Karten lokal um p von der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s & \longrightarrow & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \\ (v, w) & \longmapsto & (v, 0), \end{array}$$

wenn $r + s$ und $r + n$ die Dimensionen von M und N sind.

Beweis

Schritt 1: Der Rang von f im Punkte p beträgt r. Das impliziert, dass die Determinante eines bestimmten Minors der Ordnung r ungleich Null ist, was bedeutet, dass es r Spaltenvektoren gibt, die linear unabhängig sind. Diese Spaltenvektoren kann man durch eine neue Indizierung der Basisvektoren von $T_{f(p)}N$ links in der Matrix $f'(p)$ bringen. Analog kann man durch eine neue Indizierung der Basisvektoren von T_pM die Zeilenvektoren oben in der Matrix bringen. Die Stetigkeit der Determinante sichert, dass es für alle q in einer Umgebung von p stets dieselben ersten r Spaltenvektoren der Matrix $f'(q)$, respektive dieselben ersten r Zeilenvektoren sind, die linear unabhängig sind, und dass also diese zwei Indizierungen der Basisvektoren von T_pM und $T_{f(p)}N$ nicht nur im Punkte p sondern in einer Umgebung von p gelten[16].

Schritt 2: Wir zerlegen T_pM und $T_{f(p)}N$ folgenderweise (r ist lokal der Rang von f um p): $T_pM = \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ und $T_{f(p)}N = \mathbb{R}^K = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$. Einen Punkt von T_pM schreiben wir als $p = (v, w)$ und einen Punkt von $T_{f(p)}N$ als $x = (y, z)$. Die Funktion f zerlegen wir ebenfalls: $f(p) = f(v, w) = \big(\Phi(v, w), \Psi(v, w)\big) = (y, z)$.

Schritt 3: Wir wissen, dass ein Diffeomorphismus $h: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s; h(y, z) = (y, z - g(y))$ eine Karte für den Graphen von g ist, wenn g eine differenzierbare Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^s$ ist. Wenn wir erreichen, dass lokal um p

1) $y = v$, d.h. $v \mapsto \Phi(v, w)$ die Identität ist und
2) Ψ von w nicht abhängt, d.h. $\Psi(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = \Psi(\mathrm{v})$,

dann können wir $g(y) := \Psi(\mathrm{v})$ setzen und wir haben eine r-dimensionale Karte h von $f(M)$: $h \circ f: (v, w) \mapsto (v, 0)$.

Den ersten Punkt erfüllen wir durch einen Koordinatenwechsel: Mit dem Satz über implizite Funktionen können wir aus $y = \Phi(v, w)$ schlussfolgern, dass $v = v(y, w)$. Die Funktion $j: (v, w) \mapsto (\Phi(v, w), w) = (y, w)$ ist ein Koordinatenwechsel (v wird durch den gleichdimensionalen y ersetzt). Die Funktion j ist umkehrbar, weil Φ surjektiv abbildet (j' ist ein Isomorphismus). Wir berechnen df für diese neuen Koordinaten:

[16]Eine neue Indizierung der Basisvektoren ist ein spezieller Basiswechsel, also ein Diffeomorphismus.

$f'(y,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial w} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y} & \frac{\partial\Psi}{\partial w} \end{bmatrix}$. Weil aber $y = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{w})$, hat man, dass $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = I$. Und weil der Rang von $f'(y,w)$ r ist, muss $\frac{\partial\Psi}{\partial w}$ Null sein. Die Matrix $\begin{bmatrix} I & \frac{\partial\Phi}{\partial w} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$ hat nämlich den Rang r, weil I den Rang r hat.

Wir haben also Koordinaten von $\mathbb{R}^N$ gefunden, für die Ψ, Φ und $f = (\Phi,\Psi)$ von w nicht abhängen. Die Funktion $k: X \to \mathbb{R}_0^r;\ \ u \mapsto Proj_N^r \circ j^{-1}(u)$ ist also eine Karte von M. Die Funktion h ist eine Karte für $f(M)$, weil die Punkte 1) und 2) erfüllt sind. Für diese Karten gilt:

$h \circ f \circ k^{-1}: (v,w) \mapsto (v,0).$

□

Der Tangentialraum

Wie wir es bereits gesehen haben, müssen wir einen Weg finden, den Tangentialraum ohne Hilfe eines die Fläche einbettenden euklidischen Raums zu definieren. Es gibt drei mögliche Fassungen des Tangentialraums, die diese Anforderung erfüllen. Siehe Jänich, *Vektoranalysis* für eine ausführliche Darstellung dieser drei Fassungen sowie für den Beweis ihrer Äquivalenz. Nur so viel zum Thema:

Wir suchen eine Charakterisierung eines Tangentialvektors von T_pM, welche ihn eindeutig beschreibt. Ein Tangentialvektor ist für uns bis jetzt immer noch ein Element $\left(dh(p)\right)^{-1}(v)$, für (U,h) eine Karte um $p \in M$ mit $h: \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}_d$ und für $v \in \mathbb{R}_d$. Es gilt:

$$u \coloneqq \left(dh(p)\right)^{-1}(v) = d(h^{-1})\big(h(p)\big)(v) = \partial_v h^{-1}\big(h(p)\big) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{h^{-1}(h(p)+tv) - h^{-1}\big(h(p)\big)}{t}.$$

Der letzte Ausdruck ist die Ableitung der Kurve $t \mapsto \alpha(t) \coloneqq h^{-1}(h(p)+tv)$ an der Stelle $t = 0$. Wir haben $\alpha(0) = p$. Der betrachtete Tangentialvektor $u \in T_pM$ ist also gleich der Ableitung der Kurve $\alpha(t)$ an der Stelle $t = 0$. Somit wird jeder Tangentialvektor einer Kurve zugeordnet. Jede Kurve γ, die auf einer M-Umgebung von p mit $\gamma(0) = p$ läuft, ist auf dieser Umgebung das Bild einer Kurve in $\mathbb{R}_d$. Diese letzte Kurve läuft mit einer Ableitung v durch den Punkt $h(p) \in \mathbb{R}_d$. Deshalb können wir sagen, dass die Ableitung *jeder* auf einer M-Umgebung von p mit $\gamma(0) = p$ laufenden Kurve γ die obige Form besitzt und somit ein Tangentialvektor von T_pM ist. Dadurch dass ihre Ableitung an der stelle $t = 0$ einem Tangentialvektor entspricht, wird jede Kurve einem Vektor zugeordnet. Wir schussfolgern: die Vektorenmenge T_pM und die Menge der auf einem M-Umgebung von p differenzierbar definierten Kurven γ mit $\gamma(0) = p$ sind zwei Menge, die sich in einer mehreindeutigen Relation, d.h. in einer $1{:}n$-Relation, befinden. Durch einer Quotientierung der Menge der Kurven gelingt es uns, die Vektorenmenge mit einer Quotientenmenge in eine eineindeutige Relation zu bringen. Auf diese Weise bekommen wir eine Fassung eines Tangentialvektors als Äquivalenzklasse von Kurven, die auf M durch p laufen.

<u>Bemerkung:</u> Obwohl der erste Schritt dieser Konstruktion die Festlegung einer Karte um p ist, spielt die Wahl der Karte gar keine Rolle. Eine Kurve ist nämlich ein auf M lebendes Wesen, das von keiner

Karte abhängt. Die Frage nach der Karte spielt erst eine Rolle, wenn wir eine Kurve herunterholen wollen. Aber eine Kurve und eine ihrer vielen möglichen „Herunterholungen“ sind zwei unterschiedliche Objekte, von denen hier nur das erste, kartenunabhängige, von Relevanz ist.

Wir können auch die jeweils bezüglich einer Karte heruntergeholten Tangentialvektoren betrachten und auf Basis der Charakterisierung des Kartenwechsels einen kartenunabhängigen Tangentialvektorbegriff zu definieren versuchen.

Seien folgende zwei Vektoren $u_1 \coloneqq \left(dh(p)\right)^{-1}(v)$ und $u_2 \coloneqq \left(dk(p)\right)^{-1}(w)$. Was heisst, dass $u_1 = u_2$?

$u_1 = u_2 \Leftrightarrow \left(dh(p)\right)^{-1}(v) = \left(dk(p)\right)^{-1}(w) \Leftrightarrow dk(p) \circ \left(dh(p)\right)^{-1}(v) = w$.

$dk(p) \circ \left(dh(p)\right)^{-1}(v)$ können wir übrigens als $d(k \circ h^{-1})(h(p))(v)$ umschreiben[17].

Wir versuchen, diesen Sachverhalt zu interpretieren, und zwar genau den folgenden Sachverhalt:

$u_1 = u_2 \Leftrightarrow \left(dh(p)\right)^{-1}(v) = \left(dk(p)\right)^{-1}(w)$.

u_1 ist der Wert einer Verbindung zwischen einer Karte (U, h) und einem Vektor v in $\mathbb{R}_d$, und zwar der Wert der Verbindung, die durch die Formel $u_1 = \left(dh(p)\right)^{-1}(v)$ gegeben wird[18]. Andere Verbindungen können aber den gleichen Wert haben wie u_1; sogar für jede mögliche Karte (V, k) gibt es jeweils einen einzigen Vektor w in $\mathbb{R}_d$, sodass die Verbindung zwischen dieser Karte und diesem Vektor den gleichen Wert hat wie u_1 ist. Jede solche Verbindung entspricht einem Punkt im Graphen einer Funktion $F\colon \text{Menge aller Karten} \to \mathbb{R}_d$. Dass u_1 und u_2 gleich sind, bedeutet also, dass sie zwei Punkte des Graphen einer selben Funktion $F\colon \text{Menge aller Karten} \to \mathbb{R}_d$ sind. Ein Tangentialvektor lässt sich deshalb als eine solche Funktion verstehen. Sie hat die Eigenschaft, dass $d(k \circ h^{-1})(h(p))\, \underbrace{F(U,h)}_{v} = \underbrace{F(V,k)}_{w}$.

Konkret können wir $F(U,h) \coloneqq \left(dh(p)\right)^{-1} v$, für einen $v \in \mathbb{R}_d$, setzen.
Siehe Jänich, *Vektoranalysis*, S. 44: der Ricci-Kalkül der Physiker.

Einen Tangentialvektor können wir auch eineindeutig mit einem Richtungsableitungs-Operator auf der Menge aller differenzierbaren reellen Funktionen assoziieren, die in einer M-Umgebung von p definiert sind. Einen Tangentialvektor können wir also ebenfalls als eine Derivation definieren. Wir betrachten die Menge aller auf einer M-Umgebung von p definierten reellwertigen differenzierbaren Funktionen und die auf dieser Menge folgenderweise definierte Äquivalenzrelation: $f \sim g :\Leftrightarrow \exists$ eine M-Umgebung um den Punkt p, worauf f und g übereinstimmen. Sei $\mathcal{E}_p(M)$ die Menge aller

---

[17] $dk(p) \circ \left(dh(p)\right)^{-1} = dk(p) \circ dh^{-1}\left(h(p)\right) = dk\left(\underbrace{h^{-1}(h(p))}_{p}\right) \circ dh^{-1}\left(h(p)\right)$. Mit der Kettenregel: $dk(h^{-1}(h(p))) \circ dh^{-1}\left(h(p)\right) = d(k \circ h^{-1})(h(p))$.

[18] Diese Formel ist die implizite Angabe einer Funktion. Vgl. mit der Formel $x + y = 7$, die die implizite Angabe der Funktion $y = 7 - x$ ist. Die erstere Formel entspricht der Form $G(x, y) = 0$, welche (lokal) die implizite Angabe einer Funktion sein kann (Siehe den Satz über die impliziten Funktionen am Beispiel $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$) während die zweitere der Form $y = f(x)$ entspricht, was dann die explizite Angabe einer Funktion ist.

Äquivalenzklassen. Weiter wollen wir nicht zwischen einer Funktion f und die Klasse $[f]$, die sie vertritt, unterscheiden. Eine Derivation ist dann eine lineare Funktion $F: \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}^d$ mit der Produktregel $F(f \cdot g) = F(f) \cdot g + f \cdot F(g)$. Da liegt übrigens der Grund, weshalb wir uns auf die reellwertigen Funktionen einschränken: die Produktregel gibt es nur für reellwertige Funktionen[19]. Bemerken wir, dass hier die Geltung der Kettenregel gar keine Anforderung sein kann, weil sich die Funktionen von $\mathcal{E}_p(M)$ miteinander nicht verketten lassen.

Wohl bemerkt: Die Ableitung einer Funktion ist eine Funktion und die Ableitung *bei einem gegebenen Punkt* ist ein Punkt. Hier handelt es sich um eine Derivation *beim Punkt p* und nicht um einen Richtungsableitungsoperator zwischen Funktionen.

Wir haben drei Fassungen eines Tangentialvektors von T_pM gefunden. Die erste werden wir die geometrische Fassung, die zweite die physikalische Fassung (weil die Physiker diese Fassung gebrauchen) und die dritte die algebraische Fassung nennen. Entsprechend werden wir die Tangentialräume respektive $T_p^{\text{geom}}M$,$T_p^{\text{phys}}M$ und $T_p^{\text{alg}}M$ notieren.

Geben wir uns eine Karte (U, h) und einen Basisvektor e_i von $\mathbb{R}_d$. In diesem Fall ist $\left(dh(p)\right)^{-1} e_i$ ein Tangentialvektor. Interpretieren wir ihn gemäss seiner unterschiedlichen Fassungen:

- Physikalische Fassung: $F(U, h) = e_i \in \mathbb{R}_d$. Und für eine Karte (V, k) gilt tatsächlich: $\mathbb{R}_d \ni F(V, k) = dk(p) \circ \left(dh(p)\right)^{-1} e_i = dk(p) \circ \left(dh(p)\right)^{-1} F(U, h)$.
- Algebraische Fassung: Für alle $f \in \mathcal{E}_p(M)$ gilt, dass für zwei Vektoren v und w in T_pM, $v = w \Leftrightarrow \partial_v f(p) = \partial_w f(p)$. Für Richtungsableitungen gilt stets $\partial_v f(p) = df(p)v$ und deshalb ist die Aussage unmittelbar. Insbesondere hängt diese Derivation von der Karte nicht ab.
- Geometrische Fassung: Da $\left(dh(p)\right)^{-1} e_i = dh^{-1}(h(p)e_i$ ist unser physikalisch gegebene Vektor die Richtungsableitung von h^{-1} an der Stelle $h(p)$ in der Richtung e_i, was die Ableitung an der Stelle $t = 0$ von der Kurve $t \mapsto h^{-1}(h(p) + t \cdot e_i)$ ist. Geometrisch gesehen ist also unser Vektor die Äquivalenzklasse zu dieser Kurve.

---

[19]Die Herleitung der Produktregel:

$$d(fg)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) - f(x)[g(x) - g(x+h)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = df(x)g(x) + f(x)dg(x)$$

geht für $\mathbb{R}^n$-wertige Funktionen nicht. Nämlich müssten wir in der oben stehenden Entwicklung h durch $\|h\|$ ersetzen. Der Ausdruck $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ würde dann zum Ausdruck $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{\|h\|}$; der Erstere ist nur für $f: I \to J$ mit I, J Teilmengen von $\mathbb{R}$ gleich dem Differential $df(x)$, während der Letztere gleich $\lim_{h\to 0} \frac{df(x)h}{\|h\|} = df(x) \lim_{h\to 0} \frac{h}{\|h\|}$. Die Ausdrücke $\lim_{h\to 0} \frac{h}{\|h\|}$ und $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{h}{\|h\|} = \frac{h}{\|h\|}$ = Einheitsvektor Richtung h verwechseln wir nicht. Und wenn wir in der obigen Entwicklung zusätzlich den Ausdruck $\lim_{h\to 0}$ durch $\lim_{\|h\|\to 0}$ ersetzten, wird der Differentialquotient zu $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, gleich der Richtungsableitung $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{df(x)h}{\|h\|} = df(x) \frac{h}{\|h\|} = \partial_h f(x)$.

Es gibt drei kanonischen Abbildungen:

Ist $[\alpha]$ ein geometrisch definierter Tangentialvektor an M in p, so ist durch

$$\mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto (f \circ \alpha)'(0)$$

eine Derivation, also ein algebraisch definierter Tangentialvektor gegeben.

Ist $F: \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$ eine Derivation, so ist durch (d ist die Dimension von M)

$$\{\text{Menge der Karten um } p\} \to \mathbb{R}^d; \quad (U, h) \longmapsto (F(h_1), \dots, F(h_{d)})$$

Ein physikalisch definierter Tangentialvektor gegeben (den Beweis in: Jänich, *Vektoranalysis*, S. 35)

Ist $F: \{\text{Menge der Karten um } p\} \to \mathbb{R}^n$ ein physikalisch definierter Tangentialvektor und (U, h) eine Karte um p, so ist $\alpha(t) \coloneqq h^{-1}(h(p) + t \cdot F(U, h)$ auf einem genügend kleinen Intervall um 0 definiert. Die Klasse $[\alpha] \in T_p^{\text{geom}} M$ ist wohldefiniert.

Die aneinander Schaltung dieser drei kanonischen Funktionen, die wir respektive Φ_1, Φ_2 und Φ_3 benennen, ergibt die Identität. So z.B. $\Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1 = Id_{T_p^{\text{geom}} M}$.

Alle diese alternativen Fassungen eines Tangentialraums sind also äquivalent. Erst an diesem Punkt haben wir den Begriff der Untermannigfaltigkeit durch denjenigen der Mannigfaltigkeit ersetzt und erst jetzt können wir uns dem Begriff des Differentials einer Funktion zwischen zwei Mannigfaltigkeiten richtig widmen.

Das Differential

Sei $f: M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Deren Differential ist die Funktion $df(p): T_p M \to T_{f(p)} N$. Wie sieht aber das Differential aus, wenn z.B. $T_p M = T_p^{\text{geom}} M$? Je nachdem wie der Tangentialraum angesehen wird, müssen wir jeweils eine unterschiedliche Implementierung (Realisierung) der Funktion $df(p)$ finden:

$d^{\text{geom}} f_p: T_p^{\text{geom}} M \to T_{f(p)}^{\text{geom}} N; \quad [\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha];$

$d^{\text{alg}} f_p: T_p^{\text{alg}} M \to T_{f(p)}^{\text{alg}} N; \quad F \longmapsto F \circ f^*,$ wobei $f^*: \mathcal{E}_{f(p)}(N) \to \mathcal{E}_p(M); \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f;$

$d^{\text{alg}} f_p$ bildet eine Funktion $F: \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}^n; \quad \psi \mapsto F(\psi)$ auf die Funktion $F \circ f^*: \mathcal{E}_{f(p)}(N) \to \mathbb{R}^n; \quad \varphi \mapsto F(\varphi \circ f)$ ab. Die ψ leben also in $\mathcal{E}_p(M)$ und die φ in $\mathcal{E}_{f(p)}(N)$. Die $\varphi \circ f$ leben in $\mathcal{E}_p(M)$. Die Abbildung $d^{\text{alg}} f_p$ nimmt also einen Tangentialvektor von $T_{f(p)}^{\text{alg}} N$, eine Funktion also mit Argumenten φ in $\mathcal{E}_{f(p)}(N)$, und macht aus diesen in $\mathcal{E}_{f(p)}(N)$ lebenden φ Elemente, die in $\mathcal{E}_p(M)$ leben. Auf diese Weise macht $d^{\text{alg}} f_p$ aus Tangentialvektoren von $T_{f(p)}^{\text{alg}} N$ Tangentialvektoren von $T_p^{\text{alg}} M$.

Die Produktregel gilt, denn: $F((\varphi_1 \cdot \varphi_2) \circ f) = F((\varphi_1 \circ f) \cdot (\varphi_2 \circ f))$. Da sich beide $\varphi_1 \circ f$ und $\varphi_2 \circ f$ in $\mathcal{E}_p(M)$ befinden und F eine Derivation auf $\mathcal{E}_p(M)$ ist, für die die Produktregel gilt, haben wir $F\big((\varphi_1 \circ f) \cdot (\varphi_2 \circ f)\big) = F(\varphi_1 \circ f) \cdot F(\varphi_2 \circ f)$.

$$d^{\text{phys}} f_p\colon T_p^{\text{phys}} M \to T_{f(p)}^{\text{phys}} N; \quad F(V,k) \mapsto d(k \circ f \circ h^{-1})\big(h(p)\big) \cdot F(U,h)\,.$$

Diese drei Implementierungen von derselben Abbildung $df(p)$ vertragen sich. Damit gemeint ist:

$$\Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1(v) = Id_{T_p^{\text{geom}} M}(v) \implies \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1 \circ d^{\text{geom}} f_p(v) = d^{\text{geom}} f_p(v);$$
$$\Phi_1 \circ \Phi_3 \circ \Phi_2(v) = Id_{T_p^{\text{alg}} M}(v) \implies \cdots;$$
$$\Phi_2 \circ \Phi_1 \circ \Phi_3(v) = Id_{T_p^{\text{phys}} M}(v) \implies \cdots$$

Die Schreibweise beim Ricci-Kalkül

Der Ricci-Kalkül (siehe Jänich, *Vektoranalysis*, S. 44) vereinfacht die Notation stark. Manchmal ist sie aber schwer nachzuvollziehen. Fangen wir bei den einfachen Sachen an.

Anstatt $h(p) = (h_1(p), \dots, h_d(p))$ schreibt der Ricci-Kalkül $h(p) = (x^1, \dots, x^d)$. Die Angabe der Karte geht dabei verloren, die Indizien werden hoch gestellt und vor allem werden die Komponentenfunktionen $p \mapsto x^i(p)$ wie Koordinaten des $\mathbb{R}^d$, analog der Schreibweise $y = y(x)$, geschrieben. Somit gibt es Verwechslungsgefahr: der Ricci-Kalkül notiert x^i, meint aber die reellwertige Funktion $h_i(p)$.

Wie sollte insbesondere der Tangentialvektor (an M bei p) zu $e_i \in \mathbb{R}^d$ notiert werden? Die Antwort hängt davon ab, wie er gebraucht wird[20]. Tangentialvektoren werden im Prinzip als Argumente von einem Differential $df(p)$ gebraucht: in diesem Zusammenhang schreiben wir $v \mapsto df(p)v$, was die Richtungsableitung $\partial_v f(p)$ von f an der Stelle p in der Richtung v ist. Den Tangentialvektor als einen Richtungsableitungsoperator zu bezeichnen ist also sinnvoll, zum Beispiel als ∂_v. Wir können nämlich dann $df(p)\partial_v = \partial_v f(p)$ schreiben. Das ist die elegante Schreibweise im Ricci-Kalkül.

Konsequenterweise muss dann ein als Operator bezeichneter Tangentialvektor in seiner algebraischen Fassung als eine Derivation verstanden werden und nicht etwa in seiner physikalischen[21] oder geometrischen Fassung. Wie sieht also konkret der Tangentialvektor (an M bei p) zu e_i aus?

---

[20] Damit man diese Frage überhaupt stellen kann, muss man die eventuell stillschweigend angenommene Vorstellung, ein Tangentialvektor *sei* grundsätzlich ein physikalischer Vektor, der aber auch als ein Operator gefasst werden könne, zuerst identifizieren und verlassen. Diese Vorstellung, die der physikalischen Fassung den Vorrang gibt, hat mich dazu gebracht, eine Umformung des physikalisch gefassten Tangentialvektors, die die Notation $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nachvollziebar machen würde, vergeblich zu suchen. Aber keine Umformung eines physikalisch gefassten Tangentialvektors kann es, weil es keinen solchen Übergang von einem physikalisch zu einem algebraisch gefassten Tangentialvektor gibt, sondern nur eine Äquivalenz beider Begriffe.

[21] Um die Ricci-Notation $\frac{\partial}{\partial x^i}$ für einen Tangentialvektor nachzuvollziehen, hilft es nicht, die so genannte physikalische Fassung eines Tangentialvektors zu betrachten. Probieren wir es: Ein Tangentialvektor an M bei p bezüglich der d-dimensionalen Karte (U,h) ist $\big(dh(p)\big)^{-1} \cdot z$, für einen $z = (z_1, \dots, z_d)$ in $\mathbb{R}^d$. Es ist der Tangentialvektor zum Vektor $z \in \mathbb{R}^d$. Wir haben: $\big(dh(p)\big)^{-1} \cdot z = \Big(\big(dh(p)\big)^{-1} e_1, \dots, \big(dh(p)\big)^{-1} e_d\Big)(p) \cdot (z_1, \dots, z_d)$, wobei $\big(dh(p)\big)^{-1} e_i$ der Tangentialvektor zum Basisvektor $e_i \in \mathbb{R}^d$ ist. Wegen $\big(dh(p)\big)^{-1} e_i = (d(h^{-1})_i)(h(p))$ ist der Tangentialvektor zu e_i durch die Ableitung der i-ten Kompotentenfunktion von h^{-1} gegeben. Der Tangentialvektor zu z ist dann $z_1(d(h^{-1})_1)(h(p)) + \dots + z_d(d(h^{-1})_d)(h(p))$. Wir versuchen

Er ist folgende Derivation: $\mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}^d$; $\varphi \mapsto (\varphi \circ \alpha)(0)'$ mit $\alpha(t) = h^{-1} \circ (h(p) + te_i)$. Wir berechnen: $(\varphi \circ \alpha)(0)' = \frac{d}{dt}[\varphi \circ h^{-1} \circ (h(p) + te_i)]|_{t=0}$. Setzen wir $t = t(q) := h_i(q) - h_i(p)$, dürfen wir $t = t(x^i) := x^i - h_i(p)$ schreiben und erhalten dann mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx^i}[\varphi \circ h^{-1} \circ (h(p) + t(x^i)\, e_i)]|_{x^i = h_i(p)} = \frac{d}{dt}[\varphi \circ h^{-1} \circ (h(p) + te_i)]|_{t=0} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx^i} t(x^i)|_{x^i = h_i(p)}}_{= t'(h_i(p)) = 1}.$$

Der Tangentialvektor (an M bei p) zu e_i kann also algebraisch als folgende Derivation angesehen werden: $\varphi \longmapsto \frac{d}{dx^i}[\varphi \circ h^{-1} \circ (h(p) + t(x^i)\, e_i)]|_{x^i = h_i(p)}$, d.h. als der auf $\mathcal{E}_p(M)$ definierte Richtungsableitungsoperator in der Richtung x^i, d.h. in der Richtung $(h_i)'(p)$, der flach gemachten Funktion φ ist. Neben ∂_{x^i} gibt es deshalb auch die Notation $\frac{d}{dx^i}$.

Dass ein solcher Tangentialvektor ein Richtungsableitungsoperator auf $\mathcal{E}_p(M)$ ist, ist klar. Die Frage ist aber, ober er auch ein Richtungsableitungsoperator auf der Menge der differenzierbaren Funktionen der Form $f: M \to N$ ist. Um diese Frage zu beantworten müssen wir sehen, wie das Differential von f auf solche Tangentialvektoren wirkt.

Ein Differential $d^{\text{alg}} f_p$ ordnet jeden Tangentialvektor von $T_p^{\text{alg}} M$ einem Tangentialvektor von $T_{f(p)}^{\text{alg}} N$ zu, d.h. ordnet jede Derivation F: $\underbrace{\psi}_{\in \mathcal{E}_p(M)} \mapsto v(\psi)$ einer Derivation $F \circ f^*$: $\underbrace{\varphi}_{\in \mathcal{E}_{f(p)}(N)} \mapsto F(\varphi \circ f)$ zu, wobei $F(\varphi \circ f) = \frac{d}{dx^i}[\varphi \circ f \circ h^{-1} \circ (h(p) + t(x^i)\, e_i)]|_{x^i = h_i(p)}$.

$F \circ f^*$ ist Richtungsableitungsoperator in der Richtung x^i, der auf der Menge $\mathcal{E}_{f(p)}(N) \circ f$ definiert ist. $\mathcal{E}_{f(p)}(N) \circ f$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{E}_p(M)$. $F \circ f^*$ ist also Richtungsableitungsoperator in der Richtung x^i für alle Funktion von $\mathcal{E}_p(M)$, die sich als $\varphi \circ f$, für $\varphi \in \mathcal{E}_{f(p)}(N)$, schreiben lassen. In diesem exakten Sinne dürfen wir $df(p)\, \partial_{x^i}$ als $\partial_{x^i} f(p)$ schreiben.

Alternativ zu ∂_{x^i} schreiben wir lieber ∂_i.

Praktischer Umgang mit ∂_i

∂_i ist eine Funktion von p. Wir schreiben $\partial_i = \partial_i(p)$. Geben wir uns eine Karte (U, h), können wir schreiben: $\partial_i = \partial_i(p) := \begin{cases} \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}^d; \\ \varphi \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}[\varphi \circ h^{-1}](h(p)) \end{cases}$. Möchten wir ∂_i herunterholen, so müssen wir basteln: $\partial_i \circ h^{-1}(h(p)) := \begin{cases} \mathcal{E}_p(\mathbb{R}_d) \to \mathbb{R}^d; \\ \varphi \circ h^{-1} \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}[\varphi \circ h^{-1} \circ id_{\mathbb{R}_d}](h(p)) \end{cases}$. Hier wird $\mathbb{R}_d$ als triviale Mannigfaltigkeit angesehen und $id_{\mathbb{R}_d}$ ist dann die Karte $\mathbb{R}_d \to \mathbb{R}_d$. Die Funktion $\varphi \circ h^{-1}$ gehört

---

nachzuvollziehen, warum der Ricci-Kalkül den Tangentialvektor zu e_i mit $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bezeichnet oder auch mit ∂_i. Aber weder die Form des Tangentialvektors als $(dh(p))^{-1} e_i$ noch als $(d(h^{-1})_i)(h(p))$ scheint zu helfen.

$\mathcal{E}_p(\mathbb{R}_d)$. Und wir haben $\partial_i(p) = \partial_i \circ h^{-1}(h(p))$. Diese Überlegung wird später bei der Definition des Integrals auf eine Mannigfaltigkeit benötigt.

Was bis jetzt behandelt wurde, bildet die konzeptuelle Basis des nächsten Kapitels. Ein Wissen, das ausser als Basis für die Theorie der Differentialformen keine eigene Existenzberechtigung und Anwendung zu haben scheint. In den meisten Büchern über Differentialformen (z.B. das Buch von Manfredo P. Do Carmo: *Differential Forms and Application*, Springer Verlag) werden alle diese Vorkenntnisse schlicht angenommen. Die Differentialformen lassen sich nämlich auch ohne sie behandeln, vorausgesetzt, man betrachte eine Differentialform als ein neues und hoch abstraktes Objekt, dessen Entstehungsgeschichte vom Auge verloren gegangen ist.

Differentialformen

Alternierende Formen

Die Existenzberechtigung der Differentialformen erfahren wir im Kapitel über die Integration auf Mannigfaltigkeiten. Hier wollen wir uns mit ihnen ein erstes Mal auseinandersetzen.

Definition: Sei V ein reeller Vektorraum. Unter einer alternierenden k-Form ω auf V verstehen wir eine multilineare Abbildung $\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\text{k mal}} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: Sind $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear abhängig, so gilt $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Der Vektorraum der alternierenden k-Formen auf V wird mit $Alt^k V$ bezeichnet.
Konvention: $Alt^0 V := \mathbb{R}$. Und $Alt^1 V$ ist der gewöhnliche Dualraum von V.

Behauptung: Sei ω_W eine alternierende k-Form auf W und sei $f: V \to W$ linear. Wir können dann folgende lineare Abbildung definieren:
$Alt^k f: Alt^k W \longrightarrow Alt^k V; \quad \omega_W(w_1, \ldots, w_k) \longmapsto \omega_W\big(f(v_1), \ldots, f(v_k)\big)$.[22]

Der Ausdruck $\omega_W\big(f(v_1), \ldots, f(v_k)\big)$ ist also eine alternierende k-Form $\omega_V(v_1, \ldots, v_k)$, die wir $\omega_V = \big(Alt^k f(\omega_W)\big)$ bezeichnen. Wir bemerken, dass wenn die $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig sind, dann auch die $f(v_1), \ldots, f(v_k)$. Umgekehrt spielt es (gemäss Definition des Alternierens) keine Rolle. Deshalb wird von f ausser der Linearität auch nichts verlangt.

Schreibweise: $Alt^k f$ schreiben wir auch f^* und sprechen von $f^*\omega_W$ als die durch f aus ω_W induzierte alternierende k-Form.

Die Konstruktion von f^* sollen wir uns ab sofort in ihrer einfachen Form merken. Sie lässt sich nämlich in immer komplexeren Erscheinungsformen deklinieren, sodass ohne eine gewisse Vertrautheit mit dieser Konstruktion ein übergreifendes Verständnis der neuen Objekte nicht möglich ist.

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V. Eine alternierende k-Form auf V, mit $k \le n$, ist durch die Zahlen $\omega\big(e_{\mu_1}, \ldots, e_{\mu_k}\big) \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt (Die Indizien μ_i sind eine Auswahl von k Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$). Wegen des Alternierens gilt $\omega\big(e_{\sigma(\mu_1)}, \ldots, e_{\sigma(\mu_1)}\big) = sign(\sigma) \cdot \omega\big(e_{\mu_1}, \ldots, e_{\mu_k}\big)$ und deshalb genügt es, $\omega\big(e_{\mu_1}, \ldots, e_{\mu_k}\big)$ für $\mu_1 < \cdots < \mu_k$ zu kennen. Diese Zahlen heissen die Komponenten von ω bezüglich der Basis.

---

[22] oder, vielleicht genauer ausgedrückt:
$\big((w_1, \ldots, w_k) \mapsto \omega_W(w_1, \ldots, w_k)\big) \longmapsto \Big((v_1, \ldots, v_k) \mapsto \omega_W\big(f(v_1), \ldots, f(v_k)\big)\Big)$

Behauptung: Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V. Folgende Abbildung, die einer alternierenden k-Form ein k-Tupel zuordnet, ist ein Isomorphismus: $Alt^k V \to \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}; \quad \omega \mapsto \left(\omega\left(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}\right)\right)_{\mu_1 < \dots < \mu_k}$. Insbesondere ist $\dim\left(Alt^k V\right) = \binom{n}{k}$.

Folgerung (Eindeutigkeit der Determinante): Für eine gegebene Basis eines Vektorraums V der Dimension n und eine reelle Zahl a gibt es genau eine alternierende n-Form auf V mit $\omega(e_1, \dots, e_n) = a$. Im Falle der Standardbasis und $a = 1$ ist das die Determinante, aufgefasst als Multilinearform in den Spaltenvektoren der reellen $n \times n$–Matrizen.

k-Formen

Definition: Unter einer Differentialform vom Grade k oder kurz k-Form auf einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Zuordnung $\omega: p \mapsto \omega_p$, welche jedem $p \in M$ eine alternierende k-Form $\omega_p \in Alt^k T_p M$ auf dem Tangentialraum bei p zuweist.

Aufpassen! Es gibt eine grosse Gefahr der Verwechslung zwischen den Benennungen „k-Form“ und „alternierender k-Form“. Insbesondere ist eine alternierende k-Form gar keine k-Form! Deshalb sollten wir von der Bezeichnung „k-Form“ keinen Gebrauch machen und entweder von „alternierenden k-Formen“ oder von „Differentialformen (vom Grade k)“ sprechen.

Definition: Die Menge der k-Formen (☺) auf M wollen wir mit $\Omega^k M$ bezeichnen (obwohl in der Literatur $\Omega^k M$ die Menge der *differenzierbaren* k-Formen auf M bezeichnet).

Wir merken, dass für $V = T_p M$ die Menge $\Omega^k M$ der Menge $Alt^k V$ entspricht[23]. Also muss das Pendant der oben definierten induzierten Abbildung $Alt^k f$ ebenfalls für k-Formen existieren.

Wenden wir die Tatsache an, dass eine alternierende k-Form von einer linearen Abbildung induziert werden kann. Für alle p haben wir nämlich[24]:

$$Alt^k df(p): Alt^k T_{f(p)} N \longrightarrow Alt^k T_p M; \quad \omega_{T_{f(p)}N}(w_1, \dots, w_k) \longmapsto \omega_{T_{f(p)}N}\left(df(p)(v_1), \dots, df(p)(v_k)\right),$$

wobei der Ausdruck $\omega_{T_{f(p)}N}\left(df(p)(v_1), \dots, df(p)(v_k)\right)$ die alternierende k-Form $\omega_{T_p M}(v_1, \dots, v_k)$ ist, die mit $\omega_{T_p M} := \left(Alt^k df(p)(\omega_{T_{f(p)}N})\right)$ definiert wird. Diese Schreibweise ist aber mühsam. Deshalb setzen wir $\omega_x := \omega_{T_x M}$ (Es soll klar sein, dass der x auf M lebt) und machen die folgende Behauptung:

Behauptung: Eine differenzierbare Abbildung $f: M \to N$ induziert in kanonischer Weise eine lineare Abbildung

$$f^*: \Omega^k N \longrightarrow \Omega^k M; \quad \left(f(p) \mapsto \omega_{f(p)}(w_1, \dots, w_k)\right) \longmapsto \left(p \mapsto \omega_{f(p)}\left(df(p)(v_1), \dots, df(p)(v_k)\right)\right),$$

wobei der Ausdruck $\omega_{f(p)}\left(df(p)(v_1), \dots, df(p)(v_k)\right)$ eine alternierende k-Form $\omega_p(v_1, \dots, v_k)$ ist.

---

[23] Die Elemente von $Alt^k V$ sind alternierende k-Formen während die Elemente von $\Omega^k M$ k-Formen sind, also Funktionen, die jedem p eine alternierende k-Form zuordnen.

[24] Es ist die oben stehende Behauptung mit $V = T_p M$, $W = T_{f(p)} N$ und mit der linearen Abbildung $df(p)$.

Schreibweise: Die Zuordnung $f(p) \mapsto \omega_{f(p)}(w_1, \dots, w_k)$ ist eine differenzierbare k-Form, die wir einfach $\omega \in \Omega^k N$ notieren. Mit dem Ausdruck $f^*\omega$ verstehen wir also folgende in $\Omega^k M$ lebende Differentialform: $p \mapsto \omega_{f(p)}\big(df(p)(v_{1)}, \dots, df(p)(v_k)\big)$.

Behauptung: Ist V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $f: V \to V$ linear, so ist $Alt^n f: Alt^n V \to Alt^n V$ die Multiplikation mit $det\, f \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Determinante ist ursprünglich für Funktionen der Form $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert. Die Determinante von f verstehen wir als $\det(\varphi^{-1} \circ A \circ \varphi)$, wobei $\varphi: \mathbb{R}^n \to V$ ein Isomorphismus ist (siehe linkes Schema).

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\cong"', "\varphi"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\cong"', "\varphi"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} Alt^n V \arrow[d, "\cong"', "Alt^n\varphi"] & Alt^n V \arrow[l, "Alt^n f"'] \arrow[d, "\cong"', "Alt^n\varphi"] \\ Alt^n \mathbb{R}^n & Alt^n \mathbb{R}^n \arrow[l, "Alt^n A"'] \end{tikzcd}$$

Das zweite Schema (vergleiche die Pfeile) ist kommutativ und $\dim(Alt^n V) = 1$. Deshalb sind $Alt^n f$ und $Alt^n A$ durch Multiplikation mit ein und derselben Zahl gegeben[25]. Um diese zu ermitteln, wenden wir $Alt^n A$ auf das Element $\det \in Alt^n \mathbb{R}^n$ und für die kanonische Basis.

Einsformen (auch Pfaffsche Formen)

Sei $f: M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Da ein Vektorraum V trivialerweise mit seinem Tangentialraum $T_p V$ bei irgendeinem Punkt $p \in V$ isomorph ist[26], können wir das Differential $df(p): T_p M \to T_p \mathbb{R}$ als eine Funktion $T_p M \to \mathbb{R}$ auffassen. So gesehen ist $df(p)$ ein Element des Dualraums $T_p^* M$, weil für $v \in T_p M$ ja $df(p)v \in \mathbb{R}$ gilt. Ein Element von $T_p^* M$ ist eine lineare Abbildung $v \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$; die Angabe eines Vektors v und einer Zahl z mit $\langle v, w\rangle = z$ bestimmt also ein Element des Dualraums eindeutig – natürlich für das gegebene Skalarprodukt. Wir können deshalb schreiben:
$df(p)v = v(f)$.

Bezüglich einer d-dimensionalen Karte (U, h) von M ist ein Tangentialvektor in $T_p M$ der $\mathbb{R}^d$-Vektor $(dh(p))^{-1}\, v = (dh(p))^{-1}\,(v_1, \dots, v_d) = \sum_{i=1}^d v_i\, \frac{\partial h^{-1}}{\partial x_i}(p)$. Der Ricci-Kalkül notiert es $\sum_{i=1}^d v_i\, \partial_i$. Das Differential von f lässt sich also folgenderweise schreiben: $v(f) = \sum_{i=1}^d v_i\, \partial_i(f)$. Andererseits prüfen wir leicht, dass das Differential der heruntergeholten Funktion $f \circ h^{-1}$ gleich $\sum_{i=1}^d v_i\, \partial_i f$ ist. Wir sehen es: die Notation $\partial_i(f)$ entspricht wirklich der i-ten partiellen Ableitung $\partial_i f$ und wir verstehen den Grund, den Tangentialvektor $(dh(p))^{-1}\, e_i$, für e_i ein Element der Standardbasis von $\mathbb{R}^d$, mit ∂_i zu kennzeichnen.

Betrachten wir den Fall, wenn f die Projektion $x = (x^1, \dots, x^d) \mapsto x^i$ ist. Wir berechnen $\partial_i x^i$. Ist es eine reelle Zahl oder eine Funktion? Da x^i eine Notation für die Funktion $h_i: p \mapsto h_i(p)$ ist, gilt:

---

[25] Als lineare Abbildung zwischen Vektorräumen der Dimension 1 muss $Alt^n f$, resp. $Alt^n A$, die Multiplikation mit einer Zahl sein. Das Schema macht es klar, warum diese Zahl für $Alt^n f$ und für $Alt^n A$ dieselbe sein muss.
[26] Geometrisch ist der Isomorphismus $V \to T_p V$ eine Verschiebung des Ursprungs nach p.

$\partial_i x^i = d\left(x^i \circ h^{-1}\right)(h(p)) = \; d(h_i \circ h^{-1})(h(p)) = (0, \dots, 0,1,0, \dots 0)$, mit 1 an der i-ten Stelle.

Das Integral

Was wir soweit erreicht haben, ist, das Differential einer Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten sauber definiert zu haben. Wir wissen aber, dass in $\mathbb{R}^n$ das Differenzieren und das Integrieren zwei eng verbundene Prozesse sind. Wie steht es in der Welt der Mannigfaltigkeiten? In diesem Kapitel definieren wir zuerst das Integral und im nächsten Kapitel untersuchen wir das Verhältnis zwischen Differenzieren und Integrieren.

Die Orientierung

Orientierung eines Vektorraumes

Definition: Zwei Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ eines reellen Vektorraumes V heissen gleichorientiert, wenn die eine durch eine Transformation mit positiver Determinante aus der anderen hervorgeht. Gleichorientiertheit ist also eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen auf der Menge der Basen von V.

Die Orientierung eines Vektorraumes ist eine dieser zwei Äquivalenzklassen, welcher einmal per Konvention der Vorrang gegeben wurde. Jede Basis, die sich in dieser Orientierung als Äquivalenzklasse von Basen befindet, wird positiv orientiert genannt. Alle andere negativ orientiert.

Definition: Ein orientierter Vektorraum ist die Angabe eines Paares (V, or), bestehend aus V und einer seiner beiden Orientierungen (die dann positiv genannt wird).

Orientierung einer Mannigfaltigkeit

Eine Mannigfaltigkeit M wird dadurch orientiert, dass man jeden ihrer Tangentialräume orientiert – aber nicht irgendwie, sondern so, dass sich diese Orientierungen nachbarlich gut vertragen.

Definition: Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Familie $\{or_p\}_{p \in M}$ von Orientierungen or_p ihrer Tangentialräume T_pM heisst lokal verträglich, wenn sich um jeden Punkt von M eine orientierungserhaltende Karte finden lässt, also eine Karte (U, h) mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in U$ das Differential $dh_x: T_xM \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ die Orientierung or_x in die übliche Orientierung des $\mathbb{R}^n$ überführt.

Definition: Unter einer Orientierung einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine lokal verträgliche Familie $\{or_p\}_{p \in M}$ von Orientierungen ihrer Tangentialräume. Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, or), bestehend aus einer Mannigfaltigkeit M und einer Orientierung or von M.

Auf einer Mannigfaltigkeit integrieren

Das Integrieren über n-dimensionale Mannigfaltigkeiten führt man mittels Karten auf das Integrieren im $\mathbb{R}^n$ zurück. Für eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ und zwei Karten (U, h) und (V, k) ist das heruntergeholte Integral $\int_{h^{-1}(U\cap V)} f \circ h^{-1} dx^n$ nicht zwingend mit $\int_{k^{-1}(U\cap V)} f \circ k^{-1} dx^n$ gleich und so hängt das Integral von f auf $U \cap V \subset M$ von der Wahl der Karte ab.

Ist es also unmöglich, eine Funktion nicht auf $\mathbb{R}^n$ [27] sondern auf eine beliebige Mannigfaltigkeit sinnvoll – also insbesondere kartenunabhängig – zu integrieren?

Überlegen wir uns, was wir eigentlich machen, wenn wir eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$ integrieren: wir summieren Elemente $f dx^n$, also ganz kleine Elemente der Form $f(x_1, \dots, x_n) \prod_{k=1}^{n} \Delta x_k$, zusammen. Dabei ist der Grundelement dx^n ein Volumen in $\mathbb{R}^n$. Wollen wir eine Funktion f auf eine Mannigfaltigkeit M integrieren, so müssen wir zuerst ein Volumen in M definieren. Ein solches Volumen wäre dann sinngemäss kartenunabhängig, weil es etwas wäre, das der Mannigfaltigkeit M selbst zugeordnet wäre. Um es für M zu definieren, definieren wir es zuerst für ein infinitesimales Volumen um p; für dieses dürfen wir nämlich das Volumen in T_pM als lokale Approximation des Volumen in M behandeln. Und ein Volumen in einem Vektorraum, das kennen wir. Das Volumen in T_pM ist eine reelle Zahl, die wir jedem n-Tupel von Vektoren in T_pM zuordnen können. Diese Vektoren definieren einen Spat $Spat(v_1, \dots, v_n) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i; 0 \le \lambda_i \le 1\}$ und denen ordnet die Volumenfunktion das Volumen des Spates. Was immer die Volumenfunktion ist, muss sie folgende Eigenschaften haben:

- positive Homogenität: $vol(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = |\lambda|\, vol(v_1, \dots, v_n)$,
- Scherungsinvarianz: $vol\big(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n\big) = vol(v_1, \dots, v_n)$ für alle $i \neq j$.

Der Zusammenhang zwischen alternierenden Formen und Volumen

<u>Behauptung:</u> Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Wählt man eine Orientierung or von V und modifiziert die Abbildung $vol: V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$vol_{or}(v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} -vol(v_1, \dots, v_n) & \text{falls } (v_1, \dots, v_n) \text{ negativ orientiert} \\ +vol(v_1, \dots, v_n) & \text{sonst} \end{cases}$$

zur Abbildung vol_{or}, so ist vol genau dann ein Volumen, wenn vol_{or} eine alternierende n-Form ist.

<u>Beweis:</u> „⇒“: Trivial. „⇐“: Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine positiv orientierte Basis von V. Wir geben uns eine Volumenfunktion vol. Es gibt immer[28] eine alternierende n-Form mit $\omega(e_1, \dots, e_n) = vol(e_1, \dots, e_n)$.

---

[27] Oder eine Teilmenge davon der Form $\prod_{k=1}^{n} I_k$, mit I_k Teilmengen von $\mathbb{R}$.

[28] Siehe den Beweis der Behauptung, dass $Alt^k V \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$: Für jeden Wert $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine alternierende n-Form ω eines Vektorraums der Dimension n, für welche $\omega(e_1, \dots, e_n) = x$ gilt. Insbesondere auch für $\omega(e_1, \dots, e_n) = vol(e_1, \dots, e_n)$.

Wir zeigen durch Induktion nach k, dass $\omega(v_1, \dots, v_k, e_{k+1} \dots, e_n) = vol(v_1, \dots, v_k, e_{k+1} \dots, e_n)$. Dazu gebrauchen wir die Tatsache, dass

(1) $vol(v_1, \dots, v_i + w, \dots, v_n) = vol(v_1, \dots, v_n)$ falls w eine Linearkombination aus $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1} \dots, v_n$ ist (Scherungsinvarianz), sowie die Tatsache, dass

(2) vol unter Permutation der Variablen invariant ist. Das lesen wir nämlich aus den Eigenschaften der Volumenfunktion leicht ab.

Zum Induktionsschluss von k auf $k+1$: Wir nehmen oBdA an, dass die $v_1, \dots, v_{k+1}, e_{k+2} \dots, e_n$ linear unabhängig sind.

Wir dürfen weiterhin oBdA annehmen, dass die $v_1, \dots, v_{k+1}$ Linearkombinationen von $e_1, \dots, e_{k+1}$ sind. Sonst lässt sich (mindestens) ein v_i, $1 \le i \le k+1$, als $v_i = u_i + w_i$ schreiben, wobei u_i eine Linearkombination von $e_1, \dots, e_{k+1}$ und w_i eine Linearkombination von $e_{k+2}, \dots, e_n$ ist. Wegen (1) gilt aber $\omega(v_1, \dots, u_i + w_i, \dots, v_{k+1}, e_{k+2} \dots, e_n) = \omega(v_1, \dots, u_i, \dots, v_{k+1}, e_{k+2} \dots, e_n)$.

Die Vektoren $v_1, \dots, v_{k+1}$ sind also linear unabhängig und von $e_1, \dots, e_{k+1}$ erzeugt. Es gibt deshalb einen Vektor v_j, der von den ersten k Basisvektoren $e_1, \dots, e_k$ nicht erzeugt wird; ansonsten würden k Basisvektoren $e_1, \dots, e_k$ die $k+1$ Vektoren $v_1, \dots, v_{k+1}$ erzeugen, was die lineare Unabhängigkeit dieser Vektoren widersprechen würde.

Es gibt aber genau einen solchen v_j und nicht mehrere. Um das zu verstehen, müssen wir die Betrachtungsweise umkehren: Die $e_1, \dots, e_{k+1}$ werden von den $v_1, \dots, v_{k+1}$ erzeugt. Angenommen die k Basisvektoren $e_1, \dots, e_k$ können nur $v_1, \dots, v_l$, mit $l < k$, erzeugen. Die $v_1, \dots, v_l$ bilden dann aber ein minimales Erzeugendensystem von $e_1, \dots, e_k$. In diesem Fall sind es also l Vektoren, mit $l < k$, die k Basisvektoren erzeugen, was aber die lineare Unabhängigkeit der Basisvektoren widerspricht.

Es gibt also *genau einen* Vektor v_j, der von den ersten k Basisvektoren $e_1, \dots, e_k$ nicht erzeugt wird. Die $e_1, \dots, e_{k+1}$ erzeugen jeden der $v_1, \dots, v_{k+1}$ und insbesondere den Vektor v_j. Es gilt deshalb $v_j = \sum_{l=1}^{k+1} \lambda_l e_l$, wobei der Vektor e_{k+1} der einzige unter den $k+1$ Basisvektoren ist, welcher in gar keiner der linearen Kombinationen in Basisvektoren der v_l, $l \neq j$, vorkommt. Die k ersten Basisvektoren reichen nämlich, um die v_l, $l \neq j$, in eine Linearkombination zu zerlegen und der e_{k+1} wird nur bei der Zerlegung von v_j benötigt. Wegen der Eigenschaft (1) der Scherungsinvarianz können wir deshalb annehmen, dass $v_j = \lambda_{k+1} \cdot e_{k+1}$. Somit haben wir

$$\omega(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n) = \lambda_{k+1} \cdot \omega(v_1, \dots, v_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n)$$

$$\overset{\text{(Induktionsannahme)}}{=} |\lambda_{k+1}| \cdot vol(v_1, \dots, v_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n) = vol(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n)$$

und der Induktionsschritt ist beendet. □

Ein anderer Weg, den Induktionsschritt zu machen:

Die $v_1, \dots, v_{k+1}$ sind linear unabhängig und haben deshalb die Form $v_i = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_{ij} e_j$, wobei $\forall j\ \exists i$ mit $\lambda_{ij} \neq 0$ (Der Index i läuft dabei auf die v_i und der Index j auf die e_j.). Sonst könnten diese $k+1$ Vektoren unmöglich linear unabhängig sein. Sei ein Basisvektor e_{j_0}, wofür $\lambda_{k+1 j_0} \neq 0$. Allenfalls durch Permutation können wir annehmen, dass $j_0 = k+1$. In diesem Fall ist v_{k+1} keine Linearkombination von $e_1, \dots, e_k$, weil der Basisvektor e_{k+1} in der Linearkombination von v_{k+1} mit dabei ist.

$$\omega\left(\underbrace{\sum_{j_1=1}^{k+1} \lambda_{1j_1} e_{j_1}}_{=v_1}, \dots, \underbrace{\sum_{j_{k+1}=1}^{k+1} \lambda_{k+1 j_{k+1}} e_{j_{k+1}}}_{=v_{k+1}}, e_{k+2} \dots, e_n\right)$$
$$= \sum_{j_1=1}^{k+1}\left[\lambda_{1j_1}\omega\left(e_{j_1}, \underbrace{\sum_{j_2=1}^{k+1} \lambda_{2j_2} e_{j_2}}, \dots, \underbrace{\sum_{j_{k+1}=1}^{k+1} \lambda_{k+1 j_{k+1}} e_{j_{k+1}}}_{=v_{k+1}}, e_{k+2} \dots, e_n\right)\right]$$
$$= \sum_{j_1=1}^{k+1} \lambda_{1j_1} \cdot \sum_{j_2=1}^{k+1} \lambda_{2j_2} \cdots \sum_{j_{k+1}=1}^{k+1} \lambda_{k+1 j_{k+1}} \omega\left(e_{j_1}, \dots, e_{j_{k+1}}, e_{k+2} \dots, e_n\right)$$

Die Summe am Rechtsesten gibt $k+1$ Terme. Für jeden dieser Terme gibt die zweite Summe von rechts k Terme – jeweils einer der $k+1$ Terme dieser zweiten Summe ist wegen der Alterniertheit nämlich Null. Die zwei ersten Summen von rechts bringen also zusammen $(k+1)k$ Termen. Für jeden dieser Termen bringt die dritte Summe von rechts $k-1$ Terme – jeweils zwei der $k+1$ Terme der dritten Summe sind nämlich Null. Alle $k+1$ Summen bringen also zusammen $(k+1)!$ Terme. Jeder dieser Terme ist gleich ein Faktor mal $\omega\left(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k+1)}, e_{k+2} \dots, e_n\right)$, wobei σ eine Permutation der Indexmenge $\{1; 2; \dots; k+1\}$. Der obige Ausdruck ist also gleich[29]

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \lambda_{1\sigma(1)} \cdot \lambda_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot \lambda_{k+1\sigma(k+1)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma)\omega(e_1 \dots, e_n).$$

Weiter muss noch daraus geschlossen werden (wie genau?), dass der Vektor v_{k+1} die Form $\lambda\, e_{k+1}$ besitzen muss, womit dann der Induktionsschritt (analog zur ersten Fassung des Beweises) beendet wird.

Sicher muss von der Tatsache, dass $\lambda_{k+1\,k+1} \neq 0$, Gebrauch gemacht werden, aber vermutlich auch von der Tatsache, dass alle andere $\lambda_{k+1\,j}$ mit $j \neq k+1$ Null sind. Um aber über diese Tatsache zu verfügen, muss sie zuvor bewiesen werden, was ohnehin die oben stehende Überlegung verlangt, dass „es *genau einen* Vektor v_j gibt, der von den ersten k Basisvektoren $e_1, \dots, e_k$ *nicht* erzeugt wird.“

Das Volumen einer Mannigfaltigkeit

Den Raum der Volumenfunktionen in V nennen wir $vol(V)$. Dieser Raum ist wie $Alt^n V$ ein eindimensionaler Vektorraum. Haben wir uns für eine der beiden Orientierungen von V entschieden, haben wir einen kanonischen Isomorphismus $vol(V) \cong Alt^n V$.

<u>Definition:</u> Unter einem Volumen in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Zuordnung vol, welche jedem $p \in M$ ein Volumen $vol_p \in vol(V)$ in dem Tangentialraum bei p zuweist. Wir notieren $vol(\partial_1, \dots, \partial_n)$. Wir sehen die Verwandtschaft mit der Differentialform

[29] Dieses Ergebnis wird im Kapitel über das Dachprodukt ohne weiteres benutzt.

$\omega(\partial_1, \dots, \partial_n)$. Auf einer orientierten Mannigfaltigkeit stimmen sogar beide überein. In der Folge werden wir auf differentiale n-Formen integrieren. Die Integration über differentiale n-Formen (wie auch über Volumenfunktionen) ist kartenunabhängig, weil ihre Argumente Tangentialvektoren sind, die kartenunabhängig konstruiert wurden.

Betrachten wir eine orientierungserhaltende Karte $h: U \to U'$ und einen Quader $Q' \subset U'$, den wir fein gerastet denken. Der grosse Quader Q' ist dann die Vereinigung vieler kleiner Teilquader, deren Urbilder unter der Karte h wir die Maschen des Rasters nennen wollen. Die Masche mit dem „linken unteren Eckpunkt“ p – wir nennen sie σ_p – ist das Urbild des Teilquaders $\prod_{i=1}^{n}[x_p^i, x_p^i + \Delta x_p^i]$, wobei $x_p^1, \dots, x_p^n$ die Koordinaten des Gitterpunktes $p \in Q \subset U$ bedeuten – x_p^i steht doch für $h_i(p)$.

Wir approximieren jede kleine Masche σ_p mit dem tangentialen Spat s_p in T_pM. Das Urbild von s_p unter der linearen Approximation $dh(p)$ der Karte ist $Spat(\Delta x_p^1 \cdot \partial_1, \dots, \Delta x_p^n \cdot \partial_n)$, weil die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ unter $dh(p)$ den Basisvektoren $\partial_1, \dots, \partial_n$ des Tangentialraumes entsprechen. Das Volumen dieser Spat ist (die Karte ist orientierungserhaltend):

$$\omega_p(\Delta x_p^1 \cdot \partial_1, \dots, \Delta x_p^n \cdot \partial_n) = \omega_p(\partial_1, \dots, \partial_n)\, \Delta x_p^1 \cdot \dots \cdot \Delta x_p^n.$$

Eine Approximierung von $\int_Q \omega$ ist dann die Summe dieser reellen Werte über die endlich vielen Gitterpunkte p – jeder p befindet sich nämlich an der „linken unteren Ecke“ einer Masche des Rasters: $\sum_{p\in\text{Gitter}} \omega_p(\partial_1, \dots, \partial_n)\, \Delta x_p^1 \cdot \dots \cdot \Delta x_p^n$.

Wir versuchen, aus dem allgemeinen Summenglied einen Integranden für eine Integration in $\mathbb{R}^n$ zu machen. Was ist Δx_p^i ? Es ist die kleine Länge $(h_i(p) + \Delta x_i) - h_i(p) = \Delta x_i$. Legen wir p fest, so ist nämlich $\Delta x_p^i = \Delta x_i$.

Und was ist ∂_i? In seiner physikalischen Fassung und beim Punkt p ist es $\partial_i = d(h^{-1}(h(p)))e_i$. Daraus folgt bei p:

$\omega_p(\partial_1, \dots, \partial_n) = \omega_p(d(h^{-1}(h(p)))e_1, \dots, d(h^{-1}(h(p)))e_n) = \omega_p \circ d(h^{-1}(h(p)))(1, \dots, 1)$, wobei $h(p) = \big(h_1(p), \dots, h_n(p)\big) = (x^1, \dots, x^n)$.

Der Summand ist also:

$$\omega_p(\partial_1, \dots, \partial_n)\, \Delta x_p^1 \cdot \dots \cdot \Delta x_p^n = \omega_p \circ d\big(h^{-1}(x^1, \dots, x^n)\big)(1, \dots, 1)\ \Delta x_p^1 \cdot \dots \cdot \Delta x_p^n.$$

Wir integrieren auf den Quader $Q' \subset U'$. Die Integrationsvariablen sind die x^i, d.h. die Komponentenfunktionen von $h(p)$. In der Schreibweise lassen wir den Index p wegfallen[30]:

$$\int_Q \omega = \int_{Q'} \omega \circ d\big(h^{-1}(x^1, \dots, x^n)\big)(1, \dots, 1)\, dx^1 \dots dx^n$$

[30] Setzen wir $y := h(p)$, ist dann p eine Funktion von y: $p = p(y) := h^{-1}(y)$. Integriert man nach y, so braucht man also p für die Integration nicht mehr.

Bis jetzt können wir lokal auf einer Karte integrieren; weiter wollen wir auf eine ganze orientierte Mannigfaltigkeit integrieren. Dazu eine Definition und zwei Ergebnisse.

Definition: Das Integral von einer Funktion f über eine Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^n$ ist das Integral über ganz $\mathbb{R}^n$ der über ganz $\mathbb{R}^n$ definierten Funktion $g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in \Omega \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Wir schreiben dann: $\int_\Omega f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$.

Behauptung (Transformationsformel): Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus. Sei weiter eine integrierbare[31] Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Es gilt dann:

$$\int_\Omega f\,dx = \int_{\tilde{\Omega}} (f \circ \varphi) \cdot |\det(d\varphi(x))|\,dx$$

Beweisidee: Dass f und $f \circ \varphi$ dasselbe Integral haben sollten, ist nicht zu erwarten, vielmehr wird ein Korrekturfaktor notwendig. Dass dieser gerade der Beitrag der Jacobi-Determinante ist, braucht uns nicht zu wundern: die Jacobimatrix ist ja die lineare Approximation des Diffeomorphismus φ, beim Übergang von kleinen Quadern in $\tilde{\Omega}$ zu ihren Bildmaschen in Ω wird also das Volumen näherungsweise mit $|\det(d\varphi(x))|$ multipliziert.

Behauptung: Man kann jede Mannigfaltigkeit in abzählbar viele paarweise disjunkte kleine (d.h. auf einem einzigen Kartengebiet enthaltenen) Teilmengen zerlegen.

Nun sind wir imstande, das Integral auf einer orientierten Mannigfaltigkeit M zu definieren.

Definition: Eine n-Form ω (andere Integranden machen bis jetzt für uns gar keinen Sinn) auf einer orientierten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heisst integrierbar, wenn für eine (dann jede) Zerlegung $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ in abzählbar viele kleine messbare Teilmengen und eine (dann jede) Folge $(U_i, h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von orientierungserhaltenden Karten mit $A_i \subset U_i$ gilt: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die heruntergeholte Komponentenfunktion[32]

$$a_i := \omega(\partial_1, \dots, \partial_n) \circ {h_i}^{-1}: h(U_i) \to \mathbb{R}$$

von ω bezüglich (U_i, h_i) integrierbar und es ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} |a_i(x)|\,dx) < \infty.$$

Behauptung: Folgender Wert

[31] Was es genau heisst, dass eine Funktion auf eine Mannigfaltigkeit integrierbar ist, können wir in: Jänich, *Vektoranalysis*, Seite 88, nachlesen. Nur so viel zum Thema: eine Funktion ist integrierbar, wenn sie es bezüglich Karten und in üblichem Sinne ist. Auf eine Mannigfaltigkeit sind insbesondere Messbare Mengen und Nullmengen wohl definiert. Die Messbaren Mengen bilden eine wohl definierte σ–Algebra.

[32] Die Komponentenfunktion h_i ist nicht die i-te Vektorkomponente des Vektors $h = (h_1, \dots, h_n)$ sondern die Karte zur Teilmenge A_i.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{h_i(A_i)} a_i(x)\, dx =: \int_M \omega$$

hängt nicht von der Wahl der Zerlegung und der Karten ab. Das Integral $\int_M \omega$ ist also wohl definiert.

Zum Beweis gebraucht man die Transformationsformel. Beweis in: Jänich, *Vektoranalysis*, Seite 93.

Wie lautet die Transformationsformel für das Integral auf Mannigfaltigkeiten? Statt eines Diffeomorphismus $\varphi: \widetilde{\Omega} \to \Omega$ zweier offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ betrachten wir jetzt natürlich einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\varphi: \widetilde{M} \to M$. Für eine Zerlegung $M = \cup A_i$ und Karten (U_i, h_i) mit $U_i \supset A_i$ gibt es die Zerlegung $\widetilde{M} = \cup \varphi^{-1}(A_i)$ und die Karten $(\varphi^{-1}(U_i), h_i \circ \varphi)$. Dann haben die n-Formen ω auf M und $\varphi^*\omega$ auf $\widetilde{M}$ ganz dieselben heruntergeholten Komponentenfunktionen und es ergibt sich folgende Transformationsformel:

Behauptung (Transformationsformel für die Integration auf Mannigfaltigkeiten): Ist $\varphi: \widetilde{M} \to M$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus zwischen orientierten n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, so ist eine n-Form ω auf M genau dann integrierbar, wenn $\varphi^*\omega$ auf $\widetilde{M}$ integrierbar ist und es gilt dann

$$\int_M \omega = \int_{\widetilde{M}} \varphi^*\omega.$$

Wie ist der Ausdruck $\varphi^*\omega$ zu verstehen? $\varphi^*\omega := \omega \circ \varphi$ lebt in $\widetilde{M}$ und ω lebt in M. Als k-Formen sind beide ω und $\varphi^*\omega$ Funktionen, die einem Punkt p in einer Mannigfaltigkeit eine alternierende k-Form im Tangentialraum von dieser Mannigfaltigkeit an der Stelle p zuordnen. Die k-Form $\varphi^*\omega$ ist also punktweise, d.h. für jeden $p \in \widetilde{M}$, folgenderweise definiert. Seien v_i Vektoren in $T_p\widetilde{M}$. Wir definieren: $\varphi^*\omega(v_1, \dots, v_k) := \omega_{\varphi(p)}(d\varphi(p)v_1, \dots, d\varphi(p)v_k)$.

Diese Definition ist mit der Tatsache konsistent, dass $(\omega \circ \varphi)(M) = \omega(\varphi(M))$, wobei die Rolle der Funktion φ bei der linken und bei der rechten Seite der Gleichung unterschiedlich ist: Einmal modifiziert φ die k-Form ω selbst und einmal deren Ausgangsmenge M.

Berandete Mannigfaltigkeiten

Ein Stück von einer Fläche wie eine Flagge im Wind, ein endlich langer Zylinder oder eine Halbsphäre sind Mannigfaltigkeiten, die einen Rand haben. Ein Würfel hat zwar keinen Rand, besteht aber aus sechs quadratisch berandeten Seiten. Der Begriff der berandeten Mannigfaltigkeit ist eine Verallgemeinerung desjenigen der Mannigfaltigkeit.

Das lokale (d.h. linearisierte) Modell für eine berandete Mannigfaltigkeit ist der abgeschlossene Halbraum, so wie $\mathbb{R}^n$ das lokale (d.h. linearisierte) Modell für eine Mannigfaltigkeit ist. Welchen Halbraum wir benutzen, ist natürlich gleichgültig.

Definition: Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^n_-$ den Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^n;\ x^1 \le 0\}$ und mit $\partial\mathbb{R}^n_- := 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ seinen Rand. Ferner betrachten wir Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n_-$, die in der Teilraumtolologie des $\mathbb{R}^n_-$ offen sind, andere Teilmengen des $\mathbb{R}^n_-$ interessieren uns nicht. Den Rand von U definieren wir als $\partial U := U \cap \partial\mathbb{R}^n_-$.

Falls U nicht nur in $\mathbb{R}^n_-$ sondern auch in $\mathbb{R}^n$ offen ist, ist dann ihr Rand leer, und umgekehrt. Dieser Randbegriff entspricht übrigens gar nicht dem aus der Topologie bekannten Begriff des Randes von U als die Menge aller Punkte, die weder innerer noch äusserer Punkt von U sind.

Damit unser lokales Modell einer berandeten Mannigfaltigkeit wohl definiert ist, muss noch festgelegt werden, was für diese noch zu definierende spezielle Mannigfaltigkeit die Differenzierbarkeit ist.

Definition: Sei U offen in $\mathbb{R}^n_-$. Eine Abbildung $f: U \to \mathbb{R}^k$ heisst differenzierbar an der Stelle $p \in U$, wenn sie zu einer in einer Umgebung von $p \in \mathbb{R}^n$ differenzierbaren Abbildung fortgesetzt werden kann. In diesem Sinne verstehen wir den abgeleiteten Begriff eines Diffeomorphismus zwischen zwei in $\mathbb{R}^n_-$ offenen Teilmengen.

Behauptung (das Randverhalten der Diffeomorphismen): Ist $f: U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen in $\mathbb{R}^n_-$ offenen Teilmengen, so gilt $f(\partial U) \to \partial V$ und folglich $f|_{\partial U} : \partial U \to \partial V$.

Beweis: Sei $p \in \partial U$ und $g: \widetilde{U}_p \to \mathbb{R}^n$ eine lokale differenzierbare Fortsetzung von f.[33] Angenommen $f(p)$ ist kein Randpunkt von V. Dann ist f^{-1} um $f(p)$ stetig und es gibt deshalb eine offene Umgebung $V_{f(p)}$ um $f(p)$ mit $f^{-1}(V_{f(p)}) \subset \widetilde{U}_p$. Aber $(g \circ f^{-1})|_{V_{f(p)}}$ ist die Identität auf $V_{f(p)}$. Also muss f^{-1} bei $f(p)$ den vollen Rang haben und deren Ableitung surjektiv sein. Nach dem lokalen Umkehrsatz ist f^{-1} bei $f(p)$ ein Diffeomorphismus und $f^{-1}(V_{f(p)})$ muss ein Umgebung von p in $\mathbb{R}^n$ sein. Im Widerspruch damit, dass $p \in \partial U$. □

Diese Diffeomorphismen werden unsere zukünftigen Kartenwechsel sein.

Definition (berandete Karte): Ein Homöomorphismus h einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine in $\mathbb{R}^n_-$ oder in $\mathbb{R}^n$ offene Teilmenge U' von $\mathbb{R}^n_-$ bzw. $\mathbb{R}^n$ heisst eine n-dimensionale berandete Karte für X. Dementsprechend sind die Begriffe berandeter n-dimensionaler Atlas und berandete n-dimensionale differenzierbare Struktur (maximaler Atlas) zu verstehen.

Definition: eine berandete n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Paar $(M, \mathcal{D})$, meist als M geschrieben, bestehend aus einem zweitabzählbaren Hausdorffraum[34] M und einer berandeten n-dimensionalen differenzierbaren Struktur $\mathcal{D}$ für M.

Bei einem Kartenwechsel müssen Randpunkte in Randpunkte übergehen. Daher die Definition:

---

[33] Da p auf dem Rand ist, können wir mit f nicht arbeiten sondern nur mit einer Fortsetzung von f.

[34] Die Zweitabzählbarkeit eines topologischen Raumes X ist seine Eigenschaft, eine abzählbare (topologische) Basis zu besitzen. Wir erinnern: Eine Basis von X ist eine Menge $\mathfrak{B}$ offener Mengen in X, sodass jede offene Teilmenge von X eine Vereinigung offener Mengen von $\mathfrak{B}$ ist. Zum Beispiel bildet für $\mathbb{R}^n$ die Menge aller Kugeln mit rationellen Mittelpunktskoordinaten und rationellem Radius eine abzählbare Basis. Ein metrischer Raum im Allgemeinen ist erst- und nicht unbedingt zweitabzählbar. Dazu muss er noch separabel sein.

Definition: Ein Punkt $p \in M$ heisst ein Randpunkt von M, wenn er durch eine (dann jede) Karte (U, h) um p auf einen Randpunkt $h(p)$ von $h(U) \subset \mathbb{R}^n_-$ abgebildet wird. Die Menge ∂M der Randpunkte heisst der Rand der berandeten Mannigfaltigkeit M.

Behauptung: Der Rand ∂M einer n-dimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit M erhält durch die Einschränkungen auf ∂M der Karten von M einen $(n-1)$-dimensionalen Atlas und wird so zu einer $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von M. Wenn die eingeschränkten Karten als Funktionen $h: M \supset U \to \mathbb{R}^{n-1}$ – und nicht als $h: M \supset U \to \mathbb{R}_{n-1} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$ – verstanden werden, ist dann ∂M sogar eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Berandete Untermannigfaltigkeiten

Gibt es aber wirklich so etwas wie eine berandete Mannigfaltigkeit? Analog wie früher können wir berandete Mannigfaltigkeiten erzeugenden Methoden angeben. Wir wissen z.B. bereits, dass die Niveaumenge eines regulären Werts einer auf einer nicht berandeten Mannigfaltigkeit definierten Funktion eine berandete *Unter*mannigfaltigkeit ist, wobei das Beiwort „Unter" vorkommt. Nur deshalb sollen wir kurz über Untermannigfaltigkeiten sprechen.

Definition: Eine k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit M_0 von einer n-dimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit M ist eine Teilmenge $M_0 \subset M$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $p \in M_0$ eine berandete Karte (U, h) gibt, so dass

- $h(U \cap M_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; x^1 \leq 0; j > k \Rightarrow x^j = 0\} \cap h(U)$ oder
- $h(U \cap M_0) = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n; j > k \Rightarrow x^j = 0\}}_{\mathbb{R}_k} \cap h(U)$ gilt.

Dabei ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n; x^1 \leq 0; j > k \Rightarrow x^j = 0\}$ ein in $\mathbb{R}^n$ eingebetteter Halbraum von $\mathbb{R}^k$. Bis jetzt ermöglicht unsere Schreibweise nicht, diese Menge einfacher zu schreiben – insbesondere ist die Schreibweise $(\mathbb{R}_k)_-$ nicht zufriedenstellend, weil die Reihenfolge eine Rolle spielt: zuerst konstruieren wir einen Halbraum von $\mathbb{R}^k$ und erst dann betten wir ihn in $\mathbb{R}^n$ ein; die Schreibweise $(\mathbb{R}_k)_-$ meint aber die umgekehrte Reihenfolge. Schreiben wir jedoch $\mathbb{R}^d \times 0$ anstatt $\mathbb{R}_d$, so können wir die oben stehende Menge $\{x \in \mathbb{R}^n; x^1 \leq 0; j > k \Rightarrow x^j = 0\}$ als $\mathbb{R}^k_- \times 0$ schreiben. In der Folge gebrauchen wir gerne diese Schreibweise.

Bemerkung: Ganz wie bei den gewöhnlichen (nicht berandeten) Mannigfaltigkeiten sind die k-dimensionalen berandeten Untermannigfaltigkeiten kanonisch auch k-dimensionale berandete Mannigfaltigkeiten. Die Einschränkungen der Flachmacher (U, h) jeweils auf $U \cap M_0$ bilden einen k-dimensionalen berandeten differenzierbaren Atlas für M_0.

Behauptung: Wenn ein Punkt $p \in M_0$ im Rand von M liegt, dann ist er auch Randpunkt von M_0. Dabei ist k die Dimension von M_0 streng kleiner als n die Dimension von M, damit von einer Untermannigfaltigkeit überhaupt gesprochen werden kann.

Beweis: Gemäss der gerade eingeführten Definition impliziert $p \in M_0$, dass es eine Karte h_1 gibt, mit $h_1(p) \in \mathbb{R}^k_- \times 0$ oder $h_1(p) \in \mathbb{R}^k \times 0$, wobei $k \leq n-1$. Und $p \in \partial M$ bedeutet, dass für jede Karte

h_2 gilt, dass $h_2(p) \in 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ und insbesondere auch für $h_2 = h_1$. Für einen Punkt $p \in M_0$ im Rand von M gilt also (zwei mögliche Fälle)

- $h_1(p) \in \left(\mathbb{R}^k_- \times 0\right) \cap \left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right)$ (Fall A) oder
- $h_1(p) \in \left(\mathbb{R}^k \times 0\right) \cap \left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right)$ (Fall B).

Und was bedeutet $p \in \partial M_0$? Der Randbegriff wurde primär für Mannigfaltigkeiten und nicht für Untermannigfaltigkeiten definiert. Die Karten für M_0 müssen also entsprechend der oben stehenden Bemerkung eingeschränkt werden, damit sie in $\mathbb{R}^k_-$ abbilden. Das Abgebildete muss dann in $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden, sodass wir mit den oben stehenden zwei Fällen überhaupt vergleichen können. $p \in \partial M_0$ bedeutet dann, dass für jede karte h_3 gilt, dass $h_3(p) \in \mathbb{R}^k_- \times 0$ und insbesondere auch für $h_3 = h_1$.

Es ist aber schwer einzusehen, ob sich $\left(\mathbb{R}^k_- \times 0\right) \cap \left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right)$ (Fall A) respektive $\left(\mathbb{R}^k \times 0\right) \cap \left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right)$ (Fall B) in $\mathbb{R}^k_- \times 0$ befindet oder nicht.

Die Schwierigkeit der Sache liegt in den stillschweigenden Annahmen der Schreibweise: Die „0“ beim Ausdruck des Randes $\partial M = 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ entspricht nämlich der ersten Komponente beim Halbraum $\mathbb{R}^k_-$ und keiner anderen. Hingegen entspricht die „0“ beim Ausdruck $\mathbb{R}^k_- \times 0$ allen nach einer freien Auswahl von k unter n Komponenten $n-k$ überzähligen Komponenten. Der Ausdruck $\mathbb{R}^k_- \times 0$ steht also für eine unter insgesamt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, den Halbraum $\mathbb{R}^k_-$ in $\mathbb{R}^n$ einzubetten.

Fall A: Es ist klar[35], dass $\left(\mathbb{R}^k_- \times 0\right) \cap \left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right) \subset \mathbb{R}^k_- \times 0$.

Fall B: Zu zeigen: $\left(\mathbb{R}^k \times 0\right) \cap \left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right) \subset \mathbb{R}^k_- \times 0$. Sei Proj_1 die Projektion auf die erste Komponente des Halbraums. Wir haben, dass $\mathrm{Proj}_1\left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right) \subset \mathrm{Proj}_1\left(\mathbb{R}^k_- \times 0\right)$, weil $\{x^1 = 0\} \subset \{x^1 \leq 0\}$. Sei Proj_2 die Projektion auf eine Auswahl von $k-1$ Komponenten aus den n Komponenten des $\mathbb{R}^n$. Wir haben, dass $\mathrm{Proj}_2\left(\mathbb{R}^k \times 0\right) \subset \mathrm{Proj}_2\left(\mathbb{R}^k_- \times 0\right)$, d.h. es findet sich ein Paar Räume $\mathbb{R}^k \times 0$ und $\mathbb{R}^k_- \times 0$, die diese Inklusion genügen, wobei der erste dieser beiden Räume einer unter den insgesamt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten ist, $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^n$ einzubetten, und wobei der zweite dieser beiden Räume einer unter den insgesamt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten ist, den Halbraum $\mathbb{R}^k_-$ in $\mathbb{R}^n$ einzubetten.

Wenn wir aber gleichzeitig haben, dass

$\mathrm{Proj}_1\left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right) \subset \mathrm{Proj}_1\left(\mathbb{R}^k_- \times 0\right)$ und $\mathrm{Proj}_2\left(\mathbb{R}^k \times 0\right) \subset \mathrm{Proj}_2\left(\mathbb{R}^k_- \times 0\right)$,

haben wir auch $\left(\mathbb{R}^k \times 0\right) \cap \left(0 \times \mathbb{R}^{n-1}\right) \subset \mathbb{R}^k_- \times 0$.

Die Überlegung dazu lässt sich schön formell angeben:

[35] $A \cap B \subset A$

(1) $[Proj_1(A) \subset C] \Rightarrow [Proj_1(A \cap B) \subset C]$
(2) $[Proj_2(B) \subset C] \Rightarrow [Proj_2(A \cap B) \subset C]$
(3) $([Proj_1(A \cap B) \subset C] \wedge [Proj_2(A \cap B) \subset C] \Rightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{C})$
(4) $Proj_1(A) \subset C$
(5) $Proj_2(B) \subset C$
$\vdash$ $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ (Conclusio)

□

Tangentialräume am Rande

Wie steht es mit den Tangentialräumen T_pM für Randpunkte $p \in \partial M$? Diese Tangentialräume sind wohldefiniert, weil die Tatsache, dass p ein Randpunkt ist, bei keiner der drei Fassungen eines Tangentialvektors irgendeine Rolle spielt. Es sei p ein Randpunkt von M. Dann ist offenbar kanonisch $T_p\partial M \subset T_pM$.

Definition: Wir definieren die beide Halbräume $T_p^{\pm}M \coloneqq dh(p)^{-1}(\mathbb{R}^n_{\pm})$. Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Karte ab.

Definition: Es gilt $T_p^+M \cap T_p^-M = T_p\partial M$. Die Elemente von $T_p^-M - T_p\partial M$ heissen nach innen weisende, die von $T_p^+M - T_p\partial M$ nach aussen weisende Tangentialvektoren. $v \in T_pM$ weist genau nach aussen, wenn bezüglich einer (dann jeder) Karte die erste Komponente v^1 von v positiv ist.

Eine Frage: Warum denn sollten die Vektoren von T_p^+M „nach aussen“ weisen? Weil die Punkte am Rand der berandeten Mannigfaltigkeit von der Karte auf $\mathbb{R}^n_-$ und nicht auf $\mathbb{R}^n_+$ abgebildet werden.

Orientierung

Orientierungskonvention: Ist M eine orientierte n-dimensionale berandete Mannigfaltigkeit und $p \in \partial M$, so soll eine Basis $(w_1, \dots, w_{n-1})$ von $T_p\partial M$ genau dann positiv orientiert heissen, wenn für einen (dann jeden) nach aussen weisenden Vektor v die Basis $(v, w_1, \dots, w_{n-1})$ von T_pM positiv orientiert ist.

Der Satz von Stokes

Die $(n-1)$-Formen kommen ins Spiel

Die Cartansche Ableitung

Wir hatten uns das Integral $\int_U \omega$ über ein in kleinen Maschen zerlegtes Stück U einer orientierten Mannigfaltigkeit anschaulich als Summe der Antworten der n-Form ω auf die Maschen vorgestellt: Dabei wird die Masche σ_p durch das tangentiale Spat $s_p \coloneqq Spat(\Delta x_p^1 \cdot \partial_1, \dots, \Delta x_p^n \cdot \partial_n)$ approximiert. Ist $a \coloneqq \omega \circ h^{-1}$ die heruntergeholte Komponentenfunktion und Q_p der Quader mit Kantenlängen $\Delta x^1, \dots, \Delta x^n$, der der Masche σ_p entspricht[36], so wird $\int_{\sigma_p} \omega = \int_{Q_p} a(x)dx$ durch $\int_{Q_p} a(h(p))dx$, d.h. durch das Integral über den konstanten Wert $a(h(p)) = \omega_p(\partial_1, \dots, \partial_n)$ approximiert, also durch $\omega_p(\partial_1, \dots, \partial_n)\Delta x^1 \cdot \ldots \cdot \Delta x^n = \omega_p(\partial_1, \dots, \partial_n)\, Vol(Q_p)$. Der Approximationsfehler auf Q_p ist kleiner oder gleich $\epsilon_p \coloneqq \sup|a(x) - a(h(p))|$ und der Fehler auf U ist kleiner oder gleich $\max_p \epsilon_p\, Vol(h(U))$. Wenn die n-Form stetig ist, strebt der Fehler gegen 0 für eine immer feinere Rasterung von $h(U)$. Also gilt:

$$\omega_p(\partial_1, \dots, \partial_n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^1 \cdot \ldots \cdot \Delta x^n} \cdot \int_{\sigma_p} \omega\,.$$

Das rechte Glied dieser Gleichung heisst die Cartansche Ableitung von ω und wird mit $d\omega$ notiert.

Integration einer (n-1)-Form über eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit

Sinn macht für uns und bis jetzt einzig die Integration einer k-Form über eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M, wenn $k = n$, weil sich dann die Frage nach der Auswahl von k Vektoren aus n möglichen nicht stellt. Das Problem ist, dass es für $k < n$ keine kanonische Auswahl von k aus n Vektoren gibt, allgemeiner keine kanonische Art[37], für einen Punkt $p \in M$ eine k-Form anzuwenden. Ja… ausser für $k = n - 1$.

Die n-Form einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht dem Volumen einer n-dimensionalen Masche. Der Rand einer solchen Masche besteht aus $2n$ Randmaschen der Dimension $n-1$. Jede dieser $2n$ Randmaschen entspricht einer Auswahl von $n-1$ Vektoren, nämlich die $n-1$ Basisvektoren, die die jeweilige Randmasche spannen. Für $k = n-1$ gibt es also eine kanonische Auswahl von $n-1$ aus n Vektoren für jede der insgesamt $2n$ Randmaschen einer Masche. Und weil es so ist, stellen wir uns die folgende Frage: Was ist denn das Integral einer (n-1)-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit?

[36] Es gilt nämlich $h(\sigma_p) = Q_p$. Aber auch $dh(p)(s_p) = Q_p$.

[37] Kanonisch im Sinne jenseits der schlichten Konventionalität einer Definition oder einer Schreibweise.

Wenn wir anfangen, das Integral einer (n-1)-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit definieren zu wollen, dann müssen wir es auch für das Integral einer (n-2)-Form, denn jeder Randmasche besitzt selbst Randmaschen. Es ist deshalb sinnvoller zu erklären, dass das Integral einer k-Form auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit definiert ist, wenn $k = n$ und sonst nicht. Und dann zu merken, dass ein Rand einer Masche selbst als eine (n-1)-dimensionale (Unter-)Mannigfaltigkeit angesehen werden kann, worauf wir dann eine (n-1)-Form sinnvoll integrieren können. Die Dimension der zu integrierenden Form ist nämlich dann gleich wie die des Randes als Mannigfaltigkeit.

Deutung des Randintegrals als Durchfluss

Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit M und eine n-dimensionale Masche von welcher der Punkt $p \in M$ die „untere linke" Ecke bildet. Wir betrachten die Randmasche, die lokal durch folgende Vektorenliste erzeugt wird: $\partial_{\pi(1)}(p), \dots, \partial_{\pi(n-1)}(p)$, wobei $\pi: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine Permutation ist. Der einzige Basisvektor von T_pM, der dabei weggelassen wird, ist also $\partial_{\pi(n)}(p)$.

Wir erinnern daran, dass $\partial_i = d(h^{-1}(h(p)))e_i$. Für jeden $i = 1, \dots, n$ bildet die Funktion $\partial_i: p \mapsto d(h^{-1}(h(p)))e_i$ im (für alle p selben) $\mathbb{R}^n$ ab und ermöglicht uns, die (n-1)-Spaten zweier sich auf demselben Rand befindenden Nachbarpunkte p und q zu vergleichen.

Schreiben wir v_i für $\partial_{\pi(i)}(p)$. Die Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1}$ spannen lokal um p unsere Randmasche. Und zusammen mit $v_n := \partial_{\pi(n)}(p)$ erzeugen sie T_pM. Für einen Nachbarpunkt q auf derselben Randmasche schreiben wir analog w_i für $\partial_{\pi(i)}(q)$. Geben wir uns ferner eine n-Form (keine (n-1)-Form!) ω. ω_p ist dann eine alternierende n-Form, die auf T_pM lebt. Analog für ω_q. Vergleichen wir $\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ mit $\omega_q(w_1, \dots, w_{n-1}, w_n)$. Wir stellen uns beispielsweise vor, dass $w_i = v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, ausser für einen $w_j = v_j + v_n$ ($j \in \{1, \dots, n-1\}$): wegen der Alterniertheit haben wir $\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(w_1, \dots, w_n)$.

Interpretation: Der Wert von ω entspricht der Projektion auf dem Tangentialraum der Randmasche. Vermutlich ist es diese Überlegung, die hinter dem in jedem Kurs über Vektoranalysis gemachten Vergleich des Integrals einer (n-1)-Form mit einem Durchfluss stecke. Ein Durchfluss besitzt nämlich auch die Eigenschaft der Multilinearität (Siehe K. Jänich, S. 122).

Mit dem weiter unten eingeführten Begriff der Cartanschen Ableitung werden wir zudem die Variation des über den Rand eines Würfels berechneten Integrals einer (n-1)-Form als eine spezielle n-Form interpretieren können. Diese Variation wäre dann der Durchfluss dieser n-Form (ob es Sinn macht?) durch den Würfel.

Konstruktion eines klein gedachten Randwürfels bei p

Wir betrachten einen n-dimensionalen Quader $Q_p \subset \mathbb{R}^n$ mit Kantenlängen $\Delta x^1, \dots, \Delta x^n$ und interessieren uns für die $2n$ Ränder des die n-Masche $h^{-1}(Q_p)$ lokal approximierenden n-Spates $d(h^{-1})(Q_p)$. Wie sind genau diese Ränder gegeben? Unmittelbar bekommen wir bereits n Ränder: es sind die n n-1-Spaten, die als

$$R_i := Spat(\Delta x_p^1 \cdot \partial_1, \dots, \Delta\widehat{x_p^\iota \cdot \partial_\iota}, \dots, \Delta x_p^n \cdot \partial_n)$$

definiert werden, wobei der mit einem Akzent versehenen i-ten Vektor gar nicht erscheint[38]. Die n weitere Ränder sind (siehe das Schema in: K. Jänich, *Vektoranalysis*, S. 122 um die Verschiebung „$+\Delta x_i\, e_i$" leichter zu visualisieren: Zu jedem von den n oben gegebenen Rändern gibt es den „gegenüber stehenden" Rand):

$$R_{n+i} \coloneqq Spat\big(b(\Delta x_1\, e_1 + \Delta x_i\, e_i), \ldots, b(\Delta x_\iota\, \widehat{e_\iota + \Delta x_\iota}\, e_\iota), \ldots, b(\Delta x_n\, e_n + \Delta x_i\, e_i)\big),$$

wobei $b(z) \coloneqq d(h^{-1}(h(p)))(z)$. Wegen der Linearität von b ist dieser Ausdruck gleich

$$R_{n+i} \coloneqq Spat(\Delta x_p^1 \cdot \partial_1 + \Delta x_p^i \cdot \partial_i, \ldots, \Delta x_p^\iota \cdot \widehat{\partial_\iota + \Delta} x_p^\iota \cdot \partial_\iota, \ldots, \Delta x_p^n \cdot \partial_n + \Delta x_p^i \cdot \partial_i).$$

Einem sehr klein gedachten n-Spat s_p werden also kanonisch dessen $2n$ n-1-dimensionalen Ränder R_m zugeordnet. Dabei gilt selbstverständlich, dass $\partial s_p = \bigcup_{m=1}^{2n} R_m$ (disjunkte Vereinigung).

Ferner versehen wir jeden Rand mit einer Orientierung. Für den Rand $R_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$ suchen wir deshalb zuerst eine berandete Karte. Die Abbildung $dh(p)$ bildet s_p auf Q_p und R_i auf dem n-1-dimensionalen Quader $Spat\big(\Delta x_1\, e_1, \ldots, \widehat{\Delta x_\iota\, e_\iota}, \ldots, \Delta x_n\, e_n\big)$ ab. Und wenn c eine Umordnung der Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$ ist (ein Isomorphismus also), welche den i-ten Basisvektor mit dem ersten umtauscht, ist dann die gesuchte Karte $c \circ dh(p)$. Diese Karte bildet Q_p (injektiv und nicht surjektiv) auf $\mathbb{R}^n_-$ und R_i auf $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Um dem Rand R_i eine Orientierung zu verleihen, nehmen wir einen beliebigen Vektor v aus $\mathbb{R}^n_+ \coloneqq \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n_-$ und schauen dann, ob die Orientierung der Vektorenliste $\Big(\big(c \circ dh(p)\big)^{-1}(v), \langle \text{oben gegebene Basis von } R_i \rangle\Big)$ positiv oder negativ ist. Dabei ist $\big(c \circ dh(p)\big)^{-1}(v)$ ein nach aussen weisender Vektor. Wie immer die Antwort, ob negativ oder positiv, lautet, ist dann die Orientierung des gegenüber stehenden Randes R_{n+i} die umgekehrte.

Der Satz

Wir integrieren eine (n-1)-Form ω auf dem Rand des oben konstruierten Würfels W, deren „untere linke" Ecke der Punkt p ist. Wegen ihren entgegen gesetzten Orientierungen paaren wir bereits die Ränder R_i und R_{n+i} zusammen:

$$\int_{\partial W} \omega = \sum_{i=1}^n \Big[\Big(\int_{R_i} \omega\Big) - \Big(\int_{R_{n+i}} \omega\Big)\Big] \approx$$
$$\sum_{i=1}^n \Big[\Big(\omega_p\big(\partial_1(p), \ldots, \widehat{\partial_\iota(p)}, \ldots, \partial_n(p)\big)\, \Delta x_p^1 \cdot \ldots \cdot \widehat{\Delta x_p^\iota} \cdot \ldots \cdot \Delta x_p^n\Big) - \Big(\omega_p(z_1, \ldots, \widehat{z_\iota}, \ldots, z_n)\Big)\Big],$$

wobei $z_m \coloneqq \Delta x_p^m\, \partial_{m(p)} + \Delta x_p^i\, \partial_i(p)$.

Der letzte Ausdruck hat dieselbe Form wie z.B. $\omega_p(a + x, b + x, c + x, d + x)$, was gleich $\omega_p(a, b, c, d) + \omega_p(a, b, c, x) + \omega_p(a, b, x, d) + \omega_p(a, x, c, d) + \omega_p(x, b, c, d)$ ist.

Nehmen wir beispielsweise an, dass diese 4-Form stets 4 Vektoren unter den 5 Basisvektoren (a, x, b, c, d) (Vektoren in dieser Reihenfolge) nimmt, ist dann dieser Ausdruck gleich (wobei die Frage des Vorzeichens der Summanden im allgemeinen Fall eine recht mühsame Sache ist):

---

[38] Mit dieser Schreibweise gilt z.B.: $\{\widehat{v_1}, v_2, v_3\} = \{v_2, v_3\}$.

$\omega_p(\hat{a},x,b,c,d)+\omega_p(a,\hat{x},b,c,d)+\omega_p\big(a,x,\hat{b},c,d\big)-\omega_p(a,x,b,\hat{c},d)+\omega_p(a,x,b,c,\hat{d})$.

Das Integral $\int_{R_{n+i}}\omega$ kann glücklicherweise leichter ausgedrückt werden:
$\int_{R_{n+i}}\omega=\omega_{p+\Delta x_p^i\,\partial_i(p)}\big(\partial_1(p),\dots,\widehat{\partial_\iota(p)},\dots,\partial_n(p)\big)\,\Delta x_p^1\cdot\dots\cdot\widehat{\Delta x_p^\iota}\cdot\dots\cdot\Delta x_p^n$.

Ein Rand R_{n+i} (beachte den Index!) des Würfels mit der „unteren linken" Ecke p ist nämlich gleichwohl der Rand R_i des Würfels mit der „unteren linken" Ecke $p+\Delta x_p^i\,\partial_i(p)$. Wir können deshalb schreiben:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Delta x_p^1\cdot\dots\cdot\Delta x_p^n}\int_{\partial W}\omega\\&=\lim_{n\to\infty}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta x_p^i}\Big[\omega_p\big(\partial_1(p),\dots,\widehat{\partial_\iota(p)},\dots,\partial_n(p)\big)-\omega_{p+\Delta x_p^i\,\partial_i(p)}\big(\partial_1(p),\dots,\widehat{\partial_\iota(p)},\dots,\partial_n(p)\big)\Big]\\&=\sum\nolimits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x^i}\omega,\end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen $(-1)^{i+1}$ folgende Tatsache kompensiert[39]:
$\omega_p\big(\partial_1(p),\dots,\widehat{\partial_\iota(p)},\dots,\partial_n(p)\big)=-\omega_p\big(\partial_1(p),\dots,\widehat{\partial_{\iota+1}(p)},\dots,\partial_n(p)\big)$.

ω ist eine (n-1)-Form. Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x^i}\omega$ ist aber eine n-Form, das prüft man leicht. Es ist die Cartansche Ableitung $d\omega$ von ω.

Wir können also salopp schreiben:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta x_p^1\cdot\dots\cdot\Delta x_p^n}\int_{\partial W}\omega\ =d\omega\\\Leftrightarrow\ &\int_{\partial W}\omega=\Delta x_p^1\cdot\dots\cdot\Delta x_p^n\cdot d\omega\\\Leftrightarrow\ &\int_{\partial W}\omega=\int_W d\omega\,.\end{aligned}$$

□

Die Eigenschaft von $d\omega$, auf eine einzelne Masche so zu antworten, wie ω auf deren Rand (eine gute verdeutschte Formulierung vom Stokes'schen Satz), überträgt sich auch auf Aggregate von Maschen. Bei zwei benachbarten Maschen σ_1 und σ_2 mit einer gemeinsamen Seite heben sich in der

---

[39] Es sei daran erinnert, dass für eine alternierende k-Form ω in einem n-dimensionalen Vektorraum V mit Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ gilt: $\omega(e_1,\dots,e_k)$=sign$(\sigma)\cdot\omega\big(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)}\big)$, wobei σ eine auf $\{e_1,\dots,e_n\}$ definierte Permutation ist. Natürlich stimmt es nur, wenn für jedes mögliche k-Tupel $\big(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)}\big)$ von k unter n Basisvektoren, der Absolutbetrag von $\omega\big(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)}\big)$ denselben Wert hat. In unserem konkreten Fall gilt tatsächlich, dass $\big|\omega_p\big(\partial_1(p),\dots,\widehat{\partial_\iota(p)},\dots,\partial_n(p)\big)\big|=1$, für alle $i\in\{1,\dots,n\}$.

Zum Beispiel für $k=3$ und $n=4$: $\omega(e_1,\widehat{e_2},e_3,e_4)=-\omega(e_1,e_2,\widehat{e_3},e_4)$, weil die Signumfunktion der Permutation $\sigma\colon(1,3,4,[2])\mapsto(1,2,4,[3])$ negativ ist. In eckigen Klammern wird auch der Index des „überflüssigen" vierten Vektors (ω hat doch nur 3 Argumente) angegeben, weil diese Permutation auf alle Basisvektoren von V definiert ist.

Integralsumme $\int_{\sigma_1 \cup \sigma_2} d\omega = \int_{\partial\sigma_1} \omega + \int_{\partial\sigma_2} \omega$ die Beiträge der gemeinsamen Seite auf, da diese durch die beide Maschen entgegengesetzte Orientierungen erhält. Denkt man sich nun eine berandete kompakte orientierte Mannigfaltigkeit M als ein einziges Aggregat von Maschen, so sieht man, wie sich in der Summe die Beiträge der inneren Maschenseiten alle aufheben. Es muss also gelten (Stokes):

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Wir sind jetzt soweit, dass wir eine gute erste Vorstellung vom Stokes'schen Satz gewonnen haben. Da jedoch der Formalismus um das noch nicht eingeführte Dachprodukt sehr wichtig ist, sollen wir uns noch mit weiteren Begriffen und Ergebnissen vertraut machen.

Alles wird komplizierter!

Das Dachprodukt

Eine konzeptuelle Grundlage aus der linearen Algebra

Zwei Behauptungen werden hier gemacht: Die erste ermöglicht die Definition der r-te äusseren Potenz $\Lambda^r V$ von einem endlich dimensionalen Vektorraum V und die zweite ermöglicht die Definition des Dachprodukts als eine Art Multiplikation zwischen zwei äusseren Potenzen jeweils von einem selben Vektorraum V.

<u>Behauptung:</u> Sei V ein Vektorraum der Dimension n über dem Körper K und $1 \leq r \leq n$ eine natürliche Zahl. Es gibt einen Vektorraum endlicher Dimension über K, den wir mit $\Lambda^r V$ notieren und r-te äussere Potenz von V nennen, und eine r-lineare alternierende Abbildung

$$f: V^r := \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{r mal}} \to \Lambda^r V; \qquad f: (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_r \,,$$

welche die folgenden zwei Eigenschaften hat.

(1) Wenn U ein Vektorraum über K und $g: V^r \to U$ eine r-lineare alternierende Abbildung ist, dann gibt es genau eine Abbildung $g^*: \Lambda^r V \to U$, sodass für alle r-Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren von V gilt: $g(v_1, \dots, v_r) = g^* \circ f(v_1, \dots, v_r) = g^*(v_1 \wedge \dots \wedge v_r)$.

(2) Wenn $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V ist, bildet dann di Menge aller $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\}$, für $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ eine Basis von $\Lambda^r V$.

Die Eigenschaften (1) und (2) besagen zusammen, dass jede r-lineare alternierende Abbildung g von V^r nach U bis auf einem Isomorphismus die r-te äussere Potenz von V bestimmt, falls die Dimension des Bildes $g(V^r) \subset U$ gross genug ist.

<u>Beweis der Aussage</u> „Es gibt eine r-lineare alternierende Abbildung $f: (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_r$“: Hier müssen wir eine Funktion f konkret angeben und ihre r-Linearität und Alterniertheit prüfen. Wir geben uns eine Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von V. Natürlich reicht es, eine r-lineare und alternierende Funktion für die Basisvektoren zu definieren[40]. Damit haben wir aber noch keine Definition in Form von einer konkreten Formel. Wir geben uns deshalb folgende r Vektoren:

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \\ \vdots & & \vdots \\ v_r & = & a_{r1}e_1 + \cdots + a_{rn}e_n. \end{array}$$

[40] Wir würden einfach sagen: Sei f r-linear und so definiert, dass $f\left(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(r)}\right) = sign(\sigma)$, wenn σ eine Permutation ist und $f = 0$ sonst. Eine lineare Funktion braucht nämlich lediglich für Basisvektoren definiert zu sein.

Sei ferner A die $r \times n$-Matrix (a_{ij}), welche sich vom oben stehenden Gleichungssystem ablesen lässt. Wie sieht denn unsere multilineare alternierende Abbildung f aus?

Fall $r = n$: Bekanntlich gilt:

$$f(v_1, \dots, v_n)$$

$$= f(a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \dots, a_{n1}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n)$$

$$= \sum_{\sigma} f(a_{1\sigma(1)}e_1, \dots, a_{1\sigma(n)}e_n)$$

$$= \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{1\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma) \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

$$= \operatorname{Det}(A) f(e_1, \dots, e_n).$$

Allgemeinfall $r \leq n$:

$$f(v_1, \dots, v_r)$$

$$= f(a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \dots, a_{r1}e_1 + \cdots + a_{rn}e_r)$$

$$= \sum_{\sigma} f(a_{1\sigma(1)}e_1, \dots, a_{1\sigma(n)}e_n),$$

wobei diese Summe über alle mögliche Permutationen $\sigma: \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, n\}$ läuft. Diese Summe lässt sich in eine Doppelsumme zerlegen, indem alle Permutationen, welche $\{1, \dots, r\}$ auf eine gegebene r-elementigen Teilliste $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ abbildet, zusammen genommen werden. Wir schreiben dann:

$$f(v_1, \dots, v_r) = \sum_{E} \sum_{\sigma} f(a_{1i_{\sigma(1)}}e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, a_{1i_{\sigma(r)}}e_{i_{\sigma(r)}}),$$

wobei der Index E der ersten Summe über alle r-elementigen Teillisten $\{i_1, \dots, i_r\}$ von $\{1, \dots, n\}$ und der Index σ der zweiten Summe über alle Permutationen von einer solchen Teilliste $\{i_1, \dots, i_r\}$ läuft.

$$f(v_1, \dots, v_r) = \sum_{E} \sum_{\sigma} f\left(a_{1i_{\sigma(1)}}e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, a_{1i_{\sigma(r)}}e_{i_{\sigma(r)}}\right)$$

$$= \sum_{E} \sum_{\sigma} a_{1i_{\sigma(1)}} \cdot \cdots \cdot a_{1i_{\sigma(r)}} \cdot f(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(r)}})$$

$$= \sum_{E} \sum_{\sigma} a_{1i_{\sigma(1)}} \cdot \cdots \cdot a_{1i_{\sigma(r)}} \cdot \operatorname{sign}(\sigma) \cdot f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right)$$

$$= \sum_{E} \operatorname{Det}_E(A) \cdot f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right),$$

wobei $\operatorname{Det}_E(A)$ die Determinante einer aus der Matrix A extrahierten $r \times r$-Untermatrix ist.

Somit haben wir unsere Abbildung f explizit für beliebige r-Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ von Argumenten in V definiert. Dass f r-linear und alternierend ist, versteht sich jetzt von selbst.[41]

Zum Beweis der Eigenschaft (2): Das Bild der Abbildung $f: V^r \to \Lambda^r V$ wird von $f(B)$ aufgespannt, wobei B eine Basis von V^r ist. Die Liste aller r-Tupel $\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right)$, für $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ ist eine solche Basis. Die Anzahl ihrer Elemente ist n^r, da ein selber e_{i_j} bis zu r mal im r-Tupel vorkommen kann. Nun werden alle r-Tupel $\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right)$, bei denen ein Vektor e_{i_j} mehrmals vorkommt, wegen der Alterniertheit von f auf die Null abgebildet. Die Anzahl der r-Tupel , die von f nicht auf die Null abgebildet werden, ist also nicht n^r sondern $\frac{n!}{(n-r)!}$. Geben wir uns ferner eine Teilliste $\{i_1, \dots, i_r\}$ von $\{1, \dots, n\}$ und nehmen wir oBdA an, dass es $i_1 < \cdots < i_r$ gilt. Wegen der Alterniertheit von f sind für jede Permutation $\sigma: \{i_1, \dots, i_r\} \to \{i_1, \dots, i_r\}$ das Bild von $\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right)$ und dasjenige von $\left(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(r)}}\right)$ kollinear, weil $f\left(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(r)}}\right) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right)$. Da es $r!$ solche Permutationen gibt, ist $\binom{n}{r}$ die Anzahl linear unabhängiger Elemente von $f(B)$. Eine Basis von $f(V^r) = \Lambda^r V$ zählt also so viele Elemente. Jeder Basisvektor entspricht eins zu eins einer möglichen Teilliste $\left\{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right\}$ mit $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$.

Wir notieren[42] deshalb die Basiselemente von $\Lambda^r V$ mit t_E, wobei E jeweils für eine Menge $\{i_1, \dots, i_r\}$ mit $i_1 < \cdots < i_r$ steht, von denen es insgesamt $\binom{n}{r}$ gibt.

Zum Beweis der Eigenschaft (1): Eine lineare Abbildung wird eindeutig durch die Werte definiert, die sie bei einer Basis ihrer Ausgangsmenge annimmt. Wir können also problemlos eine lineare Abbildung g^* folgenderweise definieren:

$$g^*(t_E) = g\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\right) \qquad \square$$

Behauptung: Für je zwei natürliche Zahlen r und s ≥ 1 gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$\Lambda^r V \times \Lambda^s V \to \Lambda^{r+s} V; \qquad \big((v_1 \wedge \cdots \wedge v_r), (w_1 \wedge \cdots \wedge w_s)\big) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s,$$

wobei $v_1, \dots, v_r$ und $w_1, \dots, w_s$ alle Vektoren von V sind. Der Beweis soll vom Leser gemacht werden.

Das Dachprodukt für Differentialformen

Das Dachprodukt (auch äusseres Produkt) $a \wedge b$ zweier Elemente jeweils einer äusseren Potenz von V ist bei der Bildung der sogenannten äusseren Algebra ΛV von V ihre Multiplikation, welche antikommutativ ist. Diese Algebra ist eine *graduierte* Algebra, weil sie sich als *direkte Summe* $\Lambda V \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k V$ darstellen lässt.

[41] Wenn f nur auf die Basisvektoren definiert wird (siehe vorige Fussnote zum Thema), haben wir mehr mit einer Wunschliste von erwarteten Eigenschaften, die f haben muss, als mit einer eigentlichen – d.h. wohldefinierten – Definition zu tun. Und erst die konkrete Formel von f macht es klar, ob f tatsächlich r-linear und alternierend ist.

[42] Ein Basisvektor von $\Lambda^r V$ kann nicht mit $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$ notiert werden, weil alle $e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{\sigma(r)}}$, für $\sigma: \{i_1, \dots, i_r\} \to \{i_1, \dots, i_r\}$, einem selben Basisvektor entsprechen. Es ist wohl die Menge $\{i_1, \dots, i_r\}$, die einen Basisvektor von $\Lambda^r V$ eindeutig bestimmt. Deshalb die Notation t_E.

Zurück zur Vektoranalysis: Wir wählen einen $p \in M$ fest und betrachten $\Lambda^k V$ als der Vektorraum $Alt^k T_p M$ aller alternierenden k-Formen auf $T_p M$, wobei $T_p M$ die Dimension n hat. Dann[43] ist $V = \Lambda^1 V = Alt^1 T_p M$.

Elemente von $Alt^k T_p M$ heissen k-Vektoren. Wir werden zeigen, dass sich diese k-Vektoren als $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ mit $v_i \in Alt^1 T_p M$ schreiben lassen. Dabei ist $Alt^1 T_p M$ der Dualraum $(T_p M)^*$ von $T_p M \cong \mathbb{R}^n$, wenn M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Die Eigenschaften des Dachproduktes sind:

- Das Dachprodukt ist bilinear.
- Das Dachprodukt ist assoziativ.
- Das Dachprodukt ist antikommutativ,
  d.h. für $\omega \in Alt^r V$ und $\eta \in Alt^s V$ gilt $\eta \wedge \omega = (-1)^{r \cdot s} \omega \wedge \eta$.
- Die 0-Form $1 \in Alt^0 V = \mathbb{R}$ ist das Eins-Element.

<u>Behauptung:</u> Sei $k \geq 1$. Bezeichnet $e_1, \cdots, e_k$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^k$ und $\delta^1, \cdots, \delta^k$ die dazu duale Basis von $(\mathbb{R}^k)^* = Alt^1 \mathbb{R}^k$, d.h. mit $\delta^i(e_j) = \delta^i_j$, so gilt[44]

$$\delta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \delta^{\mu_k}\left(e_{\nu_1}, \cdots, e_{\nu_k}\right) = \begin{cases} \text{sign}(\tau) & \text{im Fall A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei der Fall A ist, wenn $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ durch eine Permutation τ aus $(\nu_1, \dots, \nu_k)$ hervorgeht. Es ist z.B. bei $\delta^1 \wedge \delta^3(e_2, e_3) = 0$ nicht der Fall. Die Aussage folgt aus der Antikommutativität des Dachproduktes. Im Fall A ist es klar. Ansonsten gibt es ein i so, dass für alle j, $\mu_i \neq \nu_j$. Für diesen i und für jede lineare Kombination v von $e_{\nu_1}, \cdots, e_{\nu_k}$ gilt dann $\delta^{\mu_i}(v) = 0$.

<u>Behauptung:</u> Sind $\omega_{\mu_1 \cdot\cdot \mu_k} := \omega(e_{\mu_1}, \cdots, e_{\mu_k})$ die komponenten der Form $\omega \in Alt^k \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Basis $e_1, \cdots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ und bezeichnet $\delta^1, \cdots, \delta^n$ die dazu duale Basis, so gilt

$$\omega = \sum_{\mu_1 < \cdot\cdot < \mu_k} \omega_{\mu_1 \cdot\cdot \mu_k} \delta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \delta^{\mu_k}.$$

Das folgt unmittelbar aus der früheren Aussage. Soweit haben wir zwei Sachen erreicht: Zum einen lässt sich jede alternierende k-Form als Summe von k-Vektoren – jedes Vektor aus $Alt^1 T_p M$ stammend – zerlegen, des Weiteren haben wir das Dachprodukt für alle alternierenden k-Formen definiert. Folgende Definition wird dann überflüssig, wird trotzdem gegeben.

<u>Definition:</u> Sei V ein reeller Vektorraum, sei $\omega \in Alt^r V$ und $\eta \in Alt^s V$. Dann heisst die durch

$$\omega \wedge \eta(v_1, \dots, v_{r+s}) := \frac{1}{r!\, s!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{r+s}} \text{sign}(\tau) \cdot \omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}) \cdot \eta(v_{\tau(r+1)}, \dots, v_{\tau(r+s)})$$

---

[43] Nein, $V = T_p M$ können wir nicht setzen! Irreführend ist hier die Schreibweise: Bei den Ausdrücken $\Lambda^k V$ und $Alt^k V$ kann es sich nicht um denselben V handeln: d.h. man findet für $k = 1,2, \dots$ keinen V mit $\Lambda^k V = Alt^k V$. Für $k = 1$ sieht man das gut: $V = \Lambda^1 V$ und $V \neq Alt^1 V$.

[44] δ^i_j ist das Kronecker-Symbol. Und der Ausdruck $\delta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \delta^{\mu_k}\left(e_{\nu_1}, \cdots, e_{\nu_k}\right)$ ist selbstverständlich als $h\left(e_{\nu_1}, \cdots, e_{\nu_k}\right)$, für $h := \delta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \delta^{\mu_k}$ zu lesen.

definierte alternierende $(r+s)$-Form $\omega \wedge \eta \in Alt^{r+s}V$ das Dachprodukt von ω und η.

Versuchen wir, diese Formel herzuleiten! Betrachten wir naiv den Fall $\omega, \eta \in Alt^2 V$. Wir sehen zuerst, dass z.B. $\alpha(v_1, v_2, v_3) \coloneqq \omega(v_1, v_2) \cdot \eta(v_2, v_3)$ in v_2 nicht linear ist, weil v_2 mehrmals vorkommt. Andererseits muss zwingend jeder v_i überhaupt vorkommen. Wenn aber jeder v_i genau einmal vorkommen muss, muss der Grad der neuen Form gleich der Summe des Grades von ω mit dem Grad von η sein. So kommen wir schon auf unseren ersten Kandidaten $\alpha\left(v_1, \cdots, v_{\tau(r+s)}\right) \coloneqq \omega\left(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(r)}\right) \cdot \eta\left(v_{\tau(r+1)}, \ldots, v_{\tau(r+s)}\right)$, für τ eine Permutation von $\{1, \cdots, r+s\}$.

Zum Beispiel $\alpha(v_1, v_2, v_3) \coloneqq \omega(v_1, v_2) \cdot \eta(v_3)$. Wir haben also $\omega \in Alt^r V$ und $\eta \in Alt^s V$ mit $r = 2$ und $s = 1$ genommen. Wir wissen bereits, dass dieser Kandidat multilinear ist. Seine Antisymetrie geht aber verloren, sobald ein Argument aus ω gleich ist, wie ein Argument aus η [45]. Präziser gesagt: sobald es zwei Indizien $i \neq j \in \{1, \cdots, r+s\}$ so gibt, dass einerseits $v_i = v_j$ und andererseits sich i und j nicht in derselben Partition von $\{\tau(1), \ldots, \tau(r)\} \cup \{\tau(r+1), \ldots, \tau(r+s)\}$ befinden.

Bei unserem obigen Beispiel gilt aber leider $\alpha(v_3, v_2, v_3) \neq 0$. Die Permutation, mit der unser α definiert wird, ist die Identität. Nimmt man aber folgende Permutation: $\tau\colon [1,2,3] \mapsto [3,2,1]$, definiert man einen neuen Produkt $\beta(v_1, v_2, v_3) \coloneqq \omega(v_3, v_2) \cdot \eta(v_1)$. Es gilt $\alpha(v_3, v_2, v_3) = \beta(v_3, v_2, v_3)$. Man kann also β gebrauchen, um unseren Kandidaten α zu retten. Unser neuer Kandidat ist also $\gamma(v_1, v_2, v_3) \coloneqq (\alpha - \beta)\,(v_1, v_2, v_3)$. Wir freuen uns, dass jetzt $\gamma(v_3, v_2, v_3) = 0$. Usw.[46] Man kommt selbst auf die oben stehende grosse Summe.

Beide Definitionen übereinstimmen: dies braucht man nur für die $(r+s)$-Tupeln $\left\{\left(e_{\mu_1}, \ldots, e_{\mu_{r+s}}\right);\ \mu_1 < \mu_2 <\cdot\cdot< \mu_{r+s}\right\}$ zu prüfen.

Behauptung: Das Dachprodukt ist mit linearen Abbildungen verträglich:

$$f^*\omega \wedge f^*\eta = f^*(\omega \wedge \eta).$$

Definition: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir definieren das Dachprodukt

$$\wedge\colon\ \Omega^r M \times \Omega^s M \longrightarrow \Omega^{r+s} M$$

von Differentialformen auf M punktweise, d.h. durch $(\omega \wedge \eta)_p \coloneqq\ \omega_p \wedge \eta_p$ für jeden $p \in M$.

Wir merken: Anstatt den k-ten Vektor der dualen Basis δ^k von $T_p M$ betrachten wir ab jetzt dx^k.

Die Cartansche Ableitung (der definierende Satz)

Behauptung: Ist M eine Mannigfaltigkeit, so gibt es genau eine Möglichkeit, eine Sequenz linearer Abbildungen

[45] Wenn hingegen zwei Argumente gleich sind und zugleich Argumente aus derselben Form sind, überträgt sich die Antisymetrie dieser Form auf den Kandidaten.

[46] In der Menge aller dieser Terme (jeder einer Permutation entsprechend) findet man zu jedem $\alpha(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots)$ den entsprechenden Term $\beta(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) \coloneqq \alpha(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots)$. Beide zugrunde liegende Permutationen unterscheiden sich bei ihrem Signum, sodass im Falle $v_i = v_j$ ihre signierte Summe null wird. Natürlich muss die signierte Summe $\alpha - \beta$ nicht gebildet werden, wenn sich i und j in derselben Partition befinden (bzgl. der α zugrunde liegenden Permutation τ), aber es stört auch nicht.

$$0 \to \Omega^0 M \xrightarrow{d} \Omega^1 M \xrightarrow{d} \Omega^2 M \xrightarrow{d} \cdots$$

so einzuführen, dass folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für $f \in \Omega^0 M$ hat $df \in \Omega^1 M$ die übliche Bedeutung als das Differential von f.
(b) Komplex-Eigenschaft: $d \circ d = 0$.
(c) Produktregel: $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta \qquad$ für $\omega \in \Omega^r M$.

Beweisidee: Wir beschränken uns zuerst auf dem Kartengebiet einer Karte (U, h). So lässt sich jedes $\omega \in \Omega^k M$ als $\omega = \sum_{\mu_1 <\cdot\cdot< \mu_k} \omega_{\mu_1 \cdot\cdot \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k}$ schreiben. Wir suchen einen Kandidat für einen Ableitungsoperator, der die Bedingungen (a), (b), (c) genügt, und nennen wir ihn d_U zur Unterscheidung mit dem üblichen Differentialoperator erwähnt in (a). Dann machen wir einen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis. Und so viel zum Kandidaten:

$$d_U \omega := \sum_{\mu_1 <\cdot\cdot< \mu_k} \omega_{\mu_1 \cdot\cdot \mu_k} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k} .$$

Behauptung (Beweis in: Jänich, *Vektoranalysis*, S. 145): Die Cartansche Ableitung ist mit differenzierbaren Abbildungen verträglich, d.h. ist $f \colon M \to N$ eine solche Abbildung, so gilt

$$f^* d\omega = d(f^* \omega).$$

Für 0-Formen, also differenzierbare reellwertige Funktionen, ist $f^* d\omega = d(f^* \omega)$ nur eine andere Schreibweise der Kettenregel, denn $f^* d\omega = \omega \circ f$ und $(f^* d\omega)_p := d\omega_{f(p)} \circ df_p$.

Beweis des Stokes'schen Satzes

Den Satz von Stokes können wir dann sauber mit diesem Formalismus beweisen. Siehe Jänich, *Vektoranalysis*, S. 152. Den Beweis führen wir zuerst für den einfachen Fall, wenn M ein n-dimensionaler berandeter Kartengebiet ist, wenn also $M = \mathbb{R}^n_-$. Die Schwierigkeit dabei ist zu verstehen, warum auf folgende (n-1)-Form differenziert werden muss:

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{n} f_\mu \, dx^1 \wedge \cdots \hat{\mu} \cdots dx^n,$$

wobei die Notation $\hat{\mu}$ bedeutet, dass der Index μ bzw. der zum Index μ gehörige Element ausgelassen werden soll und wobei $f_\mu := \omega_{1 \cdot\cdot \hat{\mu} \cdot\cdot n}$. Wir bestimmen dann beide im Stokes'schen Satz vorkommenden Integranden $d\omega \in \Omega^n \mathbb{R}^n_-$ und $i^* \omega \in \Omega^{n-1} \mathbb{R}^{n-1}_-$, wobei $i \colon \partial \mathbb{R}^n_- := 0 \times \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusion des Randes in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet:

Der erste Integrand:

$$d\omega = \sum_{\mu=1}^{n} df_\mu \wedge dx^1 \wedge \cdots \hat{\mu} \cdots dx^n = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \partial_\nu f_\mu dx^\nu \right) \wedge dx^1 \wedge \cdots \hat{\mu} \cdots dx^n.$$

Jeder Summand der Doppelsumme ist Null, wenn $\nu \neq \mu$. Also gilt

$$d\omega = \sum_{\mu=1}^{n} \partial_\mu f_\mu \, dx^\mu \wedge dx^1 \wedge \cdots \hat{\mu} \cdots dx^n = \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} \partial_\mu f_\mu \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Der zweite Integrand:

$$i^*\omega = \sum_{\mu=1}^{n} i^* f_\mu \cdot i^* dx^1 \wedge \cdots \hat{\mu} \cdots i^* dx^n = i^* f_1 \cdot dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega^{n-1}\mathbb{R}^{n-1}_{-}.$$

Nämlich $i^* dx^1 = 0$ und $i^* dx^\mu = dx^\mu$ für $\mu \geq 2$.

Soviel zu den Integranden und nun zur Integration selbst. Es wird über die herunter geholten Integranden integriert:

$$\int_{\mathbb{R}^n_-} d\omega = \sum_{\mu=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_-} (-1)^{\mu-1} \partial_\mu f_\mu \, dx^1 \dots dx^n \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial \mathbb{R}^n_-} \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \cdots, x_n) \cdot dx^2 \cdots dx^n.$$

Nach weiterer Berechnung stellen wir fest, dass tatsächlich $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ gilt. Somit sind wir mit dem ersten Schritt des Beweises fertig. Der nächste ist der Beweis des Satzes für einen Kartengebiet.

Sei (U, h) eine Karte von M. Nach der Transformationsformel für die Integration auf Mannigfaltigkeiten haben wir:

$$\int_M d\omega = \int_M d\omega = \int_{h(U)} (h^{-1})^* d\omega \int_{h(U)} d((h^{-1})^* \omega)$$

Man kann $(h^{-1})^*\omega$ durch Null ausserhalb $h(U)$ zu einer Form $\alpha \in \Omega^{n-1}\mathbb{R}^n_-$ fort, was wegen der Kompaktheit des Trägers $\mathrm{Tr}\ (h^{-1})^*\omega = h(\mathrm{Tr}\ \omega)$ möglich ist. Dann ist also

$$\int_M d\omega = \int_{h(U)} d((h^{-1})^*\omega) = \int_{\mathbb{R}^n_-} d\alpha = \int_{\partial \mathbb{R}^n_-} \alpha = \int_{h(\partial U)} (h^{-1})^*\omega = \int_{\partial U} \omega = \int_{\partial M} \omega,$$

was zu zeigen war. □

Den dritten Schritt des Beweises ist für den Fall, wenn M einem einzigen Kartengebiet nicht gleich ist. Es ist der allgemeine Fall. Siehe dazu: Jänich, *Vektoranalysis*, S. 156.

Die Vektoranalysis der Physiker

Die klassische Vektoranalysis des 19. Jahrhunderts handelt, wie man im Nachhinein leicht sagen kann, von der Cartanschen Ableitung und dem Satz von Stokes, allerdings in einer Notation, in der diese Gegenstände nicht auf dem ersten Blick gleich wiederzuerkennen sind.

Für eine offene Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^3$ bezeichne $\mathcal{V}(X)$ den Vektorraum der differenzierbaren Vektorfelder und $\mathcal{C}^\infty(X)$ den der differenzierbaren Funktionen auf X.

Die vektorwertigen 1- bzw. 2-Formen

$$d\vec{s} := \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d\vec{F} := \begin{pmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^3 \wedge dx^1 \\ dx^1 \wedge dx^2 \end{pmatrix}$$

sollen das **vektorielle Linienelement** $d\vec{s} \in \Omega^1(X, \mathbb{R}^3)$ und das **vektorielle Flächenelement** $d\vec{F} \in \Omega^2(X, \mathbb{R}^3)$ und die gewöhnliche reellwertige 3-Form (kein Vektor also)

$$dV := dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega^3(X)$$

soll das **Volumenelement** von X heissen.

Übersetzungsisomorphismen sind durch

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(X) &\xrightarrow{\cong} \Omega^1(X), & \vec{a} &\mapsto \vec{a} \cdot d\vec{s} \\ \mathcal{V}(X) &\xrightarrow{\cong} \Omega^2(X), & \vec{b} &\mapsto \vec{b} \cdot d\vec{F} \\ \mathcal{C}^\infty(X) &\xrightarrow{\cong} \Omega^3(X), & c &\mapsto c \cdot dV \end{aligned}$$

gegeben. Diese Konvention kann als ein Wörterbuch für die Übersetzung von klassischer Vektoranalysis in den Cartanschen Kalkül und umgekehrt verstanden werden (Die Definition der Operatoren div und rot findet man übrigens im Anhang):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(X) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(X) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(X) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(X) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{V}(X) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathcal{V}(X) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{C}^\infty(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dieses Diagramm ist kommutativ. Aus dem folgt, dass für alle Funktionen f und alle Vektorfelder $\vec{a}$ gilt: $\text{rot grad} f = 0$ und : $\text{div rot} f = 0$. Der **Gauss'scher Integralsatz** folgt ebenfalls:

$$\int_{M^3} \text{div}\,\vec{b}\ dV = \int_{\partial M^3} \vec{b}\ d\vec{F}\,,$$

sowie der (ursprüngliche, d.h. im Sinne der Physiker) **Satz von Stokes**:

$$\int_{M^2} \text{rot}\,\vec{a}\ d\vec{F} = \int_{\partial M^2} \vec{a}\ d\vec{s}.$$

Weiter führende Stichwörter sind:

- Das Poincaré-Lemma
- der de Rham-Komplex und das de Rham-Theorem (Oberbegriff: Differentialtopologie)
- die 4 Maxwellschen Gesetze der Elektrodynamik (und das Theorem von Ostrogradski).

Anhang (aus Wikipedia)

Koordinatenfreie Darstellung der Divergenz

Für die Interpretation der Divergenz als „Quellendichte“ ist die folgende koordinatenfreie Definition wichtig (hier für den Fall *n*=3)

$$\operatorname{div}\,\vec{F} = \lim_{|\Delta V|\to 0}\left(\frac{1}{|\Delta V|}\int_{\partial(\Delta V)} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS\right).$$

Dabei ist ΔV ein beliebiges Volumen, zum Beispiel eine Kugel oder ein Parallelepiped; $|\Delta V|$ ist sein Inhalt. Es wird über den Rand $\partial(\Delta V)$ dieses Volumenelements integriert, $\vec{n}$ ist die nach außen gerichtete Normale und dS das zugehörige Flächenelement.

Für *n* > 3 kann diese Aussage leicht verallgemeinert werden, indem man *n*-dimensionale Volumina und ihre (*n*-1)-dimensionalen Randflächen betrachtet. Bei Spezialisierung auf infinitesimale Würfel oder Quader erhält man die bekannte Darstellung in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{div}\,\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Herleitung der kartesischen Darstellung

Zur Herleitung der kartesischen Darstellung der Divergenz aus der koordinatenfreien Darstellung betrachte einen infinitesimalen Würfel $[x_1, x_1+\Delta x_1], \ldots, [x_n, x_n+\Delta x_n]$.

$$\begin{aligned}\int_{\partial(\Delta V)} \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = {} & \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n}\left[\int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2}\cdots\int_{x_n}^{x_n+\Delta x_n}\Big(\vec{F}(x_1+\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - \vec{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big)\cdot\hat{e}_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n\right] + \ldots \\ & + \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n}\left[\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1}\cdots\int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+\Delta x_{n-1}}\Big(\vec{F}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n+\Delta x_n) - \vec{F}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\Big)\cdot\hat{e}_n\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\right]\end{aligned}$$

Nun wendet man den Mittelwertsatz der Integralrechnung an, wobei die gestrichenen Größen x'_i aus dem Intervall $[x_i, x_i+\Delta x_i]$ sind.

$$\begin{aligned}\int_{\partial(\Delta V)} \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = {} & \frac{\Big(\vec{F}(x_1+\Delta x_1, x'_2, \ldots, x'_n) - \vec{F}(x_1, x'_2, \ldots, x'_n)\Big)\cdot\hat{e}_1}{\Delta x_1}\left[\underbrace{\frac{1}{\Delta x_2}\int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2}\mathrm{d}x_2}_{=1}\cdots\underbrace{\frac{1}{\Delta x_n}\int_{x_n}^{x_n+\Delta x_n}\mathrm{d}x_n}_{=1}\right] + \ldots \\ & + \frac{\Big(\vec{F}(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n+\Delta x_n) - \vec{F}(x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n)\Big)\cdot\hat{e}_n}{\Delta x_n}\left[\frac{1}{\Delta x_1}\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1}\mathrm{d}x_1\cdots\frac{1}{\Delta x_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+\Delta x_{n-1}}\mathrm{d}x_{n-1}\right]\end{aligned}$$

Somit bleibt nur die Summe der Differenzenquotienten übrig

$$\frac{1}{|\Delta V|}\int\limits_{\partial(\Delta V)} \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{F_1(x_1+\Delta x_1,x_2',\dots,x_n')-F_1(x_1,x_2',\dots,x_n')}{\Delta x_1}+\dots+\frac{F_n(x_1',\dots,x_{n-1}',x_n+\Delta x_n)-F_n(x_1',\dots,x_{n-1}',x_n)}{\Delta x_n},$$

die im Grenzübergang $\Delta x_i \to 0$ zu partiellen Ableitungen werden:

$$\operatorname{div}\,\vec{F}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n)+\dots+\frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Relation with the exterior derivative

One can express the divergence as a particular case of the exterior derivative, which takes a 2-form to a 3-form in $\mathbf{R}^3$. Define the current two form

$$j = F_1\;dy\wedge dz + F_2\;dz\wedge dx + F_3\;dx\wedge dy.$$

It measures the amount of "stuff" flowing through a surface per unit time in a "stuff fluid" of density $\rho = 1dx\wedge dy\wedge dz$ moving with local velocity $\mathbf{F}$. Its exterior derivative dj is then given by

$$dj = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz = (\nabla\cdot\mathbf{F})\rho$$

Koordinatenunabhängige Definition der Rotation

Zu dem Integralsatz von Stokes passt die koordinatenunabhängige Definition der Rotation als infinitesimale Flächendichte der Zirkulation (alias „Wirbeldichte“):

$$\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\;\mathbf{A}\;:=\;\lim_{\Delta\mathcal{F}\to 0}\left(\frac{\oint_{\partial\Delta\mathcal{F}}\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}}{\Delta\mathcal{F}}\right).$$

Dabei ist $\Delta\mathcal{F}$ eine infinitesimale Fläche senkrecht zu $\mathbf{n}$.

Aus dieser Formel ergibt sich unter anderem, dass allgemein für *krummlinige orthogonale Koordinaten* (z. B. für sphärische oder zylindrische Polarkoordinaten, elliptische oder parabolische Koordinaten usw.) die folgende nützliche Beziehung gilt:

$$(\mathrm{rot}\;\mathbf{A})_3 = \frac{1}{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2}\cdot\left(\frac{\partial(\mathrm{a}_1\mathrm{A}_2)}{\partial\mathrm{u}_1}-\frac{\partial(\mathrm{a}_2\mathrm{A}_1)}{\partial\mathrm{u}_2}\right).$$

Dabei ist $\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3}\mathrm{a}_i\,du_i\mathbf{e}_i$, mit den orthonormierten Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ und den infinitesimalen Längen $\mathrm{d}l_i := \mathrm{a}_i\,\mathrm{d}u_i$. Die zwei anderen Komponenten der Rotation ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Indizes (3,1,2 → 1,2,3 → 2,3,1). Die Basisvektoren $\mathbf{e}_i$, die Längenparameter a_i und die Vektorkomponenten A_i können von allen drei u-Variablen abhängen.

Eine weitere Folgerung aus der koordinatenunabhängigen Definition ist, dass das Vektorfeld $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ sich bei räumlichen Drehungen in gleicher Weise dreht wie das Vektorfeld $\mathbf{A}$. In Formeln: $\mathrm{rot}\,(\mathbf{A}') = (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})'$, wobei der Strich die gedrehten Felder bezeichnet. Wegen der Gleichheit können die Klammern dann auch wieder weggelassen werden. Somit erzeugt die Rotation ein 3-dimensionales Vektorfeld im physikalischen Sinn. Zum Beweis betrachtet man eine Drehung $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ zusammen mit $\mathbf{n} \to \mathbf{n}'$ und $\mathrm{d}\mathbf{x} \to \mathrm{d}\mathbf{x}'$. Durch Einsetzen in das Integral findet man $\mathbf{n}' \cdot \mathrm{rot}\,(\mathbf{A}') = \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ weil das Skalarprodukt $\mathbf{dx} \cdot \mathbf{A}$ invariant unter Drehungen ist. Setzt man für $\mathbf{n}'$ die Einheitsvektoren eines gedrehten Koordinatensystems ein, so besagt die letzte Gleichung, dass die Koordinaten von $\mathrm{rot}\,(\mathbf{A}')$ in dem gedrehten System dieselben sind wie die Koordinaten von $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ im ursprünglichen System. Das entspricht dem behaupteten Verhalten des Rotationsfeldes.

Differential forms

In 3 dimensions, a differential 0-form is simply a function $f(x,y,z)$; a differential 1-form is the following expression: $a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz$; a differential 2-form is the formal sum: $a_{12}\,dx \wedge dy + a_{13}\,dx \wedge dz + a_{23}\,dy \wedge dz$; and a differential 3-form is defined by a single term: $a_{123}\,dx \wedge dy \wedge dz$. (Here the a-coefficients are real functions; the "wedge products", e.g. $dx \wedge dy$, can be interpreted as some kind of oriented area elements, $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, etc.) The exterior derivative of a *k*-form in $\mathbb{R}^3$ is defined as the $(k+1)$-form from above (and in $\mathbb{R}^n$ if, e.g.,

$$\omega^{(k)} = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k;\ \forall i_\nu \in 1,\ldots,n} a_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

, then the exterior derivative d leads to

$$d\omega^{(k)} = \sum_{j=1;\ i_1<\ldots<i_k}^{n} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

The exterior derivative of a 1-form is therefore a 2-form, and that of a 2-form is a 3-form. On the other hand, because of the interchangeability of mixed derivatives, e.g. because of

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x},$$

the twofold application of the exterior derivative leads to 0.

Thus, denoting the space of *k*-forms by $\Omega^k(\mathbf{R}^3)$ and the exterior derivative by *d* one gets a sequence:

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbf{R}^3) \xrightarrow{d} 0.$$

Here $\Omega^k(\mathbf{R}^n)$ is the space of sections of the exterior algebra $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)$ vector bundle over R^n, whose dimension is the binomial coefficient $\binom{n}{k}$; note that $\Omega^k(\mathbf{R}^3) = 0$ for $k > 3$ or $k < 0$. Writing only dimensions, one obtains a row of Pascal's triangle:

$$0 \to 1 \to 3 \to 3 \to 1 \to 0;$$

the 1-dimensional fibers correspond to functions, and the 3-dimensional fibers to vector fields, as described below. Note that modulo suitable identifications, the three nontrivial occurrences of the exterior derivative correspond to grad, curl, and div.

Differential forms and the differential can be defined on any Euclidean space, or indeed any manifold, without any notion of a Riemannian metric. On a Riemannian manifold, or more generally pseudo-Riemannian manifold, *k*-forms can be identified with k-vector fields (*k*-

forms are *k*-covector fields, and a pseudo-Riemannian metric gives an isomorphism between vectors and covectors), and on an *oriented* vector space with a nondegenerate form (an isomorphism between vectors and covectors), there is an isomorphism between *k*-vectors and $(n-k)$-vectors; in particular on (the tangent space of) an oriented pseudo-Riemannian manifold. Thus on an oriented pseudo-Riemannian manifold, one can interchange *k*-forms, *k*-vector fields, $(n-k)$-forms, and $(n-k)$-vector fields; this is known as Hodge duality. Concretely, on $\mathbf{R}^3$ this is given by:

- 1-forms and 1-vector fields: the 1-form $a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$ corresponds to the vector field (a_x, a_y, a_z).
- 1-forms and 2-forms: one replaces dx by the "dual" quantity $dy \wedge dz$ (i.e., omit *dx*), and likewise, taking care of orientation: dy corresponds to $dz \wedge dx = -dx \wedge dz$, and dz corresponds to $dx \wedge dy$. Thus the form $a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$ corresponds to the "dual form" $a_z\,dx \wedge dy + a_y\,dz \wedge dx + a_x\,dy \wedge dz$.

Thus, identifying 0-forms and 3-forms with functions, and 1-forms and 2-forms with vector fields:

- grad takes a function (0-form) to a vector field (1-form);
- curl takes a vector field (1-form) to a vector field (2-form);
- div takes a vector field (2-form) to a function (3-form)

On the other hand the fact that $d^2 = 0$ corresponds to the identities $\operatorname{curl}\operatorname{grad} f = 0$ and $\operatorname{div}\operatorname{curl} \vec{v} = 0$ for any function f or vector field $\vec{v}$.

Grad and div generalize to all oriented pseudo-Riemannian manifolds, with the same geometric interpretation, because the spaces of 0-forms and *n*-forms is always (fiberwise) 1-dimensional and can be identified with scalar functions, while the spaces of 1-forms and $(n-1)$-forms are always fiberwise *n*-dimensional and can be identified with vector fields.

Curl does not generalize in this way to 4 or more dimensions (or down to 2 or fewer dimensions); in 4 dimensions the dimensions are

$$0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 4 \to 1 \to 0;$$

so the curl of a 1-vector field (fiberwise 4-dimensional) is a *2-vector field*, which is fiberwise 6-dimensional (one has $\omega^{(2)} = \sum_{i<k=1,\ldots,4} a_{i,k} dx_i \wedge dx_k,$ which yields a sum of six independent terms), and cannot be identified with a 1-vector field. Nor can one meaningfully go from a 1-vector field to a 2-vector field to a 3-vector field ($4 \to 6 \to 4$), as taking the differential twice yields zero ($d^2 = 0$). Thus there is no curl function from vector fields to vector fields in other dimensions arising in this way.

However, one can define a curl of a vector field as a 2-vector field in general, as described below.

Quellen

Klaus Jänich, *Vektoranalysis*, 2. Auflage, 1993, Springer Verlag

Konrad Königsberger, *Analysis 2*, 1. Auflage, 1993, Springer Verlag

Beweis des Schrankensatzes in $\mathbb{R}^n$:
Sylvie Delabrière, *Cours de mathématiques 4, DEUG 2, analyse vectorielle*, 1996-97, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6. Seite 16

Beweis des Satzes vom konstanten Rang (Rangsatz):
Laurent Schwarz, *Analyse II. Calcul différentiel et équations différentielles*, 1992, Hermann

Serge Lang, *Algèbre linéaire 2*, 1976, InterEditions, Paris

Wikipedia:
http://de.wikipedia.org/wiki/Divergenz_(Mathematik), Stand Juli 2017
http://de.wikipedia.org/wiki/Rotation_(Mathematik), Stand Juli 2017
http://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics), Stand Juli 2017