Universität Basel

Prof. Dr. H. Harbrecht
M. Schmidlin

**Numerik der Differentialgleichungen** Herbstsemester 2020

# Übungsblatt 7.

Abgabe bis: **Montag, 02.11.2020, 12:00**

**Aufgabe 1** (Matrixtransformationen und -normen | 4 Punkte)**.**

(a) Betrachten Sie die Jordan-Normalform einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der Vielfachheiten $s_1, \dots, s_n$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{s_i \times s_i}.$$

Zeigen Sie, dass dann mit $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ gilt

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathbf{J}}_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{J}}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{s_i \times s_i}.$$

(b) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^k$ und bezeichne $\|\mathbf{A}\|$ die von $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm angewendet auf $\mathbf{A}$. Für $\mathbf{B} = \big[\mathbf{b}_1 | \cdots | \mathbf{b}_\ell\big] \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mit $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^k$ definieren wir die Matrixnorm $|||\mathbf{B}||| = \max_{i=1,\dots,\ell} \|\mathbf{b}_i\|$.

Zeigen Sie, dass dann die Submultiplikativität $|||\mathbf{AC}||| \leq \|\mathbf{A}\| |||\mathbf{C}|||$ für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ gilt.

**Aufgabe 2** (BDF-Verfahren | 4 Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie, dass $\lambda = 1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms eines konsistenten Mehrschrittverfahrens ist.

(b) Überprüfen Sie, dass das BDF-Verfahren der Ordnung 3 konvergent ist.

**Aufgabe 3** (explizite Mehrschrittverfahren | 4 Punkte)**.**

Wir betrachten das explizite Mehrschrittverfahren

$$\eta_{i+3} + \alpha(\eta_{i+2} - \eta_{i+1}) - \eta_i = \frac{h}{2}(3+\alpha)\big(f(x_{i+2}, \eta_{i+2}) + f(x_{i+1}, \eta_{i+1})\big),$$

wobei $\alpha$ eine reelle Zahl ist.

(a) Bestimmen Sie das maximale Intervall für $\alpha$ derart, dass die Verfahren nullstabil sind.

(b) Welche Konsistenzordnung besitzen die Verfahren in Abhängigkeit von $\alpha$? Für welches $\alpha$ wird diese maximal?

(c) Welche Konvergenzordnung ist für die Verfahren in Abhängigkeit von $\alpha$ zu erwarten?