

## Ein Verfahren höherer Konvergenzordnung zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieschen Differentialgleichung

E. Wagenführer

Received June 23, 1975

### A Method of High Order Convergence for Calculating the Characteristic Exponent of Mathieu's Differential Equation

*Summary.* The characteristic exponent  $\nu$  of Mathieu's differential equation

$$y''(x) + 4(\lambda + 2t \cos 2x)y(x) = 0$$

satisfies the relation

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) = \sin^2(\pi\sqrt{\lambda}) \det S^{(0)} \det C^{(0)},$$

if  $\lambda \neq n^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), and an analogous equation for  $\lambda \neq (n + \frac{1}{2})^2$ , where  $S^{(0)}$  and  $C^{(0)}$  are certain infinite tridiagonal matrices. We calculate the determinants of  $S^{(0)} = (\sigma_{n,m})_0^\infty$  and  $C^{(0)}$  using

$$\det S^{(0)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \beta_n) \det B, \quad B = \left( \frac{\sigma_{n,m}}{1 - \beta_n} \right)_0^\infty,$$

where the constants  $(1 - \beta_n)$  are chosen in such way that the infinite product may be evaluated by trigonometric functions and the finite determinants  $\det B_N$  converge like a series with terms  $O(N^{-12})$ .

Für den charakteristischen Exponenten  $\nu$  der Mathieschen Differentialgleichung

$$(1) \quad y''(x) + 4 \cdot (\lambda + 2t \cdot \cos 2x) \cdot y(x) = 0,$$

definiert durch die Existenz einer Lösung  $y(x) \neq 0$  von (1) mit

$$(2) \quad y(x + \pi) = e^{\pi i \nu} y(x),$$

gilt nach Hill [1], Whittaker-Watson [10] und Magnus [3] die Beziehung

$$(3) \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) = \sin^2(\pi\sqrt{\lambda}) \cdot \det S^{(0)} \cdot \det C^{(0)}, \quad \text{falls } \lambda \neq n^2,$$

bzw.

$$(4) \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) = \cos^2(\pi\sqrt{\lambda}) \cdot \det S^{(1)} \cdot \det C^{(1)}, \quad \text{falls } \lambda \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Dabei sind  $S^{(\mu)} = (\sigma_{n,m}^{(\mu)})_{n,m=0}^{\infty}$  und  $C^{(\mu)} = (\gamma_{n,m}^{(\mu)})_{n,m=0}^{\infty}$  einfach-unendliche Tridiagonal-matrizen mit

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_{0,0}^{(0)} &= 1, & \sigma_{0,1}^{(0)} &= 0; & \gamma_{0,0}^{(0)} &= 1, & \gamma_{0,1}^{(0)} &= \frac{2t}{\lambda}; \\ \sigma_{0,0}^{(1)} &= 1 - \frac{t}{\lambda - 0.25}; & \sigma_{0,1}^{(1)} &= \frac{t}{\lambda - 0.25}; \\ \gamma_{0,0}^{(1)} &= 1 + \frac{t}{\lambda - 0.25}; & \gamma_{0,1}^{(1)} &= \frac{t}{\lambda - 0.25}; \end{aligned}$$

sowie für  $\mu = 0, 1$  und  $n \geq 1$

$$(6) \quad \sigma_{n,m}^{(\mu)} = \gamma_{n,m}^{(\mu)} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m, \\ \frac{t}{\lambda - \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2} & \text{für } m = n - 1 \text{ und } m = n + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zur Berechnung von  $\nu$  wollen wir  $\mu = 0$  oder  $1$  so wählen, daß

$$(7) \quad \lambda \neq \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \lambda + 1 \neq \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 \quad \text{für alle natürlichen } n.$$

Man kann übrigens Bedingung (7) umgehen, indem man die betreffende Zeile der unendlichen Matrix — bzw. das unten erwähnte unendliche Produkt — ändert. Man vergleiche dazu [6] und die Ausführungen am Ende dieser Arbeit. Zur Abkürzung bezeichne

$$(8) \quad n' = n + \frac{\mu}{2} \quad \text{für jedes natürliche } n.$$

Schließlich wollen wir  $S^{(\mu)}$  und  $C^{(\mu)}$  kurz  $A = (\alpha_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}$  nennen, dazu sei  $A_N$  als  $(\alpha_{n,m})_{n,m=0}^N$  definiert. Die Determinanten der  $A_N$  berechnet man über dreigliedrige Rekursionen, wie sie Schäfke [6] notiert hat. Wegen der langsamen Konvergenz von  $\det A_N$  — es gilt nämlich

$$|\det A_N - \det A_{N-1}| = O(N^{-4}) -$$

bestimmt man  $\det A$  zweckmäßigerweise über die Determinante einer geeignet gewählten unendlichen Matrix

$$(9) \quad B = (\beta_{n,m})_{n,m=0}^{\infty} = \left( \frac{\alpha_{n,m}}{1 - \beta_n} \right)_{n,m=0}^{\infty}$$

als

$$\det A = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \beta_n) \cdot \det B,$$

wobei die Abschnittsdeterminanten von  $B$  ein besseres Konvergenzverhalten zeigen. Schäfke/Schmidt [8] und Mennicken [4] (letzterer allgemein für die endliche Hillsche Differentialgleichung) haben solche  $\beta_n$  angegeben mit

$$|\det B_N - \det B_{N-1}| = O(N^{-8}).$$

Dazu liefert Mennicken in [4] Methoden der Konvergenzverbesserung bei Determinanten von Bandmatrizen, die bei Mennicken/Wagenführer [5], 6. Kapitel,

verallgemeinert sind. Als Anwendung der letztgenannten Arbeit notieren wir

**Satz 1.** *Es sei für  $\mu = 0, 1$  und  $N = 0, 1, 2, \dots$*

$$(10) \quad 1 - \beta_N = 1 - \beta_N^{(\mu)} = \prod_{\kappa=1}^3 (1 - \beta_{N,\kappa}^{(\mu)})$$

mit

$$1 - \beta_{N,1}^{(\mu)} = 1 - \frac{t^2}{[(N' - 1)^2 - \lambda][N'^2 - \lambda]} \quad (N \geq 1);$$

$$1 - \beta_{N,\kappa}^{(\mu)} = 1 - (-1)^\kappa \frac{t^2}{[(N' - 1)^2 - \lambda][(N' - 1)^2 - (\lambda + 1)]} \quad (\kappa = 2, 3; N \geq 2 - \mu)$$

$$1 - \beta_{N,\kappa}^{(\mu)} = 1 \quad \text{sonst.}$$

*Es seien alle  $\beta_N \neq 1$ , sonst modifiziere man, wie unten vor Hilfssatz (22) angegeben. — Dann gilt für  $B$  gemäß (9):*

$$|\det B_N - \det B_{N-1}| = O(N^{-12}).$$

Zum Beweis wenden wir Satz 6.2 aus [5] mit  $l = 3, m = 6$  an; es ist zu zeigen, daß — in der Bezeichnung von [5] — für  $\gamma_N = \beta_N - z_N^{(3)T} D_N^{(3)-1} s_N^{(3)}$  ( $N \geq N_0$ ) gilt:  $|\gamma_N| = O(N^{-12})$ . Dazu betrachtet man die für  $N \geq 4$  gemeinsamen Teilmatrizen  $z_N^{(3)T}, D_N^{(3)}$  und  $s_N^{(3)}$  von  $S^{(\mu)}$  und  $C^{(\mu)}$ ; man berechnet

$$(11) \quad \det D_N^{(3)} = 1 - a_N$$

$$a_N = \frac{t^2}{[(N' - 3)^2 - \lambda][(N' - 2)^2 - \lambda]} + \frac{t^2}{[(N' - 1)^2 - \lambda][(N' - 2)^2 - \lambda]}.$$

Für genügend großes  $N$  ist  $D_N^{(3)}$  invertierbar; das Element an der Stelle (3, 3) in  $D_N^{(3)-1}$  ist

$$\frac{1}{\det D_N^{(3)}} \cdot \left( \det D_N^{(3)} + \frac{t^2}{[(N' - 1)^2 - \lambda][(N' - 2)^2 - \lambda]} \right)$$

$$= 1 + \frac{t^2}{[(N' - 1)^2 - \lambda][(N' - 2)^2 - \lambda]} \left( 1 + \frac{a_N}{1 - a_N} \right)$$

und daher

$$z_N^{(3)T} D_N^{(3)-1} s_N^{(3)} = \frac{t^2}{[N'^2 - \lambda][(N' - 1)^2 - \lambda]} + \frac{t^4}{[(N' - 2)^2 - \lambda][(N' - 1)^2 - \lambda]^2 [N'^2 - \lambda]}$$

$$\cdot \left( 1 + \frac{a_N}{1 - a_N} \right),$$

während nach (10)

$$(12) \quad \beta_N = \frac{t^2}{[N'^2 - \lambda][(N' - 1)^2 - \lambda]} + \frac{t^4}{[(N' - 1)^2 - \lambda]^2 [(N' - 1)^2 - (\lambda + 1)]^2}$$

$$- \frac{t^6}{[(N' - 1)^2 - \lambda]^3 [N'^2 - \lambda][(N' - 1)^2 - (\lambda + 1)]^2}.$$

Elementare Rechnung liefert

$$\frac{1}{[(N' - 1)^2 - (\lambda + 1)]^2} - \frac{1}{[(N' - 2)^2 - \lambda][N'^2 - \lambda]}$$

$$= \frac{-4\lambda}{[(N' - 1)^2 - (\lambda + 1)]^2 [(N' - 2)^2 - \lambda][N'^2 - \lambda]},$$

so daß schließlich

$$(13) \quad \gamma_N = \frac{t^4}{[(N'-1)^2 - \lambda]^2} \cdot \left\{ \frac{-4\lambda}{[(N'-1)^2 - (\lambda+1)]^2 [(N'-2)^2 - \lambda] [N'^2 - \lambda]} \right. \\ \left. - \frac{a_N(1-a_N)^{-1}}{[N'^2 - \lambda] [(N'-2)^2 - \lambda]} \right. \\ \left. - \frac{t^2}{[(N'-1)^2 - \lambda] [N'^2 - \lambda] [(N'-1)^2 - (\lambda+1)]^2} \right\},$$

woraus mit  $|a_N| = O(N^{-4})$  unmittelbar  $|\gamma_N| = O(N^{-12})$  folgt.

*Bestimmung des unendlichen Produkts*

Wir definieren

$$(14) \quad \begin{aligned} c_1 &= \lambda + \frac{1}{4}, & d_1 &= \sqrt{\lambda + t^2}, \\ c_2 = c_3 &= \lambda + \frac{1}{2}, & d_2 &= \sqrt{\frac{1}{4} + t^2}, \\ & & d_3 &= \sqrt{\frac{1}{4} - t^2}. \end{aligned}$$

Mit diesen Größen notieren wir

**Satz 2.**

$$\prod_{N=0}^{\infty} (1 - \beta_N^{(0)}) = - \frac{\lambda \cdot (\lambda + 1)}{\sin^4(\pi\sqrt{\lambda}) \sin^2(\pi\sqrt{\lambda+1})} \cdot \cos(\pi\sqrt{c_1 + d_1}) \cdot \cos(\pi\sqrt{c_1 - d_1}) \\ * \prod_{\kappa=2}^3 \frac{\sin(\pi\sqrt{c_\kappa + d_\kappa}) \cdot \sin(\pi\sqrt{c_\kappa - d_\kappa})}{\sqrt{c_\kappa + d_\kappa} \cdot \sqrt{c_\kappa - d_\kappa}}; \\ \prod_{N=0}^{\infty} (1 - \beta_N^{(1)}) = \frac{\frac{1}{4} - \lambda}{\cos^4(\pi\sqrt{\lambda}) \cos^2(\pi\sqrt{\lambda+1})} \cdot \frac{\sin(\pi\sqrt{c_1 + d_1}) \sin(\pi\sqrt{c_1 - d_1})}{\sqrt{c_1 + d_1} \cdot \sqrt{c_1 - d_1}} \\ * \prod_{\kappa=2}^3 [\cos(\pi\sqrt{c_\kappa + d_\kappa}) \cdot \cos(\pi\sqrt{c_\kappa - d_\kappa})].$$

*Beweis.* Laut Definition haben wir für  $N \geq 1$

$$1 - \beta_{N,1}^{(\mu)} = \frac{[(N'-1)^2 - \lambda] [N'^2 - \lambda] - t^2}{[(N'-1)^2 - \lambda] [N'^2 - \lambda]}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist quadratisches Polynom in  $N'(N'-1)$  das wir in Linearfaktoren zerlegen:

$$\begin{aligned} & [N'(N'-1)]^2 - \lambda [2N'^2 - 2N' + 1] + \lambda^2 - t^2 \\ &= [N'(N'-1)]^2 - 2\lambda N'(N'-1) + \lambda^2 - (\lambda + t^2) \\ &= [N'(N'-1) - \lambda - \sqrt{\lambda + t^2}] [N'(N'-1) - \lambda + \sqrt{\lambda + t^2}] \\ &= [(N' - \frac{1}{2})^2 - (c_1 + d_1)] [(N' - \frac{1}{2})^2 - (c_1 - d_1)]. \end{aligned}$$

Ähnlich zerlegen wir den Zähler von

$$\frac{1 - \beta_{N,2}^{(\mu)}}{1 - \beta_{N,3}^{(\mu)}} = \frac{[(N'-1)^2 - \lambda] [(N'-1)^2 - (\lambda+1)] \mp t^2}{[(N'-1)^2 - \lambda] [(N'-1)^2 - (\lambda+1)]} \quad (N \geq 2 - \mu)$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} & (N' - 1)^4 - 2(N' - 1)^2(\lambda + \frac{1}{2}) + (\lambda + \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2} \pm t^2) \\ & = [(N' - 1)^2 - (c_2 - d_{2(3)})] [(N' - 1)^2 - (c_2 + d_{2(3)})]. \end{aligned}$$

Es bezeichne nun

$$\begin{aligned} (15) \quad 1 - \tilde{\beta}_{N,1}^{(\mu)} &= \frac{(N' - \frac{1}{2})^4}{[(N' - 1)^2 - \lambda] [N'^2 - \lambda]} & (N \geq 1), \\ 1 - \tilde{\beta}_{N,2}^{(\mu)} &= 1 - \tilde{\beta}_{N,3}^{(\mu)} = \frac{(N' - 1)^4}{[(N' - 1)^2 - \lambda] [(N' - 1)^2 - (\lambda + 1)]} & (N \geq 2 - \mu). \end{aligned}$$

Dann wird

$$\begin{aligned} (16) \quad 1 - \beta_{N,1}^{(\mu)} &= (1 - \tilde{\beta}_{N,1}^{(\mu)}) \cdot \left(1 - \frac{c_1 + d_1}{(N' - \frac{1}{2})^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{c_1 - d_1}{(N' - \frac{1}{2})^2}\right) & (N \geq 1), \\ 1 - \beta_{N,\kappa}^{(\mu)} &= (1 - \tilde{\beta}_{N,\kappa}^{(\mu)}) \left(1 - \frac{c_\kappa + d_\kappa}{(N' - 1)^2}\right) \left(1 - \frac{c_\kappa - d_\kappa}{(N' - 1)^2}\right) & (N \geq 2 - \mu; \kappa = 2, 3). \end{aligned}$$

Zunächst bestimmen wir die Produkte der  $(1 - \tilde{\beta}_{N,\kappa}^{(\mu)})$ :

$$\begin{aligned} \prod_{N=1}^{\infty} (1 - \tilde{\beta}_{N,1}^{(0)}) &= -\frac{1}{4\lambda} \cdot \prod_{N=1}^{\infty} \frac{(N + \frac{1}{2})^2 (N - \frac{1}{2})^2}{(N^2 - \lambda)^2} \\ &= -\frac{1}{4\lambda} \left[ \prod_{N=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4N^2}\right) \right]^2 \left[ \prod_{N=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N^2}\right) \right]^{-2} \end{aligned}$$

und daher

$$(17) \quad \prod_{N=1}^{\infty} (1 - \tilde{\beta}_{N,1}^{(0)}) = -\frac{1}{\sin^2(\pi\sqrt{\lambda})}.$$

$$\begin{aligned} \prod_{N=1}^{\infty} (1 - \tilde{\beta}_{N,1}^{(1)}) &= \prod_{N=1}^{\infty} \left\{ \frac{(N - \frac{1}{2})^2}{[(N - \frac{1}{2})^2 - \lambda]} \cdot \frac{(N + \frac{1}{2})^2}{[(N + \frac{1}{2})^2 - \lambda]} \cdot \frac{N^4}{(N^2 - \frac{1}{4})^2} \right\} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{4} - \lambda\right) \cdot \left[ \prod_{N=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{(N - \frac{1}{2})^2}\right) \right]^{-2} \left[ \prod_{N=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4N^2}\right) \right]^{-2}, \end{aligned}$$

also

$$(18) \quad \prod_{N=1}^{\infty} (1 - \tilde{\beta}_{N,1}^{(1)}) = \frac{\pi^2(\frac{1}{4} - \lambda)}{\cos^2(\pi\sqrt{\lambda})}.$$

Aus der Beziehung

$$1 - \tilde{\beta}_{N,2}^{(\mu)} = \left[1 - \frac{\lambda}{(N' - 1)^2}\right]^{-1} \left[1 - \frac{\lambda + 1}{(N' - 1)^2}\right]^{-1}$$

liest man sofort ab, daß

$$\begin{aligned} (19) \quad \prod_{N=2}^{\infty} (1 - \tilde{\beta}_{N,2}^{(0)}) &= \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{\sin(\pi\sqrt{\lambda})} \cdot \frac{\pi\sqrt{\lambda+1}}{\sin(\pi\sqrt{\lambda+1})}, \\ \prod_{N=1}^{\infty} (1 - \tilde{\beta}_{N,2}^{(1)}) &= \frac{1}{\cos(\pi\sqrt{\lambda}) \cdot \cos(\pi\sqrt{\lambda+1})}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man schließlich

$$(20) \quad \begin{aligned} \mu_1 &= 1 - \mu; & \mu_2 &= \mu_3 = \mu; \\ I_{\kappa}^{(\mu)} &= \prod_{N=1}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{c_{\kappa} + d_{\kappa}}{\left(N - \frac{\mu_{\kappa}}{2}\right)^2} \right) \left( 1 - \frac{c_{\kappa} - d_{\kappa}}{\left(N - \frac{\mu_{\kappa}}{2}\right)^2} \right) \right] \quad (\mu = 0, 1; \kappa = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

so wird für  $\kappa = 1, 2, 3; \mu = 0, 1$ :

$$\prod_{N=1}^{\infty} (1 - \beta_{N, \kappa}^{(\mu)}) = I_{\kappa}^{(\mu)} \cdot \prod_{N=1}^{\infty} (1 - \tilde{\beta}_{N, \kappa}^{(\mu)})$$

und

$$(21) \quad I_{\kappa}^{(\mu)} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi \sqrt{c_{\kappa} + d_{\kappa}})}{\pi \sqrt{c_{\kappa} + d_{\kappa}}} \cdot \frac{\sin(\pi \sqrt{c_{\kappa} - d_{\kappa}})}{\pi \sqrt{c_{\kappa} - d_{\kappa}}}, & \text{falls } \mu_{\kappa} = 0, \\ \cos(\pi \sqrt{c_{\kappa} + d_{\kappa}}) \cos(\pi \sqrt{c_{\kappa} - d_{\kappa}}), & \text{falls } \mu_{\kappa} = 1. \end{cases}$$

Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

Es bleibt nachzutragen, daß bei reellen Parametern  $t$  und  $\lambda$  die Größen  $d_1$  und  $d_3$  rein imaginär werden können. Dann wählt man die komplexen Quadratwurzeln so, daß

$$\sqrt{c_{\kappa} \pm d_{\kappa}} = \alpha_{\kappa} \pm i \beta_{\kappa} \quad (\alpha_{\kappa}, \beta_{\kappa} \in \mathbb{R}),$$

und erhält damit zum Beispiel

$$\sin(\pi \sqrt{c_{\kappa} + d_{\kappa}}) \cdot \sin(\pi \sqrt{c_{\kappa} - d_{\kappa}}) = \sin^2(\pi \alpha_{\kappa}) + \text{Sinh}^2(\pi \beta_{\kappa});$$

es kann also durchgehend reell gerechnet werden.

Schließlich soll eine *Modifikation* von  $(1 - \beta_N)$  angegeben werden, wenn die Formeln (10) einen Wert nahe bei Null liefern würden. In dem Fall, daß  $|1 - \beta_{N_0}| < 10^{-s}$  ( $0 < s \in \mathbb{N}$ ), gehen bei Berechnung von  $(1 - \beta_{N_0})$  durch Auslöschung  $s$  Dezimalstellen verloren; mit einem entsprechend hohen relativen Fehler sind die Unterdeterminanten ab  $N_0$  behaftet. Zur Vermeidung dieser numerischen Instabilität untersucht man, welcher der in (16) angegebenen Faktoren von  $(1 - \beta_{N_0})$  klein wird, und ersetzt  $(1 - \beta_{N_0})$  durch das Produkt der restlichen Faktoren; — offensichtlich werden die Anteile  $(1 - \tilde{\beta}_{N_0, \kappa}^{(\mu)})$  betragsmäßig nicht zu klein. Daß die übrigen sechs in (16) erwähnten Faktoren für jeweils höchstens ein  $N_0$  klein werden, zeigt

(22) **Hilfssatz.** *Es sei  $b \in \mathbb{C}$  beliebig;  $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$  mit  $|b| \cdot \sigma < \frac{1}{2}$ . Dann existiert höchstens eine natürliche Zahl  $N_0$  und höchstens ein  $\tilde{N}_0$  mit*

$$\left| 1 - \frac{b}{N_0^2} \right| < \sigma \quad \text{bzw.} \quad \left| 1 - \frac{b}{(\tilde{N}_0 - \frac{1}{2})^2} \right| < \sigma.$$

Zum Beweis der ersten Aussage nehmen wir  $N_1 < N_0 \in \mathbb{N}$  an mit

$$1 - \frac{b}{N_0^2} = \varrho_0, \quad 1 - \frac{b}{N_1^2} = \varrho_1, \quad |\varrho_0|, |\varrho_1| < \sigma.$$

Dann hätte man nach geeigneter Umformung und Subtraktion

$$(23) \quad N_0^2 - N_1^2 = N_0^2 \varrho_0 - N_1^2 \varrho_1,$$

wobei

$$N_0^2 - N_1^2 \geq 3 \quad (\text{entsprechend } (\tilde{N}_0 - \frac{1}{2})^2 - (\tilde{N}_1 - \frac{1}{2})^2 \geq 2 \text{ für } \tilde{N}_1 < \tilde{N}_0)$$

andererseits wegen  $N_x^2 = \frac{b}{1 - \varrho_x}$  ( $x = 0, 1$ )

$$|N_0^2 \varrho_0 - N_1^2 \varrho_1| \leq |b| \frac{2\sigma}{1 - \sigma} \leq 4|b|\sigma < 2,$$

im Widerspruch zur Gleichung (23). Die zweite Aussage wird ebenso bewiesen.

Wir bestimmen nun eine Formel für

$$\prod_{\substack{N=1 \\ N \neq N_0}}^{\infty} \left( 1 - \frac{b}{\left(N - \frac{\mu}{2}\right)^2} \right) \quad (\mu = 0, 1), \quad \text{falls } \left| 1 - \frac{b}{\left(N_0 - \frac{\mu}{2}\right)^2} \right| < \sigma,$$

unter den Voraussetzungen von (22). Offensichtlich muß der Realteil von  $b$  positiv sein;  $\sqrt{b}$  sei die Quadratwurzel mit positivem Realteil, außerdem

$$\varepsilon_0 = \left(N_0 - \frac{\mu}{2}\right) - \sqrt{b}.$$

Dann rechnet man leicht nach, daß

$$(24) \quad \prod_{\substack{N=1 \\ N \neq N_0}}^{\infty} \left( 1 - \frac{b}{N^2} \right) = (-1)^{N_0+1} \frac{\sin(\pi \varepsilon_0)}{\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{N_0^2}{\sqrt{b}(N_0 + \sqrt{b})} \quad (\mu = 0),$$

$$\prod_{\substack{N=1 \\ N \neq N_0}}^{\infty} \left( 1 - \frac{b}{\left(N - \frac{1}{2}\right)^2} \right) = (-1)^{N_0+1} \frac{\sin(\pi \varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \cdot \frac{(N_0 - \frac{1}{2})^2}{(N_0 - \frac{1}{2} + \sqrt{b})} \quad (\mu = 1).$$

Der Ausdruck  $\frac{\sin(\pi \varepsilon_0)}{\pi \varepsilon_0} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \varepsilon_0^2 + \dots$  ist natürlich auch für  $\varepsilon_0 = 0$  erklärt und bei kleinem  $|\varepsilon_0|$  unempfindlich gegen Störungen, so daß sich Stellenauslöschung bei Berechnung von  $\varepsilon_0$  nicht ungünstig auswirkt.

### Fehlerabschätzung

In [5], (6.10) ist als Fehlerabschätzung für

$$\alpha_N = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - \beta_\nu) \cdot \det B_N$$

angegeben:

$$(25) \quad |\det A - \alpha_N| \leq \sup_{N+2 \leq n \leq m} \left| \prod_{x=n}^m (1 - \beta_x) \right| \left( \sup_{x \geq N} |\det A_x| \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |\gamma_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |e_n^{(3)}| \right).$$

Dabei setzen wir über  $N$  voraus, daß

$$(26) \quad N \geq 4 + \sqrt{(\lambda+1)_+} + 2\sqrt{|\lambda|},$$

wobei für beliebiges  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(27) \quad \alpha_+ = \max\{0, \operatorname{Re} \alpha\}$$

sei. — Für unsere Abschätzungen verwenden wir mehrfach

Falls  $a > 0$  reell,  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $\alpha_+ < a^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $\geq 1$ ), so gilt

$$(28) \quad |a^k - \alpha| \geq (a - \sqrt[k]{\alpha_+})^k,$$

was unmittelbar aus  $(1 - \tau)^k \geq 1 - \tau^k$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) folgt. Danach haben wir für  $n \geq N + 1$

$$|1 - \beta_{n+1,1}| \leq 1 + \frac{|\lambda|^2}{|n'^2 - \lambda| |(n'+1)^2 - \lambda|} \leq 1 + \frac{|\lambda|^2}{(n' - \sqrt{\lambda_+})^4}$$

und ebenso

$$|(1 - \beta_{n+1,2})(1 - \beta_{n+1,3})| \leq 1 + \frac{|\lambda|^4}{(n' - \sqrt{(\lambda+1)_+})^8}.$$

Man schätzt weiter durch die Exponentialfunktion ab und benutzt, daß

$$(29) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n-c)^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(N-c)^{\alpha-1}} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, > 1; c \in \mathbb{R}, < N),$$

woraufhin

$$(30) \quad \sup_{N+2 \leq n \leq m} \left| \prod_{\kappa=n}^m (1 - \beta_\kappa) \right| \leq \exp \left( \frac{|\lambda|^2}{3(N' - \sqrt{\lambda_+})^3} + \frac{|\lambda|^4}{7(N' - \sqrt{(\lambda+1)_+})^7} \right).$$

Weiter suchen wir eine Konstante  $P > 0$  mit

$$(31) \quad |\det A_n| \leq P \quad (n \geq N), \quad \left| \binom{n-4}{n-4} A_{n-1} \right| \leq P \quad (n \geq N+1),$$

$\binom{n-4}{n-4} A_{n-1}$  ist nämlich die in  $\varrho_n^{(3)}$  auftretende  $(1, 1)$ -Matrix  $U_n^{(3)}$  (vgl. [5]). Dazu sei  $|z_0|$  die euklidische Norm der ersten Zeile von  $A$ , die man gemäß (5) für die betrachteten Matrizen getrennt berechnet, ferner  $n_0$  die kleinste natürliche Zahl, die (26) erfüllt. Nach Hadamard gilt

$$|\det A_n|^2 \leq |z_0|^2 \cdot \prod_{\kappa=1}^{n_0} \left( 1 + \frac{2|\lambda|^2}{|n'^2 - \lambda|^2} \right) \cdot \exp \left\{ \sum_{\kappa=n_0+1}^{\infty} \frac{2|\lambda|^2}{(n' - \sqrt{\lambda_+})^4} \right\}.$$

Demnach setzt man

$$(32) \quad P = |z_0| \prod_{\kappa=1}^{n_0} \left( 1 + \frac{2|\lambda|^2}{|n'^2 - \lambda|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp \left( \frac{|\lambda|^2}{3(n'_0 - \sqrt{\lambda_+})^3} \right).$$

Die in (11) erwähnten Ausdrücke lassen sich für  $n \geq N + 1$  wie folgt abschätzen:

$$(33) \quad |a_n| \leq \frac{2|\lambda|^2}{(n' - 3 - \sqrt{\lambda_+})^4} < 1$$

$$|1 - a_n|^{-1} \leq \delta_N \quad \text{mit} \quad \delta_N = 1 + \frac{2|\lambda|^2}{(N' - 2 - \sqrt{\lambda_+})^4 - 2|\lambda|^2}.$$



Aus (13) gewinnt man – wegen  $(N' - 1)^2 - 1 = N'(N' - 2) \geq (N' - 2)^2$ :

$$|\gamma_n| \leq \frac{4|\lambda||t|^4 + (1 + 2\delta_N)|t|^6}{(n' - 3 - \sqrt{\lambda_+})^2},$$

also

$$(34) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |\gamma_n| \leq \frac{1}{11} \frac{4|\lambda||t|^4 + (1 + 2\delta_N)|t|^6}{(N' - 3 - \sqrt{\lambda_+})^{11}}.$$

Schließlich gilt nach [5] die Beziehung

$$\varrho_n^{(3)} = z_n^{(3)T} D_n^{(3)-1} L_n^{(3)} U_n^{(3)} R_n^{(3)} D_n^{(3)-1} s_n^{(3)},$$

wobei mit  $e_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, 3$ ), den Einheitsspalten des  $\mathbb{C}^3$ ,

$$z_n^{(3)T} = \frac{t}{\lambda - n'^2} e_3^T, \quad s_n^{(3)} = \frac{t}{\lambda - (n' - 1)^2} e_3, \quad L_n^{(3)} = \frac{t}{\lambda - (n' - 3)^2} e_1,$$

$$R_n^{(3)} = \frac{t}{\lambda - (n' - 4)^2} \cdot e_1^T.$$

Man hat  $|U_n^{(3)}| \leq P$  und berechnet

$$e_3^T D_n^{(3)-1} e_1 = \frac{1}{(1 - a_n)} \cdot \frac{t^2}{[\lambda - (n' - 2)^2][\lambda - (n' - 1)^2]},$$

$$e_1^T D_n^{(3)-1} e_3 = \frac{1}{(1 - a_n)} \cdot \frac{t^2}{[\lambda - (n' - 3)^2][\lambda - (n' - 4)^2]},$$

so daß insgesamt für  $n \geq N + 1$

$$|\varrho_n^{(3)}| \leq \frac{P}{|1 - a_n|^2} \frac{|t|^8}{(n' - 4 - \sqrt{\lambda_+})^{16}} \leq P \delta_N^2 \frac{|t|^8}{(n' - 4 - \sqrt{\lambda_+})^{16}}$$

und damit

$$(35) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |\varrho_n^{(3)}| \leq P \cdot \delta_N^2 \frac{|t|^8}{15(N' - 4 - \sqrt{\lambda_+})^{16}}.$$

Die Ungleichungen (30) bis (35) sind nunmehr in (25) einzusetzen; es ergibt sich eine Abschätzung auch von  $|\det A_n - \alpha_N|$  für alle  $n \geq N$ . Dadurch kann man die etwas grobe Schranke  $P$  für  $\sup_{n \geq N} |\det A_n|$  verfeinern und erneut (25) anwenden.

### Rundungsfehler

Zur Behandlung der Rundungsfehler gehen wir kurz auf die dreigliedrigen Rekursionen ein. Wir bezeichnen

$$u_n = \det B_n \quad \text{gemäß (9);} \quad \kappa_n = \frac{1}{1 - \beta_n}, \quad \alpha_n = \frac{t}{\lambda - n'^2} \quad (n \geq 1).$$

Dann lauten die Rekursionen für die  $u_n$ :

$$(36) \quad u_0 = \alpha_{0,0}, \quad u_1 = \kappa_1 \cdot \det A_1 \quad \text{nach (5) und (6),}$$

$$u_{n+1} = \kappa_{n+1} [u_n - \alpha_{n+1} \cdot \alpha_n \cdot \kappa_n \cdot u_{n-1}].$$

Es soll mit  $s$ -stelliger Gleitkommarechnung (z.B. dezimal) gerechnet werden, es sei

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot 10^{-s+1}$$

die relative Genauigkeit der Rechenoperationen. Mit  $\tilde{\phantom{x}}$  markieren wir die aus (36) ermittelten numerischen Größen, dazu sei

$$(37) \quad \varepsilon_n = \tilde{u}_n - u_n.$$

Dann haben wir

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{x}_{n+1} [\tilde{u}_n (1 + \delta_{n+1}^I) - \tilde{\alpha}_{n+1} \tilde{\alpha}_n \tilde{x}_n \tilde{u}_{n-1} (1 + \delta_{n+1}^{II})],$$

wobei  $\delta_{n+1}^I, \delta_{n+1}^{II}$  die bei Division bzw. Multiplikation und Addition auftretenden relativen Fehler sind,

$$|\delta_{n+1}^I| \leq \frac{2\tau}{1-\tau}, \quad |\delta_{n+1}^{II}| \leq \frac{5\tau}{1-4\tau}.$$

Setzt man  $\tilde{u}_m = u_m + \varepsilon_m$  ein, liefert die letzte Gleichung:

$$(38) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \tilde{x}_{n+1} [(1 + \delta_{n+1}^I) \varepsilon_n - \tilde{\alpha}_{n+1} \tilde{\alpha}_n \tilde{x}_n (1 + \delta_{n+1}^{II}) \varepsilon_{n-1}] + r_{n+1}; \\ r_{n+1} &= [\tilde{x}_{n+1} (1 + \delta_{n+1}^I) - \alpha_{n+1}] u_n \\ &\quad - [\tilde{\alpha}_{n+1} \tilde{\alpha}_n \tilde{x}_{n+1} \tilde{x}_n (1 + \delta_{n+1}^{II}) - \alpha_{n+1} \alpha_n \alpha_{n+1} \alpha_n] u_{n-1}. \end{aligned}$$

Definiert man

$$\eta_n = \max_{i=0}^n |\varepsilon_i|,$$

$$K_n = (1 + |\tilde{x}_{n+1} - 1|) [1 + |\delta_{n+1}^I| + |\tilde{\alpha}_{n+1} \tilde{\alpha}_n \tilde{x}_n| (1 + |\delta_{n+1}^{II}|)] \quad (n \geq 1)$$

sowie

$$r_0 = \varepsilon_0, \quad r_1 = \varepsilon_1,$$

so wird

$$\eta_{n+1} \leq K_n \eta_n + |r_{n+1}| \quad (n \geq 1)$$

und daher

$$(39) \quad \eta_N \leq \prod_{n=1}^{N-1} K_n \cdot \sum_{n=0}^N |r_n| \quad (N \geq 2).$$

Wegen der absoluten Konvergenz von  $\prod \alpha_n$  sowie  $\prod (1 + \alpha_n \alpha_{n-1})$  bleibt  $\prod_{n=1}^{N-1} K_n$  im wesentlichen beschränkt; damit die  $|r_n|$  nicht zu groß werden, dürfen in den  $\alpha_n$  und den  $\alpha_n$  nicht zu kleine Nenner auftreten, wie wir bereits erwähnt haben. Für genügend große  $n$  wird in erster Näherung

$$|r_n| \leq \max_{i=0}^n |u_i| (|\tilde{x}_n - \alpha_n| + 2\tau) \leq 3\tau \max_{i=0}^n |u_i|,$$

wenn man die  $1 - \beta_i$  mit (12), nicht als Produkte berechnet. Der Rundungsfehler verhält sich also gemäß

$$|\varepsilon_N| \leq CN\tau$$

mit einer positiven Konstanten  $C$ , so wie bei den von Schäfke [7], [8] angegebenen Rekursionen. Die Abnahme des Diskretisierungsfehlers mit  $O(N^{-11})$  — gegenüber  $O(N^{-5})$  und  $O(N^{-7})$  in den erwähnten Arbeiten — läßt hier einen günstigeren Gesamtfehler erwarten.

*Beispiele und Vergleich mit anderen Verfahren*

Das Verfahren wurde an Hand zahlreicher Beispiele getestet und mit den bisher bekannten Methoden verglichen. Neben den von Schäfke/Schmidt [8] angegebenen Rekursionen bieten sich zur Berechnung von  $\nu$  auch Verfahren der numerischen Integration an. Aus den beiden Lösungen  $y_1, y_2$  der Differentialgleichung (1) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhält man  $\nu$  durch die Beziehungen

$$\cos(\pi\nu) = 2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \quad \text{oder} \quad \cos(\pi\nu) = 2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

Lang [2] hat kürzlich die heute bekannten Verfahren der numerischen Integration bezüglich ihrer Eignung für eine gegenüber (1) etwas allgemeinere Hillsche Differentialgleichung untersucht und fand Taylor-Verfahren hoher Ordnung (bis 30) als optimal; der Autor hat jedoch das heute allgemein gebräuchliche Extrapolationsverfahren nach Gragg-Bulirsch-Stoer herangezogen.

Die Beispiele wurden auf einer Anlage SIEMENS 4004 gerechnet, die gemessenen Rechenzeiten sind wegen der Eigenart des Betriebssystems mit einigem Vorbehalt zu übernehmen, geben aber Aufschluß über die Rechenzeitrelationen der verschiedenen Verfahren zueinander. Es wurde die eingebaute 14stellige hexadezimale Gleitkomma-Arithmetik benutzt, die etwa einer 16stelligen Dezimal-Arithmetik entspricht. Von den Zahlenbeispielen sind hier solche ausgewählt, für die der Wert von  $\nu$  nicht zu nahe bei Null oder 1 liegt, so daß die Formeln (3) und (4) etwa gleich gute Werte für  $\nu$  liefern und man die erreichte Genauigkeit von  $\nu$  mit einiger Sicherheit an der Zahl der übereinstimmenden Dezimalstellen ablesen kann. Die zu den Beispielen gehörenden Werte von  $\nu$  sind mit der in diesem Sinne bekannten Zahl von Dezimalstellen aufgeführt. Es sind die 3 folgenden Beispiele:

	$4\lambda$	$4t$	$\nu$
I.	16.5	8.4	0.25903149229419
II.	4.5	2.0	0.20738366843395 <i>i</i>
III.	0.6	0.55	-0.2225619442973 <i>i</i> + 1

Zum Vergleich des hier entwickelten Verfahrens mit dem von Schäfke/Schmidt [8] wurden in beiden Fällen die Unterdeterminanten bis zu dem Index  $N \geq 10$ , für den zum erstenmal

$$|\det B_N - \det B_{N-1}| < \varepsilon |\det B_{N-1}|$$

wurde, berechnet.  $\varepsilon$  erhielt verschiedene Werte, als Beispiele wählen wir

$$\varepsilon_1 = 10^{-14}; \quad \varepsilon_2 = 0.5 \cdot 10^{-15}.$$

In der folgenden Tabelle bezeichne  $CPU$  die gemessene Rechenzeit (in Sekunden),  $S$  die Zahl der gültigen Dezimalstellen in den ermittelten Näherungen von  $\nu$ . Die Werte  $N$  und  $CPU$  beziehen sich auf  $\mu=0$ , also die Berechnung von  $\nu$  nach (3); die Anwendung von (4) bewirkt nur geringe Abweichungen. Es ergibt sich für die oben genannten Beispiele I bis III:

	$\varepsilon$	Neues Verfahren			Schäfer/Schmidt		
		$N$	$CPU$	$S$	$N$	$CPU$	$S$
I.	$\varepsilon_1$	27	1.2	13	90	3.0	13
	$\varepsilon_2$	35	1.4	14	131	4.3	13
II.	$\varepsilon_1$	15	0.60	12	50	1.9	12
	$\varepsilon_2$	19	0.72	13	74	2.4	13
III.	$\varepsilon_1$	10	0.52	13	29	1.1	13
	$\varepsilon_2$	11	0.56	13	43	1.5	12

Wegen der benutzten Arithmetik ist eine Abbrechschranke  $\varepsilon < \varepsilon_2$  nicht mehr sinnvoll; für die Rekursionen nach Schäfer/Schmidt erscheint schon  $\varepsilon_2$  wegen der großen Schrittzahlen und daraus resultierenden Rundungsfehler etwas zu klein. In allen getesteten Beispielen erreicht das neue Verfahren Werte von  $\nu$ , die um bis zu 1 Dezimalstelle genauer sind; dabei wird gegenüber dem Schäfer-Schmidt-Verfahren nur etwa die Hälfte bis ein Drittel der Rechenzeit benötigt.

Die Abschätzung der Diskretisierungsfehler gemäß (25), die ins Programm aufgenommen wurde, liefert Fehlerschranken für  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)$  in der Größenordnung der tatsächlich erreichten Genauigkeit. In wenigen Beispielen (so in II, nach Gleichung (4) gerechnet) überwiegt der Rundungsfehler den berechneten Diskretisierungsfehler um einen Faktor  $\leq 10$ .

Als Verfahren der numerischen Integration wurde das Extrapolationsverfahren bei rationaler Extrapolation, wie es beispielsweise bei Stoer/Bulirsch [9] angegeben ist, benutzt. Bei der gewählten Rechengenauigkeit erwiesen sich für die Zahl  $N$  der gleich langen Teilintervalle von  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , über denen extrapoliert wurde, Werte zwischen 10 und 20 als geeignet. Die Zahl  $p$  der Schrittweiten  $h_i$  in jedem Teilintervall (= Zahl der Spalten im Extrapolationsschema) wurde vom Programm gesteuert, indem abgebrochen wurde, sobald die letzten Näherungen genügend übereinstimmten. In der folgenden Tabelle sind neben  $N$  die durchschnittlichen Werte von  $p$ , außerdem die erreichte Stellenzahl  $S$  von  $\nu$  sowie die Rechenzeit  $CPU$  (in Sekunden) angegeben:

Beispiel	Extrapolationsverfahren			
	$N$	$p$	$CPU$	$S$
I.	10	7	14.0	13
	20	5-6	18.2	13
II.	10	6	9.8	14
	20	5	16.1	14
III.	10	5	8.6	13
	20	4-5	12.3	13

Wie auch die anderen Beispiele bestätigten, sind bezüglich der erreichbaren Genauigkeit das Extrapolationsverfahren und die hier entwickelte Methode etwa gleichwertig; der Rechenaufwand der Determinantenmethode ist jedoch erheblich geringer, so daß die Rechenzeiten der Extrapolation ungefähr das Zehnfache betragen. Auch die von Lang [2] empfohlenen Taylor-Verfahren hoher Ordnung benötigen, an der neuen Methode gemessen, etwa das Fünffache an Rechenzeit.

#### Literatur

1. Hill, G. W.: On the part of the motion of the lunar perigee, which is a function of the mean motions of the sun and the moon. *Acta math.* **8**, 1–36 (1886)
2. Lang, H.: Berechnung des charakteristischen Exponenten der Hillschen Differentialgleichung durch numerische Integration. Publikation in Vorbereitung
3. Magnus, W.: Infinite determinants associated with Hill's equation. *Pacific Journal of Math.* **5**, Suppl. 2, 941–951 (1955)
4. Mennicken, R.: On the Convergence of Infinite Hill-Type Determinants. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.* **30**, 12–37 (1968)
5. Mennicken, R., Wagenführer, E.: Über die Konvergenz verallgemeinerter Hillscher Determinanten. Erscheint demnächst in den *Mathematischen Nachrichten*
6. Schäfke, F. W.: Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieschen Differentialgleichung. I. *Numer. Math.* **3**, 30–36 (1960)
7. Schäfke, F. W., Ebert, R., Groh, H.: Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieschen Differentialgleichung. II. *Numer. Math.* **4**, 1–7 (1962)
8. Schäfke, F. W., Schmidt, D.: Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieschen Differentialgleichung. III. *Numer. Math.* **8**, 68–71 (1966)
9. Stoer, J., Bulirsch, R.: Einführung in die Numerische Mathematik II. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
10. Whittaker, E. T., Watson, G. N.: *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press 1962

Dr. Ekkehard Wagenführer  
Fachbereich Mathematik der  
Universität Regensburg  
Postfach 397  
D-8400 Regensburg 2