Prädikatenlogik

Übersicht:

1. **Teil 1: Syntax und Semantik**
2. Teil 2: Normalformen
3. Teil 3: Modellierung
4. Teil 4: Elementare Beweistechniken II

Einführende Beispiele

Beispiele:

1. Geschwister

$$\forall x \forall y ((\exists u \exists v (\mathit{Eltern}(u, v, x) \wedge \mathit{Eltern}(u, v, y))) \rightarrow \mathit{Geschwister}(x, y))$$

2. Symmetrische Relation

$$\forall x \forall y (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$$

3. Funktionen

$$\forall x (P(a) \wedge (P(x) \rightarrow P(f(x))))$$

$\exists$ ist der Existenzquantor (es gibt)
$\forall$ ist der Allquantor (für alle)

Zeichenvorrat

1. Individuenvariablen: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$
2. Individuenkonstanten: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$
3. Funktionssymbole beliebiger Stelligkeiten: $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$
4. Prädikatssymbole beliebiger Stelligkeiten: $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$
5. Junktoren: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
6. Quantoren: $\forall, \exists$
7. Hilfszeichen: (,), , (Komma)

Jedes Funktions- und Prädikatsymbol wird in einem Kontext mit nur einer, zwar beliebigen, aber festen Stelligkeit verwendet.

Terme

Definition 1 (Terme)

Die *Klasse der Terme* wird induktiv definiert durch die folgenden vier Schritte.

(1) Jede Individuenvariable ist ein Term.

(2) Jede Individuenkonstante ist ein Term.

(3) Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und f ein n-stelliges Funktionssymbol, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

(4) Nur mit (1) – (3) gebildete Ausdrücke sind Terme.

Beispiel: Sei f zweistellig und g einstellig, dann sind $f(g(a), x)$, $g(g(y))$ und $g(f(x, b))$ Terme.

Terme, Signatur

Jeder Term besitzt eine eindeutige Zerlegung:
Er ist entweder eine Variable, eine Konstante oder ein (mit Hilfe einer Funktion) zusammengesetzter Term.

Signatur in der Logik: Die Menge KS der Konstantensymbole, FS der Funktionssymbole und PS der Prädikatssymbole einer Formel α können wir in einem Tripel $\Sigma = (KS, FS, PS)$ zusammenfassen.
In der Logik wird Σ auch als die durch α induzierte Signatur bezeichnet.

Man kann die Klasse der Terme auch einschränken durch eine gegebene Signatur und eine Menge von Variablen.
$T_\Sigma(V)$ bezeichnet die Klasse der Terme, die mit Individuenkonstanten und Funktionssymbolen der Signatur Σ und Variablen aus der Variablenmenge V gebildet werden können.

Prädikatenlogische Formeln 1. Stufe (PL1)

Definition 2 (Prädikatenlogische Formeln der 1. Stufe (PL1))

Die *Klasse der prädikatenlogischen Formeln* wird induktiv definiert durch die folgenden fünf Schritte.

(1) Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und P eine n-stelliges Prädikatssymbol, so ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.

(2) Ist α eine Formel, so ist auch $(\neg\alpha)$ eine Formel.

(3) Falls α und β Formeln sind, so sind auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ Formeln.

(4) Falls α eine Formel ist und x eine Individuenvariable, so sind auch $(\forall x\alpha)$ und $(\exists x\alpha)$ Formeln.

(5) Nur mit (1) – (4) gebildete Ausdrücke sind Formeln.

Notation: $P(t_1, \ldots, t_n)$ wird auch als Primformel bezeichnet.

Achtung: $\forall f \forall x P(x, f(x))$ ist keine Formel in PL1!!!!!

Bindungsregeln

Zur Klammereinsparung ist es wieder sinnvoll, Bindungsregeln festzulegen.
(transitive) Bindungsregeln:

1.) $\forall$, $\exists$ und $\neg$ binden stärker als $\wedge$.
2.) $\wedge$ bindet stärker als $\vee$.
3.) $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$.
4.) $\rightarrow$ bindet stärker als $\leftrightarrow$.
5.) Binäre Operatoren gleicher Stärke werden als links geklammert angesehen. (linksassoziativ)

Beispiel: $\forall x P(x) \vee Q(x)$ entspricht $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$

Notation:
Negierte und nicht-negierte Primformeln werden als *Literale* bezeichnet. Eine nicht-negierte Primformel $P(t_1, \ldots, t_n)$ heißt auch *positives Literal* und $\neg P(t_1, \ldots, t_n)$ *negatives Literal*.

Die Mengen *vars*(t) bzw. *vars*(α) der Variablen, *freevars*(α) der *freien Variablen* und *boundvars*(α) der *gebundenen Variablen*:

(1) Ist t eine Individuenvariable, $t = x$, so ist $\mathit{vars}(t) = \{x\}$.

(2) Ist t eine Individuenkonstante, $t = a$, so ist $\mathit{vars}(t) = \emptyset$.

(3) Ist $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ mit Termen $t_1, \ldots, t_n$ so ist $\mathit{vars}(t) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathit{vars}(t_i)$.

(4) Ist $\alpha = P(t_1, \ldots, t_n)$ mit Termen $t_1, \ldots, t_n$, so ist $\mathit{vars}(\alpha) = \mathit{freevars}(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathit{vars}(t_i)$ und $\mathit{boundvars}(\alpha) = \emptyset$.

(5) Ist $\alpha = \neg\beta$ mit einer Formel β, so ist $\mathit{vars}(\alpha) = \mathit{vars}(\beta)$, $\mathit{freevars}(\alpha) = \mathit{freevars}(\beta)$ und $\mathit{boundvars}(\alpha) = \mathit{boundvars}(\beta)$.

(6) Falls $\alpha = \beta \wedge \gamma$ oder $\alpha = \beta \vee \gamma$ mit Formeln β und γ, so ist $\mathit{vars}(\alpha) = \mathit{vars}(\beta) \cup \mathit{vars}(\gamma)$, $\mathit{freevars}(\alpha) = \mathit{freevars}(\beta) \cup \mathit{freevars}(\gamma)$ und $\mathit{boundvars}(\alpha) = \mathit{boundvars}(\beta) \cup \mathit{boundvars}(\gamma)$.

(7) Falls $\alpha = \forall x\beta$ oder $\alpha = \exists x\beta$ mit einer Formel β und einer Individuenvariablen x, so ist $\mathit{vars}(\alpha) = \mathit{vars}(\beta) \cup \{x\}$, $\mathit{freevars}(\alpha) = \mathit{freevars}(\beta) \setminus \{x\}$ und $\mathit{boundvars}(\alpha) = \mathit{boundvars}(\beta) \cup \{x\}$.

Wirkungsbereich

Beispiel:

$$\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists x (Q(x, x) \vee S(y)))$$

eine Variable x kann in Verbindung mit mehreren Quantoren auftreten; erlaubt, aber schwer zu lesen.

$$P(x, a) \wedge \exists x (S(x) \vee R(x, y))$$

Die Variable x kommt ungebunden (frei) vor, in $P(x, a)$, und gebunden im zweiten Teil.

Frage:
Wie ist der Wirkungsbereich der Quantoren festgelegt?
Kann man eine Variable umbenennen? $\forall x P(x)$ versus $\forall y P(y)$

Wirkungsbereich

In der Formel $\exists x \alpha$ oder $\forall x \alpha$ *bindet der Quantor alle Vorkommen der Variable mit Namen* x in der Formel α, außer den Vorkommen von x, die durch einen weiteren Quantor innerhalb gebunden sind.

x ist die Variable des Quantors, und der *Wirkungsbereich des Quantors* ist die Formel α.

Ein Vorkommen einer Variable x heißt *frei*, wenn es nicht im Wirkungsbereich eines Quantors für x liegt: $x \in \mathit{freevars}(\alpha)$
Sprechweise: Variable x kommt frei vor, x ist freie Variable.

Ein Vorkommen einer Variable x heißt gebunden, wenn es im Wirkungsbereich eines Quantors für x liegt: $x \in \mathit{boundvars}(\forall x \alpha)$

Definition 3

Enthält eine Formel keine freien Variablen, dann bezeichnen wir die Formel auch als geschlossene Formel.

Wirkungsbereich

Beispiele:

1.

$$(\forall x P(x)) \wedge S(x)$$

Das erste Vorkommen von x (in $P(x)$) ist gebunden, das zweite Vorkommen von x ist frei.
Der Wirkungsbereich des Quantors $\forall x$ ist nur $P(x)$.

2.

$$(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \wedge \forall x S(x)$$

Alle Vorkommen von x sind gebunden,
der Wirkungsbereich des ersten Quantors ($\exists x$) ist $(P(x) \wedge Q(x))$,
der Wirkungsbereich des zweiten Quantors ($\forall x$) ist $S(x)$.

Konsistente Umbenennung

Definition 4

Eine Formel ist *konsistent* umbenannt, falls

1. keine Variable x gleichzeitig frei und gebunden vorkommt,
2. die Variablen verschiedener Vorkommen von Quantoren verschiedene Namen besitzen.

Konsistente Umbenennung

Definition 4

Eine Formel ist *konsistent* umbenannt, falls
1. keine Variable x gleichzeitig frei und gebunden vorkommt,
2. die Variablen verschiedener Vorkommen von Quantoren verschiedene Namen besitzen.

Algorithmus für die konsistente Umbenennung

1. Solange ein Variable x frei und gebunden vorkommt, wähle einen *neuen* Variablennamen z und ersetze alle freien Vorkommen von x durch z.
2. Solange es zwei verschiedene Quantoren mit einer Variable x gibt, wähle einen der Quantoren aus und einen *neuen* Variablennamen z, ersetze im Wirkungsbereich des Quantors alle Vorkommen von x durch z,
   außer den Vorkommen von x, die durch einen weiteren Quantor über x in diesem Wirkungsbereich gebunden sind.

Konsistente Umbenennung

Beispiel:

$$R(x) \wedge \forall x (P(x) \wedge \forall x (Q(x) \wedge \exists x S(x)))$$

x kommt frei in $R(x)$ und gebunden im Rest vor,
wähle neuen Namen z und ersetze die frei vorkommenden x durch z.

$$R(z) \wedge \forall x (P(x) \wedge \forall x (Q(x) \wedge \exists x S(x)))$$

x kommt mit mehreren Quantoren vor, wähle neuen Namen y;
ersetze im Wirkungsbereich des ersten Quantors, außer in anderen Wirkungsbereichen

$$R(z) \wedge \forall y (P(y) \wedge \forall x (Q(x) \wedge \exists x S(x)))$$

führe die entsprechende Ersetzung für $\forall x$ aus, da x mit zwei Quantoren auftritt, der neue Variablenname sei w.

$$R(z) \wedge \forall y (P(y) \wedge \forall w (Q(w) \wedge \exists x S(x)))$$

Semantik: Idee

Idee: (keine formale Definition !!!)

$$\alpha = \forall x R(x, x)$$

Übersetzung der formalen Sprache in die Sprache der Domäne

1. Grundbereich: $\omega := \{a, b, c\}$
2. Variable x_ω über ω
3. Relation $R_\omega \subseteq \omega^2$ und $R_\omega := \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$
4. Frage: Ist die Formel für diese Zuordnung (Interpretation) wahr?

$$\text{Für alle } x_\omega \in \{a, b, c\} \text{ gilt } R_\omega(x_\omega, x_\omega)?$$

Semantik: Idee

Idee: (keine formale Definition !!!)

$$\alpha = \forall x(P(a) \wedge P(f(x)))$$

Übersetzung der formalen Sprache in die Sprache der Domäne

1. Grundbereich: $\omega := \{1, 2, 3, 4\}$
2. Variable x_ω über ω
3. Konstante $a_\omega = 1$
4. Funktion $f_\omega(1) = 1, \quad f_\omega(2) = f_\omega(3) = f_\omega(4) = 2$
5. Relation $P_\omega \subseteq \omega$ und $P_\omega := \{1, 4\}$
6. Frage: Ist die Formel für diese Zuordnung (Interpretation) wahr?

Für alle $x_\omega \in \omega$ gilt $(P_\omega(1)$ und $P_\omega(f_\omega(x_\omega)))$???

Interpretation

Definition 5 (Interpretation)

Eine *Interpretation* $\Im$ ist ein nicht leerer Grundbereich ω zusammen mit einer Abbildung der Individuenvariablen, Individuenkonstanten, Funktionskonstanten und Prädikatskonstanten einer (durch eine Formel α induzierten) Signatur Σ und einer Variablenmenge V auf entsprechende Objekte (gleicher Stelligkeit) über dem Grundbereich ω:

$$
\begin{array}{llllllll}
\Im: & \omega \neq \emptyset & & & & & & \\
 & x & \mapsto & x_\omega \in \omega & & f^{(n)} & \mapsto & f_\omega : \omega^n \to \omega \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & a & \mapsto & a_\omega \in \omega & & P^{(n)} & \mapsto & P_\omega \subseteq \omega^n \\
 & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Interpretation von Termen

Die Abbildung der Variablen und Konstanten auf Elemente von ω lässt sich induktiv erweitern zu einer ebenfalls mit $\Im$ bezeichneten Interpretation der Terme in $T_\Sigma(V)$ durch Elemente von ω:

$$\Im(f(t_1, \ldots, t_n)) = \Im(f)(\Im(t_1), \ldots, \Im(t_n))$$

Beispiel:
$\omega = \{1, 2\}$
$x_\omega = 1$, d.h. $\Im(x) = 1$
$a_\omega = 2$, d.h. $\Im(a) = 2$
$f_\omega(1,1) = 1, f_\omega(1,2) = 2, f_\omega(2,1) = 2, f_\omega(2,2) = 1$, also $\Im(f) = f_\omega$

$$\begin{aligned}\Im(f(f(a,a),x)) &= \Im(f)(\Im(f(a,a)), \Im(x)) \\ &= \Im(f)(\Im(f)(\Im(a), \Im(a)), \Im(x)) \\ &= f_\omega(f_\omega(a_\omega, a_\omega), x_\omega) \\ &= f_\omega(f_\omega(2,2), 1) = f_\omega(1,1) = 1\end{aligned}$$

Interpretation von Formeln

Den Formeln können dann Wahrheitswerte zugewiesen werden durch eine auf der Interpretation der Terme basierende Funktion, die wieder mit $\Im$ bezeichnet wird:

Definition 6

(1) $\Im(P(t_1, \ldots, t_n)) = w$ gdw. $P_\omega(\Im(t_1), \ldots, \Im(t_n))$ gilt.

(2) $\Im(\neg\alpha) = w$ gdw. $\Im(\alpha) = f$.

(3) $\Im(\alpha \wedge \beta) = w$ gdw. $\Im(\alpha) = w$ und $\Im(\beta) = w$.
$\Im(\alpha \vee \beta) = w$ gdw. $\Im(\alpha) = w$ oder $\Im(\beta) = w$.

(4) $\Im(\forall x\alpha) = w$ gdw. für jedes $x_\omega \in \omega$ gilt $\Im_{[x/x_\omega]}(\alpha) = w$
$\Im(\exists x\alpha) = w$ gdw. es ein $x_\omega \in \omega$ gibt mit $\Im_{[x/x_\omega]}(\alpha) = w$.

Dabei bezeichnet $\Im_{[x/x_\omega]}$ die Interpretation, die mit $\Im$ völlig übereinstimmt bis auf die Zuweisung eines Wertes an die Variable x, die unter $\Im$ den Wert $\Im(x)$, unter $\Im_{[x/x_\omega]}$ jedoch den Wert x_ω erhält.

Interpretation von Formeln

Beispiel:
Sei $\alpha = \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall z (P(z,z) \to P(z, f(z))) \wedge \neg P(a,a)$.
Dann ist durch $\Im$ mit

$$
\begin{array}{lllllll}
\Im: & \omega = \{1,2\} & & & & & \\
 & a & \mapsto & 1 & f^{(1)} & \mapsto & f_\omega : \omega \to \omega \\
 & & & & & & f_\omega(1) = 2, f_\omega(2) = 1 \\
 & & & & P^{(2)} & \mapsto & P_\omega = \{(1,2),(2,1)\}
\end{array}
$$

eine Interpretation für α gegeben.

Interpretation von Formeln

Beispiel (Fortsetzung):
Offensichtlich gilt für diese Interpretation:

$$
\begin{aligned}
& \text{Für alle } x_\omega \in \{1,2\} \text{ gibt es ein } y_\omega \in \{1,2\} \text{ mit } (x_\omega, y_\omega) \in P_\omega. \\
\Longrightarrow\; & \text{Für alle } x_\omega \in \{1,2\} \text{ gibt es ein } y_\omega \in \{1,2\}\ \Im_{[x/x_\omega][y/y_\omega]}(P(x,y)) = w. \\
\Longrightarrow\; & \text{Für alle } x_\omega \in \{1,2\} \text{ gilt } \Im_{[x/x_\omega]}(\exists y P(x,y)) = w. \\
\Longrightarrow\; & \Im(\forall x \exists y P(x,y)) = w
\end{aligned}
$$

Weiter gilt für $\Im$:

$$
\begin{aligned}
& \text{Für alle } z_\omega \in \{1,2\} \text{ gilt mit } (z_\omega, z_\omega) \in P_\omega \text{ auch } (z_\omega, f_\omega(z_\omega)) \in P_\omega. \\
\Longrightarrow\; & \text{Für alle } z_\omega \in \{1,2\} \text{ gilt } \Im_{[z/z_\omega]}(P(z,z) \to P(z,f(z))) = w. \\
\Longrightarrow\; & \Im(\forall z(P(z,z) \to P(z,f(z)))) = w
\end{aligned}
$$

Da auch noch $(1,1) \notin P_\omega$ gilt, folgt insgesamt $\Im(\alpha) = w$, diese Interpretation $\Im$ erfüllt also die prädikatenlogische Formel α.

Grundbegriffe

Analog zu den Definitionen in der Aussagenlogik.

Definition 7

Eine prädikatenlogische Formel α heißt

erfüllbar genau dann, wenn es eine Interpretation $\Im$ mit $\Im(\alpha) = w$ gibt,

falsifizierbar gdw. es eine Interpretation $\Im$ mit $\Im(\alpha) = f$ gibt,

widerspruchsvoll gdw. für alle Interpretationen $\Im(\alpha) = f$ gilt,

tautologisch gdw. für alle Interpretationen $\Im(\alpha) = w$ gilt.

Statt „α ist eine Tautologie“ verwendet man auch die Sprechweise α ist *(allgemein–)gültig*.

Interpretation von Formeln

Satz 8

(Satz von Löwenheim/Skolem)
Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe besitzt eine erfüllende Interpretation mit abzählbarem Grundbereich.

Suche nach erfüllenden Bewertungen kann auf *abzählbare Grundbereiche* beschränkt werden:

1. endliche (hier nicht-leere) Mengen,
2. unendliche Mengen isomorph zu den natürlichen Zahlen.
3. Teilmengen reeller Zahlen müssen nicht betrachtet werden, wenn sie wie die Menge der reellen Zahlen überabzählbar sind.

Zusammenhänge

Wie in der Aussagenlogik.

Satz 9

α *ist widerspruchsvoll gdw.*
α *ist nicht erfüllbar gdw.*
$\neg\alpha$ *ist Tautologie gdw.*
$\neg\alpha$ *ist nicht falsifizierbar*

Semantische Folgerung

Wie in der Aussagenlogik.

Definition 10 (Semantischer Folgerungsbegriff)

Seien α und β prädikatenlogische Formeln, dann *folgt* β *(semantisch)* aus α ($\alpha \models \beta$) genau dann, wenn für alle Bewertungen $\Im$ gilt:

$$\text{Wenn} \Im(\alpha) = w \text{ gilt, dann auch } \Im(\beta) = w.$$

Beispiel:

$$\forall x\ P(x) \models \exists y\ P(y)$$

Was immer wir als Interpretation $\Im$ wählen (Grundbereich ω und Relation P_ω), es gilt:
Gilt $\Im(\forall x\ P(x)) = w$, dann auch $\Im(\exists y\ P(y)) = w$

Semantische Folgerung

Wie in der Aussagenlogik.

Satz 11

Seien α und β prädikatenlogische Formeln, dann gilt:

a) $\alpha \models \beta$ *gdw.* $(\alpha \wedge \neg\beta)$ *widerspruchsvoll ist.*

b) α *ist widerspruchsvoll gdw. für alle Formeln* β *gilt:* $\alpha \models \beta$

c) α *ist widerspruchsvoll gdw. es eine Formel* β *gibt mit:* $\alpha \models (\beta \wedge \neg\beta)$

Deduktionstheorem

Satz 12 (Deduktionstheorem für $\models$)

Seien α und β prädikatenlogische Formeln und M eine Menge solcher Formeln, dann gilt:

$$M \cup \{\alpha\} \models \beta \quad \Longrightarrow \quad M \models (\alpha \to \beta)$$

Logische Äquivalenz

Wie in der Aussagenlogik.

Definition 13

Zwei Formeln α und β sind **logisch äquivalent**, in Zeichen $\alpha \approx \beta$, genau dann, wenn für alle Interpretationen $\Im(\alpha) = \Im(\beta)$ gilt.

Satz 14

Seien α und β Formeln, dann gilt:
$\alpha \approx \beta$ genau dann, wenn $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$ gilt.

Umformungsregeln - Teil 1

Seien α und β Formeln in PL1. Es gelten folgende Regeln:

Vererbung	$\alpha \approx \beta \implies \neg\alpha \approx \neg\beta$
	$\alpha \approx \beta \implies \gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$ und $\gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$
	$\alpha \approx \beta \implies \exists x\alpha \approx \exists x\beta$ und $\forall x\alpha \approx \forall x\beta$
Negation	$\neg\neg\alpha \approx \alpha$
Idempotenz	$\alpha \vee \alpha \approx \alpha$
	$\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$
Neutrales Element	$(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \beta \approx \beta$
	$(\alpha \vee \neg\alpha) \wedge \beta \approx \beta$
Kontrad./Tautol.	$(\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \beta \approx \alpha \wedge \neg\alpha$
	$(\alpha \vee \neg\alpha) \vee \beta \approx \alpha \vee \neg\alpha$

Umformungsregeln - Teil 2

Seien α, β und γ Formeln in PL1. Es gelten folgende Regeln:

Kommutativität	$\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$ $\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$
Assoziativität	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
Distributivität	$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \approx (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$ $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \approx (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$
Absorption	$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \approx \alpha$ $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \approx \alpha$

Umformungsregeln - Teil 3

Seien α und β Formeln in PL1. Es gelten folgende Regeln:

Quantorwechsel	$\neg(\exists x \alpha) \approx \forall x(\neg\alpha)$ und $\neg(\forall x \alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$
Quantortausch	$\exists x \exists y \alpha \approx \exists y \exists x \alpha$ $\forall x \forall y \alpha \approx \forall y \forall x \alpha$
Quantorzusammenfassung	$\exists x \alpha \vee \exists x \beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$ $\forall x \alpha \wedge \forall x \beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$
Quantorelimination	Wenn x keine freie Variable in α: $\exists x \alpha \approx \alpha$ und $\forall x \alpha \approx \alpha$
Quantifizierung	Wenn x keine freie Variable in β: $\exists x \alpha \wedge \beta \approx \exists x(\alpha \wedge \beta)$ und $\exists x \alpha \vee \beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$ $\forall x \alpha \wedge \beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$ und $\forall x \alpha \vee \beta \approx \forall x(\alpha \vee \beta)$
Umbenennung	Wenn x' keine Variable in α: $\exists x \alpha \approx \exists x' \alpha[x/x']$ und $\forall x \alpha \approx \forall x' \alpha[x/x']$

$\alpha[x/x']$ bezeichnet die Ersetzung aller Vorkommen von x durch x' in α.

Umformungsregeln - Beispiele

Quantorenwechsel:

$$\neg\exists y \forall x P(x,y) \approx \forall y \neg \forall x P(x,y) \approx \forall y \exists x \neg P(x,y)$$

Quantorenzusammenfassung:

$$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x R(x) \approx \forall x(\exists y P(x,y) \wedge R(x))$$

Quantorenelimination: x ist keine freie Variable in $\forall y P(y) \wedge \exists x R(x)$

$$\exists x(\forall y \; P(y) \wedge \exists x \; R(x)) \approx \forall y P(y) \wedge \exists x R(x)$$

Quantifizierung: x ist keine freie Variable in $\exists y S(y)$.

$$\exists x P(x) \wedge \exists y S(y) \approx \exists x(P(x) \wedge \exists y S(y))$$

Konsistente Umbenennung:

$$\exists x(P(x) \wedge \exists x S(x)) \approx \exists y(P(y) \wedge \exists x S(x))$$

Prädikatenlogik

Übersicht:

1. Teil 1: Syntax und Semantik
2. **Teil 2: Normalformen**
3. Teil 3: Modellierung
4. Teil 4: Elementare Beweistechniken II

Negationsnormalform (NNF)

Definition 15 (Negationsnormalform (NNF))

Eine Formel α ist in Negationsnormalform (NNF) genau dann, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einer Primformel steht.

Algorithmus: (Erweiterung des aussagenlogischen Verfahrens auf PL1)

1. Ersetze $\neg\neg\sigma$ durch σ (Negation)
2. Ersetze $\neg(\alpha \wedge \beta)$ durch $\neg\alpha \vee \neg\beta$ (de Morgan)
3. Ersetze $\neg(\alpha \vee \beta)$ durch $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ (de Morgan)
4. Ersetze $\neg(\exists y \alpha)$ durch $\forall y \neg\alpha$ (Quantoren)
5. Ersetze $\neg(\forall x \alpha)$ durch $\exists x \neg\alpha$ (Quantoren)

Satz 16

Zu jeder prädikatenlogischen Formel α gibt es eine logisch äquivalente Formel in Negationsnormalform.

Transformation in NNF

Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((\exists x P(x) \wedge \neg\forall y S(x,y)) \vee \neg\forall z S(z,z)) & \\
\approx & (\neg(\exists x P(x) \wedge \neg\forall y S(x,y))) \wedge \neg\neg\forall z S(z,z) & \text{(De Morgan)} \\
\approx & (\neg\exists x P(x) \vee \neg\neg\forall y S(x,y)) \wedge \neg\neg\forall z S(z,z) & \text{(De Morgan)} \\
\approx & (\neg\exists x P(x) \vee \forall y S(x,y)) \wedge \forall z S(z,z) & \text{(Negation)} \\
\approx & (\forall x \neg P(x) \vee \forall y S(x,y)) \wedge \forall z S(z,z) & \text{(Quantoren)}
\end{array}
$$

Pränexe Normalform (PNF)

Definition 17 (Pränexe Normalform (PNF))

Eine Formel α ist in pränexer Normalform (PNF), falls sie die Form $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n\ \beta$ hat, wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ für $1 \leq i \leq n$ und β quantorenfrei ist.

β wird auch als **(quantorenfreier) Kern** der Formel bezeichnet.

Die Quantorenfolge $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ wird auch als **Präfix** bezeichnet.

Beispiel:

$$\forall x \exists y \forall z\, (P(x, y) \wedge S(y, z, z))$$

ist in pränexer Normalform. Der Kern ist $(P(x, y) \wedge S(y, z, z))$ und das Präfix ist $\forall x \exists y \forall z$.

Aufgrund der Quantoreliminationsregel können wir immer davon ausgehen, dass alle Variablen im Präfix paarweise verschieden sind.

Transformation in PNF

Algorithmus: Transformation in eine äqivalente PNF

Input: Formel in NNF

1. Führe eine konsistente Umbenennung durch, so dass verschiedene Quantoren sich auf verschiedene Variablen beziehen und keine Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt.
2. Wende die folgenden Ersetzungsregeln so lange wie möglich an:
   1. Ersetze $(\forall x \alpha) \wedge \beta$ durch $\forall x(\alpha \wedge \beta)$
   2. Ersetze $(\exists x \alpha) \wedge \beta$ durch $\exists x(\alpha \wedge \beta)$
   3. Ersetze $(\forall x \alpha) \vee \beta$ durch $\forall x(\alpha \vee \beta)$
   4. Ersetze $(\exists x \alpha) \vee \beta$ durch $\exists x(\alpha \vee \beta)$

   (Vorkommen wie $\alpha \wedge (\forall x \beta)$ werden analog behandelt.)

Satz 18

Zu jeder prädikatenlogische Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel in PNF.

Transformation in PNF

Beispiel:

$$\forall x \neg P(x) \wedge \forall x (P(x) \vee R(x)) \wedge \forall x (Q(x) \wedge \exists y R(y))$$

$$\approx \forall x_1 \neg P(x_1) \wedge \forall x_2 (P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge \forall x (Q(x) \wedge \exists y R(y))$$

durch Umbenennung

$$\approx \forall x_1 \neg P(x_1) \wedge \forall x_2 (P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge \forall x \exists y (Q(x) \wedge R(y))$$

nach Ersetzungsregel

$$\approx \forall x_1 \neg P(x_1) \wedge \forall x_2 \forall x \exists y \big((P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge (Q(x) \wedge R(y))\big)$$

nach Ersetzungsregel

$$\approx \forall x_1 \forall x_2 \forall x \exists y \big(\neg P(x_1) \wedge (P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge (Q(x) \wedge R(y))\big)$$

nach Ersetzungsregel

Skolem Normalform (SKNF)

Definition 19

Eine Formel α ist in **Skolem Normalform (SKNF)**, falls α die Form hat $\alpha = \forall x_1 \ldots \forall x_n \beta$, wobei β quantorenfrei ist. Das Präfix von α enthält also keine Existenzquantoren.

Analog zur Aussagenlogik:

Definition 20 (Erfüllbarkeits-Äquivalenz)

Zwei prädikatenlogische Formeln α und β heißen **erfüllbarkeits-äquivalent**, in Zeichen $\alpha \approx_{sat} \beta$, genau dann, wenn gilt: (α ist erfüllbar gdw. β ist erfüllbar).

Skolem Normalform

Beispiele:

$\exists x P(x) \not\approx P(a)$

Interpretation $\Im : \omega = \{1, 2\}, a_\omega = 1, P_\omega = \{2\}$, dann gilt:
$\Im(\exists x P(x)) = w$, aber $\Im(P(a)) = f$, da $1 \notin P_\omega$

Aber es gilt:
$\exists x P(x) \approx_{sat} P(a)$ (beide Formeln sind erfüllbar)

$\forall x \exists y \; P(x, y) \not\approx \forall x \; P(x, f(x))$

Aber:
$\forall x \exists y \; P(x, y) \approx_{sat} \forall x \; P(x, f(x))$

Idee: Erzeuge erfüllbarkeits-äquivalente Formeln.
Ersetze Existenzquantoren durch neue Funktionszeichen.

Transformation in SKNF

Algorithmus: Trans-SKNF

Input: Formel α

1. Erstelle zu α eine äquivalente Formel Φ in pränexer Normalform.
2. Alle Existenzquantoren werden von links nach rechts wie folgt eliminiert:
   1. $\Phi = \exists x \beta$: Wähle ein neues Konstantensymbol a_x und ersetze in β alle Vorkommen von x durch a_x (d.h. bilde $\beta[x/a_x]$).

      Setze $\Phi := \beta[x/a_x]$
   2. $\Phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \beta$: Wähle neues n-stelliges Funktionssymbol f_y und ersetze in β alle Vorkommen von y durch $f_y(x_1, \ldots, x_n)$, (d.h. bilde $\beta[y/f_y(x_1, \ldots, x_n)]$).

      Setze $\Phi := \forall x_1 \ldots \forall x_n \beta[y/f_y(x_1, \ldots, x_n)]$

Transformation in SKNF

Satz 21

Das Verfahren Trans-SKNF transformiert jede Formel α in eine erfüllbarkeits-äquivalente Formel in Skolem Normalform.

Beispiel:

$$\alpha = \exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \; (\neg P(x_1) \wedge (P(x_2) \vee S(g(x_4, x_1, x_2))) \wedge Q(x_3) \wedge R(x_4))$$

neues Konstantensymbol a für x_1

$$\alpha \approx_{sat} \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \; (\neg P(a) \wedge (P(x_2) \vee S(g(x_4, a, x_2))) \wedge Q(x_3) \wedge R(x_4))$$

neues 2-stelliges Funktionssymbol f für x_4

$$\alpha \approx_{sat} \forall x_2 \forall x_3 \; (\neg P(a) \wedge (P(x_2) \vee S(g(f(x_2, x_3), a, x_2))) \wedge Q(x_3) \wedge R(f(x_2, x_3)))$$

Kern in Konjunktiver Normalform

Voraussetzung: Formeln in Skolem Normalform

Gesucht: Transformation des Kerns in eine logisch äquivalente KNF.

Verfahren: (wie in der Aussagenlogik)

1. Transformation des Kerns in eine Negationsnormalform
2. Anwendung der Distributivgesetze

Beispiel:

$$\forall x \forall y \forall z \; (P(x) \lor \neg(S(y,x) \lor T(z,y)))$$

$$\approx \forall x \forall y \forall z \; (P(x) \lor (\neg S(y,x) \land \neg T(z,y)))$$

$$\approx \forall x \forall y \forall z \; ((P(x) \lor \neg S(y,x)) \land (P(x) \lor \neg T(z,y)))$$

Modellbildung

Hinweise: Wenn möglich, dann

1. Formeln in Normalformen, z.B. pränexe oder Skolem Normalform
2. Vermeiden von Existenzquantoren
3. Vermeiden von Funktionssymbolen

Effekt:

1. Leichtere Lesbarkeit
2. Einfachere Verarbeitung (z.B. Komplexität des Erfüllbarkeitsproblems)

Modellbildung

Beispiel:

Formeln in Skolem Normalform ohne Funktionssymbole und Existenzquantoren, aber mit Konstantensymbolen.

Beispielformel (mit nur einem Konstantensymbol)

$$\alpha = \forall x \forall y \forall z \; (P(x,a) \wedge S(z,a) \wedge (\neg S(z,y) \vee \neg P(y,y)))$$

Frage: Ist α widerspruchsvoll?

Modellbildung

Beispiel:

Formeln in Skolem Normalform ohne Funktionssymbole und Existenzquantoren, aber mit Konstantensymbolen.

Beispielformel (mit nur einem Konstantensymbol)

$$\alpha = \forall x \forall y \forall z\ (P(x,a) \wedge S(z,a) \wedge (\neg S(z,y) \vee \neg P(y,y)))$$

Frage: Ist α widerspruchsvoll?

α ist widerspruchsvoll gdw.

$(P(a,a) \wedge S(a,a) \wedge (\neg S(a,a) \vee \neg P(a,a)))$ widerspruchsvoll ist gdw.

die aussagenlogische Formel $p \wedge s \wedge (\neg s \vee \neg p)$ widerspruchsvoll ist.

p steht für $P(a,a)$ und s steht für $S(a,a)$.

Modellierung und Beweise

Übersicht:

Modellierung

Beispiel: Eigenschaften von Relationen

1. $\forall x\, R(x, x)$ reflexiv
2. $\forall x\, \neg R(x, x)$ irreflexiv
3. $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ symmetrisch
4. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$ transitiv
5. $\forall x \forall y ((\neg(x = y)) \rightarrow (R(x, y) \leftrightarrow \neg R(y, x)))$ alternativ

Modellierung

Beispiel

Jeder Student hat einen Studentenausweis. Jeder Studentenausweis hat eine Matrikelnummer. Meier ist Student und Müller ist Student.

$Stud(x)$: x ist Student.
$Ausweis(x)$: x hat einen Ausweis.
$Matnr(x)$: x hat eine Matrikelnummer.
$Stud(meier), Stud(mueller)$: den Konstanten Müller und Meier werden Konstantensymbole *meier* und *mueller* zugeordnet.

Formalisierung:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & Stud(meier) \wedge Stud(mueller) \wedge \\ & \forall x(Stud(x) \rightarrow Ausweis(x)) \wedge \forall y(Ausweis(y) \rightarrow Matnr(y))\end{aligned}$$

logisch äquivalent zu

$$\begin{aligned}\beta = {} & Stud(meier) \wedge Stud(mueller) \wedge \\ & \forall x((Stud(x) \rightarrow Ausweis(x)) \wedge (Ausweis(x) \rightarrow Matnr(x)))\end{aligned}$$

Modellierung

Beispiel (Fortsetzung)
Jeder Student hat einen Studentenausweis. Jeder Studentenausweis hat eine Matrikelnummer. Meier ist Student und Müller ist Student.

$$\beta = \mathit{Stud}(\mathit{meier}) \land \mathit{Stud}(\mathit{mueller}) \land \\ \quad \forall x((\mathit{Stud}(x) \rightarrow \mathit{Ausweis}(x)) \land (\mathit{Ausweis}(x) \rightarrow \mathit{Matnr}(x)))$$

logisch äquivalent zu

$$\alpha = \forall x(\mathit{Stud}(\mathit{meier}) \land \mathit{Stud}(\mathit{mueller}) \land \\ \quad (\mathit{Stud}(x) \rightarrow \mathit{Ausweis}(x)) \land (\mathit{Ausweis}(x) \rightarrow \mathit{Matnr}(x)))$$

Anfrage:

Hat Müller eine Matrikelnummer?

Folgt $\mathit{Matnr}(\mathit{mueller})$ aus der Formel?

Gilt $\alpha \models \mathit{Matnr}(\mathit{mueller})$?

Modellierung

Beispiel Fakten und Regeln: Verwandtschaft
Eva ist die Mutter von Paul und Maria. Egon ist der Vater von Vera. Hans ist der Vater von Maria und Paul.

x und y sind die Eltern von z, falls x der Vater von z und y ist die Mutter von z.

x und y sind Geschwister, falls beide dieselben Eltern haben.

Formalisierung:
1. Mutterbeziehung: $Mutter(eva, paul) \wedge Mutter(eva, maria)$
2. Vaterbeziehung: $Vater(egon, vera) \wedge$
   $Vater(hans, paul) \wedge Vater(hans, maria)$

Axiomatisierung:
a) Eltern
$$\forall x \forall y \forall z((Vater(x, z) \wedge Mutter(y, z)) \rightarrow Eltern(x, y, z))$$
b) Geschwister
$$\forall x \forall y \forall u \forall v((Eltern(u, v, x) \wedge Eltern(u, v, y)) \rightarrow Geschwister(x, y))$$

Modellierung

Beispiel Fakten und Regeln: Verwandtschaft
Sei α die Konjunktion der obigen Formeln. Dann gilt

$$\alpha \models \mathit{Geschwister}(\mathit{paul}, \mathit{maria})$$

aber beispielsweise

$$\alpha \not\models \neg\mathit{Geschwister}(\mathit{paul}, \mathit{vera})\,.$$

Im Bereich der wissensbasierten Systeme (sowie anderen Anwendungen in der Informatik) wir häufig die "Closed World Assumption" verwendet: Alles, was nicht abgeleitet werden kann, wird als nicht gültig angenommen.

Modellierung

1. **Allaussagen:**
   Für alle Objekte mit einer Eigenschaft E gilt, dass ...
   Verwende Implikation:

$$\forall x \, (E(x) \rightarrow \ldots)$$

Beispiel: Für alle natürliche Zahlen gilt, dass sie größer als Null sind.

$$\forall x (NatuerlicheZahl(x) \rightarrow IstGroesserAlsNull(x))$$

Modellierung

1. **Allaussagen:**
   Für alle Objekte mit einer Eigenschaft E gilt, dass ...
   Verwende Implikation:
   $$\forall x\,(E(x) \rightarrow \ldots)$$
   Beispiel: Für alle natürliche Zahlen gilt, dass sie größer als Null sind.
   $$\forall x(\mathit{NatuerlicheZahl}(x) \rightarrow \mathit{IstGroesserAlsNull}(x))$$
2. **Existenzaussagen:**
   Es gibt ein Objekt x mit der Eigenschaft E, das ..
   Verwende Konjunktion:
   $$\exists x\,(E(x) \wedge \ldots)$$
   Beispiel: Es gibt eine natürliche Zahl, die größer als 5 ist.
   $$\exists x(\mathit{NatuerlicheZahl}(x) \wedge \mathit{IstGroesserAlsFuenf}(x))$$

Modellierung

Beispiel: Barbierproblem

1. Jeder Barbier rasiert alle Personen, die sich nicht selbst rasieren.

$B(x)$: x ist Barbier.
$R(x, y)$: x rasiert y.

Formalisiert:

$$\forall x(B(x) \to \forall y(\neg R(y, y) \to R(x, y)))$$

2. Kein Barbier rasiert jemanden, der sich selbst rasiert.

Formalisiert:

$$\neg \exists x(B(x) \land \exists y(R(x, y) \land R(y, y)))$$

Frage: Gibt es einen Barbier?

Gleichheit

Zu jedem der zu betrachtenden Grundbereiche gibt es eine festgelegte Gleichheitsrelation"$=$", die entscheidet, ob zwei Elemente identisch sind.

Wir benutzen in Formeln ein Prädikat $=$, das immer als diese Gleichheit über dem Grundbereich interpretiert wird.

Beispiel: Kardinalität von Mengen

Existenz von mindestens drei (paarweise verschiedenen) Elementen:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_3)$$

Grundbereich: Teilmenge von $\mathbb{N}$, Gleichheit über natürlichen Zahlen $=$.

Interpretation 1:
$\Im$ benutzt den Grundbereich $\{1, 6, 7\}$. Dann ist die Formel wahr für $\Im$.

Interpretation 2:
$\Im$ benutzt den Grundbereich $\{2, 3\}$. Dann ist die Formel falsch für $\Im$.

Gleichheit

- Mindestens n verschiedene Elemente:

$$\alpha_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n(\neg x_1 = x_2 \wedge \ldots \wedge \neg x_{n-1} = x_n)$$

auch geschrieben als

$$\alpha_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i = x_j \right)$$

- Unendlich viele (verschiedene) Elemente:

$$\alpha = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

Gleichheit

- Maximal n verschiedene Elemente:

$$\beta_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n)$$

auch geschrieben als

$$\beta_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} y = x_i \right)$$

- Genau n Elemente:

$$\alpha_n \wedge \beta_n$$

Unendliche Formelmengen

Satz 22 (Endlichkeitssatz)

Sei M eine (unendliche) Menge von Formeln. Dann ist M widerspruchsvoll genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge M' von M gibt, so dass M' widerspruchsvoll ist.

Satz 23

Die Endlichkeit ist nicht axiomatisierbar.
D.h. es gibt keine Formelmenge M, die nur durch Interpretationen mit endlichem Grundbereich erfüllt wird.

Gleichheit

Beispiel: Bijektive Funktionen

Beachte: Einstellige Relationen definieren Mengen.
Für eine Interpretation bezeichne
$P_\omega := \{x_\omega \in \omega : P_\omega(x_\omega) \text{ gilt}\}$ und $R_\omega := \{x_\omega \in \omega : R_\omega(x_\omega) \text{ gilt}\}$
Bijektive Funktion von P_ω nach R_ω.

Einschränkung Bildbereich:

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge f(x) = y) \rightarrow R(y))$$

Surjektivität:

$$\forall y(R(y) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge f(x) = y))$$

Injektivität:

$$\forall x \forall y \forall z((P(x) \wedge P(y) \wedge R(z) \wedge f(x) = z \wedge f(y) = z) \rightarrow x = y)$$

Modellierung und Beweise

Übersicht:

1. Teil 1: Syntax und Semantik
2. Teil 2: Normalformen
3. Teil 3: Modellierung
4. **Teil 4: Elementare Beweistechniken II**

Beweise

Erinnerung: $\alpha \models \beta$ gdw. $\models (\alpha \to \beta)$ (d.h. $\alpha \to \beta$ Tautologie)

α wird Voraussetzung oder Prämisse genannt.
β ist die Konklusion oder hier Behauptung.

Allgemein übliche Formulierung:

Satz: Gegeben sei α. Dann folgt β.

Satz: Voraussetzung α
Behauptung β

Quantoren

Schreibweisen quantifizierter Aussagen:

Sei D eine Menge.

Sprachlich: Für alle $x, y \in D$ gilt $P(x, y)$.

Mathematisch formalisiert: $\forall x \in D : \forall y \in D : P(x, y)$

Die mathematische Formalisierung ist nicht vorgesehen in der PL1.

Logisch formalisiert: $\forall x \, (D(x) \to \forall y \, (D(y) \to P(x, y)))$

Beispiel:

Seien n und m naürliche Zahlen, dann gilt $(n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$.

Alternative Schreibweise

$\forall n \in \mathbb{N} : \ \forall m \in \mathbb{N} : (n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$

Satzform Allaussage

Form: $\forall x \in D : E(x)$
Für alle $x \in D$ ist die Eigenschaft E zu zeigen.

Schema für direkte Beweise von Allaussagen

Satz

Behauptung: $\forall x \in D : E(x)$

Beweis
Annahme: Sei $x \in D$ beliebig, aber fest gewählt.

Zeige $E(x)$.

q.e.d

Allaussage

Form $\forall x \in D : E(x)$

Beispiel:

Satz
Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
Formalisiert: $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis (Induktion)
IA: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = 1(1+1)/2$
IV: Es sei $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
IS: Mithilfe der IV erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\end{aligned}$$

q.e.d

Allaussage

Form $\forall x \in D : E(x)$

Beweisalternative: Indirekter Beweis

Beispiel:

Satz
Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt: $n^3 > n^2$.
Formalisiert: $\forall n \in \mathbb{N} : (n > 1 \to n^3 > n^2)$

Beweis (indirekter Beweis)
Annahme des Gegenteils der Behauptung.
$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : (n > 1 \to n^3 > n^2))$
ist äquivalent zu
$\exists n \in \mathbb{N} : (n > 1 \land n^3 \leq n^2)$

Sei also n_0 eine solche Zahl mit $n_0^3 \leq n_0^2$.
Wir teilen beide Seiten der Ungleichung durch n_0^2 und erhalten $n_0 \leq 1$.
Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $n_0 > 1$.

q.e.d

Allaussage

Form $\forall x \in D : E(x)$

Beweisalternative: Beweis durch Fallunterscheidung

Idee der Fallunterscheidung:
Die Grundmenge D in endlich viele disjunkte Teilmengen aufteilen, $D = D_1 \cup \ldots \cup D_r$ und nacheinander für jede der Mengen D_i die Aussage $\forall x \in D_1 : E(x)$ zeigen.

Satz
Behauptung: $\forall x \in D : E(x)$

Beweis (durch Fallunterscheidung)
Wir zerlegen die Menge D in $D = D_1 \cup \ldots \cup D_r$.

Fall 1: Menge D_1. Zeige $\forall x \in D_1 : E(x)$.

...

Fall r: Menge D_r. Zeige $\forall x \in D_r : E(x)$.

q.e.d

Allaussage

Form $\forall x \in D : E(x)$

Beweis durch Fallunterscheidung

Beispiel:

Satz
Behauptung: Für alle ganzen Zahlen außer 0 und 1 gilt $n^2 > n$.

Beweis (Beweis durch Fallunterscheidung)
Wir zerlegen die Menge der ganzen Zahlen in

$$M_+ = \{n : n > 1\} \text{ und } M_- = \{n : n < 0\}.$$

Fall 1: Es gelte $n \in M_+$. Dann zeigen wir $n^2 > n$.
Fall 2: Es gelte $n \in M_-$. Dann zeigen wir $n^2 > n$.

q.e.d

Fallunterscheidung

Satz

Voraussetzung: Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M.

Behauptung: Dann ist $C = A \cup B$ eine symmetrische Relation.

Beweis (geschachtelte Fallunterscheidung)

Fall 1: A und B seien leer.

Dann ist auch C leer und gemäß Definition auch symmetrisch.

Fall 2: A oder B seien nicht leer.

Dann ist auch C nicht leer. Es sei xCy für Elemente x und y.

Fallunterscheidung nach xAy.

Fall 2.1: Gelte xAy.

Dann gilt auch yAx, da A symmetrisch ist, und damit gilt auch yCx.

Fall 2.2: Gelte nicht xAy.

Wegen xCy muss dann xBy gelten.

Da B symmetrisch ist, erhalten wir yBx und damit yCx.

q.e.d

Satzform Existenzaussage

Form: $\exists x \in D : E(x)$

Schema für Beweise von Existenzaussagen

Satz

Behauptung: $\exists x \in D : E(x)$

Beispiel: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann besitzt f im Intervall (a, b) eine Nullstelle.

Satzform Existenzaussage

Form: $\exists x \in D : E(x)$

Schema für Beweise von Existenzaussagen

Satz

Behauptung: $\exists x \in D : E(x)$

Beweisalternativen

1. Angabe eines konkreten Elementes $x \in D$ mit der Eigenschaft $E(x)$.
2. Indirekter Beweis.
   Annahme: $\neg(\exists x \in D : E(x))$
   Aussage $\neg(\exists x \in D : E(x))$ ist äquivalent zu $\forall x \in D : \neg E(x)$
   Leite hieraus einen Widerspruch her.
3. Nachweis der Existenz eines $x \in D$ mit der Eigenschaft $E(x)$ ohne Angabe eines konkreten Konstruktionsprinzips für x.

Eindeutigkeit

Form $\exists! x \in D : E(x)$

Der Quantor $\exists! x \in D$ soll ausdrücken, dass es nur genau ein x aus D gibt mit der Eigenschaft $E(x)$.
Logisch formalisiert:
$\exists x\,(D(x) \wedge E(x)) \wedge \forall x \forall y\,((D(x) \wedge D(y) \wedge E(x) \wedge E(y)) \rightarrow x = y)$

Satz
Behauptung: $\exists! x \in D : E(x)$

Beispiel: Minima konvexer Funktionen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng konvexe Funktion. Dann besitzt f ein eindeutiges Minimum.

Eindeutigkeit

Satz

Behauptung: $\exists! x \in D : E(x)$

Beweis:

Schritt 1 (Existenz): Zeige $\exists x_0 \in D : E(x_0)$.

Schritt 2 (Eindeutigkeit):

Alternative 1: (x_0 explizit bekannt)

Zeige $\forall x \in D \setminus \{x_0\} : \neg E(x)$

Alternative 2:

Zeige $\forall x \in D \; \forall y \in D : ((E(x) \wedge E(y)) \rightarrow x = y)$.

Alternative 3:

Führe die Annahme $\exists x \in D \; \exists y \in D : ((E(x) \wedge E(y)) \wedge (x \neq y))$ zum Widerspruch.

q.e.d

Funktionale Abhängigkeit

Form $\forall x \in A : \; \exists y \in B : E(x, y)$

Wir können die Quantorfolge $\forall x \in A \; \exists y \in B$ aus eher funktionaler Sicht behandeln. Zu jedem $x \in A$ muss es mindestens ein $y \in B$ geben mit der Eigenschaft $E(x, y)$. Die Zuordnung eines y abhängig vom x kann man daher als Funktion betrachten.

Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N} : \; (n > 2 \to n^2 < m < n^3))$.
Zeige die Eigenschaft für $m = f(n) = n^2 + 1$

Satz
Behauptung: $\forall x \in A \; \exists y \in B : E(x, y)$

Beweis
Konstruiere zu jedem $x \in A$ ein $y \in B$.

Geschieht z.B. durch Angabe einer Funtion $f : A \to B$, also $y = f(x)$.
Zeige für das gewählte f die Eigenschaft $\forall x \in A : E(x, f(x))$.

q.e.d

Bemerkung: Skolemisierung (Skolem Normalform)