Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Dr. A. Filler Wintersemester 2015/16

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Mathematikdidaktik, Teil 2

2 Einige lerntheoretische Grundlagen und daraus resultierende Prinzipien für den Mathematikunterricht

2.1 Zur Lerntheorie von J. S. Bruner

Die Arbeiten von JEROME SEYMOUR BRUNER (geb. 1915), amerikanischer Psychologe und Pädagoge, haben für die Didaktik (nicht nur, aber ganz besonders der Mathematik) eine entscheidende Bedeutung erlangt.

- Überzeugung: *Die Grundideen eines Faches können jedem Kind, gleich welcher Altersstufe oder sozialen Herkunft, auf der Grundlage der Denkmittel, die es mitbringt, und der Darstellungsmittel, die es versteht, in entsprechend einfacher Form vermittelt werden.*
- Forderung: *Der Unterricht ist in jedem Fach in erster Linie auf die fundamentalen Ideen („Strukturen“) der jeweiligen Fachwissenschaft auszurichten.*

→ Prinzip der Orientierung an Grundideen – die Gliederung der Bildungsstandards und Rahmenlehrpläne nach Leitideen ist ein Versuch der (curricularen) Umsetzung dieses Prinzips.[1]

2.1.1 Das Spiralprinzip

„Der Anfangsunterricht in den Naturwissenschaften, Mathematik, Sozialkunde und Literatur sollte so angelegt sein, dass diese Fächer mit unbedingter intellektueller Redlichkeit gelehrt werden, aber mit dem Nachdruck auf dem intuitiven Erfassen und Gebrauchen dieser grundlegenden Ideen. Das Curriculum sollte bei seinem Verlauf wiederholt auf diese Grundbegriffe zurückkommen und auf ihnen aufbauen, bis der Schüler den ganzen formalen Apparat, der mit ihnen einhergeht, begriffen hat. Kinder der vierten Klasse können durch Spiele gefesselt werden, deren Regeln sich von Prinzipien der Topologie und der Reihentheorie herleiten, und dabei selbst neue ‚Ableitungen‘ oder Lehrsätze entdecken. . . . Aber sie vermögen diese Ideen nicht in eine formale Sprache zu übersetzen oder mit ihnen umzugehen, wie es Erwachsene tun. Man muss noch viel über die „Curriculum-Spirale“ lernen, die auf höheren Ebenen immer wieder zu sich selbst zurückkommt.“

„Das gilt auch für die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer. Betrachtet man das Verständnis von Zahl, Maß und Wahrscheinlichkeit als unumgänglich für die Beschäftigung mit exakter Wissenschaft, dann sollte die Unterweisung in diesen Gegenständen so geistig-aufgeschlossen und so früh wie möglich beginnen, und zwar in einer Weise, die den Denkformen des Kindes entspricht. In höheren Klassen mögen die Themen weiter entwickelt und wieder aufgenommen werden.“[2]

Das Spiralprinzip bildet eine wesentliche Grundlage für den Aufbau von Curricula. Anhaltende didaktische Misserfolge resultieren oft aus einer groben Verletzung dieses Prinzips.

Aus dem Prinzip des spiralförmigen Curriculumaufbaus lassen sich zwei Prinzipien ableiten:

- *Prinzip des vorwegnehmenden Lernens*: Die Behandlung eines Wissensgebietes soll nicht aufgeschoben werden, bis eine endgültig abschließende Behandlung möglich erscheint, sondern ist bereits auf früheren Stufen in einfacher Form einzuleiten.
- *Prinzip der Fortsetzbarkeit*: Die Auswahl und die Behandlung eines Themas an einer bestimmten Stelle des Curriculums soll nicht ad hoc, sondern so erfolgen, dass auf höherem Niveau ein Ausbau möglich wird. Zu vermeiden sind vordergründige didaktische Lösungen, die später ein Umdenken erforderlich machen.

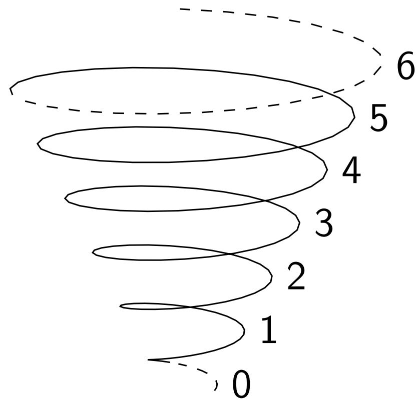
[1] Siehe hierzu auch den Abschnitt zu Leitideen in Kapitel 1 dieser Vorlesung.

[2] BRUNER: *Der Prozess der Erziehung* (1972); zit. nach WITTMANN, E. CH.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg, 1981 (6. Aufl.), S. 85.

- Das *Spiralprinzip* (Bruner, 1960) ist eng mit dem Konzept auf höherer Stufe immer wieder aufgegriffener zentraler Ideen verbunden.

Spiralprinzip

- Inhalte immer wieder aufgreifen, ausdifferenzieren und mit neuen Vorstellungen anreichern
- Beachten von Vorwissen und Vorverständnis
  - Prinzip der Fortsetzbarkeit
  - Prinzip des vorwegnehmenden Lernens
  - Prinzip der Vereinfachung



Beispiel: Zahlbegriffsentwicklung

0. Vorschulische Erfahrungen mit Zahlen
1. Zahlbegriff in der Grundschule: $\mathbb{N}$
2. Sekundarstufe I: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$
3. Sekundarstufe I: $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$
4. Sekundarstufe I: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$
5. Sekundarstufe II: evtl. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$
6. Mathematikstudium, Lehre, ...

- Durch die Betonung zentraler, grundlegender Ideen und Begriffe soll eine *Konzentration auf das Wesentliche* bewirkt, der Überblick, das Verständnis und das Behalten verbessert werden.
- Die heute propagierten Leitideen entsprechen der Idee des Bruner'schen Spiralprinzips; sie sollen einer „Entschlackung" der Curricula und einem tieferen Verständnis wesentlicher Inhalte und Arbeitsweisen dienen.

2.1.2 Enaktiv – Ikonisch – Symbolisch (EIS)

Intelligenzentwicklung in den Stufen Handlungen – Bilder – formale Operationen vollzieht sich in folgenden Ebenen:

- der *enaktiven Ebene* (Erkenntnisgewinn durch Handlungen),
- der *ikonischen Ebene* (Erkenntnisgewinn durch angeschaute oder vorgestellte Bilder),
- der *symbolischen Ebene* (Erkenntnisgewinn durch Verwendung von Umgangssprache und von mathematischer Zeichensprache).

Zwischen den drei Ebenen sollten Wechsel erfolgen; wichtig ist die Befähigung, Transfers in beide Richtungen (konkret → abstrakt sowie abstrakt → konkret) vorzunehmen.

Beispiel: Addition von Brüchen (Kl. 5/6)

enaktiv	*ikonisch*	*symbolisch*
konkrete Handlungen mit unterschiedlich großen Pizzastücken (oder entsprechenden Pappstücken)	Addition durch Anfertigung von Zeichnungen	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$

Beispiel: Zuordnungen / Funktionen (Kl. 7/8)

enaktiv	*ikonisch*	*symbolisch*
Legen von Dingen auf Plätze	Zuordnungsdiagramme (Pfeilbilder)	$f : M \to N$

Dieselben Handlungen können auf unterschiedlichen Alters- und Erkenntnisstufen verschiedenen Ebenen zugeordnet werden; so kann die Anfertigung von Zeichnungen als erste Abstraktion der ikonischen Ebene zugeordnet werden, aber als konkrete Handlung durchaus auch auf der enaktiven Ebene angesiedelt sein. Ähnlich kann die Benutzung des Computers – u. a. je nach Vertrautheit damit – enaktiven, ikonischen oder mitunter auch symbolischen Charakter haben. Auch gedanklich vollzogene Handlungen können – wenn die Lernenden mit den realen Handlungen, auf die sie sich beziehen, hinreichend vertraut sind – der enaktiven Ebene zugeordnet werden.

Aufgaben

- Versuchen Sie, den Begriff „Quadrat“ enaktiv, ikonisch und symbolisch zu erfassen.
- Versuchen Sie, folgende Sachverhalte zu „ikonisieren“:
    - Wenn jemand 3 Hosen und 4 Hemden hat, kann er sich auf 12 verschiedene Arten anziehen.
    - $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$
    - Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit einer Seitenlänge c und der zugehörigen Höhe h_c beträgt $\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$.
    - $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots = 1$

2.2 Elemente der Lernpsychologie von Jean Piaget (1896-1980)

Der Schweizer Psychologe JEAN PIAGET entwickelte eine *genetische* Erkenntnistheorie. Sie beschäftigt sich mit der *qualitativen Entwicklung intellektueller Strukturen*. Er ging davon aus, dass bei der Genese von Wissen in den Wissenschaften und im Individuum analoge Mechanismen wirken.

- *Intelligenz eines Individuums* ist (in einem bestimmten Entwicklungsstadium) die Summe der Aktivitäten, mit deren Hilfe das Individuum mit der Umwelt erfolgreich in Wechselwirkung treten kann. Aktivitäten können konkrete oder geistige Handlungen („Operationen“) sein.
- *Genetische Interpretation des Intelligenzbegriffs*: Die Intelligenz ist entwicklungsabhängig, so dass man von der Genese der Intelligenz

2.2.1 Die Stufentheorie Piagets

PIAGET arbeitete folgende *Hauptstadien der kognitiven Entwicklung bei Kindern* heraus:[3]

- *Stadium der sensomotorischen Intelligenz* (0 – 18/24 Monate): Objekte sind für das Kind nur existent, wenn es mit ihnen durch Handlungen in Beziehung treten kann.
- *Präoperatives Stadium* (1,5 – 7 Jahre): Das Kind bildet „Symbole“, die an die Stelle von Objekten oder Phänomenen treten. Sie werden vom Kind zunehmend strukturiert und logisch eingesetzt. Bis zum Alter von etwa vier Jahren herrscht das vorbegrifflich-symbolische Denken (bildhaftes Denken) vor, das vom anschaulichen Denken (vier bis sieben Jahre) immer mehr abgelöst wird. Das präoperative Stadium lässt sich somit in zwei Stufen unterteilen:
    - Stufe des symbolischen und vorbegrifflichen Denkens,
    - Stufe des anschaulichen Denkens.
- *Stadium der konkreten Operationen* (7/8 – 11/12 Jahre): Das Denken ist weiterhin an anschaulich erfahrbare Inhalte gebunden. Es werden aber nun verschiedene Merkmale eines Gegenstandes bzw. Vorgangs gleichzeitig erfasst und in Beziehung gesetzt. Das Kind denkt im Sinne verinnerlichten Handelns, kann vorausdenken und sein Handeln reflektierend steuern.
- *Stadium der formalen Operationen* (ab 11/12 Jahre): Der Jugendliche kann mit abstrakten Inhalten wie Hypothesen gedanklich umgehen, Probleme theoretisch analysieren und (wissenschaftliche) Fragestellungen systematisch durchdenken → höchste Form logischen Denkens.

[3] Siehe hierzu auch die ausführlichere (und dabei dennoch kompakte) Darstellung in: WITTMANN, E. CH.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden, 1981 (6. Aufl., Nachdruck 2009), S. 70-77.

Unter *Operationen* versteht man dabei verinnerlichte Handlungen (also Denkhandlungen), die verknüpfbar und reversibel (umkehrbar) sind.

Nach PIAGET durchlaufen alle Kinder die Stadien in gleicher Reihenfolge, u. U. zu verschiedenen Zeiten.

2.3 Operatives Prinzip; Prinzipien operativen Übens

Ein zentraler Begriff der auf PIAGET basierenden Theorie der kognitiven Entwicklung, ist der der *Operation*. Operationen sind zusammengesetzt aus einer Reihe von intellektuellen Handlungen, die eine psychologische Struktur darstellen. Die Arten, Operationen zu vollziehen, bilden auch den Kern der von Piaget herausgearbeiteten Stadien der kognitiven Entwicklung bei Kindern (vgl. S. 3).

Auf HANS AEBLI (1923-1990, Schüler von PIAGET) geht das *operative Prinzip* zurück: Zum Aufbau einer Operation ist ihre *Verinnerlichung* sowie eine *operative Durcharbeitung* nötig.

- Verinnerlichung: Konkrete Stufe – Figurale (ikonische) Stufe – Symbolische Stufe
- Operatives Durcharbeiten: variables, sinnbezogenes Üben

WITTMANN: Aufgabe des Lehrers ist es, *die jeweils untersuchten Objekte und das System („Gruppierung“) der an ihnen ausführbaren Operationen deutlich werden zu lassen und die Schüler auf das Verhalten der Eigenschaften, Beziehungen und Funktionen der Objekte bei den transformierenden Operationen gemäß der Frage „Was geschieht mit..., wenn ...?“ hinzulenken* (operatives Prinzip).[4]

Eine weitere „Fassung“ des operativen Prinzips (gefunden bei LOSKA, HARTMANN, Universität Erlangen-Nürnberg): *Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, . . .) ausgeübt werden.*

2.3.1 Aufzählung operativer Prinzipien

In der Literatur wird in unterschiedlichen (jedoch verwandten) Zusammenhängen von operativen Prinzipien, manchmal auch von dem operativen Prinzip (siehe oben) gesprochen. Im Folgenden wird eine (auf FRICKE zurück gehende) Aufzählung genannt.

Prinzip der Assoziativität

- Suche andere Lösungswege.

Prinzip der Reversibilität

- Denke an die Umkehrung von Rechenoperationen und Denkrichtungen und wende sie an.

Prinzip der Kompositionsfähigkeit

- Verbinde Einzelbestandteile/Begriffe/Rechenoperationen sinnvoll miteinander zu einer Komposition.

Prinzip der Variationsfähigkeit

- Verändere einen Sachverhalt/eine Aufgabe in sinnvoller Weise.
  (Geschickt arrangierte Aufgabensequenzen an Stelle isolierter Einzelaufgaben.)

Prinzip der Transitivität

- Übertrage eine Regel/Strategie/Denkweise auf einen anderen Sachverhalt.

Viele Begriffe in dieser Aufzählung klingen „mathematisch“. Ähnlich wie die Denkoperationen bei Piaget werden Rechenoperationen miteinander verknüpft, wobei verschiedene Wege möglich sind; Operationen werden oft im Zusammenhang mit ihren Umkehrungen gesehen.[5]

2.3.2 Operatives Üben

Mit „operativem Durcharbeiten“ bezeichnet AEBLI „ein variables, sinnbezogenes Üben, das der Vertiefung des Verständnisses dient, dessen Ziel noch nicht irgendeine Automatisierung ist.“ Dabei soll das Verständnis durch Verändern der Situation in mehreren Richtungen gefördert werden.

[4] WITTMANN, E. CH.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg, 1981 (6. Aufl.), S. 79.

[5] So ist also z. B. zu erwarten, dass bei Anwendungen quadratischer Funktionen oder Potenzfunktionen auch Wurzelfunktionen auftreten, wenn Fragestellungen umgekehrt werden.

Typische Fragen sind: Wie ist das, wenn …? Was bedeutet das …? Wie ändert sich ein Ergebnis, wenn …? Wann bleibt es gleich? Warum? …

Kennzeichnend für operatives Üben sind die Suche nach verschiedenen Lösungswegen und Kontrollen, die Umkehrung der Fragestellung sowie die Variation in die Rechnung eingehender Größen. Bei Aufgaben bedeutet dies u. a. das Herstellen, Erkennen und Anwenden von Beziehungen, Abhängigkeiten und Zusammenhängen durch:

- Umkehren (Umkehraufgabe, Probeaufgabe) (Reservibilität)
- Vertauschen (Kommutativität)
- Bildung benachbarter Aufgaben (Assoziativität)
- Zerlegung von Aufgaben in Teilschritte
- Zusammensetzung von Teilschritten zu grösseren Komplexen
- Beschreiten verschiedener Lösungswege
  - andere Reihenfolge der Einzelschritte
  - Umwege gehen
  - vorteilhaft zusammenfassen
- Variation der Daten
- Variation der Darstellungsebenen (vielfältige Wechsel zwischen enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene)

2.3.3 Ein ausführliches Beispiel

In einem Seminarvortrag wurde folgende „Geschwindigkeitsaufgabe“ vorgestellt:

▷ In ein kegelförmiges Gefäß möge Wasser mit der Geschwindigkeit r fließen. Das Gefäß habe die Gestalt eines geraden Kreiskegels mit horizontaler Basis, die Spitze zeige nach unten; der Radius der Grundfläche sei a, die Höhe des Kegels sei b. Suche die Geschwindigkeit, mit der die Oberfläche steigt, wenn die Tiefe des Wassers y beträgt.

(Es wird vorausgesetzt, dass die Schüler die einfachsten Regeln der Differentiation und den Begriff der „Geschwindigkeit der Änderung“ kennen.)

In dieser Formulierung (in der die Aufgabe gefunden wurde) ist sie gewiss für den Unterricht in der Sekundarstufe I ungeeignet, selbst für den Einsatz in der Sekundarstufe II erschienen einige Formulierungen überarbeitungswürdig.

Im Folgenden wird aufgezeigt, wie durch eine (leichte) Veränderung des gestellten Ziels und einiger Formulierungen aus der vorgestellten Aufgabe mehrere Aufgaben konstruiert werden können, die sich gut für Schüler zehnter Klassen (je nach Stoffverteilungsplan auch neunter Klassen) eignen. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei auf die operativen Prinzipien gerichtet.

Eine erste Umformulierung der Aufgabe beseitigt u. a. die Notwendigkeit, Mittel der Differentialrechnung zu verwenden – es sei aber betont, dass damit im Falle der hier betrachteten Aufgabe kein erheblicher Substanzverlust einhergeht.

* In ein kegelförmiges Gefäß fließen in jeder Sekunde v cm^3 Wasser. Das Gefäß hat die Gestalt eines geraden Kreiskegels mit horizontaler Grundfläche, die Spitze zeigt nach unten. Der Radius der Grundfläche sei r, die Höhe des Kegels sei h. Gib die Wassertiefe y in Abhängigkeit von der Zeit an.

Diese Aufgabe ist nun für Schüler am Ende der Sekundarstufe I mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln lösbar, aber sehr anspruchsvoll und vor allem zur Förderung talentierter Schüler geeignet. Löst man die Aufgabe, so stellt man sehr schnell fest, dass die Anwendung der Prinzipien der *Reversibilität* und der *Kompositionsfähigkeit* auf einem hohen Niveau verlangt werden. Ein Zerlegung der Aufgabe in eine Sequenz mit tendenziell ansteigendem Schwierigkeitsgrad wird die Aufgabe für eine Vielzahl von Schülerinnen und Schülern zugänglich machen und sowohl Umkehrungen als auch Kompositionen erleichtern. Dazu ist zunächst eine Analyse der für die Lösung der Aufgabe benötigten mathematischen Inhalte und Verfahren erforderlich:

– Berechnung von Volumina (hier für einen Kreiskegel);

– Berechnung von Größen eines Kreiskegels bei vorgegebenen Volumina;
– Bestimmung einer unbekannten Größe in einem Teilkegel eines Kreiskegels durch Anwendung der Strahlensätze oder Überlegungen zur Ähnlichkeit oder auch „naive“ Proportionalitätsüberlegungen.
– Bestimmung abhängiger Größen (Radius, Grundfläche) in einem Teilkegel eines Keiskegels in Abhängigkeit vom Füllvolumen; auch diese Überlegungen sind mit Umkehrfragestellungen verbunden;
– Beschreibung funktionaler Zusammenhänge (Füllhöhe $\rightarrow$ Volumen) und ihrer Umkehrungen (Volumen $\rightarrow$ Füllhöhe); Komposition mit einem weiteren (wenngleich sehr einfachen funktionalen Zusammenhang (Füllzeit $\rightarrow$ Füllvolumen).

Um es einem größeren Anteil von Schülern zu ermöglichen, derartige Aufgaben erfolgreich zu lösen, sollten zudem Vereinfachungen dadurch erfolgen, dass an Stelle durch Buchstaben zu bezeichnender Konstanten (die es Schülern erschweren können, die eigentlichen Variablen zu sehen) zunächst ganz oder teilweise konkrete Zahlenwerte vorgegeben werden. Diese können variiert und dann teilweise durch Variablen ersetzt werden (Prinzip der *Variationsfähigkeit*). Im Ergebnis dieser Überlegungen kann schließlich folgende Aufgabensequenz entstehen.

Aufgabe

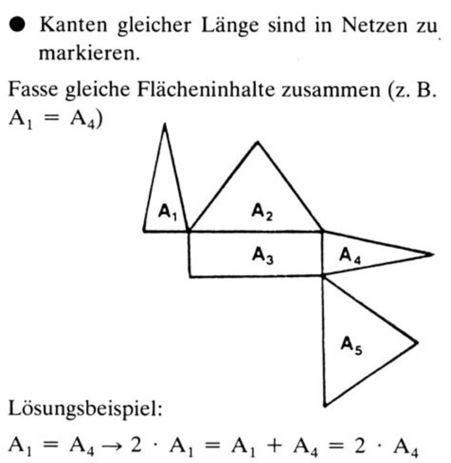
- Entwickeln Sie eine Aufgabensequenz, welche die Aufgabe $*$ (unter Berücksichtigung der operativen Prinzipien) in Teilaufgaben gliedert und dadurch für Schüler zugänglicher macht.
- Welche der operativen Prinzipien kommen an welchen Stellen der von Ihnen entwickelten Aufgabensequenz zum Tragen?

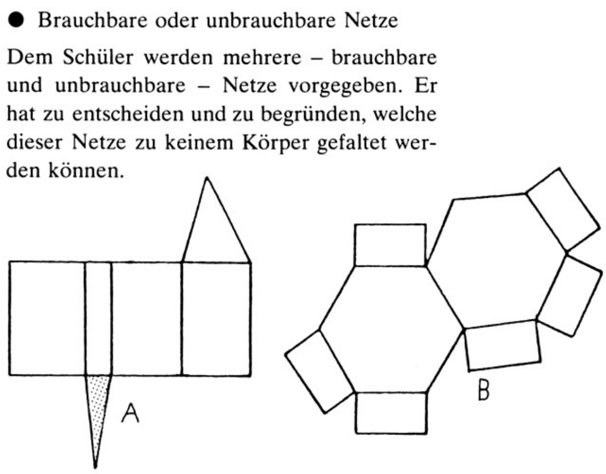
2.3.4 Ein weiteres Beispiel: Körpernetze

Das Thema „Netze von Körpern“ ist sehr beziehungsreich und eignet sich daher gut zur Umsetzung der Ideen des operativen Übens.

- Umkehren (Reversibilität): Zu gegebenem Körper Netz entwickeln *und* umgekehrt vom Netz zum Körper gehen.
- Bildung benachbarter Aufgaben (Assoziativität): Netze mit Klebelaschen, Körper abrollen.
- Kompositionsfähigkeit bzw. Zerlegung von Aufgaben in Teilschritte: Netze für zusammengesetzte Körper, z. B. Quader mit Pyramide als „Turmspitze“.

Die Raumvorstellung kann durch verschiedene Aufgabenstellungen an Netzen gefördert werden.





Bemalte Netze: An Netzen gibt man Farben für die Flächen vor und lässt aufschreiben, welche Farben im fertigen Körper zusammen stoßen.

Mit dieser Variante lassen sich Reversibilität (Netz für gefärbten Körper) und auch Kommutativität umsetzen: Ein Teil des Netzes ist schwarz, der Rest weiß. Welcher Teil des Körpers ist dann schwarz? Vertauschen: Welcher Teil ist weiß?