

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 08.06.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.****JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.****Serie 8 (30 Punkte)****Aufgabe 1 (10 Punkte)**

- (a) Es sei (H, \circ) eine reguläre Halbgruppe und $h \in H$. Die Abbildung $f_h : H \rightarrow H$ sei gegeben durch $f_h(g) = g \circ h$ ($g \in H$). Untersuchen Sie, ob f_h immer injektiv bzw. surjektiv ist.
- (b) Beweisen Sie, dass die Halbgruppe (\mathbb{N}, \circ) mit der Verknüpfung $m \circ n := \max(m, n)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) nicht regulär ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung f_h aus (a) für (\mathbb{N}, \circ) aus (b) im Allgemeinen nicht injektiv ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir definieren auf der Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$, gegeben durch die in der Vorlesung eingeführten Äquivalenzklassen $[a, b]$ mit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine Multiplikation durch

$$[a, b] \cdot [a', b'] := [aa' + bb', ab' + a'b] \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert und assoziativ ist und beweisen Sie eines der beiden Distributivgesetze.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die kommutative Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ regulär ist.
- (b) Wenden Sie die Konstruktion einer Gruppe (G, \circ) aus einer kommutativen regulären Halbgruppe auf die Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ an. Welches ist die zugrunde liegende Äquivalenzrelation? Wie ist die zugrunde liegende Verknüpfung definiert? Mit welchem Zahlbereich können Sie die so konstruierte Gruppe (G, \circ) identifizieren, d. h. zu welchem Zahlbereich ist (G, \circ) isomorph?
- (c) Sind die Halbgruppen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ zueinander isomorph? Sind die aus $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ konstruierten Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und (G, \circ) zueinander isomorph? Begründen Sie.