Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie und Vektoranalysis
Herbstsemester 2019

Dr. A. A'Campo-Neuen

16. Dezember 2019

Aufgabenblatt 13 (fakultatives Zusatzblatt)

Aufgabe 1. *(Satz von Green)* Beweisen Sie den Satz von Green 7.3.3 zunächst für koordinatenachsenparallele Rechtecke und dann für Vereinigungen von solchen Rechtecken, die sich jeweils entlang der Ränder berühren. (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Quellenfreies Vektorfeld)* Sei $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r := \sqrt{x^2 + y^2} > 0\}$. Das Vektorfeld $F \colon D \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$F(x, y, z) = \frac{f(r)}{r} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ g(z) \end{pmatrix},$$

wobei f, g stetig differenzierbare Funktionen in einer Variablen seien. Für welche Wahl von f und g ist das Vektorfeld F quellenfrei, das heisst $\operatorname{div} F = 0$? (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Greensche Formeln)* Seien $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf einem Normalgebiet $A \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

$$(a) \qquad \int_A (g\,\Delta f + \langle \nabla g, \nabla f\rangle)\, d^3(x, y, z) = \int_{\partial A} g(p)\partial_{n(p)} f(p)\, dF(p)\,,$$

wobei $\partial_{n(p)} f(p)$ die Richtungsableitung von f in Richtung des äusseren Einheitsnormalenvektors $n(p)$ an der Stelle $p \in \partial A$ bezeichnet.

$$(b) \qquad \int_A (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\, d^3(x, y, z) = \int_{\partial A} (f(p)\partial_{n(p)} g(p) - g(p)\partial_{n(p)} f(p))\, dF(p)\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Vektorfeld $K = g \cdot \nabla f$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Punktladung)* Das elektrische Feld einer Punktladung q im Ursprung des Koordinatensystems in $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$E(v) = q\,\frac{v}{||v||^3} \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^3,\ v \neq 0.$$

Rechnen Sie nach, dass $\operatorname{div} E(v) = 0$ für alle $v \neq 0$. Bestimmen Sie nun für einen kompakten Bereich $A \subset \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand und $0 \notin \partial A$ das Integral

$$\int_{\partial A} \langle E(p), n(p)\rangle\, dF(p)\,.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle: $0 \notin A$, A Kugel von Radius $R > 0$ um den Nullpunkt, $0 \in A \setminus \partial A$. (5 Punkte)

Aufgabe 5. *(Rotation)* Sei $w \in \mathbb{R}^3$ fest gewählt und $E(p) = w \times p$ für alle $p \in \mathbb{R}^3$. Rechnen Sie nach, dass $\operatorname{rot}(E)(p) = 2w$ für alle $p \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen sie nun die Aussage des Satzes von Stokes für eine Halbkugel von Radius R mit Äquatorlinie in der x-y-Ebene. (3 Punkte)

Abgabe: Freitag, den 20. Dezember 2019, bis 12.30 Uhr beim jeweiligen Tutor.