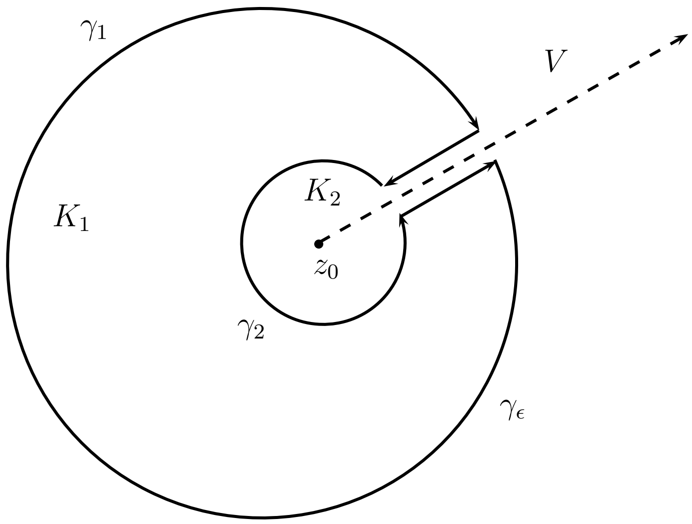
3.4 Cauchyformel

Wir können den Cauchyschen Integralsatz nun verwenden, um daraus das folgende Zentrierungslemma zu schliessen.

3.4.1 Satz *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus \{z_0\}$. Sei weiter $K_1 = K_R(z_1)$ eine abgeschlossene Kreisscheibe in G, die z_0 enthält, und $K_2 = K_r(z_0)$ eine kleinere abgeschlossene Kreisscheibe um z_0 in K_1. Bezeichnen wir mit γ_1 die Parametrisierung von ∂K_1, gegeben durch $\gamma_1(t) = z_1 + R_1 e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$, und mit γ_2 die entsprechende Parametrisierung $\gamma_2(t) = z_0 + R_2 e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ für den Rand von K_2. Dann stimmt das Wegintegral von f über ∂K_1 mit dem über ∂K_2 überein:*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz\,.$$

Beweis. Hier ist zu beachten, dass f im Punkt z_0 nicht holomorph zu sein braucht, und daher f auf $K_1 \setminus \{z_0\}$ möglicherweise keine globale Stammfunktion hat. Um dies Problem zu umgehen, betrachten wir f zunächst nur auf dem Teilgebiet V, das wir erhalten, indem wir eine offene Kreisscheibe U in G wählen, die K_1 enthält, und daraus einen von z_0 ausgehenden Halbstrahl entfernen. Das verbleibende Gebiet V ist dann sternförmig und daher einfach zusammenhängend. Ausserdem verbinden wir die beiden Kreislinien ∂K_1 und ∂K_2 durch zwei geradlinige Wegstücke, parallel zum entfernten Halbstrahl, die jeweils rechts und links des Schlitzes im Abstand $\epsilon > 0$ verlaufen. Auf diese Weise entsteht, wie in der Skizze angedeutet, ein geschlossener Weg in V, den wir mit γ_ϵ bezeichnen.



Dieser Weg folgt zunächst einem der Verbindungsstücke von aussen nach innen, dann dem inneren Kreis bis zum anderen Verbindungsstück nach aussen und zuletzt dem äusseren Kreis in umgekehrter Richtung. Da V einfach zusammenhängend ist, verschwindet das Wegintegral von f über γ_ϵ (für alle $\epsilon > 0$). Durch den Grenzübergang

$\epsilon \to 0$ erhalten wir nun die Behauptung:

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz - \int_{\gamma_2} f(z)\, dz\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

Diese Zentrierungslemma wollen wir nun anwenden, um die Cauchysche Integralformel zu beweisen.

3.4.2 SATZ *Sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$ so gewählt, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $K = K_r(z_0)$ ganz in G enthalten ist. Bezeichne γ die übliche Parametrisierung der Kreislinie $\partial K_r(z_0)$, gegeben durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt für jeden Punkt z im Inneren der Kreisscheibe K die sogenannte Cauchysche Integralformel:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Beweis. Wählen wir in K eine Kreisscheibe $K_s(z)$ um den Punkt z und bezeichnen wir die Parametrisierung des Randes von $K_s(z)$ mit δ, so liefert das Zentrierungslemma:

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\delta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Also reicht es, die Integralformel für den Spezialfall $z = z_0$ zu beweisen. Die Behauptung lautet dann in leicht geänderten Bezeichnungen:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,.$$

Um dies einzusehen, schreiben wir die rechte Seite der Formel etwas um:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\,.$$

Das linke Integral ist uns bereits mehrfach begegnet und wegen $\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\,.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass der rechte Summand gleich Null ist. Das kann man folgendermassen einsehen: Aus dem Zentrierungslemma folgt, dass das Integral von der Wahl des Radius r unabhängig ist. Also können wir $r > 0$ beliebig klein wählen. Weil f stetig ist, existiert ausserdem zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, wenn immer $|z - z_0| < \delta$. Wählt man nun $r < \delta$, so folgt $\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\epsilon}{r}$ für alle $z \in \partial K_r(z_0)$. Daraus ergibt sich folgende Abschätzung des fraglichen Integrals

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = \epsilon\,.$$

Also geht das Integral für $r \to 0$ gegen Null. Nun sollte das Resultat aber von r gar nicht abhängig sein. Das ist nur möglich, wenn es von vornherein verschwindet. q.e.d.

3.4.3 FOLGERUNG *Sind f_1, f_2 holomorphe Funktionen auf einem Gebiet G, das die abgeschlossene Kreisscheibe K enthält, und stimmen f_1 und f_2 auf dem Rand von K überein, so sind sie bereits auf ganz K identisch. Denn die Werte im Innern der Kreisscheibe lassen sich mithilfe der Cauchyformel aus den Randwerten bestimmen. Ist insbesondere f holomorph und auf dem Rand einer Kreisscheibe K konstant, so muss f auch auf dem Innern von K konstant sein.*

3.4.4 BEISPIELE

- Betrachten wir die Funktion f, definiert durch $f(z) = z^2$, an der Stelle $z_0 = 3$. Um die rechte Seite der Formel auszuwerten, schreiben wir f zunächst um in eine Summe von Potenzen von $(z - z_0)$:

$$f(z) = z^2 = (z-3)^2 + 6(z-3) + 9\,.$$

Setzt man dies ein, ergibt sich:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-3}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\gamma (z-3)\,dz + \int_\gamma 6\,dz + \int_\gamma \frac{9}{z-3}\,dz\right).$$

Die ersten beiden Teilintegrale über den geschlossenen Weg verschwinden, weil der Integrand jeweils auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Es bleibt nur ein Term übrig. Das darin vorkommende Integral haben wir aber bereits berechnet. Das Ergebnis lautet, wie von der Formel vorhergesagt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-3}\,dz = \frac{9}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-3}\,dz = 9 = f(3)\,.$$

- Die Cauchyformel kann man auch verwenden, um damit Integrale zu bestimmen, indem man den Integranden geeignet interpretiert.

$$\int_{\partial_2(0)} \frac{e^z}{(z+1)}\,dz = 2\pi i\, e^{-1}\,.$$

Dies ergibt sich aus der Cauchyformel für $f(z) = e^z$ und $z_0 = -1$.

Die Cauchysche Integralformel hat weitere bemerkenswerte Konsequenzen.

3.4.5 FOLGERUNG *Ist $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist f bereits beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt für jede abgeschlossene Kreisscheibe $K_r(z_0) \subset G$, deren Rand auf die übliche Art durch den Weg γ parametrisiert werde, und für jeden Punkt z im Inneren dieser Kreisscheibe die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta\,.$$

Ist ausserdem $|f(z)| \le M$ für alle $z \in K_r(z_0)$, so erhält man aus der Integralformel die Abschätzung

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{r^n}\,.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ handelt es sich um die gewöhnliche Cauchysche Integralformel. Nehmen wir nun an, die Formel ist für n gezeigt. Das heisst, die n-te Ableitung von f existiert und wir haben

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \, .$$

Der Integrand auf der rechten Seite dieser Gleichung ist nach z differenzierbar und bezüglich stetig. Daher ist auch das Integral nach z differenzierbar und man darf Ableitung und Integral miteinander vertauschen. Das folgt aus der entsprechenden Aussage über parameterabhängige Integrale reellwertiger Funktionen. Also erhalten wir:

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!(n+1)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} \, d\zeta \, ,$$

wie behauptet. q.e.d.

3.4.6 Beispiel Schauen wir uns noch einmal das oben behandelte Beispiel an, nämlich die Funktion $f(z) = z^2 = (z-3)^2 + 6(z-3) + 9$. Hier ist $f'(z) = 2z$ und $f''(z) = 2$. Die Formel für die erste Ableitung lautet in diesem Fall:

$$f'(3) = 6 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (1 + \frac{6}{z-3} + \frac{9}{(z-3)^2}) \, dz \, .$$

Dies ist korrekt, denn nur der Integrand $\frac{6}{z-3}$ liefert einen Beitrag zum Integral, die anderen Terme haben globale Stammfunktionen. Schliesslich noch die Formel für die zweite Ableitung:

$$f''(3) = 2 = \frac{2}{2\pi i} \int_\gamma (\frac{1}{(z-3)} + \frac{6}{(z-3)^2} + \frac{9}{(z-3)^3}) \, dz \, .$$

Hier ist es nur der erste Summand, der einen Beitrag liefert.

Die verallgemeinerte Cauchyformel kann man wiederum verwenden, um damit Integrale zu bestimmen, indem man den Integranden geeignet interpretiert.

3.4.7 Beispiel Wir erhalten

$$\int_{\partial K_r(3)} \frac{e^{2z}}{(z-3)^2} \, dz = 4\pi i e^6 \, ,$$

wenn wir $f(z) = e^{2z}$ setzen, $f'(z) = 2e^{2z}$ an der Stelle $z_0 = 3$ berechnen und in die Cauchyformel für die erste Ableitung einsetzen.

Der Satz von Liouville besagt folgendes:

3.4.8 Satz *Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.*

Beweis. Nehmen wir an, es gebe eine Schranke $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann folgt mit der oben angegebenen Abschätzung für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$: $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ für alle $r > 0$. Durch Grenzübergang $r \to \infty$ folgt nun $f'(z_0) = 0$. Da dies für alle z_0 gilt, ist f bereits konstant. q.e.d.

Mithilfe des Satzes von Liouville schliesslich können wir den Fundamentalsatz der Algebra zeigen:

3.4.9 Satz *Ist p ein Polynom mit komplexen Koeffizienten von Grad $n \in \mathbb{N}$, so hat p in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.*

Beweis. Nehmen wir an, p habe keine Nullstelle. Dann ist $p(z) \neq 0$ für alle z und daher ist die Funktion $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Ausserdem ist f beschränkt. Denn ist $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$, so gilt

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{z^n}}{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n}} \right| = 0 \,.$$

Also gilt für alle z ausserhalb einer genügend grossen Kreisscheibe $K = K_R(0)$, dass $|f(z)| < 1$. Ausserdem nimmt $|f|$ auf dem Kompaktum K sein Maximum an, etwa M. Dann ist $S := \max\{M, 1\}$ eine globale Schranke für f.

Nach dem Satz von Liouville ist daher f und damit auch p konstant. Das bedeutet aber, dass p den Grad 0 haben muss im Widerspruch zur Voraussetzung. q.e.d.

Eine weitere Folgerung ist der sogenannte Satz von Morera:

3.4.10 Satz *Ist $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einem wegzusammenhängenden Gebiet G und gilt $\int_\gamma f = 0$ für alle geschlossenen Wege in G, dann ist f holomorph.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.2.3 besitzt die Funktion f auf ganz G eine holomorphe Stammfunktion g. Nach Folgerung 3.4.5 ist g beliebig oft komplex differenzierbar. Insbesondere ist auch $f = g'$ holomorph. q.e.d.

Kapitel 4

Komplex-analytische Funktionen

4.1 Exkurs: Konvergenz von Reihen

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass jede holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. Aber es gilt sogar noch mehr, man kann eine holomorphe Funktion nämlich lokal immer in eine komplexe Taylorreihe entwickeln. Hier zunächst einige Beispiele, auf die wir später noch zurückkommen werden.

4.1.1 Beispiele Die Reihenentwicklungen der komplexen Exponentialfunktion und der komplexen trigonometrischen Funktionen lauten wie im Reellen auch für $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Die Logarithmusreihe

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$$

konvergiert, falls $|z| < 1$ ist.

Setzen wir in die Exponentialreihe für z eine rein imaginäre Zahl ix ($x \in \mathbb{R}$) ein, so bestätigt sich wieder die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, denn:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(x) + i\sin(x)\,.$$

Bevor wir die Taylorreihen genauer anschauen, sollten wir noch einmal die wichtigsten Aussagen im Zusammenhang mit Konvergenz von reellen Reihen rekapitulieren und dabei ins Komplexe übertragen.

4.1.2 Definition Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn die Folge der Teilsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ (für $n \in \mathbb{N}$) gegen eine Zahl $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, so sagt man, die unendliche Reihe mit den Summanden a_k konvergiere gegen s und schreibt dafür:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s\,.$$

Die Notation $\sum_{k=1}^{\infty}$ bezeichnet einerseits die Teilsummenfolge, andererseits aber auch den Grenzwert, falls er existiert. Die Summation kann auch schon bei $k = 0$ oder erst bei $k = k_0$ (für ein $k_0 \in \mathbb{N}$) beginnen.

4.1.3 BEISPIELE Die geometrische Reihe für eine Zahl $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ konvergiert gegen folgenden Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,.$$

Prominent ist auch die sogenannte Teleskopreihe, die gegen 1 konvergiert:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1\,.$$

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ dagegen konvergiert nicht. Sie ist divergent, denn die Folge der Teilsummen wächst unbeschränkt.

Eine notwendige Bedingung für Konvergenz ist folgende:

4.1.4 SATZ *Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist die Folge der Summanden a_k eine Nullfolge:*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\,.$$

Beweis. Nehmen wir an, die Reihe konvergiere gegen den Grenzwert s. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle Teilsummen s_n mit $n \geq N$ gilt $|s - s_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Daraus folgt

$$|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| \leq |s_{n+1} - s| + |s - s_n| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Also konvergiert die Folge der a_n wie behauptet gegen Null. q.e.d.

Diese Beobachtung kann man verwenden um zu schliessen, dass gewisse Reihen nicht konvergieren.

4.1.5 BEISPIEL Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, so konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ nicht. Denn in diesem Fall ist $a_k = z^k$ und $|a_k| = |z|^k = 1$ für alle k. Die Folge (a_k) kann also keine Nullfolge sein.

Eine besonders robuste Form von Konvergenz ist die sogenannte *absolute Konvergenz*, bei der sogar Umordnungen der Reihe nichts am Grenzwertverhalten ändern.

4.1.6 SATZ *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Konvergiert die Reihe, gebildet aus den Absolutbeträgen $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, so konvergiert auch die ursprüngliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. In diesem Fall spricht man von absoluter Konvergenz.*

4.1.7 BEISPIEL Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^k$ mit dem Grenzwert $\frac{2}{3}$ ist absolut konvergent, denn die aus den Absolutbeträgen gebildete Reihe ist wiederum geometrisch und konvergiert gegen 2.

Beweis. (von Satz 4.1.6) Zerlegen wir die komplexen Summanden jeweils in Real- und Imaginärteil, so erhalten wir zwei reelle Reihen, die wir separat betrachten können. Es reicht also aus, die Behauptung für eine Folge reeller Zahlen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zu zeigen. Wir setzen jetzt $s'_n := \sum_{j=1}^n |a_j|$ und $s' := \lim_{n\to\infty} s'_n$. Da die Folge der Teilsummen s'_n gegen s' konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$s' - s'_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| < \epsilon \,.$$

Also können wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen Index $n_k \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\sum_{j=n_k+1}^{\infty} |a_j| < \frac{1}{2^k} \,.$$

Daraus folgt für die Teilsummen $s_m := \sum_{j=1}^m a_j$, falls $m \geq n_k$:

$$|s_m - s_{n_k}| = |\sum_{j=n_k+1}^{m} a_j| \leq \sum_{j=n_k+1}^{\infty} |a_j| < \frac{1}{2^k} \,.$$

Das bedeutet

$$s_{n_k} - \frac{1}{2^k} < s_m < s_{n_k} + \frac{1}{2^k} \,.$$

Wir konstruieren nun eine Folge von Intervallen $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots$, die fast alle Teilsummen der Reihe bis auf endlich viele Ausnahmen enthalten und deren Breite gegen Null geht. Genauer wählen wir

$$I_1 := \left[s_{n_1} - \frac{1}{2}, s_{n_1} + \frac{1}{2} \right]$$

und dann rekursiv

$$I_k := I_{k-1} \cap \left[s_{n_k} - \frac{1}{2^k}, s_{n_k} + \frac{1}{2^k} \right] \quad \text{für } k \in \mathbb{N},\, k > 1.$$

Das Intervall I_k enthält die Teilsummen s_m für alle $m \geq n_k$. Ausserdem ist nach Konstruktion die Breite des Intervalls I_k sicher $\leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Also bilden die unteren Intervallgrenzen eine monoton steigende Folge, und die oberen Intervallgrenzen eine monoton fallende Folge, die beide gegen denselben Grenzwert s konvergieren. Diese Zahl s muss auch der Grenzwert der Teilsummenfolge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sein. q.e.d.

Aber nicht jede konvergente Reihe konvergiert auch absolut. Dazu ein Beispiel:

4.1.8 Beispiel Die Leibniz-Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ist konvergent, denn wir können sie folgendermassen abschätzen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \,.$$

Also konvergiert die eingangs erwähnte Reihenentwicklung von $\ln(1+z)$ auch für $z = 1$ und zwar gegen $\ln(2)$. Aber die Reihe konvergiert nicht absolut. Denn geht man über zu den Absolutbeträgen, erhält man die harmonische Reihe, die bekanntermassen divergiert.

Das wichtigste Konvergenzkriterium ist das sogenannte *Majorantenkriterium.*

4.1.9 SATZ *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller, nichtnegativer Zahlen. Sei weiter die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. Gilt nun $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, und ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, und zwar sogar absolut.*

Beweis. Die Folge der Teilsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, denn

$$s_n - \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| = \sum_{k=k_0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=k_0}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \,.$$

Also hat die Teilsummenfolge einen Grenzwert. q.e.d.

4.1.10 BEISPIEL Man kann dies Kriterium zum Beispiel auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ anwenden. Denn offenbar ist $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} =: b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, und wie bereits erwähnt, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$. Also konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Entsprechend kann man zeigen, dass alle Reihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ (für $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$) konvergieren.

Ein weiteres nützliches Kriterium ist das Wurzelkriterium:

4.1.11 SATZ *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ , d.h. } \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq c \quad \text{ für ein } 0 < c < 1 \text{ und fast alle } n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Und wenn gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \text{ , d.h. } \quad \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{ für unendlich viele } n,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der geometrischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c^k$. Die zweite Aussage folgt aus Satz 4.1.4. Denn ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ und damit $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n, dann kann a_n keine Nullfolge sein. q.e.d.

Eine absolut konvergente Reihe hat die Eigenschaft, dass auch jede Umordnung der Reihe wieder konvergiert und zwar gegen denselben Grenzwert. Konvergiert eine Reihe aber nicht absolut, so ist die Situation eine völlig andere. Der *grosse Umordnungssatz* von Riemann besagt folgendes:

4.1.12 Satz *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit Grenzwert a, die nicht absolut konvergiert, und sei b eine beliebig gewählte reelle Zahl, verschieden von a. Dann gibt es eine Permutation π der natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, dass die entsprechende Umordnung der Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$$

gegen b konvergiert.

Beweis. Weil die Reihe nicht absolut konvergiert, müssen unendlich viele der Summanden a_n positiv und unendlich viele negativ sein. Bezeichnen wir die positiven Summanden mit b_k ($k \in \mathbb{N}$) und die negativen Summanden mit $-c_k$ ($k \in \mathbb{N}$). Weil es sich um Teilfolgen der Folge a_n handelt, gilt

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 = \lim_{k\to\infty} c_k \,.$$

Ausserdem muss gelten

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \,.$$

Denn angenommen, es gäbe eine Zahl M so dass $\sum_{k=1}^{n} c_k \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgte

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} a_k \leq 2\sum_{k=1}^{n} c_k \leq 2M \,,$$

und daraus

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq a + 2M \quad \forall n \,.$$

Dann wäre die Reihe doch absolut konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Entsprechendes gilt auch für die Reihe, gebildet aus den b_k.

Sei jetzt $b \geq 0$ vorgegeben. Wir addieren zunächst soviele positive Summanden auf, bis die Schranke b übertroffen wird. Das ist möglich, weil die Summe der positiven Summanden unbeschränkt wächst. Dann fügen wir negative Summanden hinzu, bis die Summe unter die Schranke b fällt, usw. Auf diese Weise entsteht eine Reihe, deren Teilsummen um den gewünschten Grenzwert oszillieren. Genauer konstruieren wir die Umordnung der Reihe rekursiv folgendermassen: Wir wählen n_1 minimal mit $s_1 = b_1 + \cdots + b_{n_1} > b$, und m_1 minimal mit $s_1' = s_1 - (c_1 + \cdots + c_{m_1}) < b$. Sind s_j und s_j' definiert, wählen wir

$$n_{j+1} \quad \text{minimal mit} \quad s_{j+1} = s_j' + (b_{n_j+1} + \cdots + b_{n_{j+1}}) > b \quad \text{und}$$

$$m_{j+1} \quad \text{minimal mit} \quad s_{j+1}' = s_{j+1} - (c_{m_j+1} + \cdots + c_{m_{j+1}}) < b \,.$$

Wegen der Minimalität der Zahlen n_j, m_j ist $|s_j - b| < b_{n_j}$ und $|s_j' - b| < c_{m_j}$ für alle j. Daraus folgt

$$\lim_{j\to\infty} s_j = \lim_{j\to\infty} s_j' = b \,.$$

Für einen negativen Grenzwert muss man die Rollen der positiven und negativen Summanden vertauschen. q.e.d.

Ohne Beweis sei hier noch zur Ergänzung angegeben, wie es sich bei komplexen Reihen verhält.

4.1.13 SATZ *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe gebildet aus komplexen Summanden* a_k*, die nicht absolut konvergiert. Dann tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:*

1. *Jede Umordnung der Reihe divergiert.*

2. *Zu jeder Zahl* $c \in \mathbb{C}$ *gibt es eine Umordnung der Reihe, die gegen* c *konvergiert.*

3. *Die durch Umordnung der Reihe realisierbaren Grenzwerte bilden eine reelle Gerade in der komplexen Ebene.*

Hierzu einige Beispiele:

4.1.14 BEISPIELE Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n!$ ist vom ersten Typ. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \quad \text{für } a_{2n-1} = \tfrac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ und } a_{2n} = \tfrac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot i \text{ für } n \in \mathbb{N} \,,$$

ist vom zweiten Typ.