

# Aplikace matematiky

---

Lothar Collatz

Über einige neuere Entwicklungen bei Differenzenverfahren für  
Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen

*Aplikace matematiky*, Vol. 10 (1965), No. 2, 165–177

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102944>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER EINIGE NEUERE ENTWICKLUNGEN  
BEI DIFFERENZENVERFAHREN FÜR RANDWERTAUFGABEN  
PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

L. COLLATZ

In den letzten 20 Jahren sind Differenzenverfahren in sehr großem Maße zur näherungsweise Lösung von Randwertaufgaben eingesetzt worden. Bei vielen Problemen, insbesondere bei nichtlinearen Aufgaben und bei Vorhandensein komplizierterer Ränder und Randbedingungen ist das Differenzenverfahren oft das einzige, praktisch brauchbare Näherungsverfahren. Durch den Einsatz von Großrechenanlagen und die Entwicklung besserer Iterationsverfahren wurde es möglich, die dabei auftretenden Gleichungssysteme für  $n$  Unbekannte auch für Werte von  $n$  in der Größenordnung von  $10^4$  bis  $10^5$  zu behandeln. Solche Werte von  $n$  treten auf, wenn man feinere Gitter verwendet, oder wenn man mehr als 2 unabhängige Veränderliche hat. Bei diesen großen Gleichungssystemen werden die Fragen nach der erzielbaren und garantierbaren Genauigkeit von großer Wichtigkeit; obwohl sich viele Personen mit diesem aktuellen Gebiet beschäftigt haben, kann für die fundamentalen Probleme bei Genauigkeitsuntersuchungen wohl noch nicht von einer befriedigenden Klärung gesprochen werden; vergleiche Nr. 5. Man hat allerdings mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden schon manchen schönen Erfolg verzeichnen können. Es sei daher hier gestattet, zu versuchen, einen Überblick über die gegenwärtige Lage und über wünschenswerte weitere Forschungen auf diesem Gebiet zu geben, wobei vielfach, gewissermaßen zur Illustration, spezielle Fragen herausgegriffen werden sollen.

I. AUFSTELLUNG VON DIFFERENZENVERFAHREN,  
INSBESONDERE MEHRSTELLENVERFAHREN

Der Differentialgleichung  $Fu = 0$  für eine Funktion  $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$  wird im Normalfall eines regulären kubischen Gitters der Maschenweite  $h$  ein System von Differenzengleichungen  $F_h u^{(h)} = 0$  für eine Gitterfunktion  $u^{(h)}$  gegenübergestellt und entsprechend den Randbedingungen  $Ru = 0$  [im allgemeinen ist  $R$  ein Vektor] ein System von Gleichungen  $R_h u^{(h)} = 0$ ; die Aufstellung geeigneter Randoperatoren  $R_h$  kann bei gekrümmten Rändern besondere Sorgfalt erfordern, vgl. Albrecht-Uhlmann [57], Uhlmann [58]. Über die Aufstellung von Differenzenverfahren, d.h. der Opera-

toren  $F_h$  und  $R_h$ , gibt es viele zusammenfassende Darstellungen, vergleiche etwa Forsythe-Wasow [60], Collatz [60], Worobjow [61], Saul'jev [64] und andere, so daß hier nicht darauf eingegangen werden soll.

Bei der überwiegenden Mehrheit der auf Rechenanlagen behandelten Aufgaben wird das sog. „gewöhnliche Differenzenverfahren“ verwendet; es sei daher bei dieser Gelegenheit auf die nach Ansicht des Verfassers viel zu wenig benutzten verbesserten Differenzenverfahren hingewiesen. Es gibt hier 2 Arten:

1) Man kann Differenzenformeln mit höherer Approximation durch Benutzung weiterer Nachbarpunkte verwenden (ein Beispiel hierfür gibt der Stern (33)).

2) Man kann die Differentialgleichung an mehreren Gitterpunkten heranziehen und erhält das Mehrstellenverfahren mit seinen Varianten, Stüssi [35], Mikeladze [40], Zusammenfassung bei Collatz [60] und anderen.

Für die numerische Rechnung haben sich die Mehrstellenverfahren sehr bewährt. Man hat bei ihnen den Vorteil, daß man entweder bei vorgeschriebener Genauigkeit mit weniger Gitterpunkten, also kleineren Gleichungssystemen auskommt, oder aber, daß man unter Ausnutzung der Kapazität der Rechenanlage bei gegebener Zahl von Gitterpunkten genauere Resultate erhält.

Mehrstellenformeln für den Laplace'schen Operator  $\Delta u$  in 2 und 3 Dimensionen bei regulären Gittern finden sich bei Collatz [60]; bei Kugel- und Zylindersymmetrie und bei Rechtecksgittern (verschiedene Maschenweiten) bei Albrecht [62]; es sei hier von seinen zahlreichen Formeln als Beispiel nur die folgende, sehr nützliche Formel für

$$(1) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{k-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

bei Kugelsymmetrie an der Gitterpunktsstelle  $r = ph$  genannt:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline b_0 - b_1 p + b_2 p^2 & a_0 + a_2 p^2 & b_0 + b_1 p + b_2 p^2 \\ \hline \end{array} \{u\} + \\ + \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_0 - B_1 p + B_2 p^2 & A_0 + A_2 p^2 & B_0 + B_1 p + B_2 p^2 \\ \hline \end{array} \{h^2 \Delta u\} \approx 0,$$

$$a_0 = 8k(k+2)(k-3) = -2b_0, \quad a_2 = 96(k+2) = -2b_2,$$

$$b_1 = -24(k+2)(k-1) = -12B_1,$$

$$A_0 = 2(k+4)(k-3), \quad A_2 = 40(k+2) = 10B_2, \quad B_0 = k(k-3),$$

dort stehen auch Mehrstellenformeln für  $\Delta u - \partial u / \partial t$ . Für die Plattengleichung  $\Delta \Delta u = r(x, y)$  finden sich Mehrstellenformeln bei Zurmühl [57], für parabolische Gleichungen bei Albrecht [57]. Engeli [62] ermöglicht die Aufstellung von Mehrstellenformeln in beliebigen Fällen, auch bei veränderlichen Koeffizienten der Differentialgleichung, indem für jeden inneren Gitterpunkt ein Gleichungssystem gelöst wird, welches den Taylor-Abgleich bis zu einer bestimmten vorgegebenen Ordnung sichert.

Diese Methode kann auch in Form eines Programms in eine Rechananlage eingegeben werden; natürlich fällt das Programm im allgemeinen Fall etwas kompliziert aus.

Man kann das Mehrstellenverfahren nun noch flexibler gestalten und rationeller durchführen, indem man nicht mit einheitlicher Maschenweite  $h$  rechnet, sondern mit verschiedenen Maschenweiten, und zwar mit kleineren Maschenweiten dort, wo stärkere Änderungen der Funktionswerte zu erwarten sind (z.B. in der Nähe von einspringenden Ecken und dergleichen). Man braucht dann Übergangsformeln an den Stellen, wo die Gitter mit verschiedenen Maschenweiten zusammenkommen. Das sei am Beispiel des Mehrstellenverfahrens für eine Differentialgleichung, in der  $u(x, y)$  und  $\Delta u$  auftreten, erläutert. Abbildung 1 zeigt ein Gebiet, in welchem Gitter mit den Maschenweiten  $h$  und  $2h$  aneinanderstoßen. Man braucht dann für den Punkt  $A$  eine neue Mehrstellenformel; eine solche lautet z.B. bei Verwendung der in der Abbildung 1 markierten Gitterpunkte:

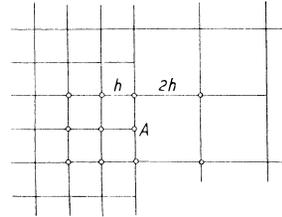


Abb. 1.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 20 & 10\sigma & -1 + 2\sigma \\ \hline 20 & -104 + 8\sigma & 36 - 32\sigma & \\ \hline 5 & 20 & 10\sigma & -1 + 2\sigma \\ \hline \end{array} \{u\} +$$

$$+ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \delta & -2 - \delta - \sigma & 0 \\ \hline -5\sigma & -32 - 2\delta + 14\sigma & 12 + 2\delta - 19\sigma & \\ \hline 0 & \delta & -2 - \delta - \sigma & 0 \\ \hline \end{array} \{h^2 \Delta u\} \approx 0$$

wobei  $\delta$  und  $\sigma$  beliebig sind; bei Taylor-Entwicklung werden alle Glieder bis zu den partiellen Ableitungen 4. Ordnung einschließlich abgeglichen.

Für  $\sigma = 13$  und  $\delta = 5\tau$  erhält man die einfachere Formel

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 26 & 5 \\ \hline 4 & 0 & -76 & \\ \hline 1 & 4 & 26 & 5 \\ \hline \end{array} \{u\} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \tau & -3 - \tau & 0 \\ \hline -13 & 30 - 2\tau & -47 + 2\tau & \\ \hline 0 & \tau & -3 - \tau & 0 \\ \hline \end{array} \{h^2 \Delta u\} \approx 0.$$

Die Koeffizienten von  $u$  als Elemente einer Zeile einer Matrix  $T = (t_{jk})$  erfüllen die Bedingung (32), sodaß man hiermit (etwa für die Poissonsche Gleichung) Gleichungssysteme aufstellen kann, die zu Matrizen monotoner Art gehören.

Beispiel: Mit dieser Methode wurde das Torsionsproblem für einen winkelförmigen Querschnitt behandelt; der Querschnitt setzt sich aus 3 Quadraten der Länge 1 zusammen (wie in Abbildung 2) und wurde in der Nähe der Ecke  $E$  mit einem feineren Gitter der Maschenweite  $h = 1/N$  und sonst mit einem größeren Gitter der Maschenweite  $2h = 2/N$  überdeckt; (Abbildung 2 ist für  $N = 8$  gezeichnet). Die Tabelle gibt die Näherungswerte in den Punkten  $P$  und  $Q$ , und zwar in den ersten 3 Spalten nach der hier beschriebenen Methode (Rechnung mit 2 verschiedenen feinen Gittern, und zwar wurde jeweils dasselbe Gebiet, nämlich das Trapez  $PEFG$  mit einem feineren Gitter überzogen) und in den letzten 2 Spalten nach der sonst üblichen Methode (das ganze Gebiet wird mit einem einheitlichen Netz der Maschenweite  $1/N$  überzogen).

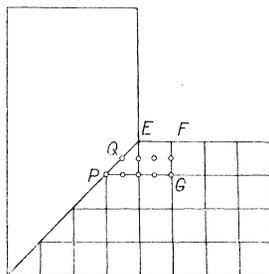


Abb. 2.

	Rechnung mit 2 verschied. Gittern			Rechnung mit einem einheitlichen Gitter	
	8	16	32	8	16
$N =$	8	16	32	8	16
Anzahl der Unbekannten (bei Ausnutzung der Symmetrien)	24	105	438	84	360
Näherungswert in $P$	0,137890	0,143143	0,143752	0,141643	0,143151
Näherungswert in $Q$	0,102473	0,108236	0,109360	0,105482	0,108246

Vergleicht man diese Zahlen für  $N = 16$  bei beiden Methoden, so sieht man, daß sie ungefähr die gleiche Genauigkeit haben (die Methode mit einheitlichem Gitter ist ein klein wenig genauer), aber mit einheitlichem Gitter hat man 360 Unbekannte, bei zwei verschiedenen Gittern nur 105 Unbekannte. Dafür ist die Methode mit einheitlichem Gitter einfacher zu programmieren.

Eine ganz andere Art, die Genauigkeit beim Differenzenverfahren zu erhöhen, besteht darin, mit 2 verschiedenen Maschenweiten  $h$  und  $h'$  zu rechnen und aus den erhaltenen Näherungen neue Werte zu extrapolieren, etwa mit Hilfe der Richardson Extrapolation, vergleiche Ljusternik [47], Birman [50] und Stetter [64].

2. VERSCHIEDENE ITERATIONSVERFAHREN,  
BENUTZUNG VON VEKTOR- UND MATRIXNORMEN

Für lineare Probleme sind schon umfangreiche Theorien entwickelt worden. Es ist gerade in den letzten Jahren gelungen, Fehlerabschätzungen und Konvergenzbeweise auf eine einheitliche funktionalanalytische Quelle zurückzuführen, wobei sich auch für die praktische Rechnung Verbesserungsmöglichkeiten ergaben. Die beiden grundlegenden Sätze der Funktionalanalysis, die dabei Anwendung finden, sind der Kontraktionssatz und der Schauder'sche Satz (bzw. in endlich dimensionalen Räumen der Brouwer'sche Satz). Es geht hier, Banach'sche Räume zugrunde zu legen.

**Der Kontraktionssatz** (Der Satz wird hier nur in einer ganz speziellen Form ausgesprochen). *In einem Banach'schen Raum  $\tilde{R}$  sei die Gleichung*

$$u = Tu$$

*vorgelegt; der Operator  $T$  sei in einem vollständigen Teilraum  $F$  von  $\tilde{R}$  definiert und es gebe eine Konstante (die „Lipschitz-Konstante“)  $K < 1$  mit*

$$(4) \quad \|Tv - Tw\| \leq K\|v - w\| \quad \text{für alle } v, w \in F.$$

*Die Iteration*

$$(5) \quad u_{n+1} = Tu_n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

*ausgehend von einem Element  $u_0 \in F$ , sei in  $F$  unbeschränkt ausführbar. Dann besitzt die Gleichung  $u = Tu$  in  $F$  genau eine Lösung  $u$ ; die  $u_n$  konvergieren gegen  $u$  und es gilt die Fehlerabschätzung (6)*

$$(6) \quad \|u - u_n\| \leq \frac{K^n}{1 - K} \|u_1 - u_0\| \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Bei dem beim Differenzenverfahren auftretenden linearen Gleichungssystem

$$(7) \quad Ax = r$$

( $x$  gesuchter Vektor der Näherungswerte,  $r$  gegebener Vektor,  $A$  gegebene Matrix) wird die Matrix  $A$  in der Form geschrieben

$$(8) \quad A = A_L + A_R + D$$

( $A_L$  linke untere Dreiecksmatrix,  $A_R$  rechte obere Dreiecksmatrix,  $D$  Diagonalmatrix); z.B. habe  $A$  die Elemente  $a_{jk}$  und  $A_L$  die Elemente  $l_{jk}$ , so ist

$$l_{jk} = \begin{cases} a_{jk} & \text{für } j > k, \\ 0 & \text{für } j \leq k. \end{cases}$$

Beim Iterationsverfahren in Einzelschritten wird eine Folge von Näherungsvektoren  $x_0, x_1, \dots$  bestimmt nach

$$(9) \quad (A_L + D)x_{k+1} + A_R x_k = r \quad (k = 0, 1, \dots),$$

während man bei der overrelaxation, Young [54], mit einer Konstanten  $\omega$  nach

$$(10) \quad (\omega A_L + D)x_{k+1} = [(1 - \omega)D - \omega A_R]x_k + \omega r \quad (k = 0, 1, \dots)$$

rechnet. Für  $\omega = 1$  geht die overrelaxation in das Einzelschrittverfahren über. Inzwischen sind zahlreiche Varianten der overrelaxation aufgestellt worden, vergleiche z.B. Nr. 3, die Blockiteration von Hagemann-Varga [64] usw. (10) hat die Form der Iteration (5). Unter Verwendung der weitentwickelten Theorie der Vektor- und Matrixnormen (vgl. Householder [64]) kann man folgende Fehlerabschätzung aufstellen:

Mit  $\gamma = 1 - \omega^{-1}$  lautet (10), falls  $A$  nichtsingulär ist,

$$(11) \quad x_{k+1} - x = B(x_{k+1} - x_k) \quad \text{mit} \quad B = A^{-1}[\gamma D - A_R];$$

daraus folgt

$$(12) \quad \|x_{k+1} - x\| \leq \|B\| \|x_{k+1} - x_k\| \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Die Diskussion läßt sich sehr viel weiter durchführen, wenn man das Gleichungssystem (7) in der Gestalt

$$(13) \quad x = Sx + s$$

schreibt und  $S$  als „zweifach zyklisch“ annimmt, d.h.  $S$  habe die Gestalt, Varga [62],

$$S = \left( \begin{array}{c|c} 0 & S_2 \\ \hline S_1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} n_1 \text{ Zeilen} \\ \} n_2 \text{ Zeilen} \end{array} \quad (n_1 + n_2 = n)$$

$$\begin{array}{cc} n_1 \text{ Spal-} & n_2 \text{ Spal-} \\ \text{ten} & \text{ten} \end{array}$$

und  $S$  sei hermitesch. Die beim Differenzenverfahren auftretenden linearen Gleichungssysteme erfüllen oft diese Bedingungen.

Nun werde noch  $\|S\| \leq t < 1$  vorausgesetzt. Verwendet man als Vektornorm die Euklidische Länge eines Vektors und als Matrixnorm die Spektralnorm (die Spektralnorm  $\sigma(C)$  einer Matrix  $C$  ist die positive Quadratwurzel aus der größten charakteristischen Zahl der Matrix  $\bar{C}'C$ ), so hat man, Albrecht [61], für  $0 < \omega < 2$  die Konvergenzaussage für die overrelaxation und die Fehlerabschätzung (12) mit dem Wert  $\|B\| = Z$ , wobei sich  $Z$  mit  $q = 1 - 2\gamma$  aus

$$(14) \quad 2Z(1 - t^2) = [q^2 t^2 + t^4 + 4\gamma^2(1 - t^2)]^{\frac{1}{2}} + [q^2 t^2 + t^4]^{\frac{1}{2}}$$

berechnet.

### 3. ANWENDUNG DES KONTRAKTIONSSATZES

Für größere Gleichungssysteme des Differenzenverfahrens ist das Verfahren der alternierenden Richtungen von Peaceman-Rachford 1955 entwickelt worden und

auch dieses Verfahren ordnet sich in die allgemeine Theorie der Iterationsverfahren und des Kontraktionssatzes ein. Der Einfachheit halber werde es für 2 unabhängige Veränderliche  $x, y$ , also für Funktionen  $U(x, y)$  beschrieben. Die elliptische Differentialgleichung laute

$$(15) \quad -\frac{\partial}{\partial x}(a(x, y) U_x) - \frac{\partial}{\partial y}(c(x, y) U_y) + d(x, y) u = \hat{r}(x, y)$$

mit den Abkürzungen

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \hat{H} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, y) \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \hat{V} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(c(x, y) \frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \hat{D} = d(x, y).$$

oder kurz

$$(16) \quad \hat{H}U + \hat{V}U + \hat{D}U = \hat{r}.$$

Dieser Differentialgleichung wird die Differenzgleichung (Vektor  $u$  der unbekanntenen Näherungswerte) gegenübergestellt

$$(17) \quad Hu + Vu + Du = r.$$

Bei dem Verfahren der alternierenden Richtungen bestimmt man nun eine Folge von Näherungen  $u_0, u_1, u_2, \dots$  für  $u$  nach der Vorschrift ( $E =$  Einheitsmatrix),

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (H + D + \varrho_k E) u_{2k+1} + (V - \varrho_k E) u_{2k} \\ (V + D + \varrho_k E) u_{2k+2} + (H - \varrho_k E) u_{2k+1} \end{array} \right\} = r \quad (k = 0, 1, \dots)$$

wobei über die Konstanten  $\varrho_k$  noch verfügt werden kann. Wiederum der Einfachheit halber sei im folgenden  $\varrho_k = \varrho = \text{const.}$  und zwar sei  $\varrho > 0$ .

Für die Fehler  $\varepsilon_{2k} = u_{2k} - u$  und die Größen  $\eta_{2k} = (V + D + \varrho E) \varepsilon_{2k}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) gilt dann

$$(19) \quad \eta_{2k+2} = H^* V^* \eta_{2k}$$

mit

$$(20) \quad H^* = (H - \varrho E)(H + D + \varrho E)^{-1} \quad \text{und} \quad V^* = (V - \varrho E)(V + D + \varrho E)^{-1};$$

es wird somit

$$(21) \quad \|\eta_{2k+2}\| \leq \|H^*\| \|V^*\| \|\eta_{2k}\|.$$

Nach Habetler-Wachspress [61] kann man den kontrahierenden Charakter der Matrizen  $H^*, V^*$  zeigen, wenn man eine besondere Vektornorm nach (22) verwendet, und damit ordnet sich die Theorie dem Kontraktionssatz unter, Albrecht [64], so daß man dann mit einem Schlage Konvergenzbeweis und Fehlerabschätzung hat. Es gilt der Satz:

Die reellen Matrizen  $S$  und  $P$  mögen die Voraussetzungen erfüllen:  $S = S'$  (d.h.  $S$  ist symmetrisch),  $v' S v > 0$  und  $v'(P' + P)v > 0$  für beliebige reelle Vektoren  $v \neq 0$ ; bei der Vektornorm

$$(22) \quad \|v\| = [v' S^{-1} v]^{\frac{1}{2}}$$

gilt dann für die ihr zugeordnete Matrixnorm

$$(23) \quad \begin{aligned} \|(P - S)(P + S)^{-1}\| &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|(P - S)(P + S)^{-1} v\|}{\|v\|} = \\ &= \sup_{w \neq 0} \frac{\|(P - S) w\|}{\|(P + S) w\|} < 1. \end{aligned}$$

Setzt man in (20)  $P = H + \frac{1}{2}D$ ,  $S = \varrho E + \frac{1}{2}D$ , so wird  $H^* = (P - S)(P + S)^{-1}$ ; bei elliptischen Differentialgleichungen und für  $\varrho > 0$  ist dann  $S$  positiv definit und nach dem genannten Satz läßt sich  $\|H^*\| < 1$  und ebenso  $\|V^*\| < 1$  zeigen. Über die zweckmäßige Wahl der Parameter  $\varrho_k$  weiß man noch sehr wenig. Für einfache Bereiche, wie z.B. ein Rechteck, kann man sich wohl einen Überblick verschaffen, vgl. Varga [62], aber bei komplizierteren Bereichen scheint man bisher mit den Untersuchungen noch nicht durchgekommen zu sein.

Der Gedanke, mit einer anderen Vektornorm anstatt mit der Euklidischen Norm zu arbeiten, führt auch bei der overrelaxation (10) zum Ziele, wie in dem Fall  $D = E$  (durchdividiertes Gleichungssystem) gezeigt sei (Albrecht [64]); Gleichung (10) läßt sich schreiben als

$$(24) \quad x_{k+1} = K(\omega) x_k + \tilde{r} = [E - \omega L(\omega)] x_k + \tilde{r}$$

mit

$$L(\omega) = (E + \omega A_L)^{-1} A$$

wobei  $\tilde{r}$  von  $\omega$ , aber nicht von  $x_k$  abhängt; die Matrix  $A$  werde als symmetrisch und positiv definit vorausgesetzt. Hier erhält man nun bei Verwendung der Vektornorm

$$(25) \quad \|v\| = [v' A v]^{\frac{1}{2}}$$

für die ihr zugeordnete Matrixnorm

$$(26) \quad \begin{aligned} \|K(\omega)\| &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|K(\omega) v\|}{\|v\|} = \\ &= \sup_{w \neq 0} \left[ 1 - \omega(2 - \omega) \frac{[L(\omega) w]' [L(\omega) w]}{w' A w} \right]^{\frac{1}{2}} < 1 \end{aligned}$$

für  $0 < \omega < 2$ .

4. MONOTONIEAUSSAGEN UND ANWENDUNG  
DES BROUWER'SCHEN SATZES

Eine andere zur Lösung der Differenzgleichungen in neuerer Zeit häufig eingeschlagene Richtung benutzt die Theorie der monotonen Operatoren. Definitionsbereich  $D$  und Wertebereich eines Operators  $T$  mögen in halbgeordneten Räumen liegen. Dann heißt der Operator  $T$  monoton, wenn  $v \leq w$  zur Folge hat  $Tv \leq Tw$  für alle  $v, w \in D$ ; der Operator  $T$  heißt von monotoner Art, Collatz [52], wenn  $Tv \leq Tw$  zur Folge hat  $v \leq w$  für alle  $v, w \in D$ .

Bei einem Operator monotoner Art  $T$  hat man zur Lösung einer Gleichung  $Tu = r$  die sehr bequeme Möglichkeit der Einschließung: hat man zwei Näherungen  $v_1$  und  $v_2$  mit  $Tv_1 \leq r \leq Tv_2$ , so gilt, falls eine Lösung  $u$  existiert,  $v_1 \leq u \leq v_2$ . Differenzgleichungen bei Randwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungen haben nun sehr oft eine Matrix, welche das sogenannte „schwache Zeilensummenkriterium“ (32) erfüllt und welche, als Operator aufgefasst, einen Operator monotoner Art bedeutet, (Collatz [60], S. 348). Man hat daher hier sehr einfache Möglichkeiten, Fehlerabschätzungen für die Lösung der Differenzgleichungen durchzuführen.

Häufig hat man bei monotonen linearen Operatoren auch die Möglichkeit der Konvergenzbeschleunigung: In einem halbgeordneten Raum ist ein Intervall  $\langle v, w \rangle$  die Menge aller Elemente  $z$  mit  $v \leq z \leq w$ , wobei  $v \leq w$  vorausgesetzt ist. Da man bei den Differenzgleichungen mit endlich dimensionalen Räumen arbeitet, kann man anstelle des Schauder'schen Satzes den Brouwer'schen Satz heranziehen, der in diesem Spezialfall folgendes besagt: Bildet ein Matrixoperator  $T$  ein Intervall  $I$  in sich ab, so enthält  $I$  (mindestens) einen Fixpunkt  $u$  mit  $Tu = u$ ; Schröder [59] fragt nun nach solchen Intervallen  $I$  mit der Eigenschaft  $TI \subseteq I$ . Albrecht [62a] verwendet den Brouwer'schen Satz zu einer Extrapolation: Für das Gleichungssystem

$$(27) \quad (E - V)u = \tilde{T}u + r$$

( $E$  Einheitsmatrix,  $V$  und  $\tilde{T}$  gegebene Matrizen,  $r$  gegebener Vektor,  $u$  gesuchter Vektor) wird das Iterationsverfahren

$$(28) \quad (E - V)u_{n+1} = \tilde{T}u_n + r \quad (n = 0, 1, \dots)$$

aufgestellt;  $E - V$  sei von monotoner Art und  $\tilde{T}$  sei monoton; für die Differenzen

$$(29) \quad \delta_n = u_n - u_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

gelte

$$(30) \quad 0 < \delta_2 < \delta_1.$$

Man bestimme  $m, M$  mit  $0 < m \leq M < 1$  so, daß  $m\delta_1 \leq \delta_2 \leq M\delta_1$  gilt; dann liegt eine Lösung  $u$  von (27) im Intervall

$$(31) \quad I = \left\langle u_2 + \frac{m}{1-m} \delta_2, u_2 + \frac{M}{1-M} \delta_2 \right\rangle.$$

Bei den Differenzgleichungen der Randwertaufgaben beobachtet man oft eine langsame, monotone Konvergenz bei Iteration in Gesamt- oder in Einzelschritten, und die Voraussetzung (30) ist dann in der Regel erfüllt; es besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem „ $\delta^2$ -Prozess“ von Aitken [50] und der Formel (31), jedoch fehlt für die Formel von Aitken eine Fehlerabschätzung, während (31) neben der Konvergenzbeschleunigung eine exakte Einschließung liefert. Albrecht [62a] untersucht auch Fälle, in denen der Operator nicht monoton ist.

J. Schröder [59] erweiterte die Theorie auf den Fall, daß der Matrixoperator  $T$  die Form hat  $T = T_1 - T_2$ , wobei  $T_1$  und  $T_2$  monoton sind. Jede reelle Matrix  $T$  hat diese Gestalt. Er gibt Voraussetzungen für die Anfangsvektoren an, derart, daß man dann Einschließungsintervalle für Lösungsvektoren erhält (vgl. auch die Darstellung bei Collatz [64]). Die Frage, wie man auf einfache Weise Ausgangsvektoren für die Iteration so bestimmen kann, daß die Voraussetzungen der Schröder'schen Theorie erfüllt sind, wird in Untersuchungen von Braess [62] und Schmidt [64] verfolgt.

Wegen der großen Vorzüge der monotonen Operatoren für Fehlerabschätzungen sind diese in neuerer Zeit viel untersucht worden; auch beim Mehrstellenverfahren liegen häufig solche Operatoren vor.

Beim gewöhnlichen Differenzenverfahren kann die monotone Art der Koeffizientenmatrix  $T = (t_{jk})$ , wie oben angedeutet, oft mit Hilfe des hinreichenden Kriteriums gezeigt werden: Es sei

$$(32) \quad t_{jj} > 0, \quad t_{jk} \leq 0 \quad \text{für } j \neq k, \quad \sum_{k=1}^n t_{jk} = s_j,$$

alle  $s_j \geq 0$ , mindestens ein  $s_j > 0$ ,  $T$  nicht zerfallend;

dann ist  $T$  von monotoner Art. Bramble und Hubbard [64] beweisen nun auch die monotone Art von gewissen Matrizen, bei welchen die  $t_{jk}$  für  $j \neq k$  verschiedene Vorzeichen haben; z.B. kann auf diese Weise das Differenzenverfahren höherer Approximation, bei welchem  $\Delta u$  durch den Stern ersetzt wird

$$(33) \quad \frac{1}{12h^2} \begin{pmatrix} & & & -1 & & & \\ & & & 16 & & & \\ & & -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ & & & 16 & & & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

erfasst werden und in der genannten Arbeit wird auch für die zugehörige Matrix die monotone Art bewiesen.

## 5. AUSBLICK AUF WEITERE FRAGEN

So sind bei den Netzmethode auf verschiedenen Wegen schöne Fortschritte erzielt worden, aber einige der großen Probleme sind ungelöst geblieben. Die wich-

tigste Frage ist wohl die nach der Genauigkeit der Differenzlösung, d.h. man möchte den Fehler der Differenzlösung gegenüber der Lösung der Randwertaufgabe abschätzen können, und hier sind wir von einer wirklich befriedigenden Lösung noch etwas entfernt. Wohl sind immer wieder Versuche gemacht worden, Schranken für diesen Fehler, z.B. mit Hilfe von Schranken für gewisse höhere Ableitungen der Lösungsfunktion, zu gewinnen. Es sind auch schon Beispiele durchgerechnet worden, bei denen man auf diese Weise zum Ziel kommt; aber sowie die Beispiele ein wenig komplizierter werden, versagen diese Methoden.

Es seien auch andere Methoden erwähnt, Fehlerabschätzungen für das Differenzenverfahren aufzustellen, z.B. die Hyperkreismethode von Syngé [57]. Eine weitere Möglichkeit, den Fehler abzuschätzen, (Varga [64], Birkhoff-de Boor [64]), ist die folgende:

Bei einer bestimmten Gitterweite  $h$  liefert das Differenzenverfahren in den Gitterpunkten Näherungswerte  $u^{(h)}$ . Es wird nun (etwa bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung und 2 unabhängigen Veränderlichen) eine mit stetigen Ableitungen bis zur 2. Ordnung einschließliche Funktion  $v(x, y)$  (d.h. eine Funktion aus der Klasse  $C^2$ ) bestimmt, welche in den Gitterpunkten die Werte  $u^{(h)}$  annimmt. Setzt man  $v$  in die Randwertaufgabe  $Fu = 0$ ,  $Ru = 0$  ein, so entstehen gewisse Defekte  $\delta_1 = Fv$ ,  $\delta_2 = Rv$ ; in vielen Fällen, z.B. bei der 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie, kann man aus diesen Defekten  $\delta_1, \delta_2$  eine Schranke für den Fehlerbetrag  $|v - u|$  herleiten (vgl. Collatz [60], S. 399ff.), ohne daß Schranken für die Lösungsfunktion oder ihre Ableitungen benötigt werden. Es kommt hier also darauf an, eine interpolierende Funktion  $v(x, y) \in C^2$  aufzustellen. Das gelingt, wenn der Rand des Bereiches sich aus Stücken von Gittergeraden zusammensetzt; bei der Konstruktion von de Boor [64] wird dabei jedes Gitterquadrat in 5 Teilbereiche nach Abb. 3 zerlegt und  $v(x, y)$  in jedem dieser Teilbereiche durch eine bikubische Funktion (ein Polynom vom Gesamtgrad  $\leq 6$ , welches in  $x$  und  $y$  je für sich einen Grad  $\leq 3$  hat) dargestellt. Numerische Erprobungen finden zur Zeit statt.

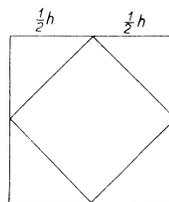


Abb. 3.

Eine weitere sehr wichtige Frage lautet: Man beobachtet oft, daß die nach dem Differenzenverfahren berechneten Näherungen durchweg kleiner oder durchweg größer sind als die Lösung der Randwertaufgabe. Kann man einfache hinreichende Bedingungen für diese Erscheinung angeben? Ferner sind Fälle bekannt, in denen das gewöhnliche Differenzenverfahren kleinere und ein Mehrstellenverfahren größere Werte lieferte als die Lösungsfunktion. Kann man einfache Klassen von Problemen angeben, bei denen diese Erscheinung garantiert werden kann? Dann hätte man eine ideale Möglichkeit der Fehlerabschätzung. Ähnliche Fragestellungen ergeben sich auch beim Differenzenverfahren für Eigenwertaufgaben, wo schon einige schöne Teilergebnisse vorliegen, so daß man die Hoffnung hegen kann, daß man eines Tages auch für die fundamentalen mathematischen Probleme beim Differenzenverfahren für Randwertaufgaben mehr Erfolg als bisher wird verzeichnen können.

## Literatur

- A. C. Aitken [50]: On the iterative solution of a system of linear equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A 63 (1950), 52–80.
- J. Albrecht [57]: Zum Differenzenverfahren bei parabolischen Differentialgleichungen, Z. Angew. Math. Mech. 37 (1957), 202–212.
- J. Albrecht [61]: Fehlerabschätzungen bei Relaxationsverfahren zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme, Num. Math. 3 (1961), 188–201.
- J. Albrecht [62]: Zum Mehrstellenverfahren bei Kugel- und Zylindersymmetrie, Z. Angew. Math. Mech. 42 (1962), 397–402.
- J. Albrecht [62a]: Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge, Num. Math. 4 (1962), 196–208.
- J. Albrecht [64]: Vorlesungsmanuskript zu „Math. Praktikum“, Universität Hamburg, W. S. 1963/64.
- J. Albrecht-W. Uhlmann [57]: Differenzenverfahren für die 1. Randwertaufgabe mit krummlinigen Rändern bei  $\Delta u(x, y) = r(x, y, u)$ , Z. Angew. Math. Mech. 37 (1957), 212–224.
- G. Birkhoff-C. R. de Boor [64]: Piecewise polynomial surface fitting, Vortrag Detroit, 2. 9. 1964.
- M. S. Birman [50]: Einige Abschätzungen für die Methode des steilsten Abstiegs, Uspechi Mat. Nauk 3 (37) (1950), 152–155.
- D. Braess [62]: Die Konstruktion monotoner Iterationsfolgen zur Lösungseinschließung bei linearen Gleichungssystemen, Arch. Rat. Mech. Anal. 9 (1962), 97–106.
- J. H. Bramble-B. E. Hubbard [64]: New Monotone Type Approximations for Elliptic Problems, Math. Comp. 18 (1964), 349–367.
- L. Collatz [52]: Aufgaben monotoner Art, Arch. Math. 3 (1952), 366–376.
- L. Collatz [60]: The numerical treatment of differential equations, Springer 1960, 568 S.
- L. Collatz [64]: Funktionalanalysis und Numerische Mathematik, Springer 1964, 371 S.
- Engeli [62]: Automatisierte Behandlung elliptischer Randwertprobleme, Dissertation, ETH Zürich 1962, 132 S.
- G. Forsythe-W. Wasow [60]: Finite difference methods for partial differential equations, New York 1960.
- G. J. Habetler-E. L. Wachspress [61]: Symmetric successive overrelaxation in solving diffusion difference equations, Math. of Comp. 15 (1961), 356–362.
- L. A. Hagemann-R. S. Varga [64]: Block iterative methods for cyclically reduced matrix equations, Num. Math. 6 (1964), 106–119.
- A. S. Householder [64]: The Theory of Matrices in Numerical Analysis (1964), 257 S.
- L. A. Ljusternik [47]: Bemerkungen zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben für die Laplace'sche Differentialgleichung und die Berechnung von Eigenwerten mit Hilfe der Netz-methode [russisch], Trudy Matem. Stekl. 20 (1947), 49–64.
- Sch. E. Mikeladze [40]: Über die Lösung von Randwertaufgaben mit der Differenzenmethode, C. R. Doklady Acad. Sci. URSS 28 (1940), 400–402 [russisch].
- V. K. Saul'yer [64]: Integration of Equations of Parabolic type by the method of Nets, Pergamon Press 1964, 346 S.
- J. W. Schmidt [64]: Ausgangsvektoren für monotone Iterationen bei linearen Gleichungssystemen, Num. Math. 6 (1964), 78–88.
- J. Schröder [59]: Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen mit dem Brouwer'schen Fixpunktsatz, Arch. Rat. Mech., Anal. 3 (1959), 28–44.
- H. J. Stetter [64]: Konvergenz und Stabilität von Diskretisierung nichtlinearer Funktionalgleichungen in Banachräumen, Vortrag Oberwolfach, Juli 1964.
- F. Stüssi [35]: Abh. Internat. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich 3 (1935), S. 413.
- J. L. Synge [57]: Hypercircle in Mathematical Physics, Cambridge 1957, 424 S.

- W. Uhlmann* [58]: Zwei Arbeiten über das Differenzenverfahren für die 1., 2. und 3. Randwert-aufgabe mit krummflächigen Rändern bei  $\Delta u = r(x; u)$ , *Z. Angewandte Math. Mech.* 38 (1958), 130–139, 236–251.
- R. S. Varga* [62]: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall 1962, 322 S.
- R. S. Varga* [64]: Vortrag im Seminar Case Institute of Technology, Ohio, 1964.
- J. W. Worobjow* [61]: *Die Momentenmethode in der Angewandten Mathematik*, Berlin 1961, 143 S.
- D. Young* [54]: Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type, *Trans. Amer. Math. Soc.* 76 (1954), 92–111.
- R. Zurmühl* [57]: Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren, *Z. Angew. Math. Mech.* 37 (1957), 1–16.

Prof. Dr. *L. Collatz*, Institut für angewandte Mathematik der Universität Hamburg, 2 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69, Deutschland.