Mathematics. — *Ein Komplex kubischer Raumkurven.* Von JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of April 28, 1934).

§ 1. Die kubischen Raumkurven ϱ^3 durch die Punkte A_1, A_2, A_3, welche sich auf die vorgegebenen Geraden b_1, b_2, b_3 stützen, bilden einen *Komplex*; drei bez. auf den Geraden b gewählte Punkte bestimmen mit den Punkten A eine ϱ^3. Die Spuren von b_1, b_2, b_3 in der Ebene α der Punkte A seien mit B_1, B_2, B_3 bezeichnet. Sämmtliche durch die 6 Punkte A und B gelegten *nodalen Kurven* der Ebene α gehören ersichtlich dem Komplexe an.

§ 2. Zunächst sollen die *Ausartungen* hervorgehoben werden.

Der Kegelschnitt k^2_{23} durch A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 bildet mit jeder Gerade l_1, die ihn und b_1 trifft, eine ausgeartete ϱ^3. Das *System* dieser ∞^2 Figuren soll mit Σ_{23} bezeichnet werden. Die analogen Systeme entsprechen den Symbolen Σ_{12} und Σ_{13}.

Jeder Kegelschnitt $k_1{}^2$ durch A_1, A_2, A_3 und B_1 wird zu einer ϱ^3 ergänzt durch jede Gerade l_{23}, die $k_1{}^2$, b_2 und b_3 trifft. Jede Transversale von b_2 und b_3 bestimmt *eine* Kurve $k_1{}^2$; hingegen gehört zu einer $k_1{}^2$ eine *Regelschar vierten Grades.* Das System der Figuren $(k_1{}^2, l_{23})$ werde mit Σ_1 bezeichnet; Σ_2 und Σ_3 entsprechen den analogen *Systemen* $(k_2{}^2, l_{13})$ und $(k_3{}^2, l_{12})$.

Jeder Kegelschnitt ϱ^2 durch A_1, A_2, A_3 bildet eine ausgeartete ϱ^3 mit jeder der vier ihn treffenden Transversalen r der Geraden b_1, b_2, b_3. Jede Gerade r ergänzt jede ϱ^2 des durch ihre Spur bestimmten Büschels (ϱ^2). *System* Σ.

§ 3. Die Kegelschnitte δ^2_{23} durch A_2 und A_3, welche b_1, b_2, b_3 treffen, bilden bekanntlich ein *Dimonoid* $\triangle^4_{23}$; sie werden zu ausgearteten ϱ^3 ergänzt durch jede sie schneidende, durch A_1 gelegte, Gerade d_1. Das *System* der (δ^2_{23}, d_1) soll mit $\triangle_{23}$ bezeichnet werden. Analoge Systeme entsprechen den *Symbolen* $\triangle_{12}$ und $\triangle_{13}$.

Ein Kegelschnitt γ^2 durch zwei Punkte A, der zwei der Geraden b trifft, bildet eine ausgeartete ϱ^3 mit jeder der beiden Geraden c durch den dritten Punkt A, welche die dritte Gerade b und γ^2 trifft. Diese Erwägung führt zu 9 *Systemen* von Ausartungen, welche den *Symbolen* $\Sigma_{k,l}$ entsprechen, wo dann die betreffenden Geraden c den Punkt A_k enthalten und die Gerade b_l schneiden.

Ein Kegelschnitt φ^2 durch zwei Punkte A, der sich auf eine der Geraden b stützt und die Transversale f aus dem dritten Punkte A über die übrigen zwei Geraden b trifft, bildet mit der festen Gerade f eine Ausartung. Diese Betrachtung ergibt auch 9 *Systeme;* diese sollen durch die *Symbole* $\Sigma_{k,lm}$ vertreten werden, wo k der Index des die Transversale f_{lm} tragenden Punktes A ist, welcher b_l und b_m schneidet.

Jeder Kegelschnitt ε^2 durch A_1, der die Geraden a_{23} $(A_2 A_3)$, b_1, b_2 und b_3 trifft, wird durch a_{23} zu einer ausgearteten Kurve ergänzt. Dieses *System* werde durch Σ_1^{23} bezeichnet, die beiden ihm analogen *Systeme* durch Σ_2^{13} und Σ_3^{12}.

§ 4. Die Komplexkurven, die einen *vorgegebenen Punkt* A_4 enthalten, bilden eine Fläche **A**, deren Grad mittels ihres Schnittes mit der Ebene α_{123} $(A_1 A_2 A_3)$ bestimmt werde.

Es gibt zwei Geraden l_p, welche nach A_4 zielen (§ 2); demnach sind die *drei* Kegelschnitte k_{qr}^2 *Doppelkurven* der sprachlichen Fläche.

Den nach A_4 zielenden Transversalen l_{qr} (§ 2) entsprechen *drei* Kegelschnitte k_p^2.

Die Kegelschnitte durch A_1 und A_4, welche die drei Geraden b treffen, bilden bekanntlich ein Dimonoid vierten Grades, dessen Schnittpunkten mit a_{23} vier Kurven ε^2 (§ 3) entsprechen; demnach ist a_{23} eine *vierfache Gerade* auf **A**. Der Schnitt dieser Fläche mit α_{123} besteht aus drei Doppelkegelschnitten, drei Kegelschnitten und drei vierfachen Geraden; **A** ist somit eine *Fläche dreissigsten Grades.*

Werden die Schnitte mit den übrigen Ebenen des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ in Betracht gezogen, so erhellt, dass **A** *sechs vierfache Geraden,* in den Kanten des Tetraeders, besitzt, indes die Seitenflächen 12 *Doppelkegelschnitte* und 12 einfache *Kegelschnitte* enthalten. Den 6 Paaren A_p, A_q entsprechen 24 Kurven ε^2, welche der Fläche $\mathbf{A}^{30}$ angehören.

Die in den Ebenen α liegenden Kegelschnitte werden begleitet durch 12 Geraden der Fläche (3 durch jeden Punkt A).

Durch einen vorgegebenen Punkt von b_1 und die 4 Punkte A sind 5 Kurven ϱ^3 bestimmt, welche b_2 und b_3 treffen [1]). Demnach gibt es auf $\mathbf{A}^{30}$ *drei fünffache Geraden* (die Geraden b).

Die kubischen Kurven durch 4 Punkte, welche eine Gerade zweimal treffen, bilden eine Kongruenz, in welcher es vier Kurven gibt, die zwei vorgegebenen Geraden begegnen [2]). Demnach ist jede Gerade b

---

[1]) Unter Benutzung des Prinzips der Erhaltung der Anzahl ergibt sich die Zahl 5, wenn man vier Punkte P in einer Ebene ε annimmt. Die Transversale t_{12} aus dem fünften Punkte, P_5, über die vorgegebenen Geraden g_1, g_2 bestimmt alsdann in ε einen Kegelschnitt, welcher durch t_{12} zu einer ϱ^3 ergänzt wird. Die Gerade g_1 bestimmt in ε einen Kegelschnitt, welcher durch 2 Transversalen aus P_5 über g_2 zu Figuren ϱ^3 ergänzt wird. Analog liefert g_2 zwei ausgeartete ϱ^3, mit Transversalen über g_1.

[2]) Nimmt man vier Punkte P in einer Ebene ε, so bestimmt die Bisekante d mit diesen einen Kegelschnitt, der mit drei Transversalen von d und den vorgegebenen Geraden g_1, g_2 drei Figuren ϱ^3 bildet. Ausser diesen genügt die nodale Kurve k^3 durch die 4 Punkte P und die Spuren von d, g_1 und g_2 den Bedingungen.

Bisekante für vier ϱ^3 von **A**; auf dieser Fläche gibt es somit 12 *kubische Doppelkurven.*

§ 5. Die Komplexkurven, welche die *vorgegebene Gerade d zweimal* treffen, bilden eine Fläche **D**; ihr Grad soll mittels ihres Schnittes mit der Ebene α bestimmt werden.

Die Spur D von d in α bestimmt mit den Punkten A_1, A_2, A_3 und B_1 eine Kurve $k_1{}^2$; auf sie stützen sich 3 Geraden l_{23}, welche d, b_2 und b_3 treffen, wonach $k_1{}^2$ eine *dreifache* Kurve ist.

Weil d zwei Geraden r trifft liefert das System Σ *zwei* Kurven ϱ^2, welche die Spur D enthalten.

In der Ebene $(A_1\,d)$ liegt eine Kurve ε^2; die sie begleitende Gerade a_{23} gehört somit der Fläche **D** an.

Der Schnitt mit α besteht aus *drei dreifachen* Kegelschnitten $k_1{}^2$, $k_2{}^2$, $k_3{}^2$, aus *zwei* Kurven ε^2, den *drei* Geraden a_{12}, a_{23}, a_{13} und aus der *nodalen kubischen Kurve* durch die 6 Punkte A und B, welche in D ihren Doppelpunkt hat. Somit ist **D** eine *Fläche achtundzwanzigsten Grades.*

Durch einen vorgegebenen Punkt einer Gerade b gehen vier ϱ^3 von **D** (§ 4); die drei Geraden b sind somit *vierfach* auf dieser Fläche.

Die Gerade d trifft vier Kurven δ^2_{23} (§ 3), welche je durch eine, auf d ruhende, Gerade d_1 ergänzt werden. Die Systeme $\triangle$ liefern somit *zwölf* Kegelschnitte und *zwölf* Geraden der sprachlichen Fläche.

Im System $\Sigma_{k,l}$ (§ 3) bilden die Kurven γ^2, welche d schneiden, ein *Dimonoid* vierten Grades; in dem dazu gehörigen Büschel (c) gibt es eine Gerade c, durch A_k, die d trifft und ersichtlich vier γ^2 ergänzt, wonach sie vierfach auf **D** liegt. Den 9 Systemen $\Sigma_{k,l}$ entsprechen somit 36 Kurven γ^2 und 9 *vierfache* Geraden c.

§ 6. Die Komplexkurven, welche die *vorgegebenen Geraden* b_4 und b_5 schneiden, bilden eine Fläche **F**, deren Schnitt mit der Ebene α bestimmt werden soll.

Je zwei der Geraden b_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) bestimmen mit A_1, A_2, A_3 einen Kegelschnitt, welcher durch vier Transversalen der übrigen drei Geraden b zu Figuren ϱ^3 ergänzt wird. Die sprachliche Fläche trägt daher 10 *vierfache Kegelschnitte* und 40 ihnen zugesellte Geraden.

Je vier Geraden haben zwei Transversalen, von denen jede in α einen Kegelschnitt durch A_1, A_2, A_3 festlegt, der sich auf die fünfte b stützt. Aus dieser Betrachtung erhellt, dass **F** *zehn* Kegelschnitte enthält nebst den 10 mit ihnen verbundenen Geraden.

Es gibt bekanntlich 18 Kegelschnitte durch A_1, die a_{23} und die 5 Geraden b treffen ($P\nu^6 = 18$). Demnach sind a_{23}, a_{12} und a_{13} *achtzehnfache Geraden* der Fläche.

Schliesslich enthält **F** *zwölf* in α belegene *nodale kubische Kurven;* denn das Büschel kubischer Kurven, welches durch die Punkte A und die Spuren der Geraden b bestimmt ist, besitzt 12 nodale Kurven

Der Schnitt der Fläche mit a hat daher den Grad 190; es gibt somit 190 *Kurven* ϱ^3 durch *drei* Punkte, die *sechs* Geraden treffen.

Durch einen Punkt von b_k und die Punkte A gehen 30 ϱ^3, die sich auf die übrigen vier Geraden b stützen (§ 4); daher sind die *fünf Geraden b dreissigfach* auf der Fläche F.

Es gibt auf F, den Systemen $\triangle$ entsprechend (§ 3), 120 *Doppelkegelschnitte* und 240 ihnen zugeordnete *Geraden* (durch jeden Punkt A 40). Jede dieser Kurven trifft 4 Geraden b und trägt 2 Punkte A.

Jede der 30 Transversalen aus einem Punkte A über zwei Geraden b trifft vier Kegelschnitte durch die übrigen zwei Punkte A, welche sich auf die übrigen drei Geraden b stützen. Somit enthält F noch 120 *Kegelschnitte* und 30 *vierfache Geraden* (durch jeden Punkt A zehn).

Chemistry. — *Ist flüssiges Benzol allotrop?* Von ERNST COHEN und J. S. BUY. Dritte Mitteilung.

(Communicated at the meeting of April 28, 1934.)

Die spezifische Wärme des flüssigen Benzols.

1. Nach Drucklegung unserer ersten Mitteilung [1]) wurde uns eine vor kurzem erschienene Arbeit von ALLAN FERGUSON und J. F. MILLER [2]) bekannt, welche sich mit der Bestimmung der spezifischen Wärme des flüssigen Benzols im Temperaturintervall 20—50° C. nach einem neuen elektrischen Verfahren befasst. Das von ihnen verwendete Präparat, welches thiophen- und schwefelfrei war, wies einen Schmelzpunkt von 5.48° C. auf, welcher mit dem von TH. W. RICHARDS und seinen Mitarbeitern [3]), sowie mit dem von MENZIES und LACOSS [4]) ermittelten (5.49° C.) übereinstimmt.

FERGUSON und MILLER geben an, dass sich die spezifische Wärme als Temperaturfunktion zwischen 20 und 50° C. mittels der Gleichung

$$S = 0.395_8 + 0.00125\,(t - 20) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

darstellen lässt.

2. WILLIAMS und DANIELS [5]) hatten in einer älteren Arbeit an einem Präparat, dessen Siedepunkt (bei 760 mm) 80.15—80.25° C. und dessen $n_D^{25} = 1.50060$ war, gefunden:

$$S = 0.3824 + 0.000655\,t + 0.0_5 84\,t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

---

[1]) Proc. Acad. Sci. Amsterdam **37**, 55 (1934); Zweite Mitteilung ibid. **37**, 198 (1934).
[2]) Proc. Phys. Soc. London **45**, 194 (1933).
[3]) J. Am. Chem. Soc. **36**, 1825 (1914); **41**, 2019 (1919).
[4]) J. Phys. Chem. **36**, 1967 (1932).
[5]) J. Am. Chem. Soc. **46**, 903 (1924).