Zweitens kann man ein ähnliches Resultat für den Brechungsindex finden, wenn man die Herleitung wie sie nach dem klassischen Muster für die dielektrische Konstante gegeben ist durch die bekannte Herleitung ersetzt wie sie für die Theorie der Brechungsindex üblich ist, wodurch das v. WIJK'sche Resultat erhalten ist.

Das Problem, das jetzt noch zu lösen ist, ist zu untersuchen wie die Temperaturabhängigkeit des Integrals

$$\frac{1}{v}\int dv \int \left(\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right) g\,(z\,.\,\varphi)\,d\,\Omega$$

mit den elementaren Eigenschaften derjenigen Moleküle zusammenhängt die flüssigkristallinische Schmelze bilden.

25 Mai 1934.

Mathematics. — *Ein aus kubischen Raumkurven gebildeter Komplex.* Von JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of May 26, 1934).

§ 1. Vorgegeben seien die Punkte A_1, A_2, A_3 und die durch sie gelegten Geraden b_1, b_2, b_3. Die kubischen Raumkurven k^3 durch A_1, A_2, A_3, welche b_1, b_2, b_3 treffen, bilden einen Komplex.

Jede Transversale c der Geraden b bildet eine k^3 mit jeder Kurve k^2 des Büschels (k^2), dessen Basis aus den Punkten A und dem Schnittpunkte C von c mit der Ebene α der Punkte A besteht. Jede k^2 wird durch *eine* Gerade c zu einer k^3 ergänzt; die betreffende Spur C ist der vierte Schnittpunkt der k^2 mit der Spur γ^2 des Hyperboloids, welches durch die Geraden b bestimmt wird. Das System der *ausgearteten Kurven* (k^2, c) soll mit Σ bezeichnet werden, die Kurven k^2 mit α^2.

§ 2. In jeder Ebene β_1 durch b_1 gibt es ein Büschel $(\beta_1{}^2)$, dessen Basis aus A_1 und den Spuren B_2, B_3 und A_{23} der Geraden b_2, b_3 und a_{23} $(A_2 A_3)$ besteht. Alle diese Kegelschnitte werden durch a_{23} zu *ausgearteten Figuren* des Komplexes ergänzt. Dieses System soll mit Σ_1 bezeichnet werden.

Analog sei Σ_2 das Symbol für das System $(\beta_2{}^2, a_{13})$, Σ_3 für das System $(\beta_3{}^2, a_{12})$.

Jede Ebene γ_{23} durch a_{23} trägt ein Büschel $(\gamma_{23}{}^2)$ dessen Basis aus A_2, A_3, der Spur C_1 von b_1 und der Spur C_{23} der aus A_1 über b_2 und b_3 geführten Transversale c_{23} besteht. Jede Kurve $\gamma_{23}{}^2$ bildet mit c_{23} eine *ausgeartete Komplexkurve*. Das System dieser Ausartungen möge mit Σ_{23} bezeichnet werden.

Analog seien Σ_{12} und Σ_{13} die Symbole für die Systeme $(\gamma_{12}{}^2, c_{12})$ und $(\gamma_{13}{}^2, c_{13})$.

§ 3. Die Figuren k^3 durch den *vorgegebenen Punkt* P bilden eine Fläche Π, deren Grad mittels ihres Schnittes mit der Ebene α bestimmt werde.

Das System Σ liefert dazu keinen Beitrag, weil P i.A. keine Gerade c trägt.

In der Ebene (Pb_1) liegt eine Kurve $\beta_1{}^2$; die ihr zugeordnete Gerade a_{23} gehört demnach der Fläche Π an. Der Schnitt von Π mit α besteht also aus den Geraden a_{12}, a_{23} und a_{13}.

Weil P mit a_{23} eine Ebene γ_{23}, also eine $\gamma_{23}{}^2$ bestimmt, trägt Π die Gerade c_{23} und analog die Geraden c_{12} und c_{13}. Hieraus erhellt, dass die kubische Fläche Π^3 Doppelpunkte in A_1, A_2 und A_3 hat, wonach sie ein *kubisches Trimonoid* ist.

Weil die Ebene (Pa_{23}) diese Fläche in a_{23} und einer $\gamma_{23}{}^2$ schneidet, ist P kein Doppelpunkt.

Das Trimonoid enthält ersichtlich auch die Geraden b_1, b_2, b_3. Dass jeder Punkt B_1 von b_1 nur *eine* k^3 des durch P bestimmten Systems trägt, soll noch erhärtet werden. Die Kurven ϱ^3 durch B_1, P, A_1, A_2, A_3 welche b_2 treffen, bilden die quadratische Kegelfläche $\varphi_2{}^2$, welche B_1, P, A_1, A_3 und die Punktreihe (B_2) von b_2 aus A_2 projiziert; diese Fläche trifft b_3 in einem Punkte B_3, wonach $\varphi_2{}^2$ *eine* Kurve k^3 von Π^3 trägt, welche B_1 enthält. Sie bildet offenbar mit a_{23} die Schnittfigur von $\varphi_2{}^2$ mit dem analogen Kegel $\varphi_3{}^2$.

§ 4. Die Komplexkurven, welche die *vorgegebene Gerade d zweimal* treffen, bilden eine Fläche, die mit $\triangle$ bezeichnet werde.

Das durch einen Punkt P von d bestimmte Trimonoid Π^3 trifft d noch in zwei Punkten; P trägt somit zwei Kurven k^3, die dem System $\triangle$ angehören. Demnach ist *d Doppelgerade* auf der Fläche $\triangle$.

Weil es zwei Geraden c gibt, welche d treffen, enthält $\triangle$ zwei Kurven α^2; sie bilden ersichtlich den Schnitt von $\triangle$ mit der Ebene α, wonach $\triangle$ eine *Fläche vierten Grades* ist.

Es soll nun gezeigt werden, dass die b_k einfache Geraden von $\triangle^4$ sind, woraus dann erhellt, dass A_1, A_2, A_3 *Doppelpunkte* von $\triangle^4$ wären.

Zu dem Zweck werde zunächst das System der kubischen Kurven durch A_1, A_2, A_3 und einen Punkt B_1 (von b_1) betrachtet, welche b_2 treffen und d zur Bisekante haben. Der Schnitt der durch diese Kurven gebildete Fläche mit der Ebene α ist ersichtlich der Kegelschnitt durch die Punkte A, die Spur von d und die Spur der Transversale aus B_1 über d und b_2. Die betreffende Fläche ist somit quadratisch und bestimmt auf b_3 einen Punkt B_3. Hieraus erhellt, dass B_1 *eine* Kurve k^3 trägt, die der Fläche $\triangle^4$ angehört.

§ 5. Mit Γ soll das System der k^3 bezeichnet werden, welche sich auf die *vorgegebenen Geraden* g_1, g_2 stützen. Der Fläche dieses Systems gehört der Kegelschnitt α^2 an, der durch die Spuren G_1, G_2 dieser Geraden bestimmt wird; er trifft die Kurve γ^2 in der Spur C der ihm zugeordneten Gerade c.

Die Gerade g_1 trifft zwei Geraden c; ihre Schnittpunkte mit α seien C_1' und C_1''; sie bestimmen mit G_2 zwei Kurven α^2, die dem System Γ angehören. Analog gibt es zwei α^2, welche durch G_1 und die Spur C_2' bez. C_2'' bestimmt werden.

Um zu untersuchen ob Γ Figuren des Systems Σ_1 enthält, werde zunächst der Ort Ω der k^2 in den Ebenen β_1 betrachtet, welche A_1 enthalten und sich auf g_1, g_2, b_2 und b_3 stützen. Bekanntlich bilden die k^2 durch A_1 und einen festen Punkt B_1, welche die Geraden g_1, b_2, b_3 treffen, ein Dimonoid vierten Grades; seinen vier Schnittpunkten mit g_2 entsprechen vier k^2, die b_1 in B_1 treffen. Demnach ist b_1 vierfache Gerade auf dem Monoid Ω, und dieses eine Fläche sechsten Grades. Diese schneidet a_{23}, ausser in A_2 und A_3, in vier Punkten A_{23} (§ 2). Die Fläche Γ enthält somit vier Figuren $(\beta_1{}^2, a_{23})$, wonach a_{23} eine *vierfache Gerade* ist. Der Schnitt von Γ mit α besteht somit aus 5 Kegelschnitten und den vierfachen Geraden a_{12}, a_{13}, a_{23}, und Γ ist eine *Fläche 22ten Grades*.

Die Kegelschnitte durch A_2 und A_3, die sich auf b_1, g_1, g_2 stützen, bilden ein Monoid vierten Grades, welches mit c_{23}, ausser A_1, drei Punkte C_{23} (§ 2) gemein hat. Daher enthält Γ^{22} drei Figuren des Systems Σ_{23}, und in Folge dessen *sechs dreifache Geraden*: b_1, b_2, b_3, c_{23}, c_{13}, c_{12}.

Auch g_1 und g_2 sind *dreifache Geraden*. Denn das einem Punkte P_1 von g_1 entsprechende Trimonoid Π^3 wird von g_2 in 3 Punkten P_2 getroffen.

Mathematics. — *Eine Abbildung der Kongruenz von kubischen Raumkurven durch drei Punkte, welche eine vorgegebene Gerade zweimal treffen und zwei anderen Geraden begegnen.* Von JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of May 26, 1934).

§ 1. Eine kubische Raumkurve ϱ^3 möge die Punkte A_1, A_2, A_3 enthalten, eine Gerade b *zweimal* schneiden und die Geraden c_1, c_2 bez. in P_1 und P_2 treffen. Als ihr *Bild* betrachte ich die Spur der Gerade P_1P_2 in der festen Ebene **E**. Einem Punkte R von **E** entspricht i.A. eine bestimmte Kurve ϱ^3.

Die Spuren U_1, U_2 von c_1, c_2 sind ersichtlich *singuläre Bildpunkte*; dem Punkte U_1 z.B. entsprechen alle ϱ^3 durch U_1 und die Punkte P_2 von c_2. Die ϱ^3 durch U_1, A_1, A_2, A_3, welche b zweimal treffen, bilden eine Kongruenz, in der es vier ϱ^3 gibt, welche zwei Geraden c_2 und c_3 schneiden.