

Analiza pasma tarczowego

Układy tarczowe o znacznej długości, okresowo obciążone i podparte – stan naprężenia oraz funkcja Airy - rozwinięcie, jako **nieskończone szeregi trygonometryczne Fouriera**.

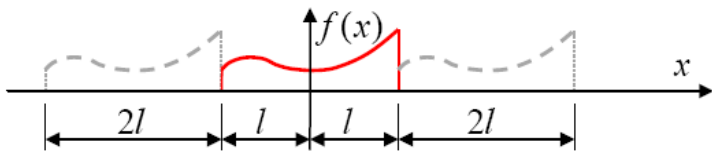
Podstawy teorii szeregów Fouriera:

Funkcja spełnia w danym przedziale warunek Dirichleta, jeśli przedział ten można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, w których funkcja jest monotoniczna i ograniczona.

Funkcję f spełniającą w przedziale $(-l, l)$ warunek Dirichleta, można wykonać jej rozwinięcie w szereg trygonometryczny Fouriera:

$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$, w każdym przedziale ciągłości f

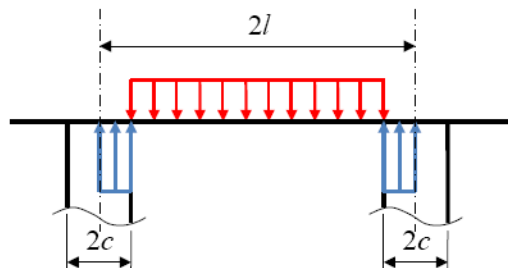
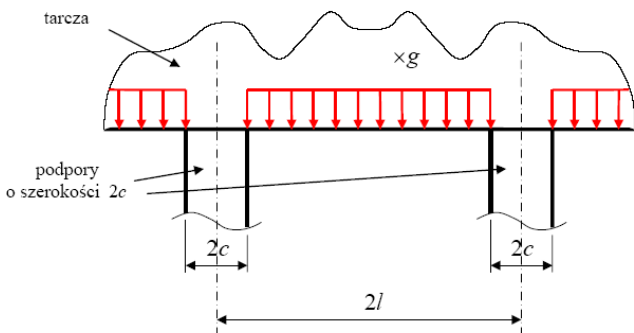
zachodzi $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$, $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$



Jeżeli funkcja f jest parzysta zachodzi $b_n = 0$, przy funkcji f nieparzystej zachodzi $a_0 = a_n = 0$. Rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera jest funkcją okresową, jak na rysunku.

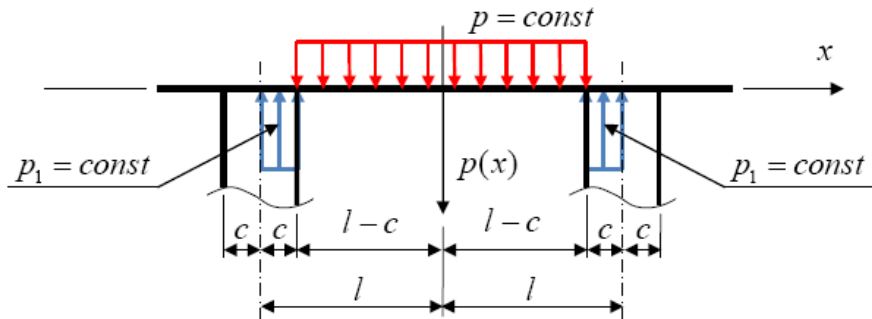
Szeregi Fouriera mogą być stosowane do rozwinięcia funkcji nieciągłych, w odróżnieniu od szeregów potęgowych Taylora, ograniczonych do zakresu funkcji o ciągłych pochodnych wszystkich rzędów. W punktach nieciągłości funkcji f odpowiadający jej szereg Fouriera jest zbieżny do wartości średniej arytmetycznej jej obustronnych granic: $0.5[f(x-0) + f(x+0)]$.

Przykład: rozwinięcie w szereg Fouriera obciążenia ciągłego odcinkowego



Model obciążenia:

p – funkcja schodkowa, nieciągła, spełniająca warunki Dirichleta w przedziale $\langle -l, l \rangle$



Warunek równowagi: $p_1 = p \frac{l-c}{c}$. Ze względu na symetrię jest $b_n = 0$.

Rozwinięcie funkcji parzystej: $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$

z równowagi rzutów na oś pionową wynika: $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l p(x) dx = 0$,

ogólny wyraz: $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l p(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$.

Rozwinięcie: $a_n = \frac{2}{l} \left(p \int_0^{l-c} \cos \frac{n\pi x}{l} dx - p \frac{l-c}{c} \int_{l-c}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right)$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{l} \left(p \int_0^{l-c} \cos \frac{n\pi x}{l} dx - p \frac{l-c}{c} \int_{l-c}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right) = \\
&= \frac{2}{l} \left(p \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi(l-c)}{l} + p \frac{l-c}{c} \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi(l-c)}{l} \right) = \\
&= \frac{2}{l} p \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi(l-c)}{l} \left(1 + \frac{l-c}{c} \right) = \frac{2}{l} p \frac{l}{n\pi} \frac{l}{c} \sin \frac{n\pi(l-c)}{l} = \\
&= \frac{2pl}{n\pi c} \sin \frac{n\pi(l-c)}{l} = \frac{2pl}{n\pi c} \sin \left(n\pi - \frac{n\pi c}{l} \right)
\end{aligned}$$

Wzór trygonometryczny: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$,

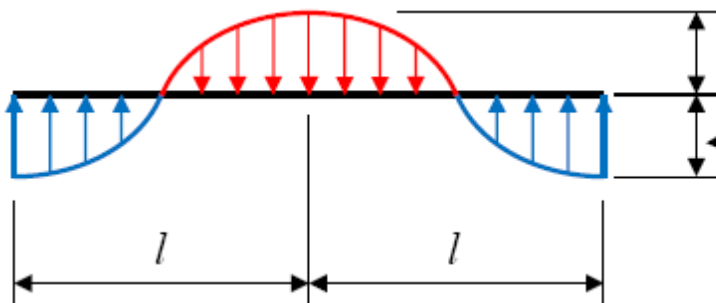
$$\text{stad: } a_n = \frac{2pl}{n\pi c} \left(\sin n\pi \cos \frac{n\pi c}{l} - \cos n\pi \sin \frac{n\pi c}{l} \right).$$

Ponieważ $\sin n\pi = 0$ oraz $\cos n\pi = (-1)^n$ zachodzi $a_n = -(-1)^n \frac{2pl}{n\pi c} \sin \frac{n\pi c}{l}$,

$$\text{więc } p(x) = -\frac{2pl}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Rozwinięcie obciążenia odcinkowego: $p(x) = -\frac{2pl}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}$

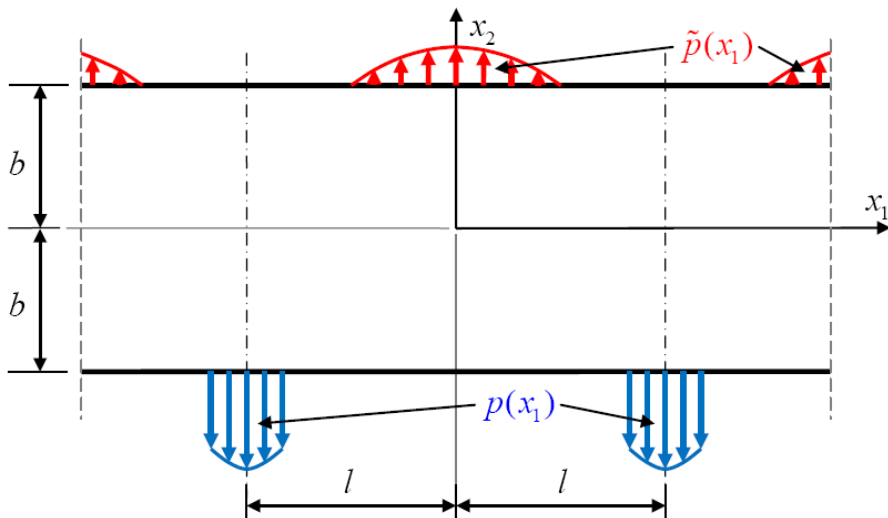
Pierwszy wyraz ($n=1$): $p^{(1)}(x) = \frac{2pl}{\pi c} \sin \frac{\pi c}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$



max. rzędna obc. wynosi $\frac{2pl}{\pi c} \sin \frac{\pi c}{l}$
 gdy $c = \frac{l}{2}$ równa $\frac{4p}{\pi} \cong 1.273p$

Przykład: swobodna tarcza nieskończona (**pasmo tarczowe**) o grubości g i szerokości $2b$ (model tarczy ciągłej), obciążona okresowo (okres równy $2l$) i symetrycznie względem osi x_2 .

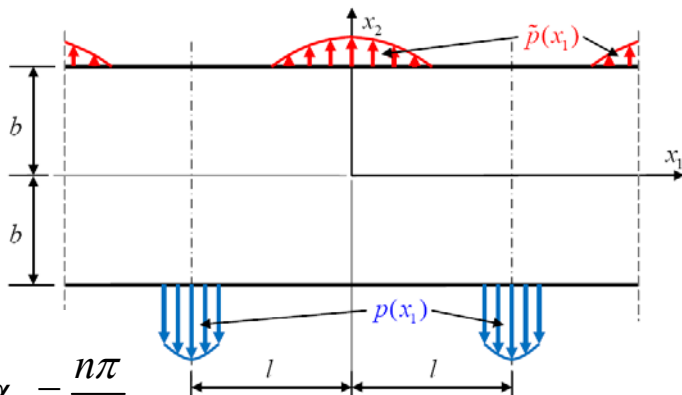
Przy obciążeniu dowolnym $p(x_1)$ jest to odpowiednik jego części symetrycznej: $p_{sym}(x_1) = 0.5[p(x_1) + p(-x_1)]$.



Obciążenie brzegu górnego \tilde{p} i dolnego p – funkcje parzyste, okresowe, rozwinięte w następujące szeregi:

$$\tilde{p}(x_1) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos \alpha_n x_1$$

$$p(x_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x_1 \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}$$



Równowaga na oś x_2 : $\int_{-l}^l \tilde{p}(x_1) dx_1 = \int_{-l}^l p(x_1) dx_1$, więc $\tilde{a}_0 = a_0$.

Łączne obciążenie jest superpozycją stanów o odpowiadających funkcjach naprężeń F_1 i F_2 . Spełnienie równania biharmonicznego przez każdą z nich (warunki $\nabla^4 F_1 = 0$ i $\nabla^4 F_2 = 0$) jest równoznaczne ze spełnieniem równania biharmonicznego przez ich sumę – operator $\nabla^4(\cdot)$ jest liniowy.

Pierwsza składowa obciążenia – stała: $p = \tilde{p} = 0.5a_0$ opisana jest funkcją naprężeń $F_1 = Cx_1^2$, C – wartość stała. Jedyne niezerowe naprężenia $\sigma_{22} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} = 2C$, z warunku brzegowego $\sigma_{22}|_{x_2=\pm b} = \frac{a_0}{2}$

otrzymuje się stałą $C = \frac{a_0}{4}$, zatem $F_1 = \frac{a_0}{4} x_1^2$.

Druga składowa obciążenia opisana jest funkcją naprężeń o rozdzielonych zmiennych: $F_2(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_2) \cos \alpha_n x_1$.

Podstawienie do równania biharmonicznego $\nabla^4 F_2(x_1, x_2) = 0$ daje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n(x_2) \alpha_n^4 - 2f_n''(x_2) \alpha_n^2 + f_n^{IV}(x_2) \right] \cos \alpha_n x_1 = 0. \text{ Rozwinięcie}$$

w szereg funkcji zerowej wymaga wszystkich zerowych współczynników, zatem $f_n(x_2) \alpha_n^4 - 2f_n''(x_2) \alpha_n^2 + f_n^{IV}(x_2) = 0$.

Równanie różniczkowe zwyczajne, o stałych współczynnikach:

$$f_n(x_2)\alpha_n^4 - 2f_n''(x_2)\alpha_n^2 + f_n^{IV}(x_2) = 0. \text{ Przewidywanie: } f_n(x_2) = e^{rx_2}$$

daje zapis $e^{rx_2}(\alpha_n^4 - 2r^2\alpha_n^2 + r^4) = 0$, stąd $(\alpha_n - r)^2(\alpha_n + r)^2 = 0$,

rezultat: dwa pierwiastki podwójne: $r_{1,2} = \alpha_n, r_{3,4} = -\alpha_n$.

$$\text{Całka ogólna: } f_n(x_2) = C_1 e^{\alpha_n x_2} + C_2 x_2 e^{\alpha_n x_2} + C_3 e^{-\alpha_n x_2} + C_4 x_2 e^{-\alpha_n x_2},$$

$$\text{z użyciem } ch \alpha x = 0.5(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}), sh \alpha x = 0.5(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$$

przekształcona do postaci z nowymi stałymi całkowania:

$$f_n(x_2) = \frac{1}{\alpha_n} [A_n ch \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 B_n sh \alpha_n x_2 + C_n sh \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 D_n ch \alpha_n x_2],$$

gdzie mnożnik α_n^{-2} dla ułatwienia różniczkowania. Sumarycznie:

$$F(x_1, x_2) = 0.25 a_0 x_1^2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} [A_n ch \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 B_n sh \alpha_n x_2 + C_n sh \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 D_n ch \alpha_n x_2] \cos \alpha_n x_1$$

Stan naprężeń w tarczy:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + 2B_n) \operatorname{ch} \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 B_n \operatorname{sh} \alpha_n x_2 + (C_n + 2D_n) \operatorname{sh} \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 D_n \operatorname{ch} \alpha_n x_2 \right] \cos \alpha_n x_1$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0.5 a_0 +$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 B_n \operatorname{sh} \alpha_n x_2 + C_n \operatorname{sh} \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 D_n \operatorname{ch} \alpha_n x_2 \right] \cos \alpha_n x_1$$

$$\sigma_{12} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} =$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + B_n) \operatorname{sh} \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 B_n \operatorname{ch} \alpha_n x_2 + (C_n + D_n) \operatorname{ch} \alpha_n x_2 + \alpha_n x_2 D_n \operatorname{sh} \alpha_n x_2 \right] \sin \alpha_n x_1$$

Warunki brzegowe:

* brzeg górny $x_2 = b$: 1) $\sigma_{22} = \tilde{p}(x_1)$, 2) $\sigma_{12} = 0$

* brzeg dolny $x_2 = -b$: 3) $\sigma_{22} = p(x_1)$, 4) $\sigma_{12} = 0$, gdzie

$$\tilde{p}(x_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos \alpha_n x_1, \quad p(x_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x_1, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Rozwiązanie układu czterech równań algebraicznych liniowych:

$$A_n = -(\tilde{a}_n + a_n) \frac{\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n b}{\operatorname{sh} 2\alpha_n b + 2\alpha_n b}, \quad B_n = (\tilde{a}_n + a_n) \frac{\operatorname{sh} \alpha_n b}{\operatorname{sh} 2\alpha_n b + 2\alpha_n b}$$

$$C_n = -(\tilde{a}_n - a_n) \frac{\operatorname{ch} \alpha_n b + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n b}{\operatorname{sh} 2\alpha_n b - 2\alpha_n b}, \quad D_n = (\tilde{a}_n - a_n) \frac{\operatorname{ch} \alpha_n b}{\operatorname{sh} 2\alpha_n b - 2\alpha_n b}$$

Tym samym funkcja Airy $F(x_1, x_2)$ jest w pełni określona. Jej różniczkowanie daje w rezultacie pole tensorowe naprężeń. Dalsza analiza dotyczyć będzie naprężeń normalnych σ_{11} w kierunku wymiaru x_1 , podobnie, jak w belkach, o dużym znaczeniu.

Szereg σ_{11} jest wolnozbieżny, szczególnie na granicach, gdy $x_2 \rightarrow \pm b$.

Naprężenia na krawędziach – przekształcone, szeregi o lepszej zbieżności:

$$\sigma_{11}|_{x_2=b} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{a}_n - (\tilde{a}_n + a_n)c_n + (\tilde{a}_n - a_n)d_n \right] \cos \alpha_n x_1$$

$$\sigma_{11}|_{x_2=-b} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n - (\tilde{a}_n + a_n)c_n - (\tilde{a}_n - a_n)d_n \right] \cos \alpha_n x_1$$

gdzie nowe stałe $c_n = \frac{2\alpha_n b}{sh 2\alpha_n b + 2\alpha_n b}$, $d_n = \frac{2\alpha_n b}{sh 2\alpha_n b - 2\alpha_n b}$

Własności: $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos \alpha_n x_1 = \tilde{p}(x_1) - \frac{a_0}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x_1 = p(x_1) - \frac{a_0}{2}$

W przypadku tarczy wysokiej – w granicznym przypadku $b \rightarrow \infty$ stałe c_n i d_n

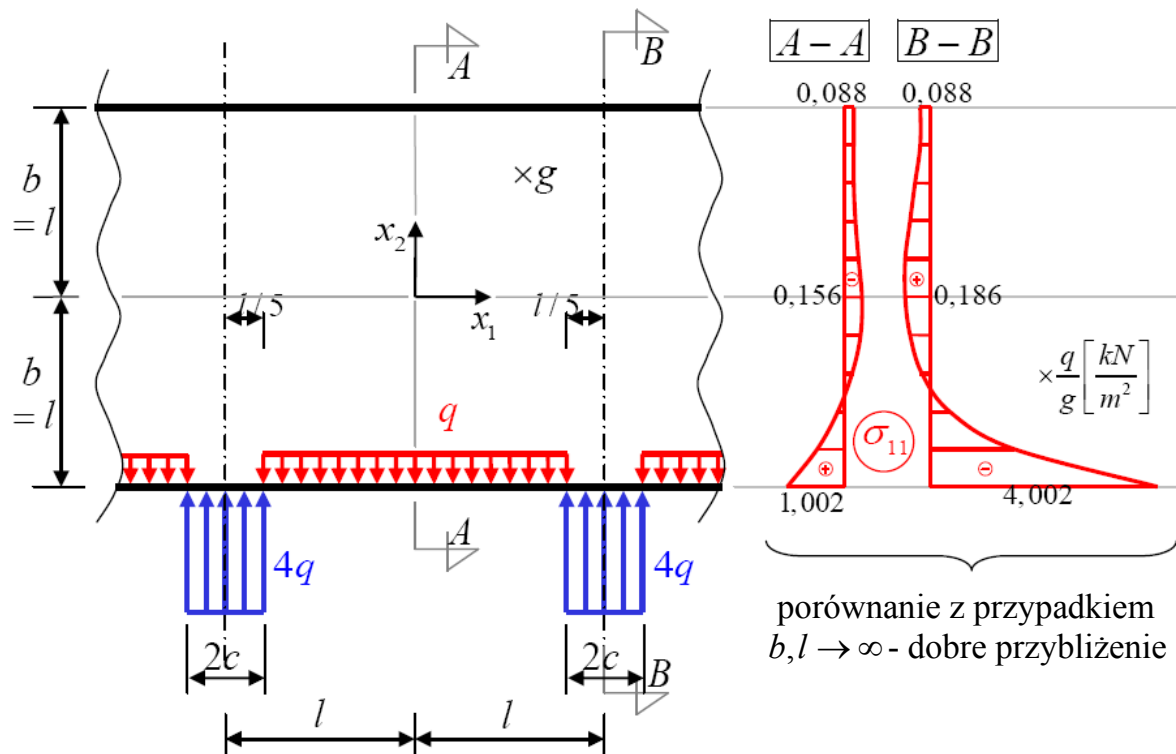
są wyrażeniami postaci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{sh x / x \pm 1}$. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{sh x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} ch x = \infty$,

zatem przy $b \rightarrow \infty$ zachodzi $c_n \rightarrow 0$ i $d_n \rightarrow 0$. Tym samym naprężenia na

dolnym brzegu tarczy $\sigma_{11}|_{x_2=-b} = p(x_1) - 0.5a_0$. Przy obciążeniach samo-

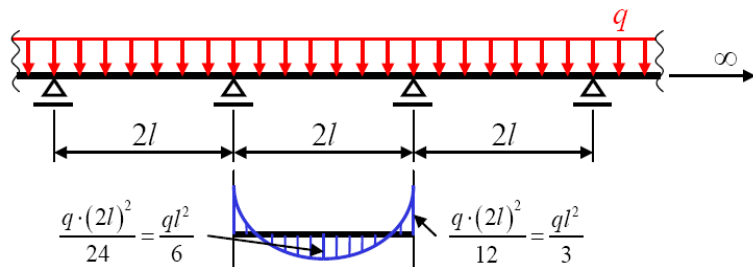
równoważących się może być $a_0 = 0$, wtedy $\sigma_{11}|_{x_2=-b} = p(x_1) = \sigma_{22}|_{x_2=-b}$

Przykład numeryczny: $b=l, c=l/5 \rightarrow q_1' = 4q$ ($q = \text{const}$) $\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$



Porównanie z WM – pasmo tarczowe analizowane jako belka.

Model WM: belka ciągła nieskończona o jednakowych przęsłach o rozpiętości $2l$, przekroju poprzecznym $g \times 2l$, działanie $q = const$.



W tym modelu wskaźnik wytrzymałości

$$\text{przekroju } W = \frac{2gb^2}{3},$$

momenty zginające, odpowiednio w przęśle

i na podporze, podane na rysunku, wynoszą $ql^2/6$ i $ql^2/3$.

Model belkowy - wykresy naprężeń σ_{11} liniowe, ekstremalne:

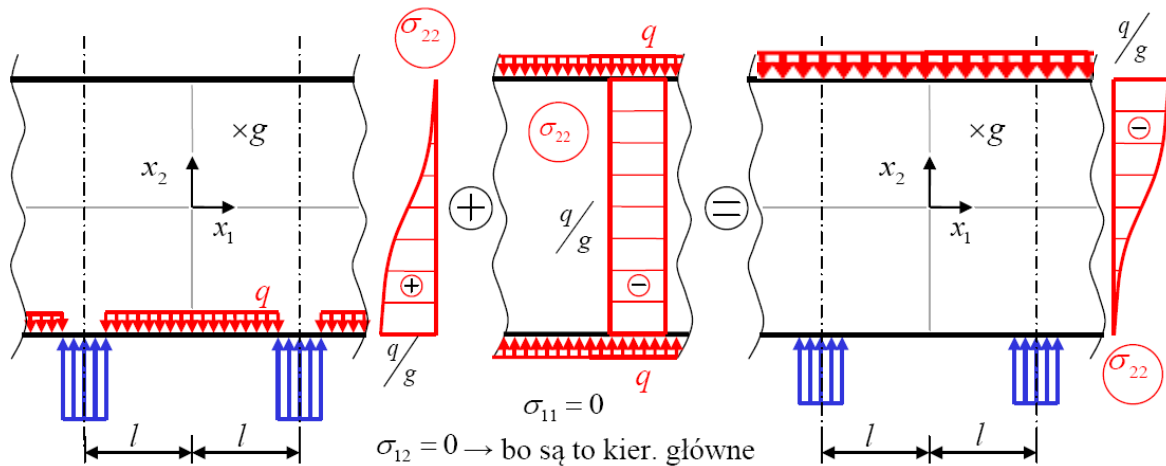
$$\text{- przęsłowym („A-A”) } \sigma_{11,extr} = \frac{3ql^2}{12gl^2} = \frac{1}{4} \frac{q}{g} \quad (1/4 \text{ rezultatu tarczy})$$

$$\text{- podporowym („B-B”) } \sigma_{11,extr} = \frac{3ql^2}{6gl^2} = \frac{1}{2} \frac{q}{g} \quad (1/8 \text{ rezultatu tarczy}).$$

Uwagi:

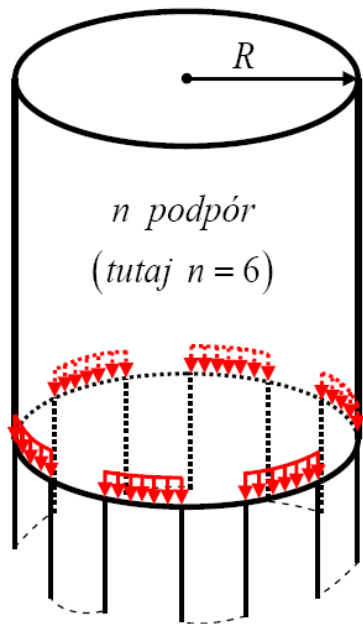
1) Przyłożenie obciążenia $q \left[\frac{kN}{m} \right]$ na górnym lub na dolnym brzegu (ewentualnie między górnym, a dolnym brzegiem tarczy) **nie wpływa** na rozkład naprężeń σ_{11} i σ_{12} , a **wpływa jedynie** na naprężenia σ_{22} .

Wynika to z następującego rozumowania:

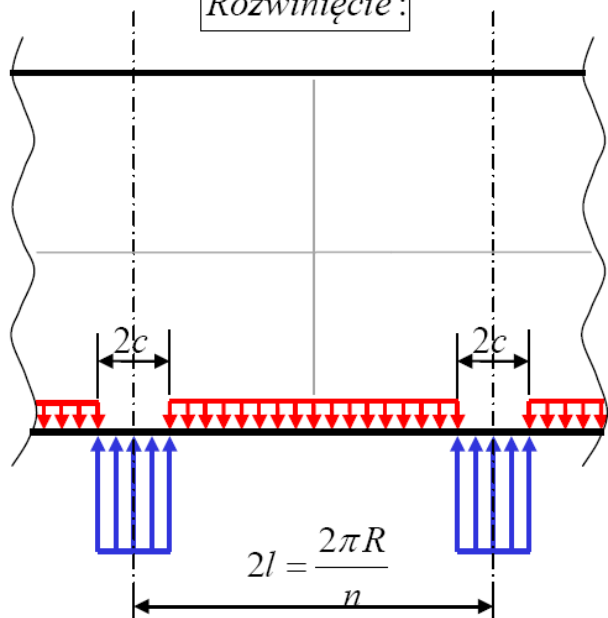


2) Podobnie rozwiązuje się tarcze zakrzywione w planie
→ zbiorniki i silosy

Konstrukcja :



Rozwinięcie :



3) Przykład „bezwładności” myślenia inżynierskiego:

