Friedrich Kasch

Partiell invertierbare Homomorphismen und das Total

Verlag Reinhard Fischer

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Kasch, Friedrich:
Partiell invertierbare Homomorphismen und das Total/
Friedrich Kasch. - München: R. Fischer, 1988
(Algebra-Berichte; 60)
ISBN 3-88927-046-8
NE: GT

ISBN 3-88927-046-8

Druck und Bindung: Novotny, Söcking
Printed in West Germany 1988

Inhalt

Einleitung

Sei R ein Ring mit Einselement und seien A, B, C,... unitäre R-Rechtsmoduln. Es bedeute $A \subsetneq M$ bzw. $A \subsetneq^{\oplus} M$, daß A Untermodul bzw. direkter Summand von M ist, wobei auch Gleichheit zugelassen ist. Ebenso ist bei der Mengeninklusion $A \subset B$ Gleichheit eingeschlossen. Mit $\mathrm{End}_R(M)$ wird der R-Endomorphismenring von M bezeichnet. Ich nenne $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ einen **totalen Nichtisomorphismus** von M nach N : $\Leftrightarrow$

$$\forall\, 0 \neq A \subsetneq^{\oplus} M,\quad B \subsetneq^{\oplus} N,\ f(A) \subset B$$
$$\left[\hat{f} : A \ni a \longmapsto f(a) \in B \ \text{ ist kein Isomorphismus}\right]$$

Die Einschränkung $f(A) \subset B$ in dieser Definition ist sinnvoll, denn im Falle $f(A) \not\subset B$ induziert f nicht einmal einen Homomorphismus von A nach B. Die Menge aller totalen Nichtisomorphismen von M nach N heißt **das Total** von M nach N, in Zeichen Tot(M,N). Im Falle M=N wird Tot(M): = Tot(M,M) geschrieben. Von besonderem Interesse ist der Fall, daß Tot(M) ein Ideal in $\mathrm{End}_R(M)$ ist. Das Total wurde auf meine Anregung hin von W.Schneider [2] eingehend untersucht.

Mittlerweile habe ich den Eindruck gewonnen, daß man beim Aufbau einer Theorie des Totals diejenigen Homomorphismen, die keine totalen Nichtisomorphismen sind, von Anfang an stärker berücksichtigen sollte. Der Grund dafür ist die folgende einfache Aussage.

<u>**Lemma**</u> : Für $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ sind äquivalent

(1) $f \notin \mathrm{Tot}(M,N)$

(2) $\exists\, g \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ [fg ist ein Idempotent $\neq 0$ in $\mathrm{End}_R(N)$]

(3) $\exists\, h \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ [hf ist ein Idempotent $\neq 0$ in $\mathrm{End}_R(M)$]

(4) $\exists f' \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$
$[ff'$ ist ein Idempotent $\neq 0$ in $\mathrm{End}_R(N)$ und
$f'f$ ist ein Idempotent $\neq 0$ in $\mathrm{End}_R(M)]$

Auf Grund dieses Lemmas nenne ich die $f \notin \mathrm{Tot}(M,N)$ **partiell invertierbar.** Das Arbeiten mit diesen partiell invertierbaren Endomorphismen ist besonders bequem, da es auf das Rechnen mit Idempotenten hinausläuft. Das führt zu neuen Beweisen von Resultaten aus [2] , aber auch zu neuen Ergebnissen.

1. Partiell invertierbare Homomorphismen

Bezeichne $S: = \mathrm{End}_R(M)$, $T: = \mathrm{End}_R(N)$. Das in der Einleitung erwähnte Lemma teilen wir in zwei Aussagen auf.

1.1 Hilfssatz: Für $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ sind äquivalent:

(a) $\exists g \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ $[fg$ ist ein Idempotent $\neq 0$ in $T]$

(b) $\exists h \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ $[hf$ ist ein Idempotent $\neq 0$ in $S]$

(c) $\exists f' \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ $[ff'$ ist ein Idempotent $\neq 0$ in $T]$
und $[f'f$ ist ein Idempotent $\neq 0$ in $S]$

Beweis :

Es genügt (a) $\Rightarrow$ (c) zu zeigen, denn (b) $\Rightarrow$ (c) erfolgt analog und (c) $\Rightarrow$ (a) $\wedge$ (b) ist klar. Sei also $fg = e \neq 0$ mit $e^2 = e$, dann folgt $fge = e^2 = e$. Ferner gilt
$((ge)f)((ge)f) = ge(fge)f = ge^2f = (ge)f$,
also ist $d: = (ge)f$ ein Idempotent. Aus $fdg = e^2 = e \neq 0$ folgt $d \neq 0$. Also ist für $f': = ge$ (c) erfüllt.

1.2 Lemma: Für $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ sind äquivalent:
(1) $f \notin \mathrm{Tot}(M,N)$
(2) Die Bedingungen (a), (b), (c) sind erfüllt.

Beweis :

Sei $M = A \oplus A_1$ und bezeichne

$\iota_A : A \to M$ die Inklusion ,

$\pi_A : M \to A$ die zu $M = A \oplus A_1$ gehörende Projektion auf A,

sowie $e_A := \iota_A \pi_A$ den zugehörigen Projektor auf A.

Dann gilt $1_A = \pi_A \iota_A$. Entsprechend seien die Bezeichnungen für $N = B \oplus B_1$. Wir zeigen zuerst

<u>(1) $\Rightarrow$ (a)</u> : Die Voraussetzung besagt, daß es $M = A \oplus A_1$, $A \neq 0$, $N = B \oplus B_1$, mit $f(A) \subset B$ so gibt, daß

$$\hat{f} : A \ni a \mapsto f(a) \in B$$

ein Isomorphismus ist. Wegen $A \neq 0$ ist auch $B \neq 0$ und dann auch $e_B \neq 0$. Es ist $\hat{f} = \pi_B f \iota_A$.

Sei $\varphi := \hat{f}^{-1} = (\pi_B f \iota_A)^{-1}$. Das gesuchte g wird durch $g := \iota_A \varphi \pi_B$ definiert. Dann gilt zunächst

$$e_B fg = \iota_B (\pi_B f \iota_A) \varphi \pi_B = \iota_B 1_B \pi_B = e_B \quad .$$

Wegen $f(A) \subset B$ gilt ferner $Bi(fg) \subset B$ und folglich $fg = e_B fg$. Also ist $fg = e_B$ ein Idempotent $\neq 0$ in T .

<u>(a) $\Rightarrow$ (1)</u> : Sei $fg = e \neq 0$ ein Idempotent in T. Setze $B := e(N)$, also $e = e_B$, dann ist

$N = e(N) \oplus (1-e)(N) = B \oplus B_1$. Wegen $e_B \neq 0$ ist $B \neq 0$.

Setze $A := g(B)$, dann ist

$$\hat{f} : A \ni g(b) \mapsto fg(b) = e_B(b) = b \in B , \qquad b \in B$$

also offensichtlich ein Isomorphismus. Wegen

$$\pi_B fg \iota_B = \pi_B e_B \iota_B = 1_B$$

folgt ([1] , 3.4.10)

$$M = Bi(g \iota_B) \oplus Ke(\pi_B f) = g(B) \oplus Ke(\pi_B f) \quad .$$

Also ist $A = g(B) \overset{\oplus}{\hookrightarrow} M$ und wegen $B \neq 0$ und da $\hat{f}$ ein Isomorphismus ist, ist auch $A \neq 0$.

Insbesondere folgt daraus für Idempotente $e \in T = \mathrm{End}_R(M)$, $e \neq 0$, daß $e \notin \mathrm{Tot}(M)$ gilt (denn $ee = e \neq 0$!).

1.3 Folgerungen:

1) Ist ein (sinnvolles) Produkt von Modulhomomorphismen partiell invertierbar, dann ist jeder Faktor partiell invertierbar.

2) $\mathrm{Tot}(M,N)$ ist ein Halbideal, d.h. für beliebige Moduln X,Y gilt

$$\mathrm{Hom}_R(N,Y)\mathrm{Tot}(M,N)\mathrm{Hom}_R(X,M) \subset \mathrm{Tot}(X,Y)$$

(Siehe [2] ,1.2) .

Beweis :

1): Seien zunächst $f_1 \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_R(L,M)$ und sei f_1f_2 partiell invertierbar. Dann existiert ein $g \in \mathrm{Hom}_R(N,L)$, so daß

$$e = (f_1f_2)g = f_1(f_2g)$$

ein Idempotent $\neq 0$ aus T ist. Folglich ist f_1 partiell invertierbar. Analog sei

$$d = h(f_1f_2) = (hf_1)f_2$$

ein Idempotent $\neq 0$ aus $\mathrm{End}_R(L)$. Also ist auch f_2 partiell invertierbar. Für mehr als 2 Faktoren folgt die Behauptung durch Induktion.

2): Folgt aus 1) .

Der Modul M heißt **totaler Modul** falls $\mathrm{Tot}(M) := \mathrm{Tot}(M,M)$ additiv abgeschlossen ist. Da $\mathrm{Tot}(M)$ stets ein Halbideal ist, ist dann $\mathrm{Tot}(M)$ ein Ideal in $S = \mathrm{End}_R(M)$. Wir nennen M,N ein **totales Paar** von Moduln, falls $\mathrm{Tot}(M,N)$ additiv abgeschlossen ist.

1.4 Bemerkung: Ist mindestens einer der Moduln M,N totaler Modul, dann ist M,N ein totales Paar.

Beweis:

Sei M,N kein totales Paar. Dann gibt es $f,g \in Tot(M,N)$ mit $f+g \notin Tot(M,N)$. Folglich existiert ein $h \in H_R(N,M)$, so daß

$$e := (f+g)h = fh + fg \quad , \quad d := h(f+g) = hf + hg$$

Idempotente $\neq 0$ in T bzw. S sind. Wegen $f,g \in Tot(M,N)$ folgt $fh, gh \in Tot(N)$, $hf, hg \in Tot(M)$. Da $e \notin Tot(N)$, $d \notin Tot(M)$ sind N und M keine totalen Moduln.

2. Radikal und Total

Während im allgemeinen M,N kein totales Paar ist, d.h. $Tot(M,N) + Tot(M,N) \not\subset Tot(M,N)$, ist jedoch stets eine gewisse additive Abgeschlossenheit erfüllt und zwar gilt kurz gesagt Radikal + Total $\subset$ Total .
Um dies zu präzisieren , betrachten wir $Hom_R(M,N)$ einerseits als $S = End_R(M)$ - Rechtsmodul und schreiben dann $Hom_R(M,N)_S$ und andererseits als $T = End_R(N)$ - Linksmodul ${}_T Hom_R(M,N)$.
Mit $Rad(Hom_R(M,N)_S)$ bzw. $Rad({}_T Hom_R(M,N))$ soll das Radikal dieser Moduln bezeichnet werden.

2.1 Satz

a) $Rad(Hom_R(M,N)_S) + Tot(M,N) = Tot(M,N)$

b) $Rad({}_T Hom_R(M,N)) + Tot(M,N) = Tot(M,N)$

Beweis:

a) Es genügt $Rad(Hom_R(M,N)_S) + Tot(M,N) \subset Tot(M,N)$ zu zeigen, denn wegen $0 \in Rad(Hom_R(M,N)_S)$ folgt die Gleichheit.

Seien $g \in$ Rad$(\mathrm{Hom}_R(M,N)_S)$, $f \in \mathrm{Tot}(M,N)$. Angenommen $g + f \notin \mathrm{Tot}(M,N)$, dann gibt es ein $h \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ und ein Idempotent $e \in S$, $e \neq 0$ mit $h(g+f) = e$. Die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(M,N)_S \ni k \mapsto hk \in S_S$$

ist offensichtlich ein S-Rechtsmodulhomomorphismus. Dabei wird das Radikal in das Radikal abgebildet. Also folgt $hg \in \mathrm{Rad}(S_S) (=\mathrm{Rad}(S))$. Aus $h(g+f) = e$ und

$$S = (1-e)S + eS$$

folgt

$$S = (1-e)S + hfS + hgS$$

$$= (1-e)S + hfS ,$$

wobei benutzt wurde, daß für $hg \in \mathrm{Rad}(S)$ das Rechtsideal hgS klein in S_S ist, also weggelassen werden kann. Für gewisse $s_1, s_2 \in S$ gilt dann

$$1 = (1-e)s_1 + hfs_2 .$$

Multiplikation mit e von links liefert

$$e = ehfs_2$$

Aus $f \in \mathrm{Tot}(M,N)$ folgt einerseits $ehfs_2 \in \mathrm{Tot}(M)$, andererseits aber gilt $e \notin \mathrm{Tot}(M)$, Widerspruch ! Also gilt $g+f \in \mathrm{Tot}(M,N)$.

Beweis von) analog(Bei Vertauschung der Seiten).

Da $0 \in \mathrm{Tot}(M,N)$ erhält man aus 2.1

$$\mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_R(M,N)_S) \subset \mathrm{Tot}(M,N)$$

$$\mathrm{Rad}({}_T\mathrm{Hom}_R(M,N)) \subset \mathrm{Tot}(M,N) .$$

Aus 2.1 erhlt man daher auch die

2.2 Folgerung:

$Rad(Hom_R(M,N)_S) + Rad({}_T Hom_R(M,N)) \subset Tot(M,N)$.

3. Partielle Invertierbarkeit in Ringen

Ist R ein Ring mit Einselement, dann gilt

$End(R_R) = R^{(l)}$, $End({}_R R) = R^{(r)}$, wobei $R^{(l)}$ bzw. $R^{(r)}$ der Ring der Links- bzw. der Rechtsmultiplikatoren ist. R ist zu $R^{(l)}$ und zu $R^{(r)}$ in natürlicher Weise ($x \mapsto x^{(l)}$ bzw. $x \mapsto x^{(r)}$) ringisomorph und wir wollen $R^{(l)}$ und $R^{(r)}$ mit R identifizieren. Dann folgt $Tot(R_R) \subset R$, $Tot({}_R R) \subset R$. Das Lemma 1.2 nimmt jetzt die folgende Form an.

3.1 Lemma

(vergl. [2] ,6.1) Für $r \in R$ sind äquivalent :

(1) $r \notin Tot(R_R)$

(2) $\exists\, s \in R$ [rs ist ein Idempotent $\neq 0$ in R]

(3) $\exists\, t \in R$ [tr ist ein Idempotent $\neq 0$ in R]

(4) $\exists\, r' \in R$ [rr' und r'r sind Idempotente $\neq 0$ in R]

Da (4) seitennabhängig ist, gilt das gleiche für $r \notin Tot({}_R R)$. as ergibt die

3.2 Folgerung

(vergl. [2] ,6.3) $Tot\ (R_R) = Tot({}_R R)$

Sei nun $Tot(R : = Tot(R_R) = Tot({}_R R)$. Als Spezialfall von 2.1 ergibt sih jetzt die

3.3 Folgerung :

$$Rad(R) + Tot(R) = Tot(R)$$

Zur Frage, wann $Rad(R) = Tot(R)$ gilt, ist der folgende Satz von Interesse.

3.4 Satz: Sei R ein Ring, in dem sich Idempotente von $R/Rad(R)$ liften lassen und sei $Tot(R/Rad(R)) = 0$, dann gilt $\quad Rad(R) = Tot(R)$.

Beweis :

Wegen $Rad(R) \subset Tot(R)$ muß nur $Tot(R) \subset Rad(R)$ gezeigt werden. Beweis indirekt. Sei $t \in Tot(R)$, $t \notin Rad(R)$, dann folgt $\bar{t} := t + Rad(R) \neq 0$. Wegen $Tot(R/Rad(R)) = 0$ existiert ein $\bar{s} \in \bar{R} := R/Rad(R)$ mit $\bar{t}\bar{s} = \varepsilon \neq 0$, wobei ε Idempotent in $\bar{R}$. Nach Voraussetzung existiert ein Idempotent $e \in R$ mit $\varepsilon = \bar{e}$ und wegen $\varepsilon \neq 0$ ist $e \neq 0$. Dann folgt aus $\bar{t}\bar{s} = \bar{e}$

$$ts = e + u \quad , \quad u \in Rad(R) \quad ,$$

also auch $e = u - ts$. Wegen $t \in Tot(R)$ gilt $-ts \in Tot(R)$, also auch $u - s \in Rad(R) + Tot(R) = Tot(R)$. Aber dazu im Widerspruch gilt $e \notin Tot(R)$. Also muß $t \in Rad(R)$ gelten.

3.5 Bemerkunge :

1) Ist $Rad(R)$ in Nilideal, dann lassen sich Idempotente liften. (vrgl. [1] , 11.5.3)
2) Ist $R/Rad(R$ halbeinfach oder regulär, dann ist $Tot(R/Rad(R) = 0$
3) Ist R_R semiperfekt, dann ist $R/Rad(R)$ halbeinfach und Idempotentelassen sich liften ([1] , 11.3.2), also gilt jetzt $\quad Rad(R) = Tot(R)$.

Der Ring R wird **totaler Ring** genannt, falls Tot(R) ein Ideal von R ist. Gilt Rad(R) = Tot(R), dann ist R ein totaler Ring. Es gibt jedoch auch totale Ringe R mit Rad(R) $\subsetneq$ Tot(R) (siehe [2] 6.8.7).

3.6 Satz : Für einen totalen Ring R gilt

$$\mathrm{Tot}(R/\mathrm{Tot}(R)) = 0 .$$

Beweis :

Sei $\bar{r} \in \bar{R} := R/\mathrm{Tot}(R)$, $\bar{r} \neq 0$, dann folgt $r \notin \mathrm{Tot}(R)$. Also existiert ein $s \in R$, so daß $rs = e \neq 0$ ein Idempotent ist. Wegen $e \notin \mathrm{Tot}(R)$ folgt $\bar{r}\bar{s} = \bar{e} \neq 0$, wobei $\bar{e}$ Idempotent in $\bar{R}$ ist. Daher gilt $\bar{r} \notin \mathrm{Tot}(\bar{R})$ und folglich $\mathrm{Tot}(\bar{R}) = 0$.

4. Totalfreie Ringe

Ich bezeichne R als **totalfreien Ring**, falls Tot(R) = 0.

Wie schon erwähnt, ist jeder reguläre Ring R totalfrei, denn zu jedem $r \in R$ gibt es $s \in R$ mit $rsr = r$, so daß für $r \neq 0$ rs ein Idempotent $\neq 0$ ist. Umgekehrt ist nicht jeder totalfreie Ring regulär, wie ein Beispiel in [2], (2.14) zeigt.

Zunächst werden einige einfache Eigenschaften von totalfreien Ringen festgestellt.

4.1 Hilfssatz : Sei R totalfrei.

1) Jedes Rechts- oder Linksideal $\neq 0$ enthält ein Idempotent $\neq 0$.

2) Jedes einfache Rechts- oder Linksideal von R wird durch ein Idempotent erzeugt.

3) Jedes direkt unzerlegbare Rechts- oder Linksideal $\neq 0$ von R ist ein einfaches Ideal.

4) Ist R direkte Summe von direkt unzerlegbaren Rechts- oder Linksidealen, dann ist R halbeinfach.

Beweis : 1) und 2) sind klar.

3) : Seien A ein direkt unzerlegbares Rechtsideal und $e \neq 0$ ein Idempotent aus A. Dann folgt

$$A = eR \oplus ((1 - e)R \cap A) .$$

Da A direkt unzerlegbar ist und $eR \neq 0$ folgt $A = eR$. Angenommen $A = eR$ wären nicht einfach und $0 \neq B \subsetneqq A$, sowie $e_1 \neq 0$ ein Idempotent aus B, dann folgte wie zuvor $A = e_1R \subsetneq B$. Widerspruch !

4) Klar nach 3).

Danach sind z.B. totalfreie semiperfekte Ringe halbeinfach.

4.2 Satz : Sei R totalfrei und e Idempotent aus R, dann gilt:

$$eR \text{ einfach} \Leftrightarrow Re \text{ einfach} .$$

Beweis :

Sei eR einfach und sei $se \neq 0$, $s \in R$. Dann gibt es ein $t \in R$, so daß $tse = e_1 \neq 0$ ein Idempotent ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : eR \ni ex \mapsto e_1x \in e_1R$$

Da eR einfach ist und $e_1 \neq 0$, ist dies ein Isomorphismus wobei $\varphi(e) = e_1$ gilt. Seien π_1 die zur Zerlegung

$R = e_1R \oplus (1 - e_1)R$ gehörende Projektion auf e_1R und $\iota : eR \rightarrow R$ die Inklusion. Dann gilt $f := \iota \varphi^{-1} \pi_1 \in \mathrm{End}(R_R) = R^{(1)}$. Also existiert ein $b \in R$ mit $f = b^{(1)}$. Dafür folgt $e = f(e_1) = be_1$, d.h. $e \in Re_1 \subset Rse$, also $Rse = Re$. Dies bedeutet, daß Re von jedem seiner Elemente $\neq 0$ erzeugt wird und folglich einfach ist. Analog für die andere Richtung.

Mit $\mathrm{Soc}(R_R)$ bzw. $\mathrm{Soc}({}_RR)$ bezeichne ich den Rechts- bzw. Linkssockel von R.

4.3 Folgerung : Ist R totalfrei, dann gilt

$$\mathrm{Soc}(R_R) = \mathrm{Soc}({}_RR)$$

Für den nächsten Satz wird eine Eigenschaft von Idempotenten gebraucht.

4.4 Hilfssatz : Seien e_1, e_2 Idempotente eines beliebigen Ringes R mit $e_2R \subsetneqq e_1R$, dann gilt $R(1 - e_1) \subsetneqq R(1 - e_2)$.

Beweis :

Aus $e_2R \subset e_1R$ folgt $e_1e_2 = e_2$ und dies impliziert $(1 - e_1)e_2 = 0$. Also liegt $R(1 - e_1)$ im Linksannullator $R(1 - e_2)$ von e_2 . Angenommen $R(1 - e_1) = R(1 - e_2)$, dann folgte $e_1 = e_2e_1$, also $e_1R \subset e_2R$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Nützlichkeit der partiellen Invertierbarkeit demonstriere ich schließlich an dem folgenden Satz, der die bekannte Tatsache einschließt, daß reguläre, einseitig noethersche Ringe halbeinfach sind.

4.5 Satz: Sei R totalfreier Ring und R erfülle die Maximalbedingung für Links- (oder Rechts-) Ideale, die direkte Summanden von R sind. Dann ist R halbeinfach.

Beweis :

1.Teil: Wir zeigen zuerst, daß jedes Rechtsideal $\neq 0$ von R ein einfaches Rechtsideal enthält. Beweis indirekt.

Sei $A_1 \neq 0$ ein Rechtsideal aus R, das kein einfaches Rechtsideal enthält. Sei $0 \neq e_1 \in A_1$ ein Idempotent. Dann ist e_1R nicht einfach. Sei A_2 ein in e_1R echt enthaltenes Rechtsideal und $0 \neq e_2 \in A_2$ ein Idempotent, dann folgt $e_2R \subsetneqq e_1R$ und e_2R ist nicht einfach. Durch Induktion ergibt sich eine Folge

$$e_1R \supsetneqq e_2R \supsetneqq e_3R \supsetneqq \dots$$

mit Idempotenten $e_1, e_2, e_3, \dots$. Nach 4.4 erhält man dann die Folge

$$R(1-e_1) \subsetneqq R(1-e_2) \subsetneqq R(1-e_3) \subsetneqq \dots$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

2.Teil: Unter der Annahme, daß R nicht halbeinfach ist, wird gezeigt: Zu jedem $n \in N$ gibt es eine Zerlegung

$$R = e_1R \oplus e_2R \oplus \dots \oplus e_nR \oplus d_{n+1}R ,$$

wobei die $e_1, \dots, e_n$, d_{n+1} orthogonale Idempotente $\neq 0$ und die e_iR , $i = 1,\dots,n$ einfache Rechtsideale sind.

Beweis durch Induktion über n. Zunächst gibt es nach dem 1.Teil des Beweises in R ein einfaches Rechtsideal e_1R und dafür gilt

$$R = e_1R \oplus (1-e_1)R$$

Setze $d_2 := 1-e_1$. Da R nicht halbeinfach ist, muß $d_2 \neq 0$

sein. Zum Induktionsschluß sei dR ein einfaches Rechtsideal aus $d_{n+1}R$, wobei auch d ein Idempotent ist. Dann folgt

$$d_{n+1}R = dR \oplus ((1-d)R \cap d_{n+1}R) \ .$$

Sei $\quad d_{n+1} = e_{n+1} + d_{n+2}$

mit $\quad e_{n+1} \in dR \ , \ d_{n+2} \in (1-d)R \cap d_{n+1}R$, dann sind e_{n+1} und d_{n+2} zueinander orthogonal, $e_{n+1}R = dR$ ist einfach und $d_{n+2} \neq 0$, da sonst R halbeinfach wäre. Wegen e_{n+1} , $d_{n+2} \in d_{n+1}R$ und $e_i d_{n+1} = 0$ folgt

$$e_i e_{n+1} = 0 \quad , \quad e_i d_{n+2} = 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,n \ .$$

Auf Grund der Induktionsvoraussetzung gilt

$$1 = e_1 + \ldots + e_n + d_{n+1} = e_1 + \ldots + e_n + e_{n+1} + d_{n+2}$$

Multiplikation mit e_i von rechts liefert

$$0 = e_{n+1}e_i + d_{n+2}e_i \quad , \quad i = 1,\ldots,n \quad ,$$

woraus $e_{n+1}e_i = d_{n+2}e_i = 0$ folgt. Damit ist die Induktion vollständig. Man beachte, daß sich beim Schluß von n auf n+1 die $e_1,\ldots,e_n$ nicht geändert haben. Zu der Folge $e_1,e_2,e_3,\ldots$ von orthogonalen Idempotenten existiert die Folge von Linksidealen

$$Re_1 \subsetneqq Re_1 \oplus Re_2 \subsetneqq Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3 \subsetneqq \ldots \quad ,$$

die wegen der Orthogonalität der $e_1 ,\ldots,e_n$, d_{n+1} direkte Summanden von R sind. Widerspruch zur Voraussetzung ! Folglich ist R halbeinfach.

Eine leichte Rechnung wie im Beweis von 1.1 zeigt, daß für einen totalfreien Ring R und ein Idempotent $e \in R$, $e \neq 0$ auch der Ring eRe totalfrei ist. Andere naheliegenden Fragen sind noch offen. Z.B. ist nicht bekannt, ob das Zentrum eines totalfreien Ringes wieder totalfrei ist.

Andererseits ist unschwer zu beweisen, daß der Ring aller n-reihigen, quadratischen Matrizen mit Koeffizienten aus einem totalfreien Ring wieder totalfrei ist. Das hat eine Reihe von interessanten Konsequenzen. Darauf und auf den Zusammenhang von totalfreien und regulären Ringen gehe ich bei späterer Gelegenheit ein.

Literatur

[1] F.Kasch
Modules and rings
Academic Press 1982

[2] W.Schneider
Das Total von Moduln und Ringen
Algebra Berichte 55
Verlag Reinhard Fischer, München, 1987

Friedrich Kasch
Mathematisches Institut der Universität
München

Februar 1988