

# 3.4 Querkraft

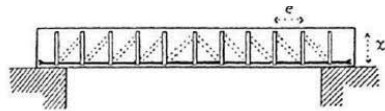
Gegenstand des vorliegenden Kapitels sind das Verhalten und die Bemessung von Trägern (und in eine Richtung tragenden Platten) unter Querkraftbeanspruchung.

Das Verhalten und die Bemessung von Platten unter Querkraft (bis zum Herbstsemester 2015 ebenfalls in diesem Kapitel kurz behandelt) sind neu Gegenstand der Vorlesung Stahlbeton II, Kapitel Platten.

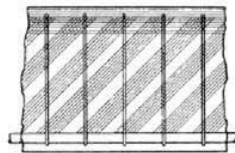
# Querkraft – Allgemeines

## Verhalten von Bauteilen unter Querkraft

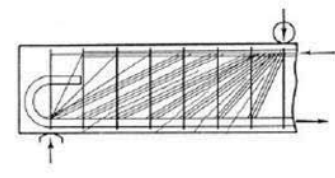
Frühe Fachwerkmodelle: Erklärung des Tragverhaltens (nicht für Bemessung verwendet)



K. W. Ritter, «Die Bauweise Hennebique» (1899)

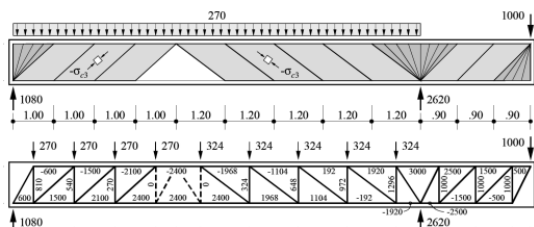


E. Morsch, «Der Eisenbetonbau» (1908)

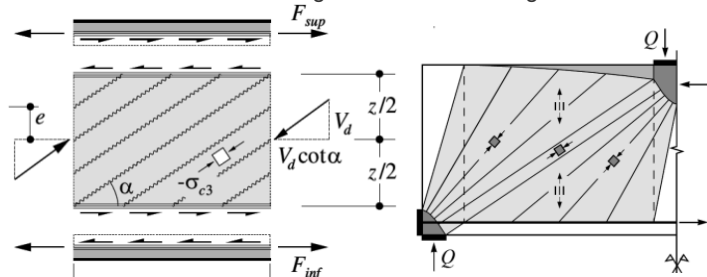


E. Morsch, «Der Eisenbetonbau» (1922)

Heutige Fachwerkmodelle / Spannungsfelder: Plastizitätstheorie = konsistente Grundlage für die Bemessung



10.11.2017



ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

2

In der Regel dominieren bei Stahlbetonbalken und -platten die Kräfte und Verformungen infolge der Biegebeanspruchung das Tragverhalten. Bei gedrungenen und stark profilierten Träger können die Querkräfte und die zugehörigen Schubverformungen allerdings relativ gross sein. Zudem sind Versagen infolge Querkraft insbesondere bei fehlender oder sehr kleiner Schubbewehrung spröde. Aus diesen Gründen verdient die Schubbemessung besondere Aufmerksamkeit.

Aus dem Rissbild und der Verformung von Versuchsträgern schloss man schon früh auf eine Fachwerkwirkung von Stahlbetonträgern. Bereits Ende des 19. Jahrhunderts entwickelten Karl Wilhelm Ritter und später Emil Morsch erste Fachwerkmodelle, um die Tragwirkung von Stahlbetonträgern zu beschreiben. Diese wurden allerdings kaum für die Bemessung eingesetzt, da sie als unwissenschaftlich galten; vielmehr verwendete man an elastizitätstheoretischen Lösungen orientierte Nachweise («schiefe Hauptzugspannungen»). Auch später verfolgte man mit Fachwerkmodellen primär den globale Kraftfluss; die Ausdehnung der Druckstreben war dabei sekundär. Solche Anwendungen haben sich bis heute gehalten («Stabwerkmodelle», z. B. Schlaich et al., 1984 resp. 1987)

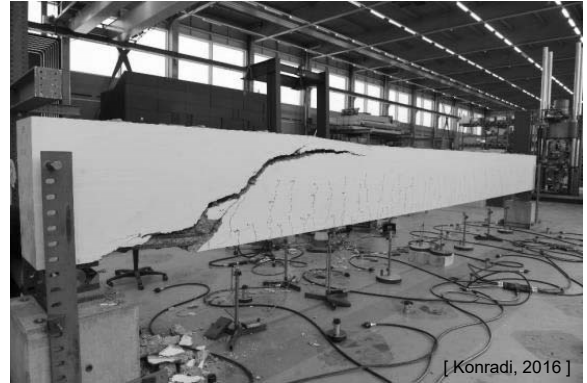
Seit etwa 1975 werden Fachwerkmodelle auf der Basis der Plastizitätstheorie, in Verbindung mit der Annahme einer endlichen Betondruckfestigkeit  $f_c$ , angewendet; die Abmessungen der Druckstreben und Knoten ergeben sich aus der Annahme von  $f_c$ . Die resultierenden Fachwerkmodelle sind statisch zulässige (diskontinuierliche) Spannungsfelder im Rahmen der statischen Methode der Plastizitätstheorie und beruhen somit auf einer klaren theoretischen Grundlage. Die darauf beruhenden einfachen, klaren Fachwerkmodellvorstellungen eignen sich hervorragend für die Bemessung von Neubauten. Nachdem sie anfänglich durch diverse empirische Modifikationen verunklärt wurden, setzten sie sich ab etwa 1980 auch international in den Normen durch (Basis: CEB-fip Model Codes 1978).

In letzter Zeit ist leider eine gegenläufige Tendenz zu beobachten, ausgehend vom Bestreben, das Verhalten von Trägern ohne Schubbewehrung zu erfassen. Da bei Balken immer eine konstruktive Mindestschubbewehrung eingelegt wird, ist die Aufnahme solcher Bestimmungen in Bemessungsnormen nicht sinnvoll.

# Querkraft – Allgemeines

## Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft

- Seit 1960 intensive Forschung insbesondere auch an der ETH Zürich.
- Diverse Grossversuche, zum Beispiel Marti/Beck/Konradi (2016), siehe Abbildungen
- 2 Versuchskörper ohne Querkraftbewehrung
- Plötzliches, schlagartiges Versagen



10.11.2017

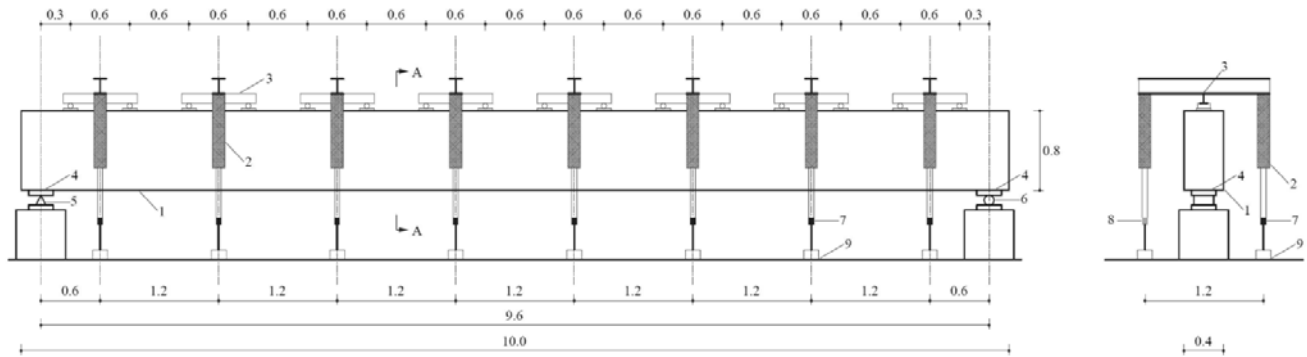
ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

3

# Querkraft – Allgemeines

## Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft

- Versuchsanordnung: einfacher Balken unter gleichmässig verteilter Last

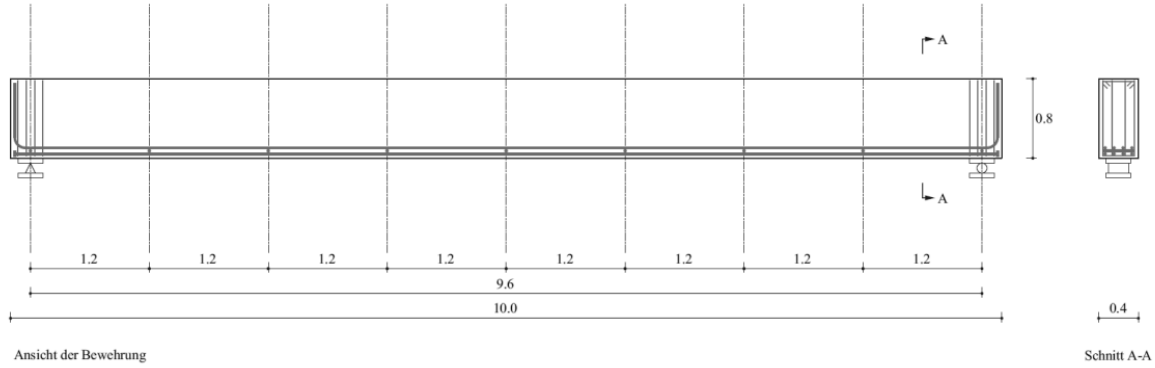


[ Konradi, 2016 ]

# Querkraft – Allgemeines

## Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft

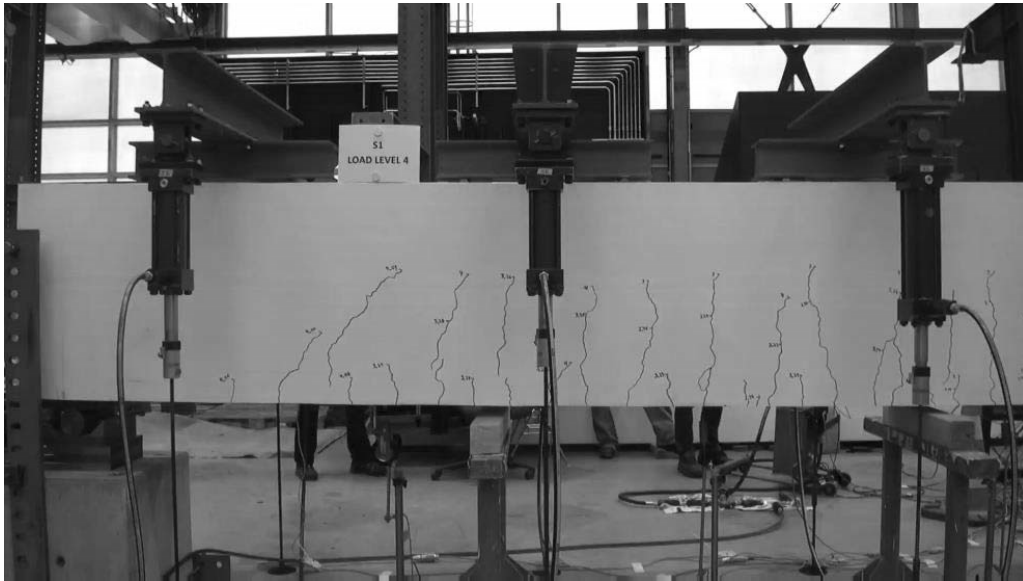
- nur Längsbewehrung auf Biegezugseite, keine Bügelbewehrung (ausser bei Auflager zur Lasteinleitung)



[ Konradi, 2016 ]

# Querkraft – Allgemeines

## Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft – Versuchskörper S1



[Konradi, 2016]

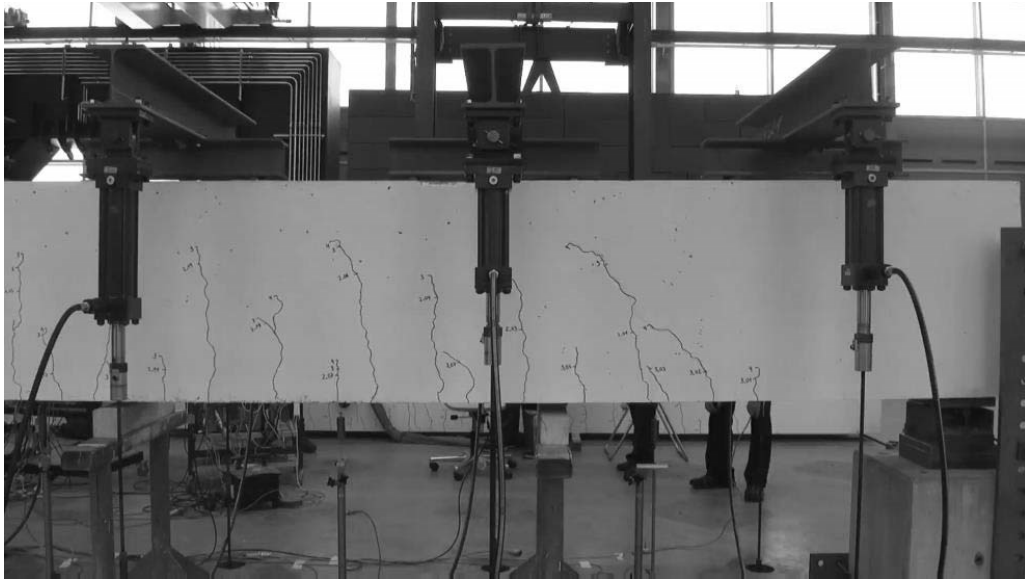
10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

6

# Querkraft – Allgemeines

## Verhalten von Bauteilen ohne Schubbewehrung unter Querkraft – Versuchskörper S2

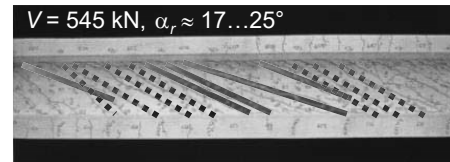
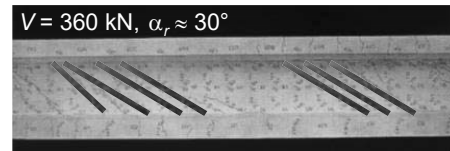
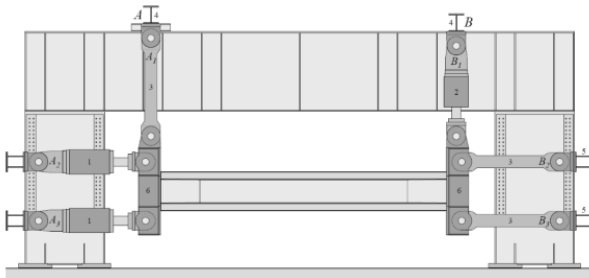


[Konradi, 2016]

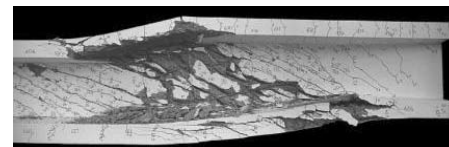
# Querkraft – Allgemeines

## Verhalten von Bauteilen unter Querkraft

- Seit 1960 intensive Forschung insbesondere auch an der ETH Zürich.
- Zahlreiche Grossversuche, zum Beispiel Kaufmann (1995/96), siehe Abbildungen, bestätigen das Verhalten (Fachwerke / Spannungsfelder) bei Trägern mit Schubbewehrung.
- Rissneigung wird mit zunehmender Belastung immer flacher bis zum Stegdruckbruch.



(Bruch)



Die Anwendung von Spannungsfeldern im Stahlbetonbau basiert wie viele andere Bemessungsverfahren (implizit oder explizit) auf der Plastizitätstheorie.

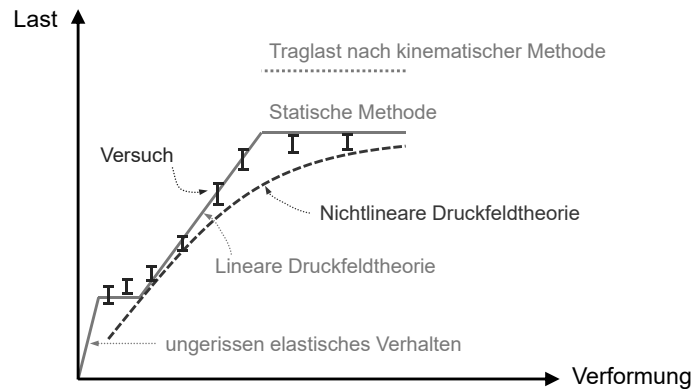
Bei der Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton spielte die ETH Zürich (Prof. Bruno Thürlimann und sein Nachfolger Prof. Peter Marti) eine Pionierrolle. Neben theoretischen Untersuchungen spielte dabei auch die Verifizierung der Modellvorstellungen mittels grossmassstäblichen Versuchen eine wichtige Rolle.

Weitere Ausführungen dazu siehe Vorlesung Stahlbeton III.



# Querkraft – Verhalten

## Typisches Last-Verformungs-Diagramm



- Das typische Last-Verformungs-Diagramm zeichnet sich durch die drei Bereiche «ungerissen elastisches Verhalten» (Zustand I), «gerissen elastisches Verhalten» (Zustand II) und «Traglast» (Zustand III) aus.
- Das in Versuchen beobachtete Verhalten kann mit verschiedenen Modellvorstellungen erfasst werden.
- Für die Abtragung von Querkraften im gerissenen Bereich sind zwingend Bügel anzuordnen.

Ähnlich wie für Normalkraft und Biegung kann auch das Verhalten unter Querkraft durch die drei charakteristischen Zustände I (ungerissen), II (gerissen-elastisch) und III (plastisch resp. Traglast) beschrieben werden.

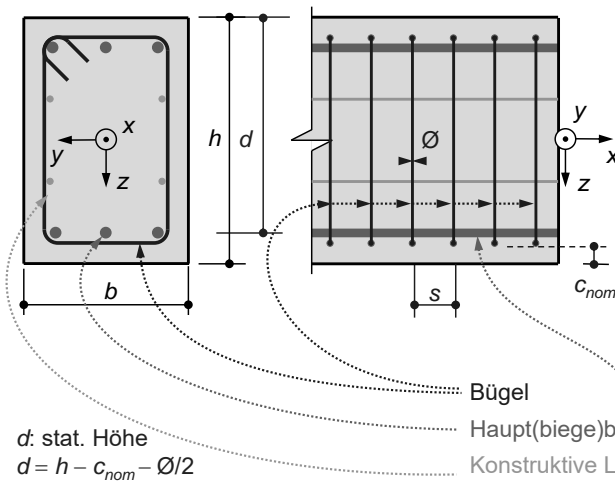
Das Verhalten von Stahlbetonscheiben kann mit sogenannten *Druckfeldmodellen* untersucht werden. Solche Modelle zeichnen sich dadurch aus, dass das Tragverhalten von einem gegenüber den Bewehrungsrichtungen geneigten Druckspannungszustand im Beton dominiert wird.

Weitere Angaben siehe Kapitel *Scheibenelemente* und Vorlesung Stahlbeton III (Kapitel *Scheibenelemente / Last-Verformungsverhalten*).

## Querkraft – geometrischer Bewehrungsgehalt

[1], Seite 2.2ff, SIA 262, Ziff. 5; Balken Ziff. 5.5.3 (z.B. Unterzüge...)

- Balken sind zu verbügeln. Bügel (Abstand  $s < 25\varnothing$ ) müssen Längszugbewehrung umfassen.
- Stösse (Bügel und Längsbewehrung): Stosslänge (ca.  $50\varnothing$ , siehe SIA 262, 5.2.5).



Bügelbewehrungsgehalt  $\rho_w$   
 min. ca. 0.2%, → zweischnittige Bügel:

$$\rho_w = \frac{\pi \cdot \varnothing^2}{2 \cdot b \cdot s} \geq 0.2\%$$

NB: nach SIA 262 (2013) sind  
 Bügelbewehrungsgehalte von ca. 0.1%  
 ausreichend:

$$\rho_w \geq 0.1\% \sqrt{\frac{f_{ck}}{30} \frac{500}{f_{sk}}}$$

→ bei Neubauten in der Regel nicht sinnvoll  
 (Robustheit)

Um spröde Versagen infolge Querkraft zu vermeiden, ist in Balken stets eine Mindestquerkraftbewehrung («Verbügelung») vorzusehen. Ohne Querkraftbewehrung sollten nur dünne Platten ausserhalb der Einleitungsbereiche konzentrierter Lasten ausgeführt werden.

Nach der aktuellen Norm SIA 262 ist ein Bügelbewehrungsgehalt von mindestens 0.1% (für C30/37 und B500B) erforderlich. Derart geringe Bewehrungsgehalte reichen aus, um ein Versagen bei Erstrissbildung zu verhindern, aber nicht, um ein (einigermassen) duktileres Versagen zu gewährleisten. Bei Haupttragelementen von Neubauten sollte daher, zur Gewährleistung der Robustheit ein höherer Bewehrungsgehalt vorgesehen werden.

Bei der konstruktiven Durchbildung ist zu beachten, dass kleine Stababstände das Einbringen des Betons erschweren; dabei sind Übergreifungsstösse besonders zu beachten. Andererseits sind auch zu grosse Stababstände zu vermeiden.

# Querkraft – Nominelle Schubspannungen

## Nominelle Schubspannungen

- Die auf die Stegbreite und den Hebelarm der inneren Kräfte bezogene mittlere Schubspannung («nominelle Schubspannung») ist ein geeignetes Hilfsmittel zur Einordnung der vorliegenden Schubproblematik.

$$\tau_{d,nom} = \frac{V_d}{b_w \cdot z}$$

- Nominelle Schubspannungen eignen sich generell für Abschätzungen, jedoch ausschliesslich bei dünnen Platten ohne Schubbewehrung (in Kombination mit entsprechend normierten Schubwiderständen) für den Nachweis der Tragsicherheit.
- $\tau_d \leq \text{ca. } 0.15 f_{ctm}$ : Bei dünnen Platten kann auf eine Querkraftbewehrung verzichtet werden (ungerissenes Verhalten).
- $0.15 f_{ctm} \leq \tau_d \leq 2 f_{ctm}$ : Querkraftbewehrung (Bügel und verstärkte Längsbewehrung) erforderlich.
- $\tau_d \geq \text{ca. } 2 f_{ctm}$ : Sollte durch Vergrösserung der Betonabmessungen konstruktiv vermieden werden (Gefahr eines Stegdruckbruchs!)

## Mindestbewehrung

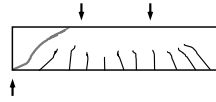
- In Balken und Plattenbalken sind stets Bügel anzuordnen, deren geometrischer Bewehrungsgehalt einen Wert von ca. 0.2% nicht unterschreiten soll.
- Die SIA 262 (2013) schreibt einen Bügelbewehrungsgehalt von lediglich ca. 0.1% vor (bei Neubauten sind derart tiefe Bügelbewehrungsgehalte in der Regel nicht sinnvoll, Robustheit):

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w} \geq 0.001 \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{30}} \cdot \frac{500}{f_{sk}}$$

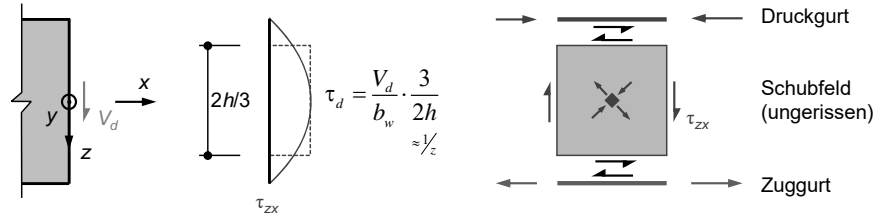
Die in der Folie angegebenen Beziehungen für die nominellen Schubspannungen können für Abschätzungen, insbesondere zur Beurteilung der Höhe der Schubbeanspruchung, verwendet werden.

# Querkraft – Nominelle Schubspannungen

**Stegzugbruch** (Bauteil ohne Schubbewehrung)



- Hauptspannung  $\sigma_1$  im Beton erreicht die Zugfestigkeit, Umlagerung der Spannungen auf Bewehrung nicht möglich, da keine oder zu wenig Querkraftbewehrung vorhanden.
- Sehr sprödes Zugversagen des Betons.



$$\tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y(z)}{b_w \cdot I_y}$$

mit  $S_{y,\max} = S_y(z=0) = \frac{bh^2}{8}$

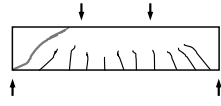
und  $I_y = \frac{bh^3}{12}$   $\left. \vphantom{I_y} \right\} \frac{S_{y,\max}}{I_y} = \frac{3}{2h}$

Im ungerissenen Zustand verhält sich der Beton näherungsweise linear elastisch. Damit gelten für Rechteckquerschnitte die aus der Mechanik bekannten Beziehungen für die Schubspannungen.

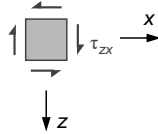
Als Modellvorstellung wird der Querschnitt in einen Zug- und einen Druckgurt (welche die Biegemomente aufnehmen) und ein Schubfeld, welches die Gurte verbindet, aufgeteilt (ähnlich wie ein Walzprofil mit I-Querschnitt). Im Steg liegt dann ein Zustand reiner Schubbeanspruchung vor.

# Querkraft – Nominelle Schubspannungen

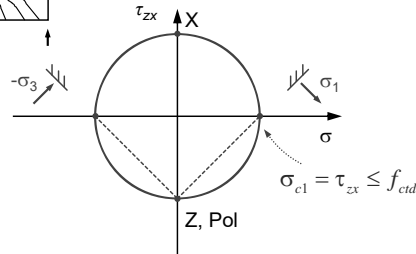
**Stegzugbruch** (Bauteil ohne Schubbewehrung)



- Untersuchung des Spannungszustands im Schubfeld:



$$\sigma_1 = \tau_{xz} = \frac{V_d}{b_w \cdot z}$$



- Für unbedeutende Bauteile kann nach SIA 262 die Tragsicherheit unter Berücksichtigung folgender, vorsichtig angesetzter Betonzugfestigkeit nachgewiesen werden, sofern die Rissbildung kein Versagen des Tragwerks auslöst (SIA 262, 5.5.1.4):

$$f_{ctd} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0.7 f_{ctm}}{1.5} = 0.15 f_{ctm} \quad (\text{SIA262, 5.2.7.1})$$

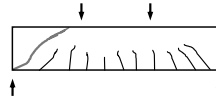
- Nominelle Schubspannungen entsprechen im ungerissenen Zustand einer Hauptzugspannung gleichen Betrags → bei dünnen Platten, welche gemäss SIA 262 ohne Schubbewehrung ausgeführt werden dürfen, wird somit implizit die Zugfestigkeit des Betons berücksichtigt (die in der Regel sogar etwas über dem für unbedeutende Bauteile zulässigen Wert liegt; alternative Tragmodelle siehe übernächste Folie).
- NB: Längsdruckspannungen bewirken eine Reduktion der Hauptzugspannung. In früheren Ausgaben der SIA 262 (SIA 162) wurde der Schubwiderstand vorgespannter Träger auf dieser Basis überprüft.

Eine Schubbeanspruchung  $\tau$  entspricht unter  $\pm 45^\circ$  geneigten Hauptzug- resp. Druckspannungen der Grösse  $\sigma_{c1} = |\tau|$  und  $\sigma_{c3} = -|\tau|$ .

Ist keine Bewehrung vorhanden, erfolgt der Bruch, sobald die Hauptzugspannung die Zugfestigkeit der Betons erreicht,  $\sigma_{c1} = |\tau| = f_{ct}$  (sogenannter Stegzugbruch). Eine darauf beruhende Bemessung (d.h. unbewehrte Betonbauteile) ist für untergeordnete Bauteile zulässig, sofern ein Versagen des Tragwerks bei Rissbildung ausgeschlossen werden kann.

## Querkraft – Nominelle Schubspannungen

**Stegzugbruch** (Bauteil ohne Schubbewehrung)



- Dass in dünnen Platten, die in der Regel keine «unbedeutenden Bauteile» sind, bei geringer Schubbeanspruchung implizit die Zugfestigkeit berücksichtigt werden darf, lässt sich – ausserhalb der Kraftereinleitungsbereiche – mit der gegenüber Balken höheren Redundanz (zweiachsige Tragwirkung, Ausbildung eines Versagensmechanismus weniger wahrscheinlich) rechtfertigen.
- Zudem tritt in dünnen Platten bei Erstrissbildung unter moderater Schubbeanspruchung kein Versagen auf, sofern die Rissraugigkeit ausreicht und die Biegebewehrung Reserven aufweist.
- Einfaches Modell für Schubübertragung durch Rissverzahnung in Erstrissen (reine Schubbeanspruchung in Rissebene) siehe nächste Folie.

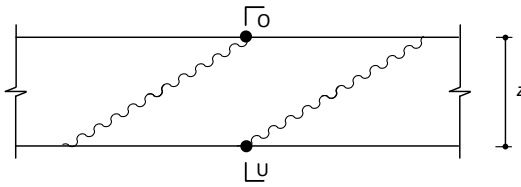
NB1: Rissverzahnung ist abhängig von der Rissraugigkeit. Vorsicht bei grossen Bauteilen und Beton mit glatten Rissufer (hochfester Beton, Leichtbeton).

NB2: Die Tragwirkung durch Rissverzahnung reicht bei stark schubbeanspruchten Bauteilen (→ Platten im Stützenbereich) nicht aus, um ein sprödes Versagen bei Erstrissbildung zu vermeiden!

### *Ergänzende Bemerkung*

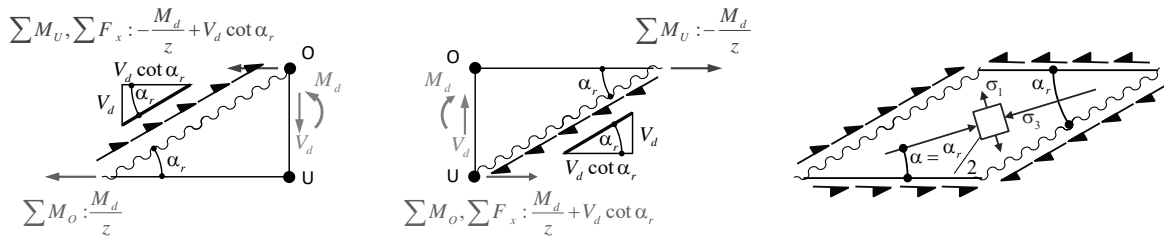
- In Nordamerika sind auch Balken ohne Bügel zulässig (eine Mindestbügelbewehrung ist nicht erforderlich, sofern die Schubbeanspruchung weniger als die Hälfte des rechnerischen Querkraftwiderstands ohne Schubbewehrung beträgt, wobei der Querkraftwiderstand ohne Schubbewehrung in Platten wegen der Redundanz infolge zweiachsiger Tragwirkung etwas doppelt so gross ist wie in Balken).

## Platten – Einfluss von Querkräften



In dünnen Platten tritt bei Erstrissbildung unter moderater Schubbeanspruchung kein Versagen auf, sofern die Rissrauigkeit ausreicht und die Längsbewehrung Reserven aufweist.

(Beanspruchung der Längsbewehrung infolge Querkraft: Doppelt so gross wie mit Bügeln!)



Oft wird befürchtet, dass ein Träger ohne Schubbewehrung bei Erstrissbildung versagt. Ist eine genügend starke Längsbewehrung vorhanden und die Schubbeanspruchung moderat, kann jedoch auch nach der Erstrissbildung eine Querkraft übertragen werden, sofern die Schubübertragung durch Rissverzahnung in den Erstrissen gewährleistet ist (genügend starke Rissverzahnung).

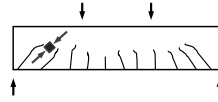
Die Abbildung zeigt eine einfache Modellvorstellung für dieses Tragverhalten, unter der Annahme einer reinen Schubbeanspruchung in der Rissebene (d.h. Risse übertragen Schubspannungen, aber keine Normalspannungen).

### Ergänzende Bemerkungen

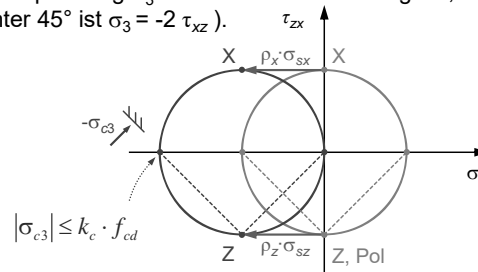
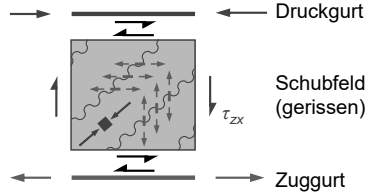
- Die Rissverzahnung ist abhängig von der Rissrauigkeit und der Rissöffnung (Verschiebung, nicht Dehnung). Sie ist daher einem Massstabeffekt unterworfen. Insbesondere bei grossen Bauteilen und Beton mit glatten Rissufern (hochfester Beton, Leichtbeton) ist daher besondere Vorsicht geboten.
- Die Tragwirkung durch Rissverzahnung reicht bei stark schubbeanspruchten Bauteilen (→ Platten im Stützenbereich) nicht aus, um ein sprödes Versagen bei Erstrissbildung zu vermeiden.

# Querkraft – Nominelle Schubspannungen

**Stegdruckbruch** (Bauteil mit Schubbewehrung)



- Sind die Stegabmessungen knapp, erreicht die Hauptdruckspannung  $\sigma_3$  im Beton die Druckfestigkeit, bevor beide Bewehrungen (Längs- und Bügelbewehrung) fließen (unter  $45^\circ$  ist  $\sigma_3 = -2 \tau_{xz}$ ).



- Mit dem Faktor  $k_c$  wird der Abminderung der Druckfestigkeit durch aufgezwungene Querdehnung Rechnung getragen. Er beträgt bei schief zur Hauptdruckrichtung eingelegten Bewehrung  $k_c = 0.55$ .

$$f_{c,eff} = k_c \cdot f_{cd} = 0.55 \cdot \frac{\sqrt[3]{30} \cdot f_{ck}^{2/3}}{1.5} = 3.80 \cdot 0.3 \cdot f_{ck}^{2/3} \rightarrow \tau_{d,nom} \leq \frac{3.8 f_{ctm}}{2} \approx 2 f_{ctm}$$

→ Auch bei Anordnung einer Querkraftbewehrung ist die Schubtragfähigkeit begrenzt; bei vertikalen Bügeln beträgt die aufnehmbare nominelle Schubspannung ca.  $2 f_{ctm}$ .

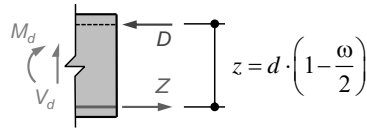
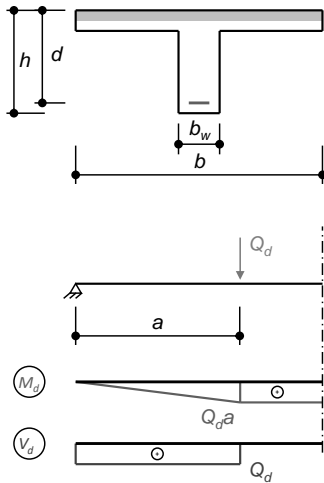
In Trägern mit Längs- und Schubbewehrung stellt sich im Steg ein einachsiger Druckspannungszustand im Beton ein. Die Vertikalkomponenten des Schubfelds im Beton stehen dabei mit der Bügelbewehrung, welche auf Zug beansprucht wird, im Gleichgewicht; die Horizontalkomponenten werden durch die Gurtkräfte aufgenommen (Details siehe Folie 20-21). Die Druckspannung im Steg beträgt mindestens  $\sigma_{c3} = -2 \cdot |\tau|$  (bei einer Druckfeldneigung von  $45^\circ$ ; bei flacheren oder steileren Neigungen ist die Druckspannung grösser).

Der Beton im Schubfeld ist zwar einachsiger auf Druck beansprucht, erfährt jedoch quer dazu «aufgezwungene» Zugdehnungen. Daher kann die einachsige Druckfestigkeit hier nicht ausgenutzt werden; vielmehr muss sie mit dem Beiwert  $k_c$  reduziert werden.



# Querkraft – Nominelle Schubspannungen

## Plattenbalken



$$Z = D = b \cdot \omega \cdot d \cdot f_{cd} = \frac{Q_d \cdot a}{z} \rightarrow Q_d = \frac{b \cdot \omega \cdot d \cdot f_{cd} \cdot z}{a}$$

Die nominellen Schubspannungen betragen:

$$\tau_d = \frac{Q_d}{b_w \cdot z} = \frac{b}{b_w} \cdot \frac{d}{a} \cdot \omega \cdot f_{cd}$$

- Je grösser...
- $\frac{b}{b_w}$  (dünne Stege)
  - $\frac{d}{a}$  (gedrungene Träger, kleine Schubspannweiten)
  - $\omega$  (Biegebewehrungsgehalt)

... desto eher tritt ein Querkraftversagen ein.

Die Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen Schub- und Biegebeanspruchung an einem Träger unter Einzellast, mit der «Schubspannweite»  $a$ , auf.

Man erkennt, dass ein Querkraftversagen am ehesten bei dünnen Stegen, gedungenen Trägern und stark biegebewehrten Bauteilen massgebend werden kann.

# Querkraft – Nominelle Schubspannungen

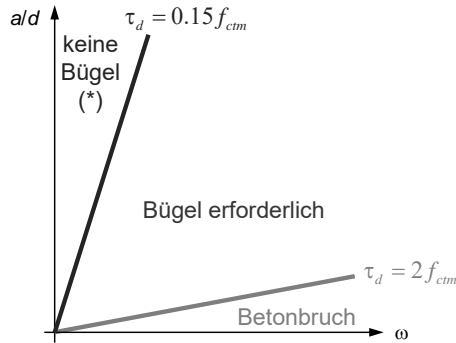
## Zusammenfassung

Mit  $f_{cd} \approx 6.9 f_{ctm}$  und  $0.15 f_{ctm} \leq \tau_d \leq 2 f_{ctm}$  folgen:

$$0.022 \leq \omega \cdot \frac{b}{b_w} \cdot \frac{d}{a} \leq 0.290$$

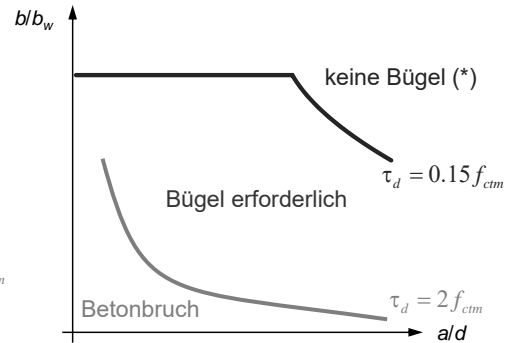
Untere Schubspannungsgrenze  $\tau_d = 0.15 f_{ctm}$  Biegel erforderlich  
 Obere Schubspannungsgrenze  $\tau_d = 2 f_{ctm}$  Betonbruch

Rechteckquerschnitt  $b/b_w = 1$ :



(\*) mit Ausnahme der konstruktiven Mindestbewehrung!

Plattenbalken mit  $\omega = 0.1$ :



Auf dieser Folie sind die einleitend angegebenen Beziehungen für die nominellen Schubspannungen, jetzt in Verbindung mit den bei einer bestimmten Grösse der nominellen Schubbeanspruchung zu erwartenden Versagensarten, grafisch dargestellt.

Wie bereits erwähnt können diese Beziehungen für Abschätzungen, insbesondere zur Beurteilung der Höhe der Schubbeanspruchung, verwendet werden (nicht aber für die Bemessung).

## Querkraft – «Querschnittsbetrachtung»

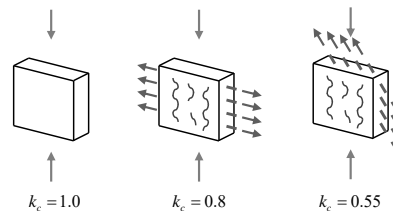
### Vereinfachtes Vorgehen gemäss SIA 262 4.3.3.4

- Modellvorstellung: Fachwerk mit veränderlicher Druckdiagonalenneigung  $\alpha$  ( $= 30\dots45^\circ$ ) (resp. einachsiges Druckfeld im Beton mit variabler Neigung  $\alpha$ , Bügel = vertikales Zugfeld)
- Der Querkraftwiderstand wird einerseits durch den Widerstand der vertikalen Bewehrung (Bügel)  $V_{Rd,s}$  und andererseits durch den Widerstand des Betons  $V_{Rd,c}$  begrenzt. (Widerstand = kleinerer Wert von  $V_{Rd,s}$  und  $V_{Rd,c}$ , **nicht** Summe der beiden Terme!)
- Zusätzlich ist die Längszugkraft  $F_{IVd}$  je hälftig vom Druck- und vom Zuggurt aufzunehmen.
- Massgebend ist die Querkraft, welche in einem Schnitt im Abstand  $z \cdot \cot \alpha$  vom Auflagertrand entfernt auftritt

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot f_{sd} \cdot \cot \alpha$$

$$V_{Rd,c} = b_w \cdot z \cdot k_c \cdot f_{cd} \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

$$F_{IVd} = V_d \cdot \cot \alpha$$



- Voraussetzungen der Formeln: vertikale Querkraftbewehrung, direkte Krafteinleitung

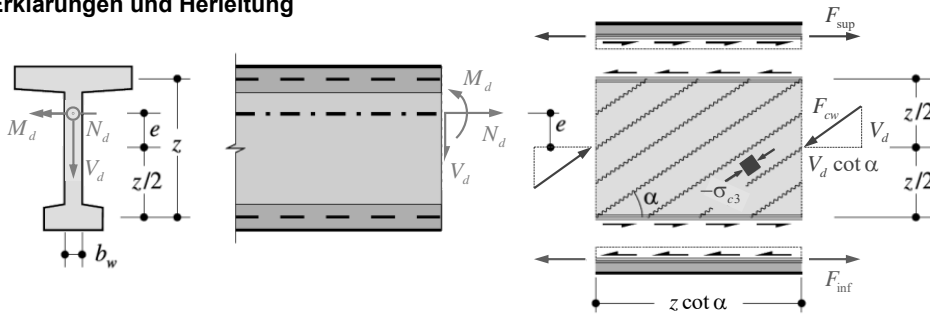
Die Schubbemessung nach heutigen Normen erfolgt für Träger mit Bügelbewehrung anhand eines Fachwerkmodells (resp. Spannungsfelds) mit veränderlicher Neigung  $\alpha$  der Druckdiagonalen (siehe nächste Folie).

Der Querkraftwiderstand ist dabei durch die Kapazität des Betons  $V_{Rd,c}$  und diejenige der Bügelbewehrung  $V_{Rd,s}$  begrenzt. Massgebend ist der kleinere Wert (nicht die Summe, wie bei semi-empirischen Modellen mit einem «Betonanteil des Schubwiderstands»).

Die Modellvorstellung des Fachwerkmodells (resp. eines einachsigen, parallelen Druckspannungsfelds) basiert auf dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie: Gleichgewicht ist erfüllt, und die Fließgrenzen werden eingehalten, indem die Bedingungen  $V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$  (kein Versagen des Stegbetons) und  $V_{Ed} \leq V_{Rd,s}$  (kein Versagen der Bügelbewehrung) eingehalten werden. Da dies für beliebige Neigungen  $\alpha$  des Druckfelds gilt, ist klar, dass diese Neigung frei gewählt werden kann.

# Querkraft – «Querschnittsbetrachtung»

## Erklärungen und Herleitung



- Der Hebelarm der inneren Kräfte  $z$  folgt aus der Biegebeanspruchung und kann näherungsweise als  $z = 0.9d$  angenommen werden.
- Die Abtragung der Querkraft im diagonalen Druckfeld verursacht eine Längszugkraft  $F_{Vd}$ , die hälftig vom Zug- und Druckgurt aufgenommen wird.

$$F_{\text{sup}} = \frac{-M_d + N_d \cdot e}{z} + \frac{N_d}{2} + \frac{V_d \cdot \cot \alpha}{2}$$

$$F_{\text{inf}} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} + \frac{N_d}{2} + \frac{V_d \cdot \cot \alpha}{2}$$

Eigentlich ist eine Querschnittsbetrachtung für die Untersuchung des Querkraftwiderstands nicht ausreichend. Vielmehr muss eine gewisse Länge des Trägers untersucht werden. Dennoch spricht man oft von einem «Querschnittsnachweis».

Mit dem dargestellten Fachwerkmodell (einachsiges, paralleles Druckspannungsfeld im Steg) resultieren die angegebenen Beziehungen. Man erkennt, dass infolge Querkraft zusätzliche Gurtkräfte der Grösse  $\frac{1}{2} V_d \cot \alpha$  resultieren, welche vom Ober- und Untergurt aufzunehmen sind: Der Druckgurt wird entlastet, im Zuggurt ist eine zusätzliche Bewehrung erforderlich.

Zusätzlich ist auch angegeben, wie eine Normalkraft aufgenommen werden kann (statisch äquivalente Aufteilung auf Gurte «nach Hebelgesetz»).

Die resultierenden Beziehungen entsprechen den Nachweisen der Tragsicherheit nach SIA Norm 262.

### Ergänzende Bemerkung

- In Querschnittsanalysen (siehe Kapitel Biegung und Normalkraft, allgemeine Querschnitte) wird die Querkraft nicht direkt berücksichtigt (alle Spannungen sind senkrecht zum Querschnitt resp. parallel zur Stabachse). Sie kann in solchen Analysen jedoch indirekt berücksichtigt werden, indem eine zusätzliche Normalkraft der Grösse  $V \cdot \cot \alpha$  eingeführt wird, die in Stegmitte angreift und der resultierenden Horizontalkraft im Steg entspricht. Mit den Bezeichnungen und Vorzeichen gemäss obenstehender Abbildung sind in einer Querschnittsanalyse somit, zusätzlich zu den auf die Schwerachse bezogenen Schnittgrössen  $N_d$  und  $M_d$ , folgende Kräfte einzuführen:

- Zugkraft infolge  $V_d$

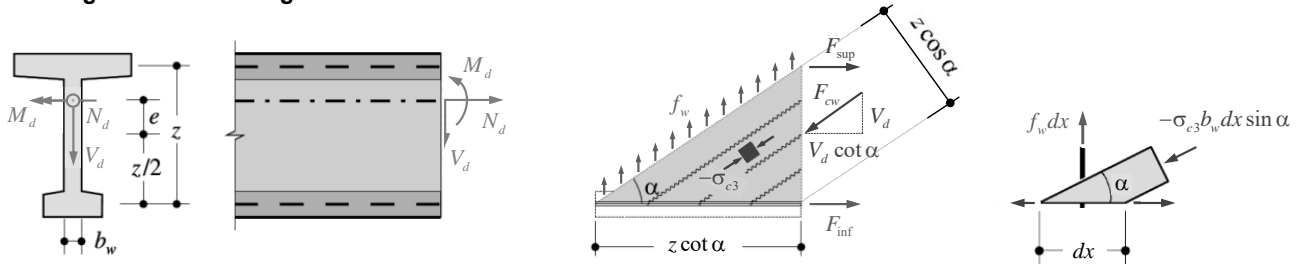
$$\Delta N_d(V_d) = V_d \cdot \cot \alpha$$

- Moment infolge  $V_d$

$$\Delta M_d(V_d) = V_d \cdot \cot \alpha \cdot e \text{ (positiv)}$$

# Querkraft – «Querschnittsbetrachtung»

## Erklärungen und Herleitung



- Gleichgewicht am Schnittkörperdiagramm rechts oben → Kraft in der Bewehrung  $f_w$  [kN/m]

$$f_w = \frac{V_d}{z \cot \alpha} \quad \text{resp. mit}$$

$$f_w \leq \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} : V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z \cot \alpha$$

- Gleichgewicht am differentiellen Element rechts unten → Betondruckspannung  $\sigma_{c3}$  im Steg:

$$-\sigma_{c3} b_w dx \cdot \sin^2 \alpha = f_w dx$$

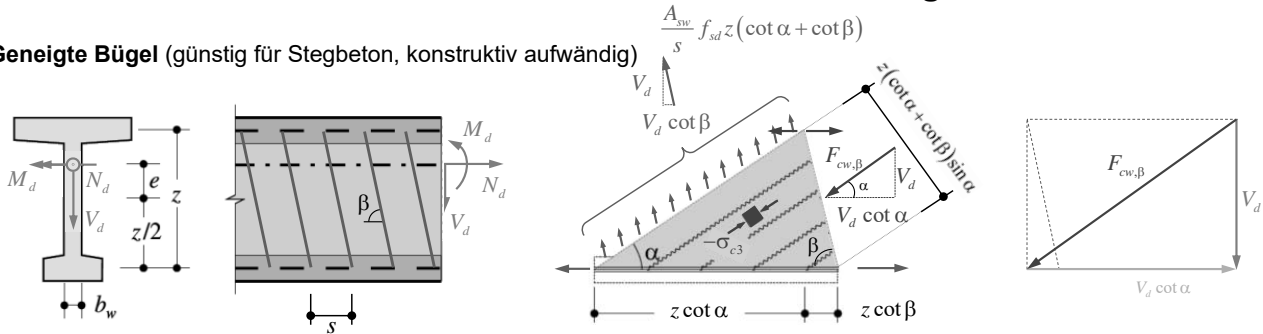
$$\rightarrow -\sigma_{c3} = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha} \quad \text{resp. mit} \quad -\sigma_{c3} \leq k_c f_{cd} : V_{Rd,s} = b_w k_c f_{cd} z \sin \alpha \cos \alpha$$

(oder aus SKD oben rechts:  $F_{cw} = \frac{V_d}{\sin \alpha}$ ,  $-\sigma_3 = \frac{F_{cw}}{b_w z \cos \alpha} \rightarrow -\sigma_{c3} = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha}$ )

Neben der Ermittlung der zusätzlichen Anteile der Gurtkräfte infolge Querkraft liefert das Fachwerkmodell (einachsiges, paralleles Druckspannungsfeld im Steg) auch die Grösse der Druckspannungen im Steg und die Beanspruchung der Bügel. Die zur Ermittlung dieser Grössen geeigneten Schnitte sind in der Abbildung dargestellt.

## Querkraft – «Querschnittsbetrachtung»

**Geneigte Bügel** (günstig für Stegbeton, konstruktiv aufwändig)



- Widerstand der Bügelbewehrung  $V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z (\cot \alpha + \cot \beta) \sin \beta \quad \left( = \frac{A_{sw}}{s} f_{sd} z \cot \alpha \right)$
- Widerstand des Betondruckfelds  $V_{Rd,c} = b_w k_c f_{cd} z (\cot \alpha + \cot \beta) \sin^2 \alpha \quad (= b_w k_c f_{cd} z \sin \alpha \cos \alpha)$   
 $= b_w k_c f_{cd} z \cos \alpha \sin \alpha (1 + \cot \beta \tan \alpha)$  ↑ Vertikale Bügel:  $\beta = \frac{\pi}{2}$

NB:  $V_{Rd,c}$  ist für  $\beta < 90^\circ$  stets grösser als bei  $\beta = 90^\circ$ ,  $V_{Rd,s}$  ausser für sehr flache  $\alpha$  ebenfalls.

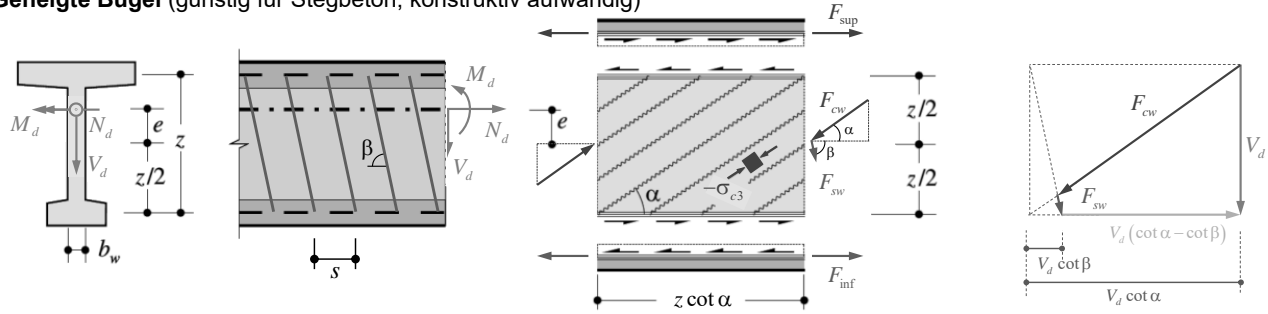
Für geneigte Bügelbewehrung ist bei stetigen Verhältnissen ebenfalls ein «Querschnittsnachweis» möglich. Die zur Ermittlung der gesuchten Grössen geeigneten Schnitte sind in der Abbildung dargestellt.

Für vertikale Bügel ( $\alpha = 90^\circ$ ) resultieren die gleichen Beziehungen wie vorne angegeben.

Da sich geneigte Bügel (vorausgesetzt, sie sind in die «richtige» Richtung geneigt!) am Lastabtrag beteiligen, kann der Querkraftwiderstand bei gegebener Stegbreite durch den Einsatz geneigter Bügel deutlich erhöht werden (für gleiches  $k_c$  maximal um den Faktor 2).

## Querkraft – «Querschnittsbetrachtung»

**Geneigte Bügel** (günstig für Stegbeton, konstruktiv aufwändig)



$$F_{sup} = \frac{-M_d + N_d \cdot e}{z} + \frac{N_d}{2} + \frac{V_d \cdot (\cot \alpha - \cot \beta)}{2}$$

$$F_{inf} = \frac{M_d - N_d \cdot e}{z} + \frac{N_d}{2} + \frac{V_d \cdot (\cot \alpha - \cot \beta)}{2}$$

Die zusätzlichen Anteile der Gurtkräfte infolge Querkraft sind bei geneigten Bügeln kleiner als bei vertikalen Bügeln (Horizontalkomponente der geneigten Bügelkraft im vertikalen Schnitt kompensiert einen Teil der Horizontalkomponente der geneigten Druckkraft).

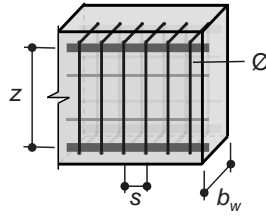
## Querkraft – «Querschnittsbetrachtung»

### Beispiel: Querkraftwiderstand in Funktion der Druckfeldneigung / optimale Druckfeldneigung

Beton C30/37  $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$   
 Betonstahl B500B  $f_{sd} = 435 \text{ MPa}$

Querschnitt  $b_w = 300 \text{ mm}$   
 $z = 500 \text{ mm}$

Bewehrung  $\varnothing = 14 \text{ mm}$   
 $n_{\text{Schnitte}} = 2$



$$a_{sw} = \frac{n \cdot \pi \cdot \varnothing^2}{4 \cdot s} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 14^2}{4 \cdot 200} = 1539 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Bew.gehalt  $\rho_w = \frac{a_{sw}}{b_w} = 0.513\%$   $\omega_w = \rho_w \cdot \frac{f_{sd}}{f_{cd}} = 0.112$

Längsdehnung  $\varepsilon_{x,\text{sup}} = -0.0005$

aus QS-Analyse  $\varepsilon_{x,\text{inf}} = 0.002$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{x,\text{sup}} + \varepsilon_{x,\text{inf}}}{2} = 750 \cdot 10^{-6}$$

«Normalfall» (SIA 262 4.3.3.3.2)

Minimale Druckfeldneigung  $\alpha_{\text{min},v} = 30^\circ$

Reduktionsbeiwert  $k_c$   $k_{c,v} = 0.55$

Detaillierte Untersuchung (SIA 262 4.3.3.3.3)

$$\alpha_{\text{min}} = (20 + 10000 \cdot \varepsilon_x) = 27.5^\circ$$

$$k_c(\alpha, \varepsilon_x) = \frac{1}{1.2 + 55 \cdot [\varepsilon_x + (\varepsilon_x + 0.002) \cdot \cot^2 \alpha]}$$

Querkraftwiderstand (kleinerer der beiden Werte):

Widerstand der vertikalen Bewehrung

$$V_{Rd,s}(\alpha) = a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \cot \alpha$$

Widerstand der geneigten Betondruckdiagonalen

$$V_{Rd,c}(\alpha) = b_w \cdot z \cdot k_c \cdot f_{cd} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{für } \alpha \geq \alpha_{\text{min}}$$

Während man bei der Bemessung in der Regel eine Druckfeldneigung wählt und dann anhand der Beziehungen  $V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$  und  $V_{Ed} \leq V_{Rd,s}$  die Stegabmessungen überprüft sowie die erforderliche Bügelbewehrung bestimmt, erfordert die Ermittlung des Querkraftwiderstands bei gegebenen Abmessungen und Bewehrung die gleichzeitige Betrachtung von  $V_{Rd,c}$  und  $V_{Rd,s}$ .

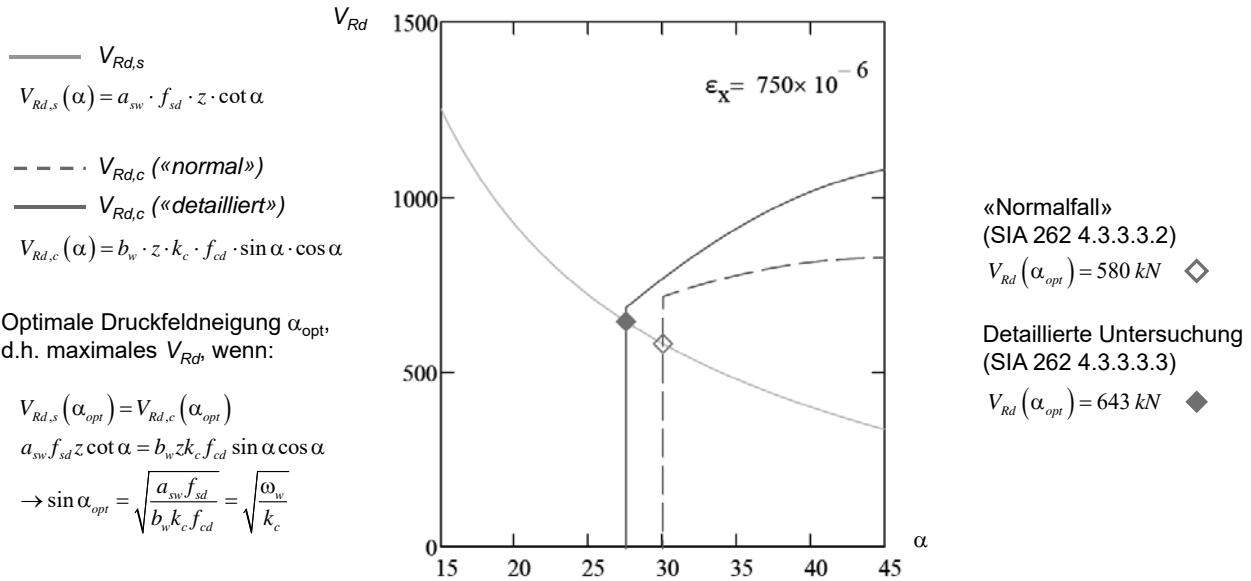
Da  $V_{Rd,s}$  für flachere Druckfeldneigungen zunimmt,  $V_{Rd,c}$  dagegen kleiner wird, kann der Schubwiderstand aus der Beziehung  $V_{Rd,c} = V_{Rd,s}$  ermittelt werden. Neben den auf den vorhergehenden Folien angegebenen Beziehungen sind dabei auch die gemäss Norm einzuhaltenden Grenzen für die Druckfeldneigung zu beachten.

Das Vorgehen wird auf dieser und der nächsten Folie an einem Beispiel erläutert.



## Querkraft – «Querschnittsbetrachtung»

Beispiel: Querkraftwiderstand in Funktion der Druckfeldneigung / optimale Druckfeldneigung



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

25

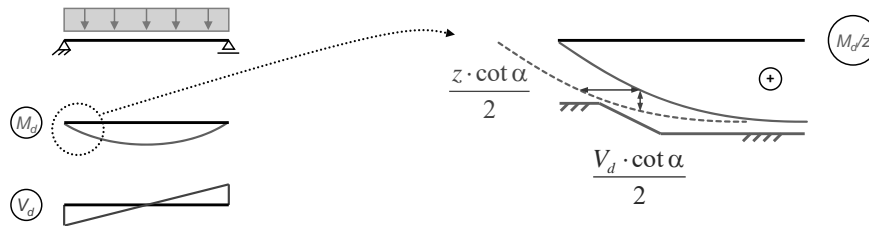
Im Beispiel wird aufgrund der relativ grossen Stegbreite in beiden Fällen (normales Vorgehen resp. detaillierte Untersuchung) die untere Grenze für die Druckfeldneigung nach SIA 262 massgebend.

Der Unterschied zwischen normalem Vorgehen und detaillierter Untersuchung beträgt rund 10%. Mit einer Druckfeldneigung von  $45^\circ$  würde dagegen nur etwa 50% des Schubwiderstands resultieren ( $V_{Rd,s}$  wäre massgebend = limitierend).

## Querkraft – Versatzmass

### Längszugkraft $F_{tvd}$ :

- Die Kraft im Zuggurt wird durch die Fachwerkwirkung (Abtrag der Querkraft durch diagonales Druckfeld) um den Betrag  $V_d \cdot \cot(\alpha) / 2$  vergrößert.
- Ein ausreichender Zuggurtwiderstand ist vorhanden, wenn die Zugkraftdeckung der Bewehrung gegenüber der verschobenen  $M_d/z$ -Linie nachgewiesen werden kann.
- Die Steigung der  $M_d/z$ -Linie beträgt  $\frac{d}{dx} \left( \frac{M_d}{z} \right) = \frac{1}{z} \cdot \frac{dM_d}{dx} = \frac{V_d}{z}$   
 → verschobene Linie folgt aus  $M_d/z$ -Linie nicht nur durch eine vertikale Verschiebung von  $V_d \cdot \cot(\alpha) / 2$ , sondern auch durch eine horizontale Verschiebung von  $z \cdot \cot(\alpha) / 2$ .
- Die horizontale Verschiebung wird als «Versatzmass» bezeichnet. Sie erfolgt bei positiven Momenten in Richtung des Schubflusses und bei negativen Momenten dem Schubfluss entgegen und beeinflusst die Abstufung der Längsbewehrung.



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

26

Wie aus dem Fachwerkmodell ersichtlich ist, resultieren infolge Querkraft zusätzliche Gurtkräfte der Grösse  $\frac{1}{2} V_{Ed} \cot \alpha$  (Zugkräfte), welche vom Ober- und Untergurt aufzunehmen sind. Im Zuggurt ist daher eine zusätzliche Bewehrung erforderlich.

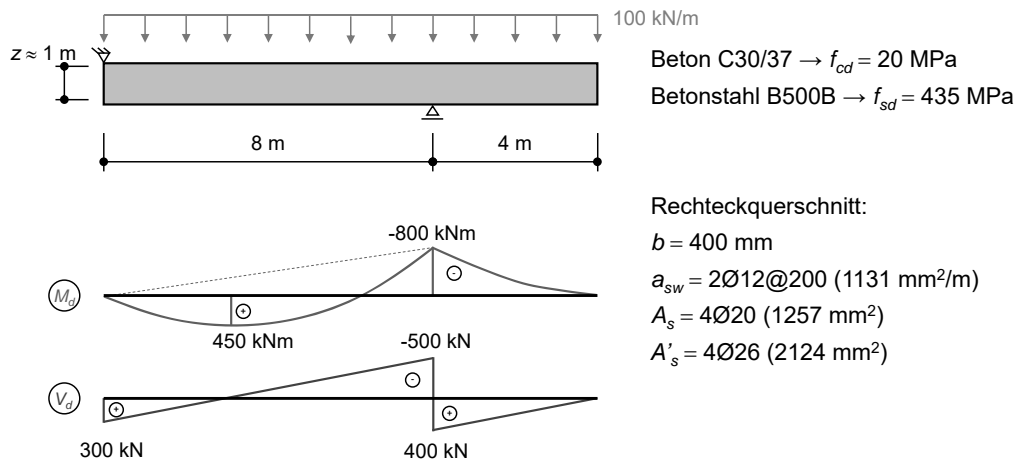
Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Biegemomenten und Querkraften (Querkraft = Ableitung des Biegemoments) kann die erforderliche Zugkraft grafisch ermittelt werden, indem die **Zugkraftlinie** ( $M/z$ ) um das **Versatzmass**  $\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot \alpha$  horizontal verschoben wird. Die resultierende Kurve entspricht der Zugkraft, welche vom Zuggurt aufgenommen werden muss.

Die Dimensionierung der Zugbewehrung («Biegebewehrung» inkl. Anteil aus Querkraft), resp. die Überprüfung einer ausreichenden Bewehrung, kann damit ebenfalls grafisch erfolgen, indem die **Zugkraftdeckungslinie** ( $A_s \cdot f_{sd}$ ) ins gleiche Diagramm eingetragen wird. Dabei sind die Verankerungslängen zu beachten (ohne Endhaken: lineare Zunahme des verfügbaren Zugwiderstands über die Verankerungslänge des jeweiligen Bewehrungsstabs).

Dieses Vorgehen, und die Begriffe **Zugkraftlinie**, **Versatzmass** und **Zugkraftdeckungslinie**, sind in der Praxis auch im Zeitalter nichtlinearer FE-Berechnungen noch geläufig. Dies insbesondere, da damit ein sehr anschauliches, übersichtliches Vorgehen bei der Bemessung, resp. der Überprüfung bestehender Tragwerke, möglich ist. Die Zugkraftlinie wird dabei beispielsweise mittels einer Grenzwertermittlung der maximalen resp. minimalen Biegemomente aus den relevanten Laststellungen und -kombinationen im Grenzzustand der Tragsicherheit Typ 2 mit einem Stabstatikprogramm ermittelt.

# Querkraft – Querschnittsbetrachtung

## Beispiel: Einfacher Balken mit Auskrangung



Auf dieser und den folgenden Seiten wird das Vorgehen bei der Entwicklung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern, sowie die Zusammenhänge zwischen diesen Ansätzen, anhand eines einfachen Beispiels erläutert. Zum Vergleich wird auch die Bemessung mittels «Querschnittsnachweisen» durchgeführt.

Das Beispiel ist ein einfacher Balken mit einer Auskrangung (mit halber Länge wie die Spannweite), der durch eine gleichmässig verteilte Linienlast belastet ist (Eigengewicht + Nutzlast).

## Querkraft – Querschnittsbetrachtung

### Beispiel: Einfacher Balken mit Auskragung

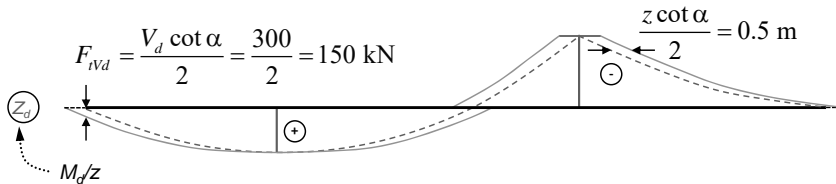
- Biegung über Auflager:  $M'_{Rd} = A'_s f_{sd} z = 2124 \cdot 0.435 \cdot 1.0 = 924 \text{ kNm} \geq M_d = 800 \text{ kNm}$
- Biegung im Feld:  $M_{Rd} = A_s f_{sd} z = 1257 \cdot 0.435 \cdot 1.0 = 547 \text{ kNm} \geq M_d = 450 \text{ kNm}$

- Querkraft:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \cot \alpha = 2 \cdot 565 \cdot 0.435 \cdot 1 \cdot \cot 45^\circ = 492 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,c} = b_w \cdot z \cdot k_c \cdot f_{cd} \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 400 \cdot 1000 \cdot 0.55 \cdot 0.02 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = 2200 \text{ kN}$$

- Versatzmass:



Das Versatzmass ist bei der Abstufung der Biegebewehrung zu beachten.

Bei der Bemessung mittels «Querschnittsnachweisen» erfolgt zunächst die Schnittkraftberechnung (Stabstatik).

Mit den maximalen Biegemomenten in Feldmitte für positive Momente und über dem Auflager für negative Momente kann direkt die Biegetragsicherheit überprüft (oder die Bewehrung bemessen) werden. Bei der Abstufung der Biegebewehrung und deren Verankerung bei den Auflagern ist zusätzlich das Versatzmass zu berücksichtigen (zusätzliche Zugkraft  $\frac{1}{2} V_{Ed} \cot \alpha$  in den Gurten).

Der Querkraftnachweis kann aufgrund der Querkraften aus der Stabstatikberechnung erfolgen. Massgebend ist nach der Norm SIA 262 der Schnitt in einem Abstand  $z \cdot \cot \alpha$  vom Auflager.

# Querkraft – Fachwerkmodelle

## Fachwerkmodelle – Allgemeine Bemerkungen

- Mit Fachwerkmodellen, die wie bereits erwähnt schon sehr lange verwendet werden, kann der Kraftfluss in einem Tragwerk verfolgt und darauf basierend die Bemessung vorgenommen werden.
- Ursprünglich wurde primär der globale Kraftfluss verfolgt, die Ausdehnung der Druckstreben war dabei sekundär ("Stabwerkmodelle", z. B. Schlaich et al.). Seit etwa 1975 werden Fachwerkmodelle in Verbindung mit der Annahme einer endlichen Betondruckfestigkeit  $f_c$  angewendet; die Abmessungen der Druckstreben und Knoten ergeben sich aus der Annahme von  $f_c$ .
- Die resultierenden Fachwerkmodelle stehen mit den äusseren Kräften im Gleichgewicht und verletzen die Fließbedingungen an keiner Stelle. Es handelt sich somit um statisch zulässige Spannungszustände im Rahmen der statischen Methode der Plastizitätstheorie.
- Bei den genannten Entwicklungen spielte die «Zürcher Schule» um Prof. Thürlimann und Prof. Marti an der ETH Zürich eine Pionierrolle.
- Bei der Bemessung gibt es in der Regel mehrere mögliche Lösungen für die gleiche Problemstellung. Der Ingenieur / die Ingenieurin wählt das am besten geeignete Fachwerkmodell und konstruiert die Bewehrung entsprechend.
- Computergestützte Methoden für die Entwicklung von Spannungsfeldern sind in Entwicklung, haben den Weg in die Praxis aber bisher (leider) kaum gefunden.

## *Ergänzende Bemerkungen*

- Es gibt heute Computerprogramme, mit denen Fachwerkmodelle und Spannungsfelder entwickelt werden können. Sie sind jedoch noch nicht genügend benutzerfreundlich, um eine weitere Verbreitung in der Praxis zu finden.
- Hauptschwierigkeit ist dabei die Berücksichtigung der Druckfestigkeit des Betons, welche von den jeweiligen Verhältnissen abhängt. Aktuell ist am IBK, gemeinsam mit einem Industriepartner, ein Programm in Entwicklung, welches diese Schwierigkeiten mit einem neuen Lösungsansatz überwinden kann.

# Querkraft – Fachwerkmodelle

## Fachwerkmodelle – Hinweise für die Anwendung

- Die Beachtung folgender Grundsätze führt zu einer wirtschaftlichen Bemessung:
  - Einfachheit (statisch bestimmte Fachwerke, keine kreuzenden Stäbe etc.)
  - Steifigkeit (kurze Zugstreben) (folgt aus Minimum der Komplementärenergie)
  - Effizienz (Mindestbewehrung ausnützen)
- Aus praktischen Gründen sollte in der Regel eine zu den Rändern parallele Bewehrung gewählt werden. Somit sind Zugstreben üblicherweise horizontal / vertikal anzuordnen, wogegen Druckstäbe grundsätzlich in jeder Richtung möglich sind.
- Die effektive Betondruckfestigkeit ist vorsichtig anzusetzen ( $f_c = k_c \cdot f_{cd}$ , SIA 262, 4.2.1.7 → Betonabmessungen).
- In jedem Fall sollte eine ausreichende Mindestbewehrung angeordnet werden ( $\rho = 0.1 \dots 0.3\%$ , je nach Anwendung).
- Weist man den einzelnen Streben Steifigkeiten zu, können auch Verformungen mit Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern abgeschätzt werden. Sie sind jedoch NICHT dazu gedacht / geeignet, das Last-Verformungsverhalten wirklichkeitsnah zu beschreiben.
- Das Vorgehen bei der Entwicklung von Fachwerkmodellen ist iterativ:
  1. Ermittlung der auf das betrachtete Bauteil wirkenden Kräfte (Reaktionen resp. auf Schnittkörper wirkende Kräfte)
  2. Erstes Fachwerk mit grober Geometrie (aufgrund geschätzter Abmessungen der Druckstreben etc.) annehmen
  3. Ungefähre Kräfte bestimmen, darauf basierend Abmessungen (und wo nötig Fachwerkgeometrie) anpassen
  4. Sukzessive verbessern, u.a. durch Ausnutzung der Mindestbewehrung

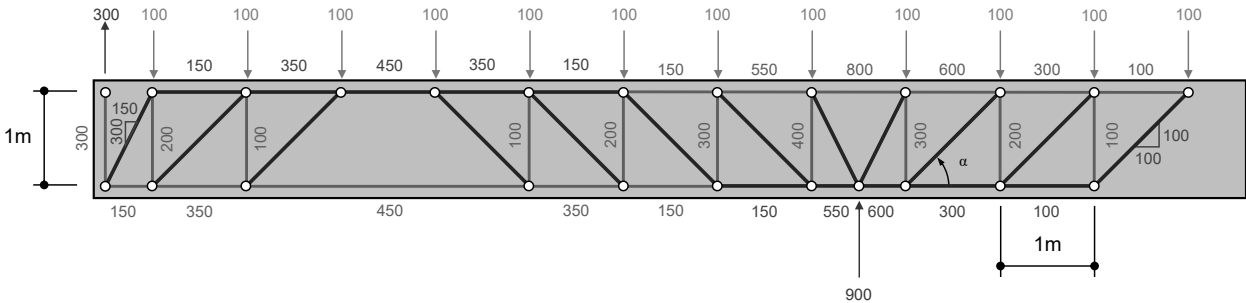
## *Ergänzende Bemerkung*

- Sollen nicht ganze Tragwerke, sondern Teile davon untersucht werden, empfiehlt sich eine Unterteilung bei den Querkraftnullpunkten (= entsprechend dem Kraftfluss).

## Querkraft – Fachwerkmodelle

**Beispiel: Einfacher Balken mit Auskrägung** (linkes Auflager als Aufhängung ausgebildet)

- Betrachtung mit Fachwerkmodell



$$\tan(\alpha) = 1$$

erforderlicher Widerstand der Bügelbewehrung

$$V_{Rd,s} = \frac{400 \text{ kN}}{1 \text{ m}} = 400 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

An den Enden zu verankernde Zugkraft

$$F_{tVd,sup} = 100 \text{ kN (Obergurt)}$$

$$F_{tVd,inf} = 150 \text{ kN (Untergurt)}$$

Bei der Entwicklung von Fachwerkmodellen für ganze Träger empfiehlt es sich, zuerst die Reaktionen und die Querkraftnullpunkte zu bestimmen (im Beispiel sind dies offensichtlich die Auflager und das Kragarmende; der Nullpunkt in Feldmitte kann relativ einfach über die lineare Verteilung der Querkräfte ermittelt werden). Anschliessend legt man die Fachwerkgeometrie fest, wobei abschnittsweise konstante Neigungen der Druckdiagonalen zu empfehlen sind; die verteilte Belastung wird durch statisch äquivalente Einzellasten in den Knoten ersetzt (ideales Fachwerk).

Es gibt unendlich viele Lösungsmöglichkeiten, und alle sind nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie zulässig (sofern Gleichgewicht eingehalten ist und die Widerstände der Gurte, Pfosten und Diagonalen genügend gross sind). In der Abbildung ist eine einfache Lösung dargestellt, mit einer Druckstrebenneigung von  $45^\circ$ .

### Ergänzende Bemerkungen

- Damit bei ausserhalb der Auflagerbereiche konstanter Neigung der Druckstreben der Ersatz gleichmässig verteilter Lasten durch statisch äquivalente Einzellasten gelingt, müssen die jeweils ersten Streben bei den Auflagern die doppelte Neigung aufweisen wie die anschliessenden Druckstreben
- Eine steilere Neigung der Druckstreben bei den Auflagern empfiehlt sich auch im Hinblick auf die zu verankernde Längszugkraft, welche bei steiler Neigung kleiner ist.

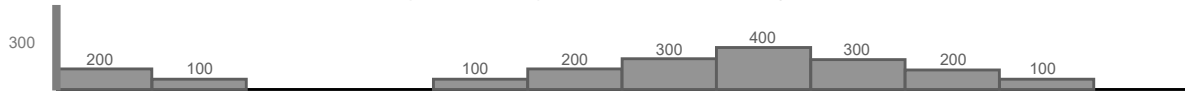




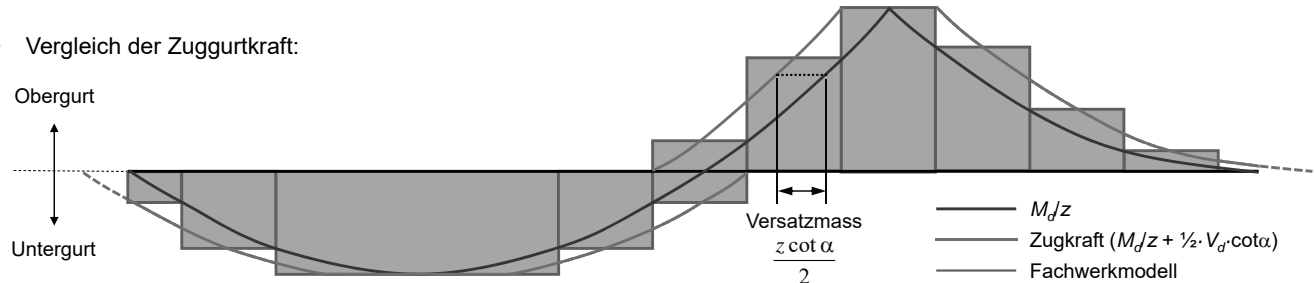
## Querkraft – Fachwerkmodelle

**Beispiel: Einfacher Balken mit Auskragung** (linkes Auflager als Aufhängung ausgebildet)

- Bügelkräfte [kN/m] und konzentrierte Aufhängebewehrung [kN] beim linken Auflager:



- Vergleich der Zuggurtkraft:



- Die maximale Kraft im Zuggurt und die zu verankernde Kraft über dem Auflager und bei der Krafteinleitungsstelle werden sowohl mit der verschobenen  $M_d/z$ -Linie als auch mit dem Fachwerkmodell korrekt erfasst.
- In der Mitte zwischen Pfosten (= vertikale Stäbe) des Fachwerks, wo bei nicht konstanter Querkraft die abschnittsweise konstanten Bügelkräfte springen, stimmen Fachwerkmodell und verschobene  $M_d/z$ -Linie überein.

Vergleich der Gurtkräfte gemäss Querschnittsbemessung und Fachwerkmodell:

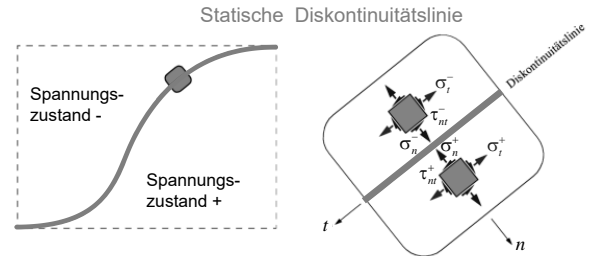
- Der mit dem Fachwerkmodell ermittelte, abgetreppte Gurtkraftverlauf ist der Linie  $M_d/z$  umschrieben.
- An den Stellen, wo die Bügelkräfte (bei nicht konstanter Querkraft) springen, stimmt die Gurtkraft aus dem Fachwerkmodell mit der um das Versatzmass  $\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot \alpha$  verschobenen Linie  $M_d/z$  (Zuggurtkraftlinie  $M_d/z + \frac{1}{2} \cdot V_d \cdot \cot \alpha$ ) überein.

# Querkraft – Spannungsfelder

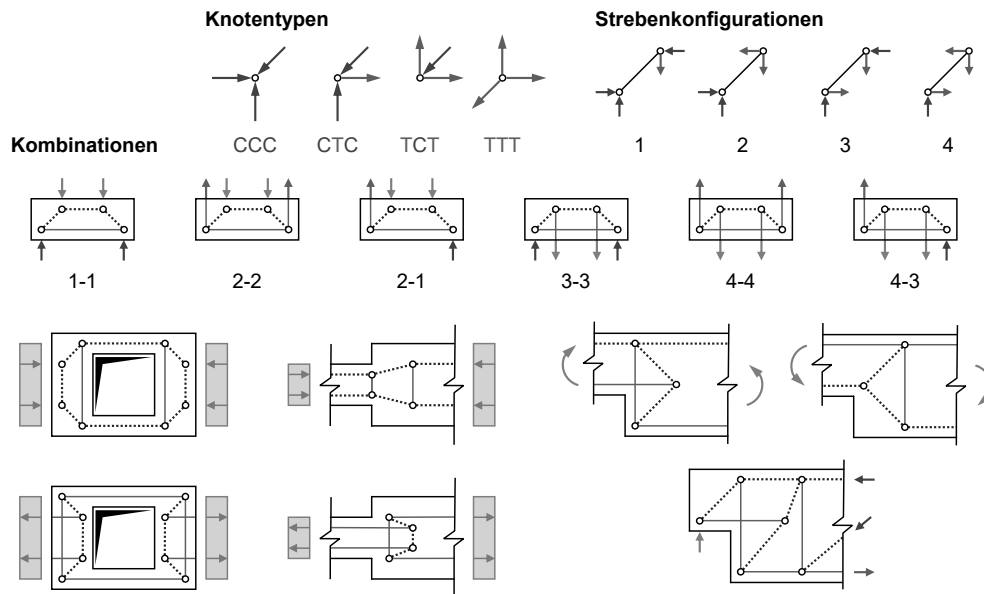
## Spannungsfelder

- Im Beispiel auf den vorangehenden Folien wurden die Abmessungen der Druckstreben und der Knoten nicht auf Basis der Betondruckfestigkeit festgelegt oder überprüft. Solche Fachwerke können als «Stabwerkmodelle» bezeichnet werden.
- Bei einem Fachwerkmodell auf Basis des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie (Gleichgewicht erfüllt, Fließbedingungen nirgends verletzt!) werden die Abmessungen der Druckstreben und der Knoten auf Basis der Betondruckfestigkeit  $k_{c,d} f_{cd}$  festgelegt. Bei solchen Fachwerkmodellen handelt es sich um *diskontinuierliche Spannungsfelder*, da die Druckspannungen im Beton unstetig sind (innerhalb der Druckstrebe  $k_{c,d} f_{cd}$ , ausserhalb 0).
- Damit Gleichgewicht erfüllt ist, müssen an *einer statischen Diskontinuitätslinie* (Grenze zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlichem Spannungszustand) allgemein folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Normalspannungen parallel zur statischen Diskontinuitätslinie dürfen unstetig sein (Sprung  $\sigma_t^- \neq \sigma_t^+$  ist zulässig)
- Normalspannungen senkrecht zur statischen Diskontinuitätslinie und Schubspannungen müssen kontinuierlich sein ( $\sigma_n^- = \sigma_n^+$ ,  $\tau_{nt}^- = \tau_{nt}^+$  muss erfüllt sein)



## Querkraft – Hinweise zur Anwendung



Mit Fachwerkmodellen lässt sich der Kraftfluss in Stahlbetontragwerken verfolgen. Dabei sind die Fachwerke jeweils an die vorliegenden Verhältnisse (Geometrie, Belastung etc.) anzupassen; es kommen jedoch oft sehr ähnliche Konfigurationen vor.

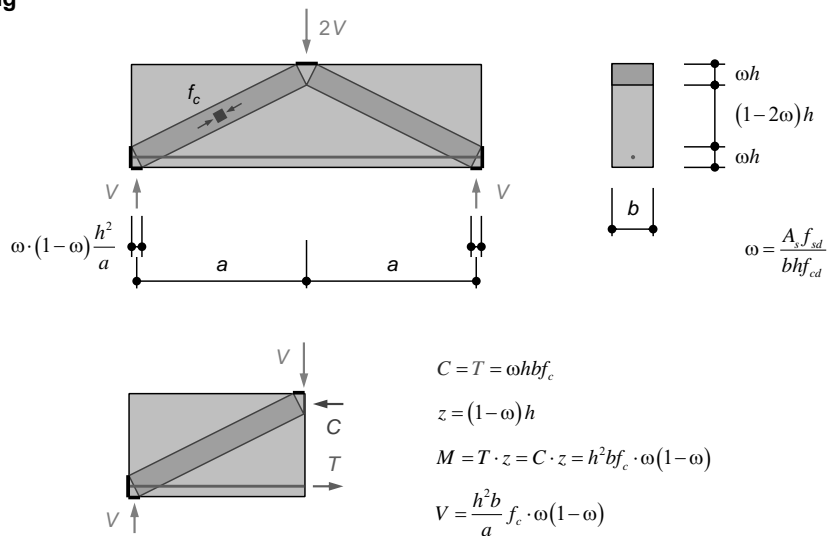
Die Abbildung zeigt einige typische Konfigurationen von Fachwerkmodellen, welche ausgehend von einer Typologisierung der Knoten (C=Compression=Druck, T=Tension=Zug) entwickelt werden.

Im Rahmen der Vorlesungen Stahlbeton I-III wird dabei stets die gleiche Farben-Konvention verwendet:

- Grün = Druck (Beton)
- Blau = Zug (Bewehrung)
- Rot = Einwirkungen

# Querkraft – Strebenwirkung und Fächerwirkung

## Strebenwirkung



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

36

Die Abbildung zeigt ein sehr einfaches Fachwerkmodell für eine symmetrische Scheibe mit Rechteck-Querschnitt unter einer Einzellast  $2V$ . Diese Last wird über zwei Betondruckstreben direkt zu den Auflagern übertragen, wo sie im Gleichgewicht mit der Auflagerkraft  $V$  und der im horizontalen Zugstab wirkenden Kraft  $T$  steht. Die Einleitung und Umlenkung der Last und der Auflagerkraft erfordert Knotenbereiche (siehe dazu auch übernächste Folie). Die erforderlichen Abmessungen der Lasteinleitungs-, Auflager- und Verankerungsplatten und somit jene der Knotenbereiche ergeben sich aus der Bedingung, dass an ihren Rändern die Betondruckfestigkeit ausgenutzt ist. Folglich herrscht in den Knotenbereichen ein zweiachsiger, gleichförmiger Druckspannungszustand ( $\sigma_{c1} = \sigma_{c3} = -f_c$ ). Jede Druckstrebe besteht aus parallelen, einachsig mit  $-f_c$  beanspruchten Spannungstrajektorien («Fachwerkstäbe» mit verschwindender Abmessung).

Das gewählte, als «direkte Abstützung» oder «Strebenwirkung» bezeichnete Gleichgewichtsmodell ist eine grobe Idealisierung des Tragverhaltens. Das Modell erfordert keinerlei vertikalen Zugelemente (keine Schubbewehrung). Dafür muss die ganze (maximale) im horizontalen Zugstab  $T$  auftretende Bewehrungskraft hinter dem Auflager verankert werden.

Da in einem entsprechend dieses Modells bemessenen Träger die Mindestbewehrung in vertikaler Richtung fehlt, ist mit einem spröden Verhalten bei Rissbildung zu rechnen, und die Anwendung der Plastizitätstheorie ist grundsätzlich nicht gerechtfertigt. Auch wenn ein statisch zulässiger Spannungszustand vorliegt, liefert dieser daher keinen unteren Grenzwert der Traglast wenn frühzeitige, spröde Versagensarten auftreten. Modelle mit direkter Abstützung sind daher nur bei kleiner Schusschlankheit ( $a/d < \text{ca. } 1.5$ ) sinnvoll.

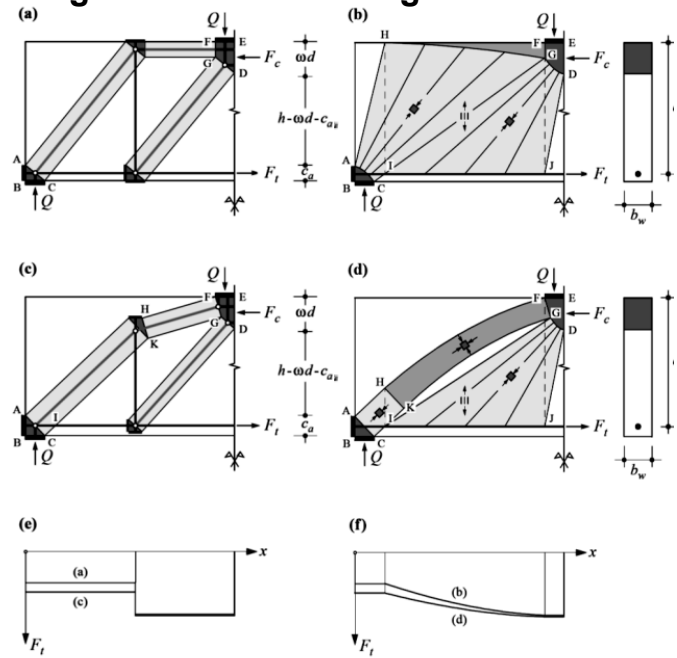
Weitere Angaben dazu siehe Vorlesung Stahlbeton III.

# Querkraft – Strebenwirkung und Fächerwirkung

Ausgehend von Fachwerkmodellen (Strebenmodelle), mit denen der Kraftfluss grundsätzlich festgelegt wird, können die Abmessungen der Knotenbereiche abgeschätzt und entsprechende konstruktive Details ausgearbeitet werden.

Die einfachen Strebenmodelle können bei Bedarf verfeinert werden, beispielsweise durch Auffächerungen.

Weiterführende Angaben siehe Vorlesung Stahlbeton III.



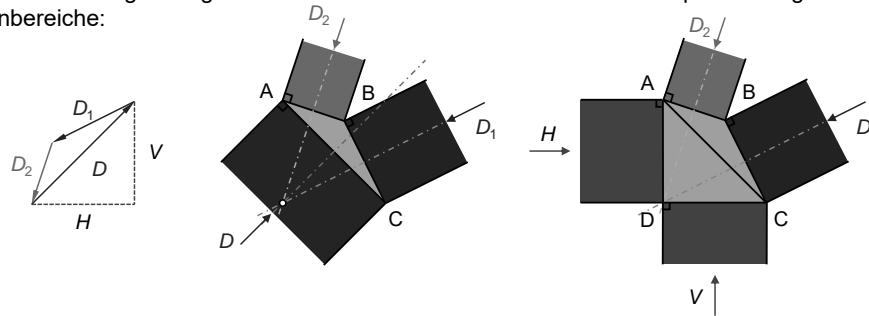
## Ergänzende Bemerkungen

- Weitere Angaben zu Spannungsfeldern und ihrem Zusammenhang mit Fachwerkmodellen siehe hinten (ab Folie 42).
- Weitere Angaben zu Fachwerkmodellen für Träger und Scheiben siehe Vorlesung Stahlbeton III.

# Querkraft – Knotenbereiche

## Knotenbereiche

Wegen der endlichen Betonfestigkeit ergeben sich nicht wie in den Stabwerkmodellen punktförmige Knoten, sondern ausgedehnte Knotenbereiche:



Sinnvollerweise wird für alle Streben die gleiche Druckspannung gewählt. Die Streben schliessen in diesem Fall rechtwinklig an den Fachwerkknoten an, d.h. die Knotengeometrie ist affin zum (um 90° gedrehten) Krafteck. Im Knoten herrscht ein zweiachsiger («hydrostatischer») Druckspannungszustand.

Werden für die verschiedenen Streben unterschiedliche Druckspannungen gewählt, sind die Ränder des Knotenbereichs i.a. nicht mehr orthogonal zu den Streben und die maximale Druckspannung im Knoten wird unter Umständen wesentlich grösser als in den angeschlossenen Streben (Untersuchung mit Mohrschen Kreisen und Spannungsdiskontinuitätslinien möglich, siehe Vorlesung Stahlbeton III).

## Knotenbereiche – Allgemein / Kraftfluss

Geht man von einem Fachwerkknoten aus, in welchem drei oder mehr Druckstreben, welche im Gleichgewicht sind, zusammentreffen, kann grundsätzlich für beliebige Abmessungen der Streben (mit unterschiedlicher, jeweils einachsiger Druckspannung pro Strebe) ein Knotenbereich konstruiert und der Spannungszustand in diesem ermittelt werden. Eine genauere Untersuchung (siehe Vorlesung Stahlbeton III) zeigt, dass die grösste Druckspannung im Knoten höher ist als die grösste Druckspannung in den Streben, ausser die Knotenberandung steht senkrecht auf die entsprechende Strebe. Solche allgemeine Knoten werden hier nicht weiter untersucht.

Wesentlich einfacher und praxisrelevanter sind die oben und auf der folgenden Seite gezeigten Knoten mit gleicher Spannung in allen Streben. Die Knotenberandung ist in diesem Fall senkrecht zu den Streben, und die Knotengeometrie ist affin zum Polygon der Strebenkräfte. In den Knoten herrscht ein zweiachsig gleichförmiger (der Kürze wegen oft unpräzise als «hydrostatisch» bezeichneter) Spannungszustand,  $\sigma_1 = \sigma_2 = f_c$  (natürlich ist der Spannungszustand nicht hydrostatisch, da die Spannung senkrecht zur Scheibenebene  $\sigma_3 = 0$  ist).

Wird die eine Strebe (von links unten angreifende Strebe in der linken Abbildung) durch zwei statisch äquivalente Streben ersetzt (horizontale und vertikale Strebe in Abbildung rechts), ändert lediglich der Verlauf der Knotenberandung innerhalb der ursprünglichen Strebe; die Knotenpunkte A, B, und C bleiben erhalten.

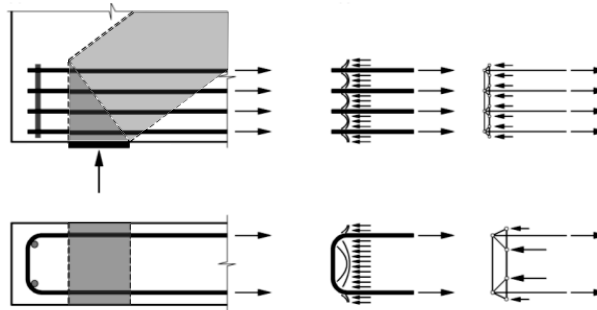
Dies ist insbesondere bei der Betrachtung von fächerartigen Spannungsfeldern nützlich (Knotenabmessungen können anhand der Resultierenden der Fächerspannungen resp. am einfachen Fachwerkmodell überprüft werden, der genaue Verlauf der Berandung ist unwichtig).

Zugkräfte können durch Ankerplatten hinter dem Knotenbereich verankert werden und wirken dann wie eine Druckkraft auf den Knoten. Dies ist jedoch unüblich (siehe folgende Seite).

# Querkraft – Knotenbereiche

## Knotenbereiche

- Sorgfältige konstruktive Durchbildung wichtig!
- Ankerplatten sind unüblich, zur Verankerung grosser Zugkräfte manchmal aber unabdingbar
- Alternative 1: Steckbügel resp. "Haarnadeln" anzuordnen, siehe Bilder unten. Lokales Spannungsfeld → Überdeckungsbeton nur durch Zugfestigkeit Beton aktivierbar
- Alternative 2: Bewehrungsstäbe mit Verankerungsköpfen ( $d \approx 3\varnothing$ ), experimentell verifizierte Verankerung auf sehr kurzer Länge ( $< 10\varnothing$ ) → Achtung, Spreizkräfte beachten!
- Alternative 3: Spannungsfelder mit kontinuierlichem Aufbau der Zugkraft durch Verbundschubspannungen. Benötigt aber grössere Knotenabmessungen.



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

39

## Knotenbereiche – Konstruktive Durchbildung

Bei der konstruktiven Durchbildung sind die Knotenbereiche mit besonderer Sorgfalt zu behandeln. Ankerplatten sind in der Praxis unüblich; zur einwandfreien Verankerung grosser Zugkräfte bilden sie jedoch manchmal die einzige Möglichkeit. Alternativ kommen Bewehrungsstäbe mit Verankerungsköpfen in Frage.

Die Abbildungen auf der linken Seite zeigen eine mögliche konstruktive Ausbildung der Verankerung der Bewehrung mit Steckbügeln hinter dem Knotenbereich eines Endauflagers, welche auch etwa als Haarnadel-Bewehrung bezeichnet wird. Die Übertragung der am vertikalen Knotenrand wirkenden verteilten Druckspannungen auf die aus Einzelstäben mit Endschlaufen bestehende Bewehrung wird von Druckschalen gewährleistet, die sich im Beton ausbilden und auf die Schlaufenabbiegungen abstützen. Diese Tragwirkung lässt sich mit Spannungsfeldern oder entsprechenden Fachwerkmodellen nachbilden, siehe Abbildungen auf der rechten Seite. Man sieht, dass Betonzugspannungen erforderlich sind, um die Übertragung der Kräfte vom Beton auf die Bewehrung zu gewährleisten. Die Anordnung von «Dübeleisen» (kurze Bewehrungsstäbe mit grossem Durchmesser) an den Abbiegestellen unterstützt die Übertragung und gleichmässige Verteilung der Betondruckkraft auf die Bewehrung.

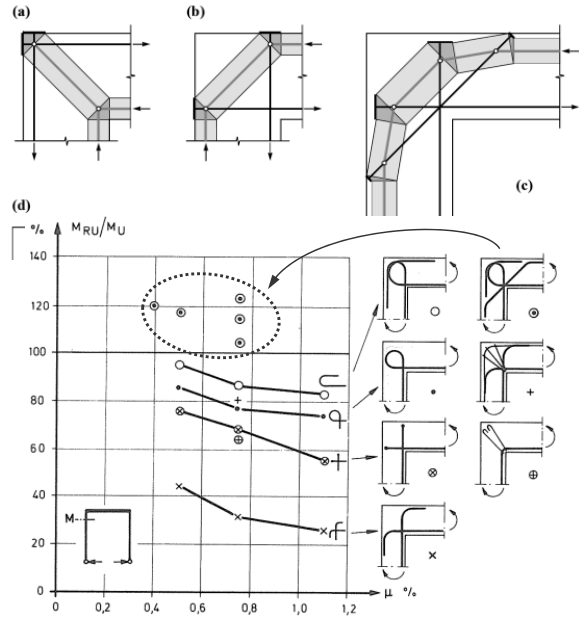
Eine weitere Alternative besteht in der vertikalen Abbiegung der Biegebewehrung mit genügender Verankerungslänge, so dass hinter dem Auflager insgesamt die benötigte Zugkraft verankert ist (siehe Vorlesung).

# Querkraft – Fachwerkmodelle

## Fachwerkmodelle für Tragwerkselemente mit statischen / geometrischen Diskontinuitäten

### Rahmenecken unter reiner Biegung

- (a) schliessendes, (b) öffnendes Moment
- vor allem öffnende Rahmenecken heikel und konstruktiv sehr anspruchsvoll
- diagonale Bewehrung (c) ist vorteilhaft für Verankerung der Bewehrungskräfte (aber Kräfte grösser als in (b), Hebelarm!)
- Biegebestand der angeschlossenen Bauteile in Regel nicht voll ausnutzbar, da Verankerung / Umlenkung der Kräfte im Eckbereich Reduktion des Hebelarms im Vergleich mit (a), (b) bewirkt
- Versuche z. Bsp. von Nilsson (1973) bestätigen die gemachten Aussagen
- Bewehrungsseisen mit Verankerungsköpfen für Rahmenecken gut geeignet
- Beispiele für Rahmenecken mit verteilter Bewehrung, kombinierter Beanspruchung etc. siehe z. Bsp. [5]



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

40

Fachwerkmodelle eignen sich hervorragend zur Modellierung und Bemessung von Tragwerkselementen mit statischen / geometrischen Diskontinuitäten (d.h. mit sprunghaft ändernden Belastungen wie zum Beispiel grosse Einzellasten oder Abmessungen).

Die Abbildung zeigt ein typisches Beispiel: Rahmenecken (mit öffnendem und schliessendem Moment). Insbesondere bei öffnendem Moment ist eine Verankerung der Zugkräfte «hinter» den Knoten auch mit konstruktiven Lösungen, wie sie auf der vorhergehenden Seite gezeigt wurden, nicht möglich (kein «Lagerüberstand» wie bei einem Endauflager). Der Platz für die Verankerung der Hauptbewehrung kann aber durch die Zulage einer diagonalen Bewehrung geschaffen werden. Diese Lösung ist die einzige, mit welcher der volle Widerstand der angeschlossenen Rahmenriegel resp. Stiele übertragen werden kann (siehe Versuchsergebnisse in der Abbildung).

Weitere Details dazu siehe Vorlesung Stahlbeton III.



# Querkraft – Fachwerkmodelle

## Fachwerkmodelle für Tragwerkselemente mit statischen / geometrischen Diskontinuitäten

### Ausgeklinkte Träger (d), (e)

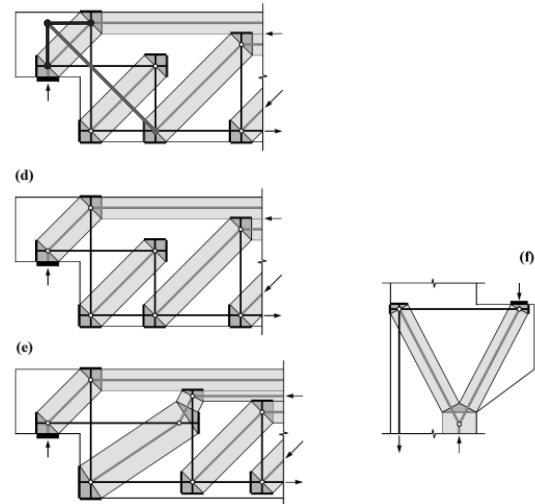
- (d), (e) mögliche Streben-Stab-Modelle
- Diagonalbewehrung analog wie bei den Rahmenecken günstig, Überlagerung der Modelle (Anteil der Last wählbar)

### Konsolen (f)

- (f) Grundfall
- Verschiedene andere Modelle möglich, siehe z. Bsp. [5]

### Generelle Bemerkungen

- Spannungsfelder für Tragwerkselemente mit statischen / geometrischen Diskontinuitäten optimal geeignet
- Illustration hier nur an einfachen Streben-Stab-Modellen
- Verfeinerung durch Einführung von Fächern, Bogen, Zug-/Druckbändern etc. ermöglicht Erfassung der flächigen Tragwirkung des Betons und der verteilten Bewehrung



Ein weiteres typisches Tragwerkselement, für dessen Bemessung sich Fachwerkmodelle gut eignen, sind ausgeklinkte Trägerenden (siehe linke Abbildungen; ähnliches Tragverhalten wie öffnende Rahmenecken). Mit zwei ausgeklinkten Trägerenden kann ein «Gerbergelenk» konstruiert werden.

Auch bei ausgeklinkten Trägern ist die Zulage einer diagonalen Bewehrung sehr vorteilhaft. Dies insbesondere auch hinsichtlich des Verhaltens im Gebrauchszustand: kleinere Rissbreiten in der einspringenden Ecke.

Konsolen (Abbildung rechts) sind ein typisches Beispiel einer direkten Abstützung, welche trotz fehlender vertikaler Mindestbewehrung im Konsolbereich funktioniert (da die Schubschlankheit  $a/d$  klein ist).

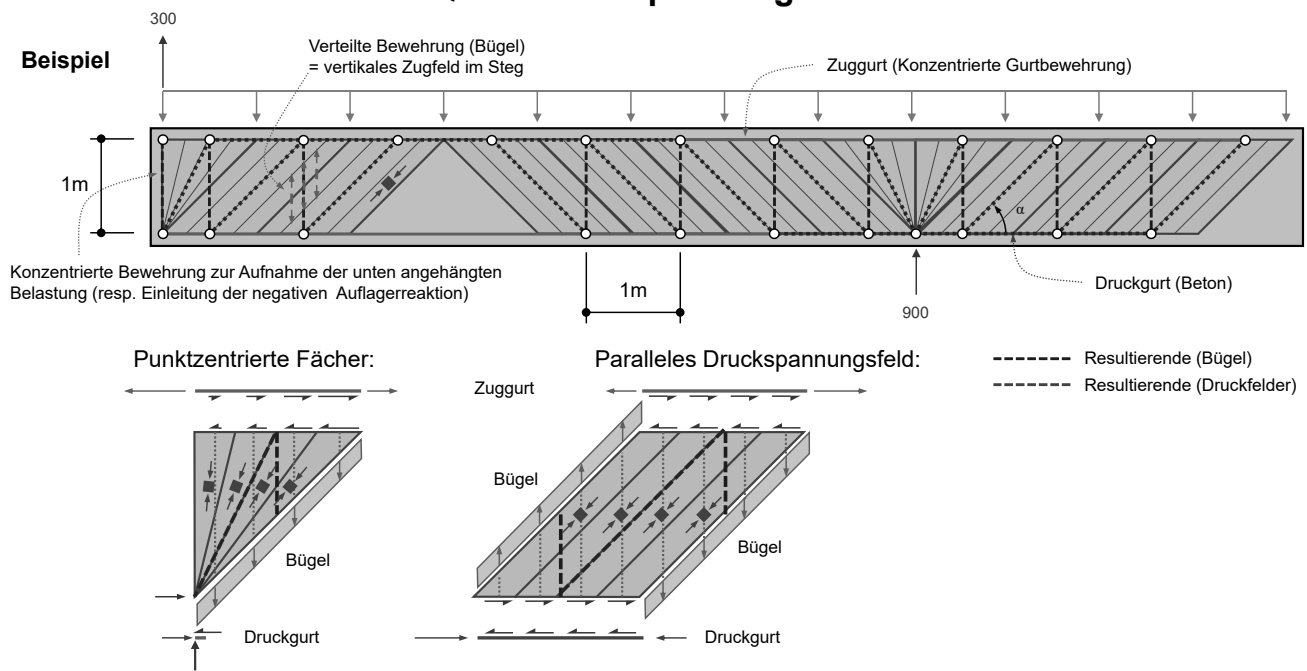
Weitere Details dazu siehe Vorlesung Stahlbeton III.

# Querkraft – Spannungsfelder

## Spannungsfelder

- Mit Hilfe von Spannungsfeldern können ganze Tragwerke bis ins Detail untersucht werden.
- Fachwerkmodelle (diskontinuierliche Spannungsfelder) können dabei zu kontinuierlichen Spannungsfeldern verfeinert werden, wobei verschiedene Lösungen möglich sind. Umgekehrt kann jedem Spannungsfeld genau ein Fachwerkmodell zugeordnet werden, dessen Stäbe den Resultierenden der einzelnen Teile des Spannungsfeldes entsprechen.
- Vollständige Spannungsfelder werden selten benötigt. Meist ist es ausreichend, kritische Bereiche und wichtige Details eines Tragwerks mit Fachwerkmodellen detailliert zu untersuchen (übrige Bereiche: Querschnittsnachweise oder einfache Fachwerkmodelle).
- Die Entwicklung von Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern ist Erfahrungs- und Übungssache. Bei fehlender Erfahrung kann man sich an «Musterlösungen» für Standardprobleme (immer wieder ähnlich auftretende Fälle) orientieren, siehe nächste Folie. In [1] finden sich weitere Beispiele; zusätzliche Inspirationsquellen:
  - Muttoni, A., Schwartz, J., Thürlimann, B., "Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern", Birkhäuser, Basel, 1997 (→ Nachdruck wird in Stahlbeton III verkauft)
  - Schlaich, J., Schäfer, K., "Konstruieren im Stahlbetonbau", Beton-Kalender 2001, pp.311-492 (→ zahlreiche Beispiele von Stabwerkmodellen, als Anhaltspunkt für globalen Kraftfluss gut geeignet, für Kontrolle kritischer Abmessungen nur bedingt, da nicht konsequent auf unterem Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie aufgebaut).

## Querkraft – Spannungsfelder



Diese und die beiden folgenden Folien illustrieren den Übergang von einem Fachwerkmodell zu einem Spannungsfeld anhand des gleichen Beispiels, an welchem das Fachwerkmodell eingeführt wurde. Jeder Fachwerkstab wird dabei durch ein statisch äquivalentes Spannungsfeld ersetzt:

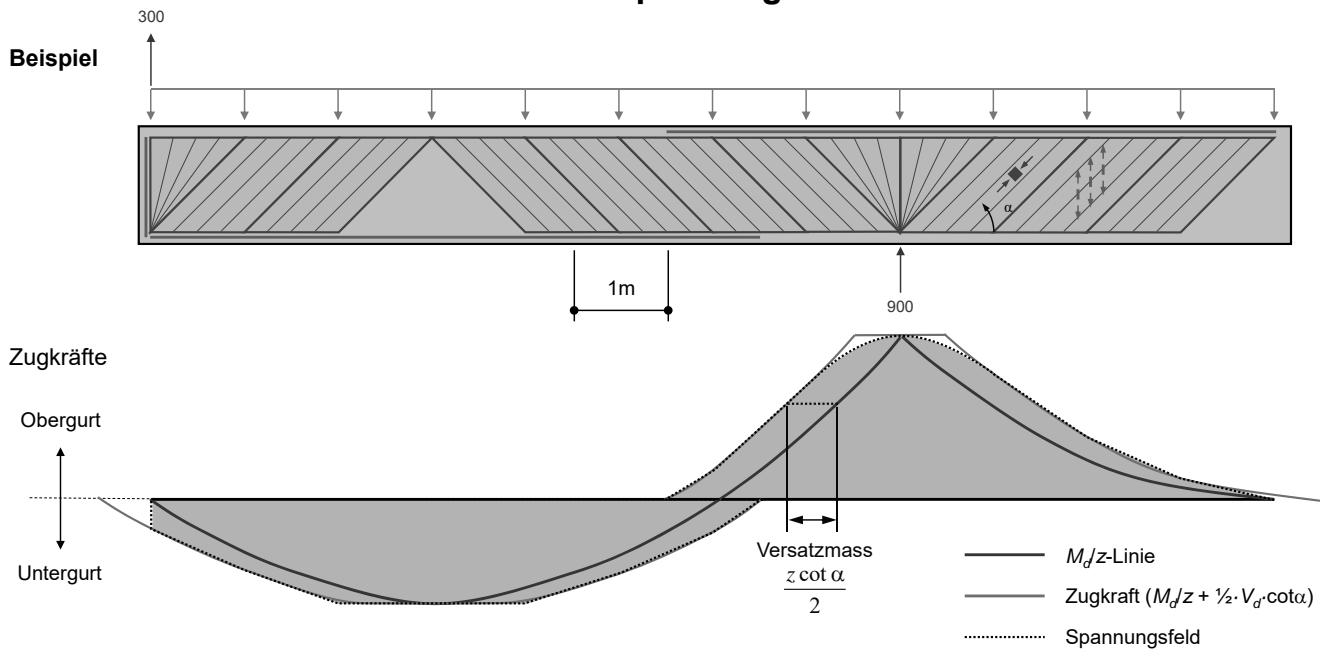
- Pfosten (konzentrierte Bügelkräfte) werden zu vertikalen Zugfeldern (verteilte Bügelkräfte);
- Druckdiagonalen werden zu parallelen Druckfeldern (in Bereichen mit konstanter Neigung der Druckdiagonalen) resp. Fächern (bei variabler Druckdiagonalenneigung und bei der Einleitung von Einzellasten, beispielsweise bei den Auflagern).

Während die Bügelkräfte weiterhin abgetrept verlaufen (abschnittsweise konstante Kräfte entsprechend der Kräfte in den Zugpfosten), verlaufen die Gurtkräfte nun kontinuierlich, da die Druckdiagonalen nicht mehr konzentrierte Horizontalkräfte an die Gurte abgeben. Über parallelen Druckfeldern verläuft die Gurtkraft linear (da jede infinitesimale Strebe des parallelen Druckfelds die gleiche Änderung der Gurtkraft bewirkt), über zentrierten Fächern parabolisch (da die Horizontalkomponente der infinitesimalen Druckstreben von ihrem Neigungswinkel abhängt und die Vertikalkomponente pro Längeneinheit konstant ist). Näheres dazu siehe Vorlesung Stahlbeton III.

Einzelne Fachwerkstäbe können nicht über eine grössere Breite verteilt resp. ausgebreitet werden (im Beispiel die vertikale Bewehrung am linken Trägerende, welche die Reaktion vom oberen Trägerrand an den unteren übertragen muss. Solche Fachwerkstäbe erfordern eine konzentrierte Bewehrung (Zug) resp. ausreichend grosse Abmessungen (Druck).

Für die Bemessung können punktzentrierte Fächer bei den Einzellasten und Auflagern verwendet werden (wie dargestellt), obschon die Druckspannungen in den Ecken, wo die Trajektorien zusammenlaufen, theoretisch unendlich gross werden. Voraussetzung ist, dass die Abmessungen der Knotenbereiche (Lagerplattenbreite, Höhe) ausreichend gross gewählt werden (gleich gross wie beim statisch äquivalenten Fachwerkmodell). Nähere Angaben dazu siehe Vorlesung Stahlbeton III.

## Querkraft – Spannungsfelder



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

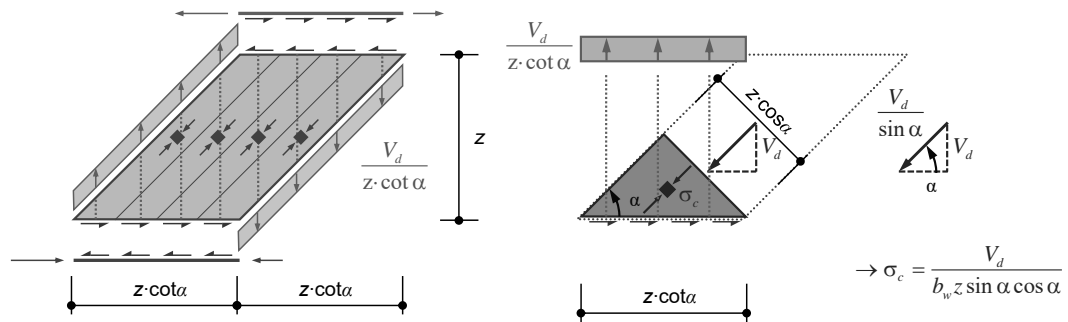
44

Vergleich der Gurtkräfte gemäss Querschnittsbemessung und Spannungsfeld:

- Der mit dem Spannungsfeld ermittelte Gurtkraftverlauf stimmt praktisch überall mit der um das Versatzmass  $\frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot \alpha$  verschobenen Linie  $M_d/z$  (Zugkraftlinie  $M_d/z + \frac{1}{2} \cdot V_d \cdot \cot \alpha$ ) gut überein. *Abweichung:* Der Verlauf aus dem Spannungsfeld verläuft jeweils linear in den Bereichen konstanter Bügelkräfte aufgrund des parallelen Spannungsfelds. Zudem verläuft über dem rechten Auflager die Gurtkraft nach dem Spannungsfeld parabolisch, nicht konstant wie gemäss der grafischen Konstruktion mit dem Versatzmass.
- Die beim Auflager zu verankernde Zugkraft kann entweder aus der Zugkraftlinie (mit Versatzmass) oder dem Fachwerkmodell (siehe vorne) ermittelt werden; alle drei Modelle liefern den gleichen Wert, sofern die Druckfeldneigung übereinstimmend festgelegt wurde.

# Querkraft – Spannungsfelder

## Zusammenhang Spannungsfelder - Querschnittsbetrachtung

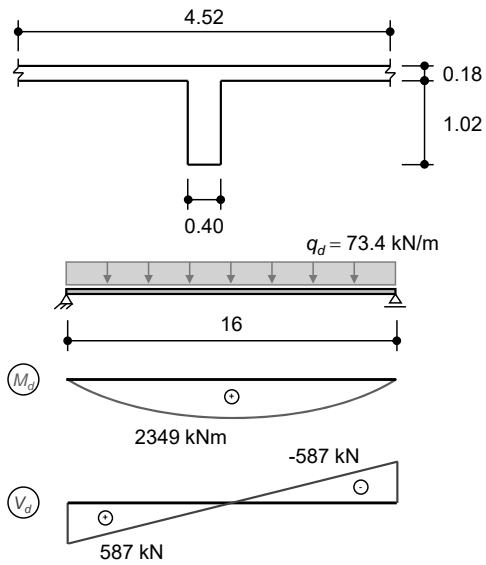


- Die «Querschnitts»-Nachweise nach SIA 262 (eigentlich keine reine Querschnittsbetrachtung) folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen am Schnittkörper eines parallelen Druckspannungsfelds.

Die «Querschnittsnachweise» nach SIA 262 («Fachwerkmodell mit variabler Diagonalenennung») entsprechen einem Spannungsfeld.

## Querkraft – Beispiel

Fortsetzung von [1] Beispiel 2.9 / 4.1, Seite 4.7



- Plattenbalken mit  $b_{eff} = 4.52$  m  
 $b_w = 0.4$  m  
 $h = 1.2$  m  
 $h' = 0.18$  m
- Einfacher Balken mit  $l = 16$  m

Gewählte Hauptbiegebewehrung:

- $7\text{Ø}30 \rightarrow z = 1.11$  m (vgl. Biegung Teil 2, Folie 41)

Querkraftbewehrung:

- $\rho_{min} = 0.2\%$ :

$$a_{s,min} = \rho_{min} \cdot b_w \cdot 1000 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$= 0.002 \cdot 400 \cdot 1000 = 800 \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$\rightarrow 2\text{Ø}8@125, a_s = 2 \cdot 402 = 804 \text{ mm}^2/\text{m}$$

2-schnittige Bügel!

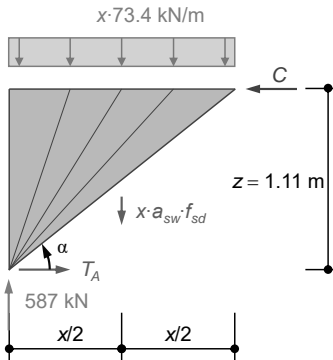
Auf dieser und den folgenden Folien wird die Querkraftbemessung am Beispiel eines Plattenbalkens illustriert (bereits im Kapitel «Biegung» behandeltes Beispiel).

## Querkraft – Beispiel

### Zentrierter Fächer beim Auflager

Anstelle wie beim Beispiel «einfacher Balken mit Kragarm» die Druckfeldneigung  $\alpha$  vorzugeben, kann auch eine andere Wahl getroffen werden.

Beispiel: Gegebene Bügelbewehrung voll ausnützen, Länge  $x$  und somit Druckfeldneigung  $\alpha$  daraus bestimmen:



$$a_{sw} \cdot f_{sd} = 804 \cdot 0.435 = 349.7 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow 587 - 73.4 \cdot x - 349.7 \cdot x = 0$$

$$\rightarrow x = 1.387 \text{ m}$$

$$\rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1.11}{1.387}\right) = 38.7^\circ \quad (\tan \alpha = 0.8003)$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow T_A \cdot 1.11 + 349.7 \cdot \frac{1.387^2}{2} + 73.4 \cdot \frac{1.387^2}{2} = 587 \cdot 1.387$$

$$\rightarrow T_A = 367 \text{ kN}$$

(oder: Gleichgewicht der Horizontalkräfte am Auflagerknoten:

$$\rightarrow T_A = 587 \frac{\cot \alpha}{2} = 367 \text{ kN})$$

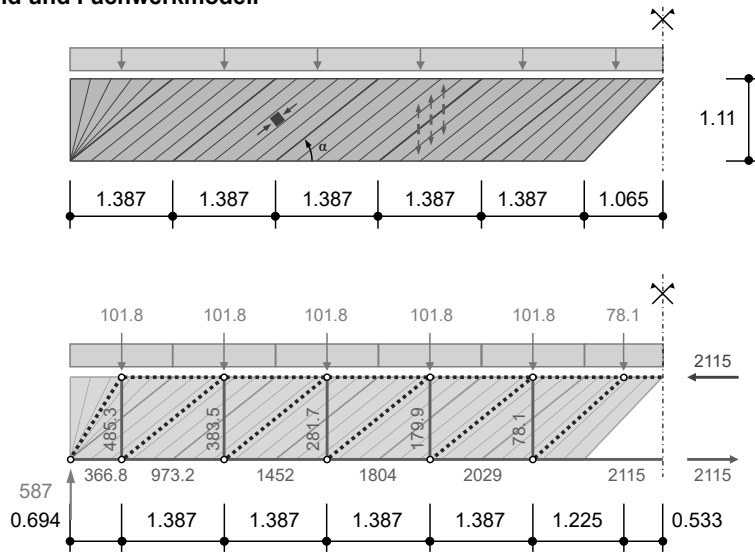
Die Druckfeldneigung kann bei der Bemessung frei gewählt werden (innerhalb der durch die Norm vorgegebenen Grenzen).

Im Beispiel wird sie so gewählt, dass die gegebene Bügelbewehrung gerade voll ausgenützt ist. Der Nachweis erfolgt gemäss Norm SIA 262 im Schnitt, welcher den Obergurt (wo die Last angreift) im Abstand  $z \cdot \cot \alpha$  schneidet. Die über diese Länge angreifende Last muss nicht mit den Bügeln aufgehängt werden, was aus dem Spannungsfeld ersichtlich ist.

Die hinter dem Auflager zu verankernde Gurtkraft kann direkt aus der Auflagerreaktion ermittelt werden, da die Resultierende der Fächerdruckspannungen gerade die doppelte Neigung aufweist wie dessen flachste Trajektorie (stimmt beim punktzentrierten Fächer mit vertikaler erster Trajektorie exakt, allgemein ist es eine gute Näherung).

# Querkraft – Beispiel

## Spannungsfeld und Fachwerkmodell



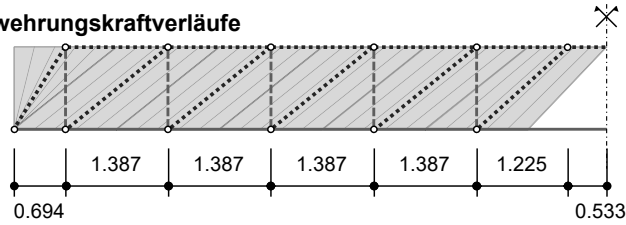
Im Spannungsfeld wurden gleiche Abschnittslängen von 1.387 m (entsprechend der Neigung, mit welcher die Bügel gerade voll ausgenützt sind) gewählt, soweit dies möglich ist. In Feldmitte resultiert daher eine Restlänge von 1.065 m. Damit ist dort ein Fächer erforderlich. Hätte man die Länge zwischen den Querkraftnullpunkten (halbe Spannweite) in gleich grosse Abschnitte eingeteilt, wären die Bügelkräfte anders, das Spannungsfeld würde aber aus lauter parallelen Druckfeldern bestehen.

Das Fachwerkmodell entspricht den Resultierenden der einzelnen Elemente des Spannungsfelds. Die Einzellasten sind zur verteilten Belastung statisch äquivalent.

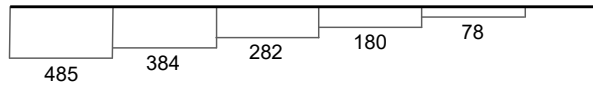


## Querkraft – Beispiel

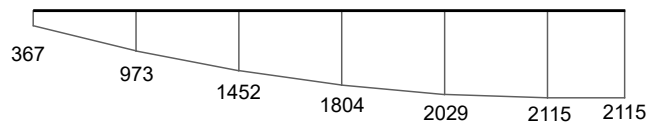
### Relevante Bewehrungskraftverläufe



### Bügelkräfte [kN]



### Untergurtkraft [kN]



N.B.:

$$1.065 \cdot 73.4 = 78.1 \text{ kN}$$

$$1.387 \cdot 73.4 = 101.8 \text{ kN}$$

$$\frac{587.1}{1.11} \cdot 0.694 = 367 \text{ kN}$$

Die grösste Bügelkraft beträgt 485 kN und muss über eine Länge von 1.387 m von der Bewehrung aufgenommen werden:

$$2 \cdot 402 \cdot 0.435 \cdot 1.387 = 485 \text{ kN, i.O.}$$

Die Längsbewehrung muss im Maximum 2115 kN abdecken ( $z = 1.11 \text{ m}$ ).

$$7 \cdot 707 \cdot 0.435 = 2153 \text{ kN, i.O.}$$

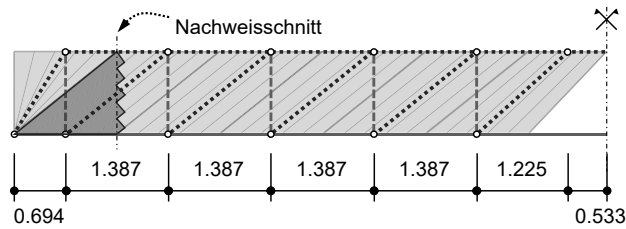
Die Abstufung kann gemäss Verlauf der Untergurtkraft erfolgen. Hinter dem Auflager ist eine Kraft im Zuggurt von 367 kN zu verankern.

### Ergänzende Bemerkungen

- Die grösste Bügelkraft entspricht gerade dem Widerstand der Bügelbewehrung (was nicht weiter überrascht, da die Druckfeldneigung entsprechend festgelegt wurde)
- Die hinter dem Auflager zu verankernde Gurtkraft entspricht ebenfalls dem auf der ersten Folie des Beispiels ermittelten Wert.

## Querkraft – Beispiel

### Relevante Betondruckspannungen



N.B.:

Massgebend ist die Querkraft im Abstand  $z \cdot \cot \alpha$  vom Auflagerend (SIA 262, 4.3.3.4.1).

$$\sigma_c = \frac{V_d}{b_w z \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{587 - 73.4 \cdot 1.387}{400 \cdot 1.11 \cdot \sin 38.6^\circ \cos 38.6^\circ} = 2.24 \text{ N/mm}^2 \leq k_c \cdot f_{cd} = 0.55 \cdot 16.5 = 9.1 \text{ N/mm}^2, \text{ i.O.}$$

Es wird damit die Druckstrebe unmittelbar neben dem Fächer nachgewiesen.

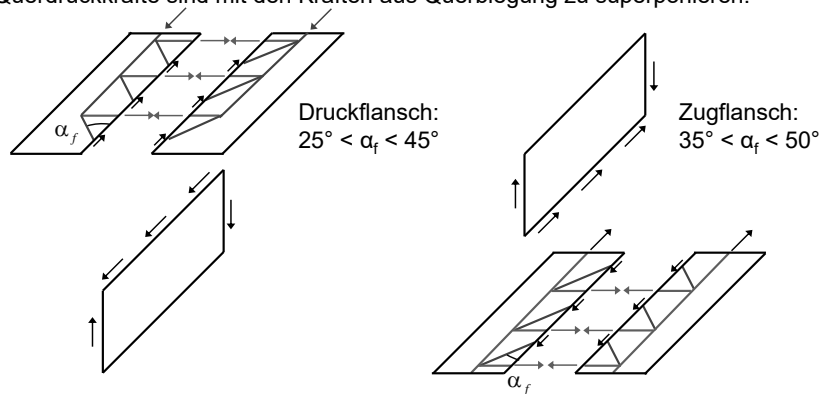
Mit dem Nachweis der Betondruckspannungen im Steg ist die Bemessung des Trägers «in Längsrichtung» abgeschlossen. Die Bewehrung kann entsprechend der Resultate konstruiert werden.

Zusätzlich ist jedoch die Lastausbreitung der Druckkraft im Obergurt zu beachten.

# Querkraft – Schubanschluss

## Anschluss Steg – Flansch

- Im Grenzzustand der Tragsicherheit ist der Schubanschluss der Flanschplatten an den Steg zu berücksichtigen (SIA 262, 4.3.4.1.1).
- Einleitung von Zug-/Druckkräften in die Flansche (Gurte) erzeugt Schubkräfte im Übergang zwischen Steg und Flansch sowie Querkug- und Druckkräfte in den Flanschen.
- Die Querkug- und Querkdruckkräfte sind mit den Kräften aus Querkbiegung zu superponieren.



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

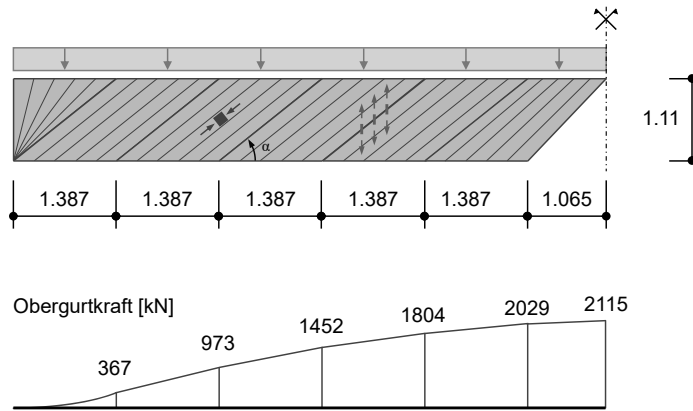
51

Die Ausbreitung der Druckgurtkraft in den Oberflansch bewirkt eine Querkugkraft im Flansch und erfordert eine entsprechende Bewehrung («Spreizbewehrung»). Die Querbewehrung, welche im Anschluss der Druckplatte an den Steg verläuft, muss also nicht nur die «lokale» Biegung (Tragwirkung des Flanschs als Platte zwischen den Längsträgern) aufnehmen, was im Kapitel Biegung untersucht wurde, sondern auch diese Querkugkraft.

Am einfachsten wäre es, die Bewehrungen aus Biegung und die für die Aufnahme der Querkugkräfte erforderliche Bewehrung zu superponieren. Dies wäre jedoch unwirtschaftlich, da ein Teil der Querkugkraft durch eine Reduktion der Biegedruckkraft aus lokaler Biegung aufgenommen werden kann. Eine genauere Betrachtung kann mit einem Nachweis für Biegung mit (Zug-)Normalkraft erfolgen.

# Querkraft – Schubanschluss

## Beispiel



Die maximale Schubkraft zwischen Steg und Flansch tritt bei  $x = z \cdot \cot \alpha$  auf (bei der letzten Strebe des Fächers beim Auflager tritt die grösste Änderung der Obergurkraft pro Länge). Sie beträgt:

$$s_{\max} = \frac{V_d}{z} = \frac{587}{1.107} = 530 \text{ kN/m}$$

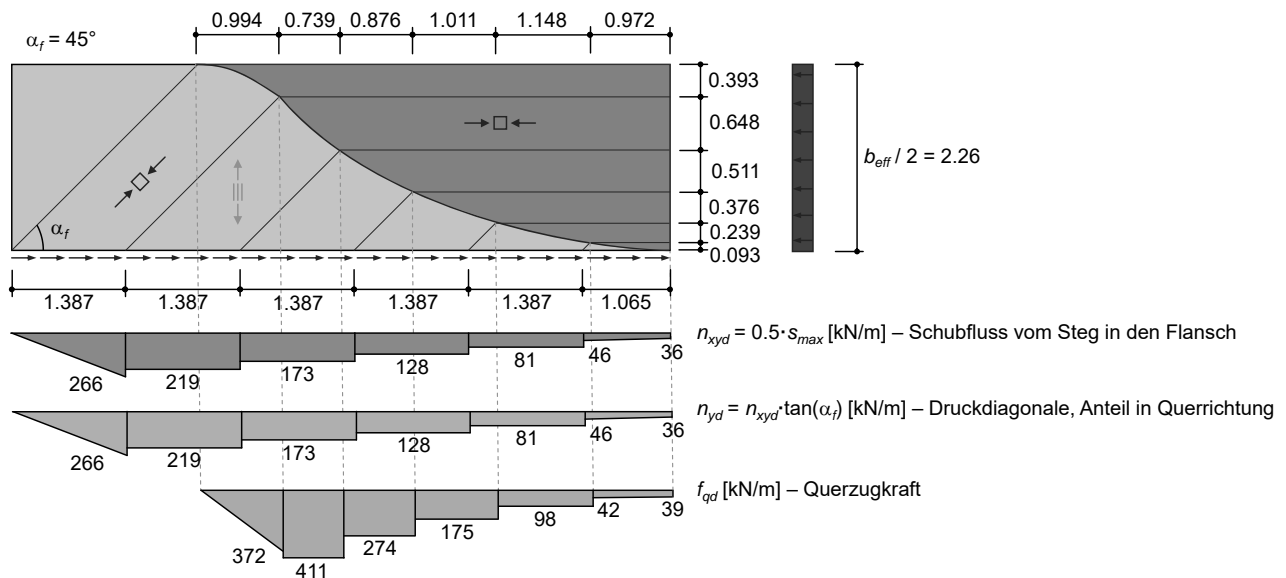
Die Querkzugbeanspruchung resultiert aus der Einleitung der Längsschubkraft zwischen Steg und Flansch. Diese Längsschubkraft entspricht der Änderung der Obergurkraft, welche (entsprechend  $dM/dx = V$ ) direkt mit dem Verlauf der Querkraft zusammenhängt (Horizontalanteil der geneigten Druckstreben im Spannungsfeld bzw. Fachwerkmodell).

### Ergänzende Bemerkungen

Um für Biegung die ganze Flanschbreite aktivieren zu können (was in Querschnittsnachweisen üblicherweise vorausgesetzt wird), muss die in der Stegachse eingeleitete Längskraft offensichtlich gespreizt werden. Das Stabmodell, an dem üblicherweise die Schnittkräfte ermittelt werden, ist eine Idealisierung, aus welcher solche Effekte nicht ersichtlich sind. Mit der «effektiven Breite» kann die für übliche Verhältnisse mögliche Spreizung berücksichtigt werden, und darauf basierend kann die erforderliche Querbewehrung ermittelt werden.

# Querkraft – Schubanschluss

## Beispiel – Grundriss des Plattenbalkens



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

53

- An der Stelle des maximalen Moments wird auf der ganzen Breite die Betondruckfestigkeit  $f_{cd}$  angesetzt (Biegetragsicherheit ausgeschöpft, resp. effective Flanschbreite entsprechend gewählt). Die Schubkräfte, welche aus dem Steg eingeleitet werden, werden über Druckdiagonalen in den Flansch ausgebreitet. Der Winkel, mit welchem die Gurtkraft in den Flansch ausgebreitet wird, kann grundsätzlich – genau wie die Druckfeldneigung – frei gewählt werden. Unter Berücksichtigung der vorhandenen Geometrie sollte jedoch überprüft werden, ob genügend Platz für die Druckdiagonalen sowie für die verteilte Bügelbewehrung vorhanden ist. Eine massstäbliche Konstruktion des Spannungsfelds ist daher stets zu empfehlen.
- Durch die Ausbreitung der Gurtkraft wird in Feldmitte eine grössere Breite als Druckzone aktiviert als in Auflagernähe. Die Breite der Druckzone stimmt daher nur in Feldmitte mit der «effektiven Breite» des Flanschs überein, und auch dies nur, sofern mit der Ausbreitung unter dem gewählten Winkel diese ganze Breite aktiviert werden kann. Andernfalls ist der Winkel der Ausbreitung (und damit die Spreizbewehrung) zu erhöhen, sofern in Feldmitte die ganze effektive Breite für den Biegenachweis angesetzt werden soll.

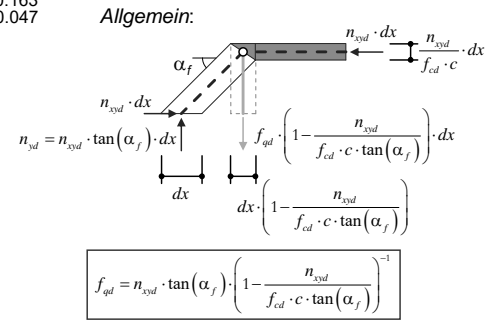
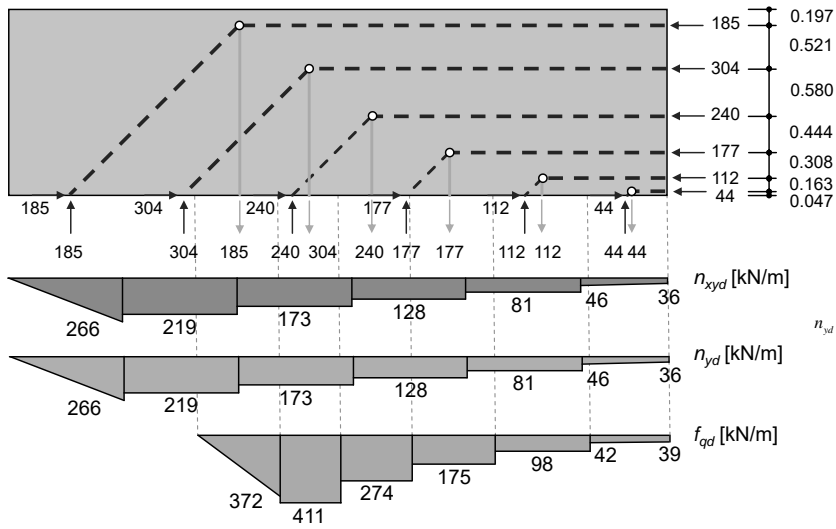
### Ergänzende Bemerkungen

- In der Praxis beschränkt man sich meist darauf, die maximale Querbewehrung zu ermitteln; diese wird dann über die ganze Länge (allenfalls mit 1-2 Abstufungen) eingelegt.
- In der Folie ist ein Spannungsfeld dargestellt, welches keine Kreuzung von diagonalen und achsparallelen Druckfeldern erfordert. Dadurch resultieren relativ grosse Querkzugkräfte (pro m), da die Querkzugbewehrung erst in einem grösseren Abstand vom Auflager wirksam ist. Grundsätzlich sind auch Spannungsfelder möglich, bei welchem die in Auflagernähe ankommende Längskraft auf eine kleinere Breite gespreizt wird als in Feldmitte. Damit kann eine auflagernahe Querkzugbewehrung ausgenützt werden, und es resultieren kleinere Querkzugkräfte (pro m). Dabei kreuzen sich aber diagonale und achsparallele Druckfelder, wodurch die Überprüfung der Druckfestigkeit erschwert wird (bei Ansatz von  $f_c$  in Längsrichtung wäre die Druckspannung im Kreuzungsbereich  $> f_c$ ).

# Querkraft – Schubanschluss

## Beispiel – Grundriss des Plattenbalkens

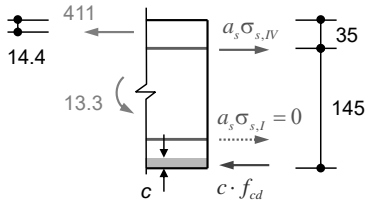
... zugehöriges Fachwerkmodell



# Querkraft – Schubanschluss

## Beispiel

Kräfte im Längsschnitt durch den Flansch des Plattenbalkens (Stegrand):



$$\Sigma M = 0 \rightarrow -13.3 \cdot 10^3 - 411 \cdot (35 - 14.4) + 16.5 \cdot c \cdot \left(145 - \frac{c}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow c = 9.4 \text{ mm} \rightarrow c \cdot f_{cd} = c \cdot 16.5 = 155.1 \text{ kN/m}$$

$$\Sigma H = 0 \rightarrow 411 + 155.1 - a_s \sigma_{s,IV} = 0$$

$$\rightarrow a_s \sigma_{s,IV} = 566.1 \text{ kN/m}$$

$$\text{gewählt: } a_s \cdot f_{sd} = \frac{16^2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.15} \cdot 0.435 = 583 \text{ kN/m} > 566.1 \text{ kN/m, i.O.}$$

- Die Querkraft muss mit dem Querbiegemoment superponiert werden:

$$m_d = 13.3 \text{ kNm/m}$$

(siehe Biegung, Folie 80)

- Die Gleichgewichtsbedingungen am Schnittkörperdiagramm liefern die Druckkraft und die Kraft in der vierten Bewehrungslage (1. Lage vernachlässigt):

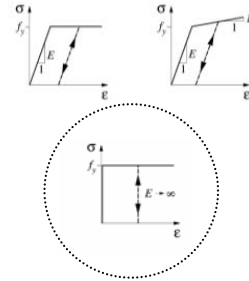
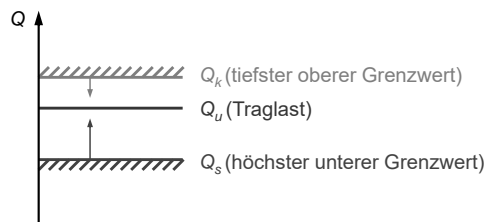
Die ursprünglich gewählte Plattenbewehrung von  $\emptyset 10@200$  reicht nicht aus, um die Kräfte aus Querbiegung und Querkraft aufzunehmen.. Sie wird auf  $\emptyset 16@150$  ( $a_s = 1340 \text{ mm}^2/\text{m}$ ) verstärkt.

In der Abbildung wird die erforderliche Bewehrung zur Aufnahme der «lokalen» Biegung (Tragwirkung des Flanschs als Platte zwischen den Längsträgern) und der Querkraft exakt ermittelt.

Der Nachweis wäre wesentlich einfacher, wenn der Hebelarm der inneren Kräfte bei der Längsbemessung so gewählt worden wäre, dass die Druckgurtkraft in der Mitte des Hebelarms der lokalen Biegebeanspruchung in Querrichtung angreift (was im vorliegenden Fall aufgrund des kleineren Hebelarms der inneren Kräfte für «globale» Biegung in Längsrichtung eine rund 8% grössere Längsbewehrung erfordert hätte). Da die Querkraft auf gleicher Höhe angreift wie die resultierende Obergurtkraft, könnte man die Querkraft in diesem Fall zu je 50% auf die obere Bewehrung und die Druckzone aufteilen. Sofern die Druckzone dadurch nicht dekomprimiert (üblicherweise bleibt sie überdrückt) müsste also einfach der Widerstand der oberen Querbewehrung um die Hälfte der Querkraft erhöht werden.

# Querkraft – Bruchmechanismen

## Grundlagen



- Unterer (statischer) Grenzwertsatz** Jede Belastung  $Q_s$ , zu der sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, der die Fließbedingungen nirgends verletzt, liegt nicht höher als die Traglast  $Q_U$ . (statisch zulässig: Gleichgewichtsbedingungen und stat. Randbedingungen erfüllt)
- Oberer (kinematischer) Grenzwertsatz** Jede Belastung  $Q_k$ , welche aus der Gleichsetzung der Arbeit der äusseren Kräfte bei einem kinematisch zulässigen Verformungszustand mit der zugehörigen Dissipationsarbeit resultiert, liegt nicht tiefer als die Traglast  $Q_U$ . (kinematisch zulässig: kinemat. Relationen und kinemat. Randbedingungen erfüllt)
- Verträglichkeitssatz** Jede Belastung  $Q_U$ , zu der eine vollständige Lösung angegeben werden kann, ist eine Traglast. (vollständige Lösung: stat. zulässiger Spannungszustand, der die Fließbedingungen nirgends verletzt, und mit diesem nach der Theorie des plastischen Potentials verträglicher, kinematisch zulässiger Verformungszustand)

Fachwerkmodelle und Spannungsfelder stellen eine direkte Anwendung des unteren (statischen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie dar. Sie führen deshalb zu einer sicheren Bemessung beziehungsweise zu einer auf der sicheren Seite liegenden Abschätzung der Traglast bestehender Tragwerke.

Durch die Betrachtung von Bruchmechanismen, welche einer Anwendung des oberen (kinematischen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie entsprechen, können obere Grenzwerte der Traglast ermittelt werden. Damit können die Tragsicherheitsreserven einer anhand eines Spannungsfelds durchgeführten Bemessung abgeschätzt werden. Zudem können mit Bruchmechanismen Bewehrungsgehalte, Betonabmessungen und wichtige konstruktive Details selbst in komplizierten Fällen mit relativ geringem rechnerischem Aufwand überprüft werden.

Nachfolgend werden die Grundlagen für die Untersuchung von Bruchmechanismen für Scheiben und Träger behandelt und an einzelnen Beispielen illustriert. Weiterführende Angaben siehe Stahlbeton III.



# Querkraft – Bruchmechanismen

## Bruchmechanismen für Scheiben und Träger (oberer Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie)

- Anwendung in der Praxis vor allem für die Beurteilung der Tragsicherheit bestehender Bauwerke und die Überprüfung von (zum Beispiel) mit FE-Berechnungen ermittelten Bewehrungslayouts.
- Die Entwicklung eines statisch zulässigen Spannungszustandes ist in solchen Fällen aufwändig (Fließbedingungen durch bestehende Konstruktion und Bewehrung gegeben). Mit Bruchmechanismen können wichtige Details und Abmessungen dagegen selbst in komplizierten Fällen mit relativ geringem rechnerischem Aufwand überprüft werden.

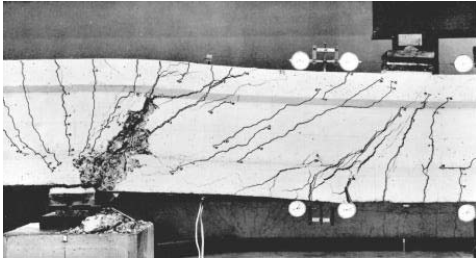
## Vorgehen

- Annahme kinematisch verträglicher Bruchmechanismen
- Berechnung der zugehörigen Arbeit  $W$  der äusseren Kräfte sowie der Dissipationsarbeit  $D$  (Dissipation in beim Kollaps fließender Bewehrung und im Beton entlang Diskontinuitäten)
- Ermittlung der Kollapslast aus der Bedingung  $W(Q) = D \rightarrow Q_u \leq Q$  für jeden Mechanismus
- Massgebend ist der Mechanismus mit dem tiefsten Verhältnis  $D/W$  (= kleinste Kollapslast)
- Dissipation in fließender Bewehrung kann sehr einfach berechnet werden; Dissipation im Beton (Diskontinuitäten) ist etwas aufwendiger zu ermitteln.

Bei der Anwendung des oberen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie wird für einen gewählten Bruchmechanismus die Arbeit der äusseren Kräfte  $W$  mit der entlang der Gleitlinien (auch Bruchlinien genannt) dissipierten Arbeit  $D$  verglichen.

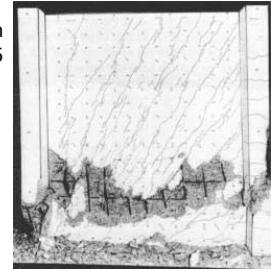
Letztere setzt sich zusammen aus Anteilen infolge Fließens der Bewehrung und Anteilen infolge plastischer Verzerrungen im Beton; die Dissipation in der fließenden Bewehrung lässt sich sehr einfach berechnen, während die Dissipation im Beton einer etwas eingehenderen theoretischen Betrachtung bedarf. Der massgebende Mechanismus ist derjenige, welche das tiefste Verhältnis  $D/W$  beziehungsweise den tiefsten oberen Grenzwert für die Traglast ergibt.

## Querkraft – Bruchmechanismen



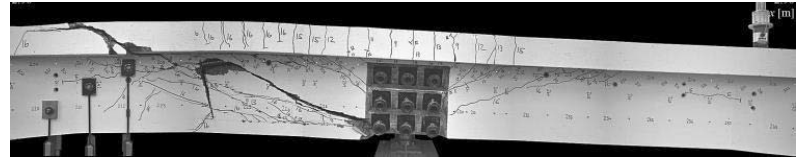
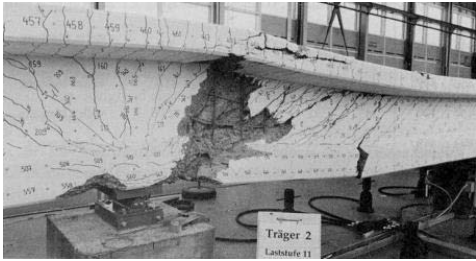
Bachmann / Thürlimann  
1965

Maier / Thürlimann  
1985

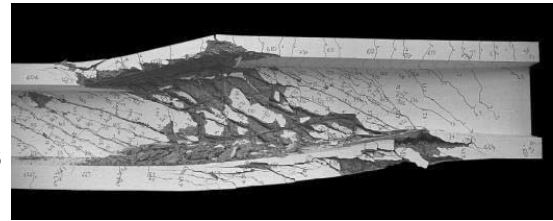


Stoffel / Marti  
1995

Sigrist / Marti  
1992



Kaufmann / Marti  
1995



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

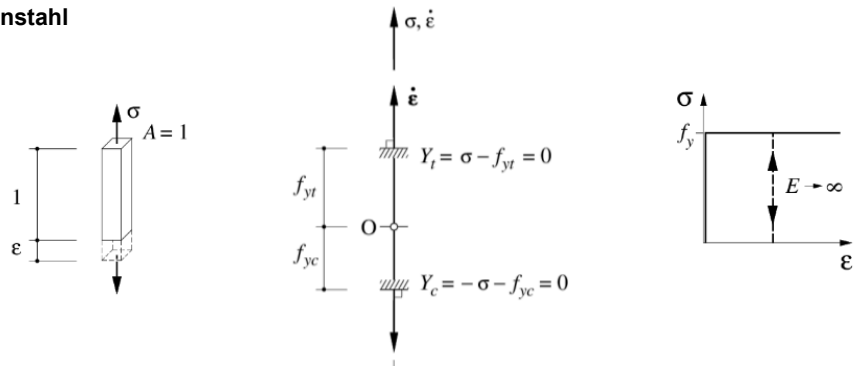
58

Die bei der Anwendung des oberen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie untersuchten Bruchmechanismen entsprechen nicht direkt tatsächlich auftretenden Versagensmechanismen. Vielmehr handelt es sich um abstrahierte Bruchmechanismen, welche die Voraussetzungen der Traglastverfahren der Plastizitätstheorie erfüllen.

Dennoch stimmen die massgebenden Bruchmechanismen (welche den tiefsten oberen Grenzwert nach Plastizitätstheorie ergeben) in vielen Fällen gut mit in Versuchen beobachteten Versagensmechanismen überein (Abbildung: Beispiele grossmassstäblicher Versuche an der ETH Zürich, durchgeführt zur Validierung konsistenter mechanischer Modelle). Dies zeigt, dass die Voraussetzungen der Traglastverfahren das wirkliche Verhalten gut erfassen.

# Querkraft – Bruchmechanismen

## Dissipation im Betonstahl



Allgemeine Dissipation pro Volumeneinheit:

$$dD_s = \sigma_s \cdot \dot{\epsilon}_s$$

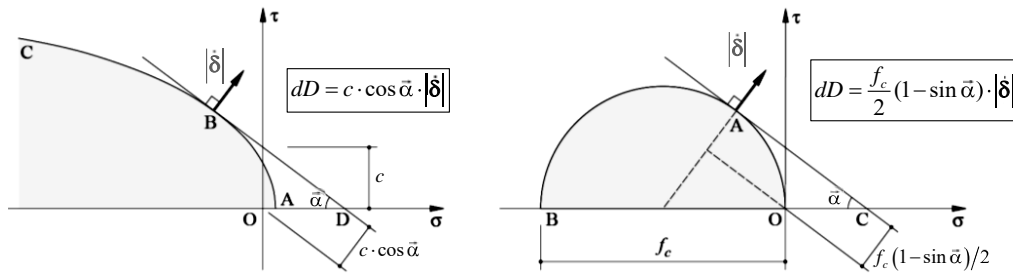
d.h. mit starr – ideal plastischem Materialverhalten beträgt die Dissipationsarbeit in einem Stab mit Querschnittfläche  $A_s$ , der sich um  $\delta$  verlängert:

$$D_s = A_s \cdot f_{sd} \cdot \dot{\delta}$$

Die Dissipation in der Bewehrung (schlaife Bewehrung und Vorspannung) kann – unter der Annahme, dass diese nur Kräfte in ihrer Richtung übernimmt – sehr einfach aus dem Produkt  $A_s \cdot f_s \cdot \Delta L_s$  («Fließzugkraft·Verlängerung») ermittelt werden. Da nicht Verschiebungen, sondern plastische Verschiebungsinkremente (unter konstanter Kraft) betrachtet werden, ist – im Gegensatz zur linear elastischen Formänderungsenergie – kein Faktor  $\frac{1}{2}$  einzusetzen.

# Querkraft – Bruchmechanismen

## Gleitlinien und Dissipation in Beton



- Für eine allgemeine Mohrsche Hüllkurve beträgt die Dissipation pro Einheitsfläche der Diskontinuität, bezogen auf eine Einheitsverschiebung  $dD = c \cdot \cos \bar{\alpha}$
- Für die quadratische Fließbedingung folgt  $dD = \frac{f_c}{2} \cdot (1 - \sin \bar{\alpha})/2$
- Für  $\bar{\alpha} = \pi/2$  resultiert keine Dissipation im Beton: sogenannter Kollapsriss

10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

60

Die Ermittlung der Dissipation im Beton kann anhand der Untersuchung einer Gleitlinie (Diskontinuität im Verschiebungsfeld) ermittelt werden, wobei angenommen wird, dass der Beton neben den Gleitlinien starr bleibt. Dies wird in der Vorlesung Stahlbeton III näher untersucht.

Einfacher kann die Dissipation im Beton für eine mittels einer Mohrschen Hüllkurve beschreibbare Bruchbedingung ermittelt werden wenn man beachtet, dass bei verträglichen Mechanismen (nur solche kommen für eine vollständige Lösung in Frage) die Neigung  $\alpha$  des Sprungvektors zur Gleitlinie dem Reibungswinkel  $\varphi$  entsprechen muss,  $\alpha = \varphi$  (siehe Abbildung). Dies aufgrund der vorausgesetzten Orthogonalität der plastischen Verzerrungsincremente zum aplastischen Bereich.

Die Dissipation pro Einheitsfläche einer Gleitlinie, welche eine Einheitsverschiebung (Relativverschiebung des Betrags 1) im Winkel  $\alpha$  zu ihrer Richtung erfährt, beträgt somit allgemein:

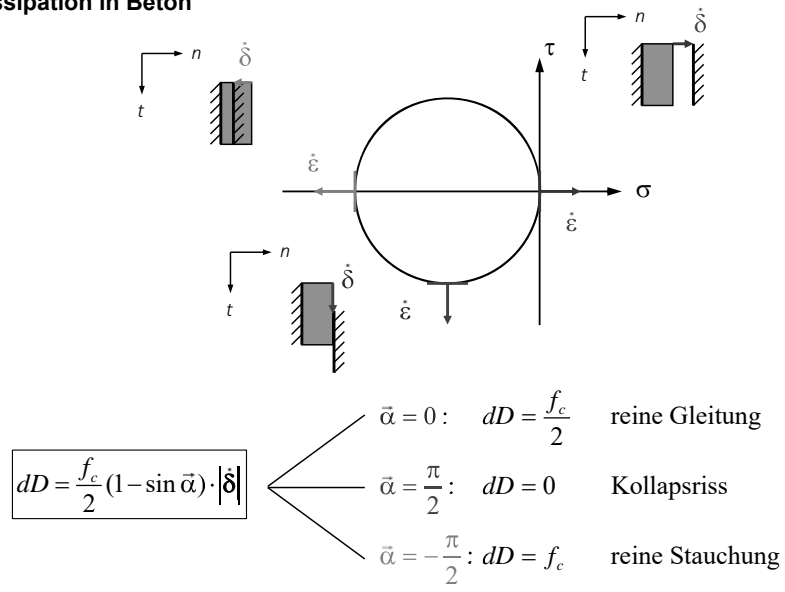
Die Dissipation in einer Gleitlinie resultiert durch Multiplikation von  $dD$  mit der Fläche der Gleitlinie (d.h. «Gleitlinienlänge · Scheibendicke =  $l \cdot b_w$ »).

### Ergänzende Bemerkung

- Wurde  $dD$  für eine Einheitsverschiebung berechnet, ist die Dissipation in der Gleitlinie noch mit dem Betrag der Relativverschiebung im betrachteten Mechanismus zu multiplizieren.

# Querkraft – Bruchmechanismen

## Gleitlinien und Dissipation in Beton



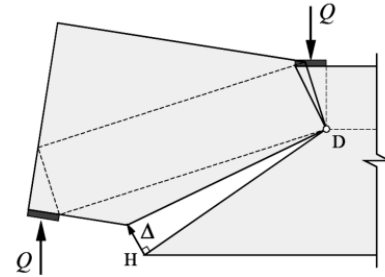
Die Abbildung veranschaulicht die Dissipation im Beton für spezielle Verschiebungsrichtungen.

# Querkraft – Bruchmechanismen

## Scheibe ohne Vertikalbewehrung unter Einzellast

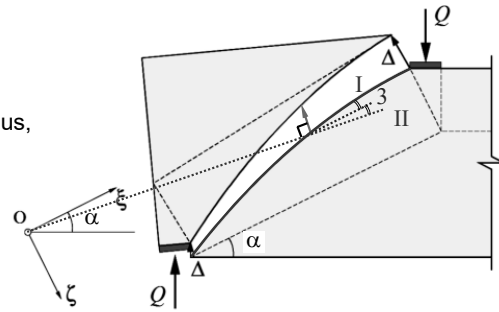
### Biegemechanismus

- Kollapsriss D-H (Verschiebung senkrecht zur Gleitlinie,  $\bar{\alpha} = \pi/2$ , keine Dissipation im Beton)
- Traglast ist unabhängig von der Neigung des Kollapsrisses und identisch mit derjenigen des Translationsmechanismus und des Fachwerkmodells (vollständige Lösung)
- Bestätigt, dass Längsbewehrung (ohne Bügel) nicht abgestuft werden kann



### Rotationsmechanismus

- Gleitlinie: Hyperbel im Koordinatensystem  $(\xi, \zeta)$
- Degeneriert für grossen Abstand  $O \rightarrow \infty$  zu Translationsmechanismus, gleiche Traglast



10.11.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton I

62

Die Abbildung zeigt zwei mögliche Bruchmechanismen für eine Scheibe ohne Bügelbewehrung unter Einzellast, die den gleichen Wert der Traglast liefern.

Beim in der oberen Abbildung dargestellten Rotationsmechanismus handelt es sich um einen sogenannten *Kollapsrissmechanismus*, bei welchem sich die Gleitlinie DH senkrecht öffnet (Verschiebungsrichtung  $\bar{\alpha} = \pi/2$ ), so dass in dieser Gleitlinie (= Kollapsriss) keine Dissipation in der Gleitlinie resultiert. Dissipation im Beton resultiert bei diesem Mechanismus dagegen in der Druckzone, welche gestaucht wird (Gleitlinie mit Verschiebungsrichtung ( $\bar{\alpha} = -\pi/2$ )).

Beim in der unteren Abbildung dargestellten Rotationsmechanismus ist die Gleitlinie für den massgebenden Mechanismus eine Hyperbel ( $\xi \cdot \zeta = \text{const.}$ ). Dies, da bei der vollständigen Lösung die Richtung der kleinsten Hauptverzerrung (also die Winkelhalbierende zwischen der Richtung der Gleitlinie und der Normalen zum Verschiebungsvektor) in jedem Punkt der Gleitlinie mit der Hauptdruckspannungsrichtung zusammenfallen muss. Daraus kann die Richtung der Gleitlinie in jedem Punkt aus der Beziehung  $d\xi/d\zeta = -\xi/\zeta$  bestimmt werden, mit der Lösung  $\xi \cdot \zeta = \text{const.}$

# Querkraft – Bruchmechanismen

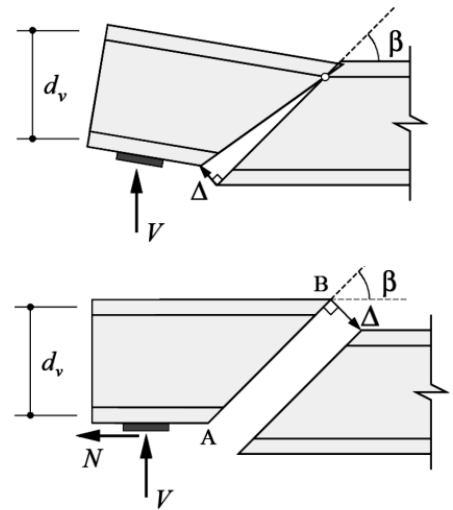
## Kollapsrissmechanismen in Scheiben mit horizontaler und vertikaler Bewehrung

### Rotationsmechanismus (Biegeschubbruch)

- Kollapsriss (Verschiebung senkrecht zur Gleitlinie,  $\bar{\alpha} = \pi/2$ , keine Dissipation im Beton)
- Dissipation in Längsbewehrung und Bügelbewehrung (Relativverschiebung in Bewehrungsrichtung · Fließzugkraft)
- Vollständige Lösungen:  $\beta =$  Druckfeldneigung
- Massgebende Mechanismen: Kollapsrisse unmittelbar neben Bügeln, Abstufungen der Längsbewehrung oder Querschnittsprüngen
- Senkrechter Kollapsriss: «Biegemechanismus»

### Translationsmechanismus

- Selten massgebend, möglich bei Zugnormalkraft (N leistet Arbeit)



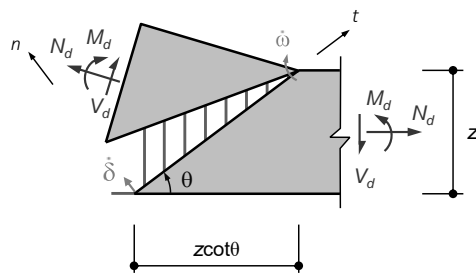
Die Abbildung zeigt zwei mögliche Kollapsrissmechanismen (Bruchmechanismen ohne Dissipation in den Gleitlinien, da sich diese senkrecht öffnen) für Scheiben mit Längs- und Bügelbewehrung. Diese werden massgebend, wenn ein Träger «unterbewehrt» ist, d.h. das Versagen tritt nicht durch Bruch des (Steg-) Betons ein.

Obere Grenzwerte für die Traglast können in Abhängigkeit der Neigung  $\beta$  der Kollapsrisse ermittelt werden. Bei vollständigen Lösungen stimmt der optimale Winkel  $\beta$  mit der Neigung des entsprechenden parallelen Druckbandes im Spannungsfeld überein. Die massgebenden Mechanismen ergeben sich allgemein, wenn die Kollapsrisse derart gewählt werden, dass ihre Enden bei einem Bügel resp. einer Abstufung der Bügelbewehrung oder aber an Stellen, wo die Längsbewehrung abgestuft ist, zu liegen kommen.

Herkömmliche Biegebruchmechanismen (die bei Biegenachweisen an einem Querschnitt üblicherweise betrachtet werden) sind nichts anderes als Kollapsrissmechanismen mit vertikaler Gleitlinie.

## Querkraft – Bruchmechanismen

### Beispiel Biegeschubbruch



- Längsbewehrung  $A_s$
- Bügelbewehrung  $a_{sw}$  (gleichmässig verteilt)
- $\alpha = \pi/2$ :  $D_c = 0$ , keine Dissipation im Beton

- Arbeit der Schnittgrößen:

$$W = V \cdot z \cdot \cot \theta \cdot \dot{\omega} + M \cdot \dot{\omega} + N \cdot \frac{z}{2} \cdot \dot{\omega} = \dot{\omega} \cdot \left[ M + N \cdot \frac{z}{2} + V z \cot \theta \right]$$

- Dissipationsarbeit:

$$D = D_s + D_c = A_s \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \dot{\omega} + a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cot \theta \cdot \frac{\dot{\omega} \cdot z \cot \theta}{2} = \dot{\omega} \cdot \left[ A_s f_{sd} z + a_{sw} f_{sd} \frac{(z \cot \theta)^2}{2} \right]$$

Auf dieser und der folgenden Folie wird ein Biegeschubbruchmechanismus untersucht.

Es resultieren die gleichen Beziehungen für die Traglast in Funktion der Bügelbewehrung resp. der Gurtkräfte nach dem unteren Grenzwert der Plastizitätstheorie (Spannungsfeld).

Es handelt sich somit bei  $V_{Rd,s}$  und den Beziehungen für die Gurtkräfte um vollständige Lösungen (bei Versagen durch Fließen der Gurt- und Bügelbewehrung).



## Querkraft – Bruchmechanismen

### Beispiel Biegeschubbruch

• Gleichsetzen:  $M = A_s f_{sd} z + a_{sw} f_{sd} z^2 \frac{\cot^2 \theta}{2} - N \frac{z}{2} - V z \cot \theta$

$$\frac{dM}{d \cot \theta} = a_{sw} f_{sd} z^2 \cot \theta - V z \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{V = a_{sw} f_{sd} z \cot \theta}$$

resp.  $\cot \theta = \frac{V}{z a_{sw} f_{sd}}$

• Rückeinsetzen:  $\frac{M}{z} + \frac{N}{2} + V \cot \theta = A_s f_{sd} + \underbrace{a_{sw} f_{sd} z \frac{\cot^2 \theta}{2}}_{\frac{V}{2} \cot \theta}$

$$\rightarrow \quad \boxed{A_s f_{sd} = \frac{M}{z} + \frac{N}{2} + \frac{V \cot \theta}{2}}$$

Gleichungen entsprechen den Beziehungen aus dem Spannungsfeld  
Unterer und oberer Grenzwert fallen zusammen  $\rightarrow$  vollständige Lösung!

# Bruchmechanismen

## Stegdruckbruchmechanismen

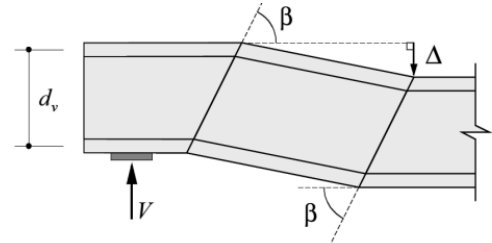
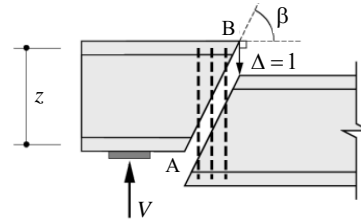
### Stegdruckbruch mit diskreter Bruchlinie

- bei grossen Längsbewehrungsgehalten massgebend (Bruchverschiebung vertikal, d.h. keine Dissipation in Längsbewehrung)
- Beton versagt auf Druck, Bügelbewehrung fliesst, Längsbewehrung bleibt elastisch
- Obere Grenzwerte für die Traglast in Abhängigkeit der Neigung  $\beta$  der Bruchlinie:  
 $\tau$  = nominelle Schubspannung  
 $\omega_v$  = mechanischer Bügelbewehrungsgehalt

$$\omega_v = a_{sv} f_s / (b_w f_c)$$

### Stegdruckbruch mit Bruchzone

- In Schubversuchen oft beobachtet, kann als Serie von Bruchlinieninterpretiert werden (gleiche Traglast)
- Berücksichtigung der Dissipation in den Flanschen (plast. Gelenke) möglich; bei diskreter Gleitlinie wäre Abscheren nötig.



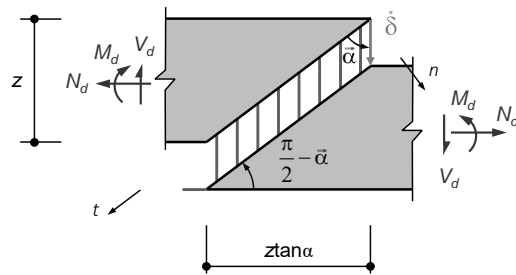
Für grosse Längsbewehrungsgehalte tritt der Bruch durch Stabdrukbruchversagen ein, das heisst durch Versagen des Betons auf Druck bei gleichzeitigem Fliessen der Bügelbewehrung, ohne dass die Längsbewehrung ihre Fliessgrenze erreicht. Entsprechende Bruchmechanismen sind oben dargestellt.

Da die Längsbewehrung nicht fliesst, erfolgt die Bruchverschiebung in vertikaler Richtung.

In Versuchen wird meist ein Stabdrukbruch mit Bruchzone (untere Abbildung) beobachtet. Dieser liefert den gleichen oberen Grenzwert wie der oben dargestellte Mechanismus.

## Querkraft – Bruchmechanismen

### Beispiel Stegdruckbruch



- Längsbewehrung  $A_s$
- Bügelbewehrung  $a_{sw}$  (gleichmässig verteilt)
- $\alpha$  variabel: Dissipation im Beton von  $\alpha$  abhängig.

- Arbeit der Schnittgrössen:  $W = V \cdot \dot{\delta}$

- Dissipationsarbeit:  $D = D_s + D_c = \dot{\delta} \cdot a_{sw} \cdot f_{sd} \cdot z \cdot \tan \alpha + \dot{\delta} \cdot \frac{b_w \cdot z}{\cos \alpha} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \cdot (1 - \sin \alpha)$

Auf dieser und der folgenden Folie wird ein Stegdruckbruchmechanismus untersucht.

Es resultieren die gleichen Beziehungen für die Traglast in Funktion der Betondruckfestigkeit resp. der Bügelbewehrung wie nach dem unteren Grenzwert der Plastizitätstheorie (Spannungsfeld).

Es handelt sich somit bei  $V_{Rd,s}$  und  $V_{Rd,c}$  den Beziehungen für die Gurtkräfte um vollständige Lösungen (bei Versagen durch Fließen der Bügelbewehrung und Stauchung des Stegbetons).

# Querkraft – Bruchmechanismen

## Beispiel Stegdruckbruch

- Gleichsetzen:

$$V = a_{sw} f_{sd} z \tan \bar{\alpha} + b_w z \frac{f_{cd}}{2} \frac{1 - \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha}}$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{a_{sw} f_{sd} z}{\cos^2 \bar{\alpha}} - b_w z \frac{f_{cd}}{2} \frac{1}{\sin \bar{\alpha} + 1} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \sin \bar{\alpha} = 1 - 2\omega_w \quad \text{mit} \quad \omega_w = \frac{a_{sw} f_{sd}}{b_w f_{cd}}$$

- Rückeinsetzen:

$$V = \omega_w b_w f_{cd} z \tan \bar{\alpha} + b_w f_{cd} z \frac{\omega_w}{\cos \bar{\alpha}} = b_w f_{cd} z \omega_w \left( \tan \bar{\alpha} + \frac{1}{\cos \bar{\alpha}} \right)$$

$$\frac{1 - \omega_w}{\sqrt{\omega_w - \omega_w^2}}$$

$$= b_w z f_{cd} \cdot \sqrt{\omega_w - \omega_w^2}$$

# Querkraft – Bruchmechanismen

## Beispiel Stegdruckbruch

- Vergleich mit unterem Grenzwertsatz:

$$\begin{aligned} V_{Rd,s} &= a_{sw} f_{sd} z \cot \alpha & V_{Rd,c} &= f_{cd} b_w z \sin \alpha \cos \alpha \\ V_{Rd,s} = V_{Rd,c} &\rightarrow & \frac{a_{sw} f_{sd}}{b_w f_{cd}} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cot \alpha} = \sin^2 \alpha \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\omega_w} \\ V_{Rd,s} = V_{Rd,c} &= f_{cd} b_w z \cdot \underbrace{\sqrt{\omega_w} \cdot \cos(\arcsin(\sqrt{\omega_w}))}_{\sqrt{1-\omega_w}} \\ &= b_w z f_{cd} \cdot \sqrt{\omega_w - \omega_w^2} \end{aligned}$$

**Unterer und oberer Grenzwert fallen zusammen → vollständige Lösung!**

## Querkraft – Zusammenfassung

1. Das Tragverhalten von Trägern wird meist von den Kräften und Verformungen infolge Biegemomenten dominiert. Bei gedungenen und stark profilierten Trägern können die Querkräfte und die zugehörigen Verformungen jedoch relativ gross sein.
2. In der Regel ist zur Querkraftabtragung eine zur Trägerachse senkrechte oder geneigte Bügelbewehrung sowie eine – im Vergleich zu der zur Aufnahme der Biegemomente und Normalkräfte erforderlichen Bewehrung – erhöhte Längsbewehrung anzuordnen.
3. Der Anteil der zur Querkraftabtragung erforderlichen Bewehrung an der gesamten Bewehrung ist relativ klein und nimmt mit zunehmender Trägerschlankheit ab.
4. Mit der Bemessung für Querkraft sind duktile Biegebrüche oder Biegeschubbrüche sicherzustellen; spröde Stegzugbrüche und relativ spröde Stegdruckbrüche sind zu vermeiden.
5. Das Tragverhalten von bügelbewehrten Balken und Platten im gerissenen Zustand wird zweckmässigerweise mit Fachwerkmodellen bzw. Sandwichmodellen untersucht.
6. Fachwerkmodelle sind diskretisierte Spannungsfelder. Bei ihrer iterativen Entwicklung ist das zugeordnete Spannungsfeld (bestehend aus Zuggliedern, Knoten, Druckstreben, Fächern und Druckfeldern) zu berücksichtigen.

## Querkraft – Zusammenfassung

7. Fachwerkmodelle sind diskretisierte Spannungsfelder. Bei ihrer iterativen Entwicklung ist das zugeordnete Spannungsfeld (bestehend aus Zuggliedern, Knoten, Druckstreben, Fächern und Druckfeldern) zu berücksichtigen.
8. In einfachen Fällen ist eine auf der Fachwerkmodellvorstellung beruhende Querschnittsbetrachtung möglich. Dabei kann die infolge Querkraft erforderliche Verstärkung der Biegebewehrung mit einer Verschiebung der  $M_d/z$ -Linie um das sogenannte Versatzmass  $z \cdot \cot \alpha / 2$  ermittelt werden.
9. Geneigte Zug- bzw. Druckgurte sowie Spannglieder können einen wesentlichen Anteil der Querkräfte übertragen. Fachwerkmodelle oder Spannungsfelder erlauben eine sichere Erfassung der entsprechenden Tragwirkungen.
10. Mit geneigten Bügeln kann die Gefahr eines Stegdruckbruchs in speziellen Fällen deutlich reduziert werden. Allerdings sind die baupraktischen Schwierigkeiten bei der Verwendung geneigter Bügel nicht zu unterschätzen.
11. Verformungen infolge Querkraften können aufbauend auf Fachwerkmodellvorstellungen abgeschätzt werden, siehe Scheiben / Stahlbeton III.