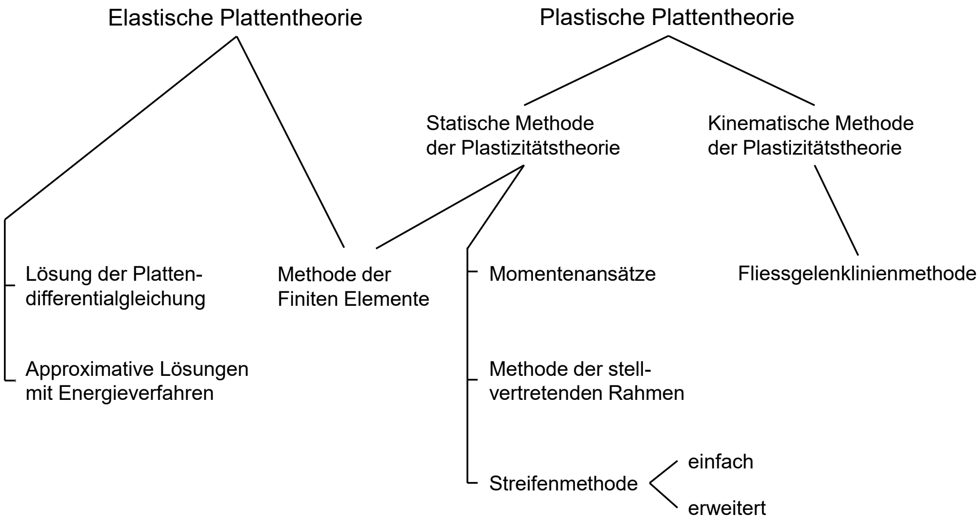
3 Platten

Vertiefung und Ergänzungen zu Stahlbeton II

Platten – Grundlagen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden – Übersicht



In diesem Kapitel wird die Traglast dünner Platten mit kleinen Durchbiegungen untersucht. Dabei wird ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt, ohne auf Fragen des Verformungsbedarfes und des Verformungsvermögens näher einzugehen. Da Platten in der Regel eher schwach bewehrt sind, besteht diesbezüglich gewöhnlich wenig Anlass zu Bedenken.

Platten sind die am weitesten verbreitete Anwendung der Stahlbetonbauweise. Ihrer Bedeutung entsprechend werden sie in diesem Kapitel eingehend behandelt. Zunächst werden die grundlegenden statischen Beziehungen aufgestellt, aus denen schliesslich die Fliessbedingungen hergeleitet werden können.

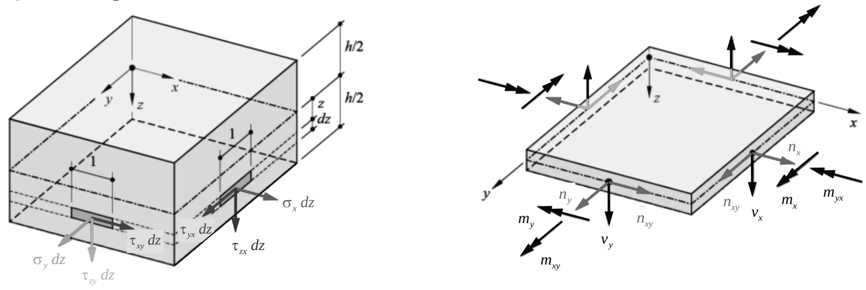
In der Praxis werden heutzutage für die Ermittlung der Beanspruchung meist numerische Verfahren, insbesondere die Methode der finiten Elemente, angewendet. Für Plausibilitätskontrollen eignen sich entsprechende Näherungsverfahren wie bspw. die Methode der stellvertretenden Rahmen.

In der plastischen Plattentheorie werden zur Ermittlung der Traglast statische und kinematische Berechnungsmethoden verwendet.

Für die Bemessung wird meist nur der Biegezustand der Platte betrachtet. Der Einfluss der Querkräfte wird normalerweise nur bei konzentrierten Kräften und Stützen massgebend (Durchstanzen).

Platten - Grundlagen

Ebene Elemente - Spannungsresultierende



$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\,dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\,dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\,dz \quad [\mathrm{kNm/m = kN}]$$

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx}\,dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}\,dz \quad [\mathrm{kN/m}]$$

Biegespannungszustand (Platte): Biegemomente und Querkräfte

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\,dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y\,dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\,dz \quad [\mathrm{kN/m}]$$

Membranspannungszustand (Scheibe): Membrankräfte (Normal- /Schubkräfte)

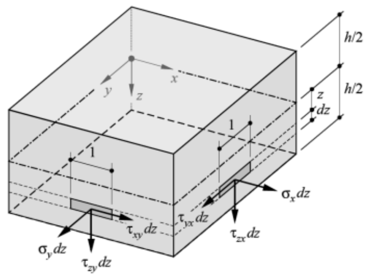
Die in den Schnittflächen eines Plattenelementes angreifenden Spannungen können zu Spannungsresultierenden gemäss der Abbildung zusammengefasst werden.

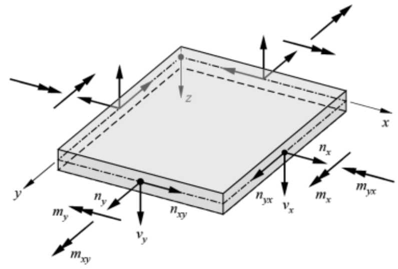
Die Biege- und Drillmomente sowie die Querkräfte bilden den Biegespannungszustand; die Membrankräfte den Membranspannungszustand. Im folgenden werden primär senkrecht zur ihrer Mittelfläche beanspruchte Platten betrachtet, in welchem ein Biegespannungszustand vorherrscht. Membrankräfte können deshalb vorerst ausser acht gelassen werden.

NB: Analog der Balkentheorie wird $\sigma_z = \sigma_3$ vernachlässigt. In jeder Ebene z = const. herrscht somit ein ebener Spannungszustand.

Platten - Grundlagen

Ebene Elemente - Spannungsresultierende





$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\, dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\, dz$$

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx}\, dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}\, dz$$

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\, dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y\, dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\, dz$$

Vorzeichenkonvention

- Positive Spannungen wirken an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Achsenrichtung
- Positive Membran- und Querkräfte entsprechen positiven zugehörigen Spannungen
- Positive Momente entsprechen positiven zugehörigen Spannungen für z > 0
- Indizes: 1. Index: Richtung der Spannung
  2. Index: Normalenrichtung des Elements, an dem Spannung wirkt

Für Spannungen und Spannungsresultierende werden die in der Abbildung illustrierten Vorzeichenkonventionen verwendet. Danach wirken positive Spannungen an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Koordinatenrichtung; für Normalspannungen bedeutet dies, dass Zugspannungen positiv sind. Positive Membran- und Querkräfte entsprechen positiven Spannungen, und positive Momente entsprechen positiven Spannungen nach obenstehender Definition für positive Werte der Koordinate *z*. Bei doppelten Indizes steht jeweils der erste Index für die Richtung, in welcher die Spannung wirkt, während der zweite Index die Normalenrichtung des Flächenelementes bezeichnet, an welchem die Spannung angreift (sind beide Indizes identisch, wird einer weggelassen).

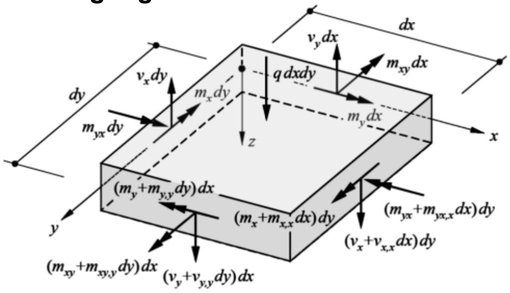
3 Platten

Vertiefung und Ergänzungen zu Stahlbeton II

3.1 Gleichgewichtsbedingungen

Platten – Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen – kartesische Koordinaten



→ Plattengleichgewichtsbedingung:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}}_{\text{Balken in x-Richtung}}+\underbrace{2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\partial y}}_{\text{zusätzlich: Drillmomente}}+\underbrace{\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}}_{\text{Balken in y-Richtung}}+q=0}$$

$\uparrow$

Herleitung über Gleichgewicht am differentiellen Plattenelement:

$$-v_x\,dy-v_y\,dx+\left(v_y+\frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)dx+\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}dx\right)dy+q\,dxdy=0 \quad\longrightarrow\quad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+q=0$$

$$-m_x\,dy-m_{xy}\,dx+\left(m_x+\frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right)dy+\left(m_{xy}+\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dy\right)dx-v_x dydx=0 \quad\longrightarrow\quad \frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}-v_x=0$$

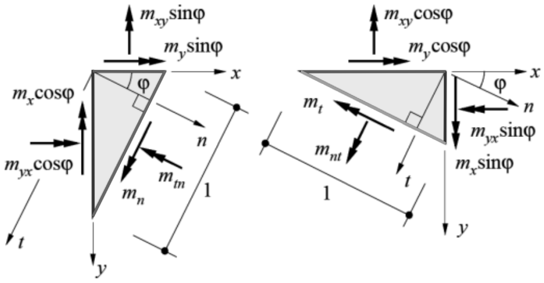
$$-m_y\,dx-m_{yx}\,dy+\left(m_y+\frac{\partial m_y}{\partial y}dy\right)dx+\left(m_{yx}+\frac{\partial m_{yx}}{\partial x}dx\right)dy-v_y dxdy=0 \quad\longrightarrow\quad \frac{\partial m_y}{\partial y}+\frac{\partial m_{yx}}{\partial x}-v_y=0$$

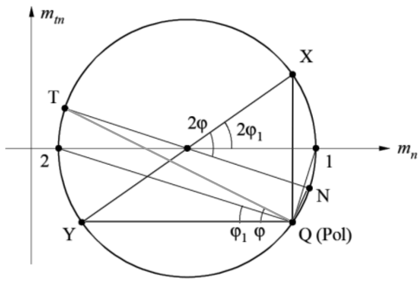
Terme mit $(dx)^2$ bzw. $(dy)^2$ vernachlässigt

Das Gleichgewicht der angreifenden Kräfte und Momente am Plattenelement führt zu drei Gleichungen. Durch Einsetzen der zweiten und dritten Gleichung in die erste ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung für Platten in kartesischen Koordinaten.

Platten – Gleichgewicht

Spannungstransformation: Biege- und Drillmomente





Biege- und Drillmomente in einer beliebigen Richtung φ:

$$m_n = m_x \cos^2\varphi + m_y \sin^2\varphi + m_{xy}\sin 2\varphi$$

$$m_t = m_x \sin^2\varphi + m_y \cos^2\varphi - m_{xy}\sin 2\varphi$$

$$m_{tn} = \left(m_y - m_x\right)\sin\varphi\cos\varphi + m_{xy}\cos 2\varphi$$

NB: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,\ \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

Hauptrichtung φ_1 (Drillmomente = 0) und Hauptmomente ($\rightarrow$ Mohr'scher Kreis):

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y}$$

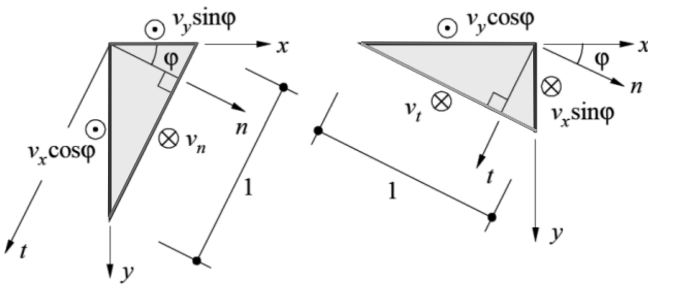
$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(m_x - m_y\right)^2 + 4m_{xy}^2}}{2}$$

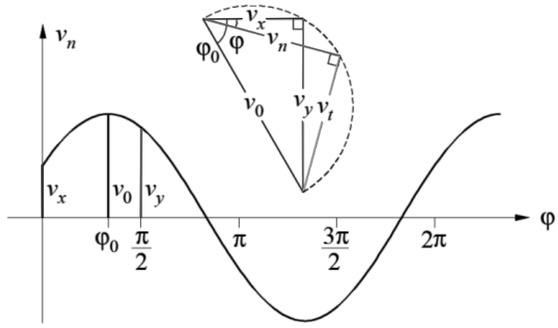
Das Momentengleichgewicht an den in der Abbildung dargestellten Plattenelementen führt zu Beziehungen, welche als Transformationsformeln für Biege- und Drillmomente dienen. Es können beliebige Schnitte mit der Normalen *n*, deren Richtung durch den Winkel φ festgelegt ist, betrachtet werden. Sie lassen sich mithilfe eines Mohrschen Kreises darstellen; Drillmomente werden hier positiv gerechnet, wenn der ihnen entsprechende positive (rechtsdrehende) Momentenpfeil in Richtung des betrachteten Schnittrandes weist.

Die Hauptrichtung, für welche die Drillmomente verschwinden, $m_{tn} = 0$, sowie die zugehörigen Hauptmomente m_1 und m_2 in den entsprechenden Richtungen können sowohl grafisch im Mohrschen Kreis als auch analytisch bestimmt werden.

Platten – Gleichgewicht

Spannungstransformation: Querkräfte





Querkräfte in einer beliebigen Richtung φ:

$$v_n = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi$$

$$v_t = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi$$

Hauptquerkraft und zugehörige Richtung φ_0 (Interpretation mit Thaleskreis):

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{v_y}{v_x}$$

(allgemein ist $\varphi_0 \neq \varphi_1$)

Analog zu den Momenten kann auch das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte an den abgebildeten Plattenelement aufgestellt werden. Dies führt zu Transformationsregeln für Querkräfte an einem beliebigen Schnitt mit der Normalen *n*, deren Richtung durch den Winkel φ festgelegt ist. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich mithilfe eines Thaleskreises deuten. An jeder Stelle der Platte wird eine Hauptquerkraft v_0 in Richtung φ_0 übertragen. Senkrecht zu dieser Richtung wird keine Querkraft abgetragen. Die Hauptrichtungen der Querkräfte und der Momente fallen nur in Spezialfällen zusammen, allgemein ist $\varphi_0 \neq \varphi_1$.

Platten – Randbedingungen

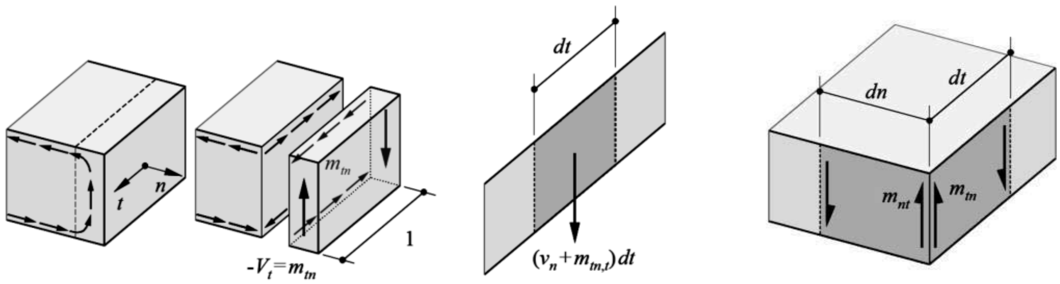
Randbedingungen auf der Basis von Gleichgewichtsüberlegungen

Statische Methode der Plastizitätstheorie – Erklärung mit Tragwirkung im Bereich von Plattenrändern, welche nur auf Gleichgewichtsüberlegungen beruht:

→ Aus Gleichgewicht in einer schmalen Randzone der Platte folgt die Randquerkraft: $V_t = -m_{tn}$

→ *sofern*: Plattenrand ist spannungsfrei und die in der Randzone auftretenden Spannungen σ_t ändern sich nicht in t-Richtung (Clyde, 1979).

→ Aus der Randquerkraft $V_t = -m_{tn}$ folgen die Eckkräfte 2 m_{tn} und der Beitrag von $m_{tn,t}$ zur Stützkraft



Querkraft in Randzone *Stützkraft* *Eckkraft*

Am Rand einer Platte greifen allgemein ein Biegemoment m_n, ein Drillmoment m_{tn} und eine Querkraft v_n an. Nach Kirchhoff erhält man für dünne elastische Platten mit kleinen Durchbiegungen eine inhomogene Bipotentialgleichung für die Durchbiegungen der Platte, deren Lösungen sich nur zwei Randbedingungen anpassen lassen. Deshalb wird bei der Behandlung von einfach gelagerten und freien Plattenrändern eine weitere Bedingung eingeführt. Die Drillmomente m_{tn} werden dabei durch eine stetige Verteilung von vertikalen Kräftepaaren ersetzt, wobei sich an den Grenzen zwischen den infinitesimalen Elementen der Länge *dt* die Kräfte bis auf den Zuwachs $m_{tn,t} \cdot dt$ aufheben. Der Zuwachs pro Längeneinheit $m_{tn,t}$ wird nun mit der Querkraft v_n zu einer Stützkraft $v_n + m_{tn,t} = m_{n,n} + 2m_{nt,t}$ zusammengefasst. Die beschriebene Behandlung von Drillmomenten am Plattenrand geht auf Thomson und Tait (1883) zurück und lässt sich mit dem Prinzip von de Saint Venant begründen.

Aus der Sicht der statischen Methode der Plastizitätstheorie ist jedoch eine Erklärung der Tragwirkung im Bereich von Plattenrändern vorzuziehen, welche nur auf Gleichgewichtsüberlegungen beruht. Dies ist in der Abbildung illustriert. In einer schmalen Randzone der Platte muss aus Gleichgewichtsgründen eine Randquerkraft $V_t = -m_{tn}$ existieren, sofern der Plattenrand spannungsfrei ist und die in der Randzone auftretenden Spannungen σ_t sich in *t*-Richtung nicht ändern. Aus der Existenz der Randquerkräfte V_t folgen die Eckkräfte $2m_{tn}$ und der Beitrag $m_{tn,t}$ der Drillmomente zur Stützkraft.

Platten – Randbedingungen

Randbedingungen auf der Basis von Gleichgewichtsüberlegungen

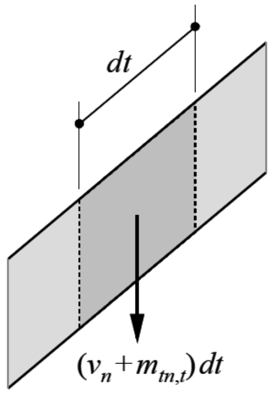
→ Randbedingungen auf Basis von Gleichgewichtsüberlegungen:

- eingespannter Rand: m_n, m_{tn} und v_n beliebig
- einfach gelagerter Rand: $m_n = 0$, resultierende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$$

- freier Rand: $m_n = 0$, verschwindende Stützkraft:

$$v_n + \frac{\partial m_{tn}}{\partial t} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2\frac{\partial m_{nt}}{\partial t} = 0$$



Stützkraft

Die entsprechenden Randbedingungen lassen sich wie in der Abbildung angegeben zusammenfassen. Diese folgen aus reinen Gleichgewichtsbetrachtungen und sind somit für beliebiges Materialverhalten gültig. Für dünne elastische Platten können strengere Randbedingungen formuliert werden, welche jedoch für die Behandlung nach der Plastizitätstheorie nicht relevant sind.

Platten – Randbedingungen

Randbewehrung

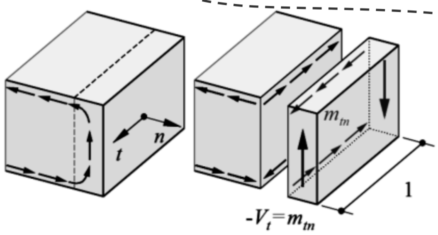
Werden entlang von einfach gelagerten und freien Rändern Drillmomente in Rechnung gestellt, so ist eine Bewehrung zur Aufnahme von $V_t = -m_{tn}$ anzuordnen.

Veranschaulichung (Ecke, reine Drillung):

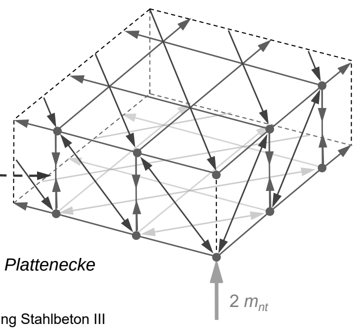
→ Ober- und Unterseite: zueinander senkrechte, unter 45° zu den Plattenrändern geneigte Betondruckstreben, Aufnahme der randnormalen Komponenten durch randparallele Bewehrung

→ Komponenten in Richtung der Plattenränder werden durch geneigte Betondruckstreben in den Randstreifen weitergeleitet; Vertikalkomponenten entsprechen den Randquerkräften $V_t = -m_{tn}$

→ Aufnahme von $V_t = -m_{tn}$ mit Steckbügeln oder entsprechender Abbiegung der Biegebewehrung



Querkraft in Randzone



Kraftfluss in Plattenecke

Die Randquerkräfte sind bei der Ausbildung der Bewehrung entlang von einfach gelagerten und freien Rändern von Stahlbetonplatten zu berücksichtigen. Die Abbildung zeigt den Kraftfluss einer auf reine Drillung beanspruchten Rechteckplatte, welcher mit einem Fachwerkmodell dargestellt werden kann.

An der Plattenoberseite und an der Plattenunterseite bilden sich zueinander senkrechte, unter 45° zu den Plattenrändern geneigte Betondruckstreben aus, deren Komponenten in Richtung der Randnormalen durch randparallele Bewehrung aufgenommen werden. Die Komponenten in Richtung der Plattenränder werden über geneigte Betondruckstreben in den Randstreifen weitergeleitet, deren Vertikalkomponente – welche den Randquerkräften entspricht – über eine Bewehrung aufgenommen werden muss. Diese kann mit Steckbügeln oder durch entsprechende Abbiegung der Biegebewehrung realisiert werden. Man erkennt auch, dass sich die Randquerkräfte in der Plattenecke nicht aufheben, sondern zu einer Eckkraft $2m_{nt}$ addieren.

Platten – Randbedingungen

Diskontinuitäten

Im Platteninnern sind statische Diskontinuitätslinien zulässig (↔ Äquivalenz von Drillmomenten am Plattenrand und Randquerkräften, man füge in Gedanken zwei freie Plattenränder zusammen).

An Diskontinuitätslinien

→ müssen Biegemomente m_n stetig sein ($m_n^+ = m_n^-$)

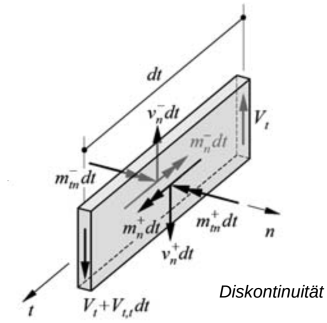
→ dürfen Drillmomente m_{nt} und Querkräfte v_n springen ($m_{nt}^+ \neq m_{nt}^-$, $v_n^+ \neq v_n^-$)

Somit gelten für eine statische Diskontinuitätslinie, entlang welcher eine Querkraft V_t abgetragen wird, folgende Bedingungen:

$$m_n^- = m_n^+$$

$$V_t = m_{nt}^+ - m_{nt}^-$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = v_n^- - v_n^+$$



Fügt man in Gedanken zwei Platten an ihren freien Rändern zusammen (man beachte, dass Plattenränder Diskontinuitäten darstellen, an denen i.A. ein Biegemoment m_n, ein Drillmoment m_{tn} und eine Querkraft v_n angreift), so kann aus der Äquivalenz von Drillmomenten am Plattenrand und Randquerkräften gemäss der Randquerkraft V_t = -m_{tn} darauf geschlossen werden, dass an statischen Diskontinuitätslinien im Platteninnern die Biegemomente m_n stetig verlaufen müssen, die Drillmomente m_{nt} und die Querkräfte v_n hingegen springen dürfen. Dabei müssen an einer statischen Diskontinuitätslinie, entlang welcher eine Querkraft V_t abgetragen wird, die Beziehungen gemäss der Abbildung erfüllt sein.

3 Platten

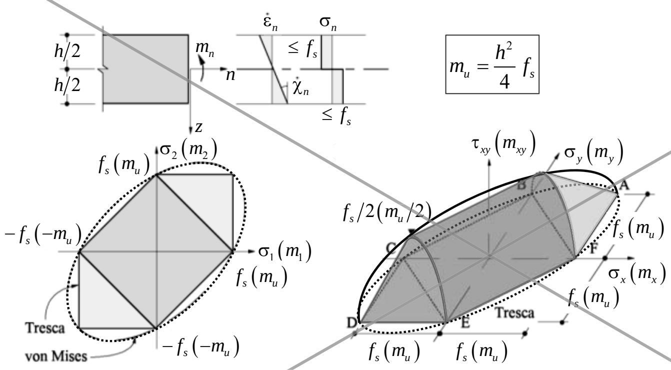
Vertiefung und Ergänzungen zu Stahlbeton II

3.2 Fliessbedingungen

Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingungen von Tresca und v. Mises für isotrope Platten (Stahl etc.)

(für Stahlbeton nicht geeignet, auch bei «isotroper Bewehrung»!)



Fliessregimes nach Tresca:
(2 ellipt. Kege, ellipt. Zylinder)

ABF: $\Phi = \left(m_u - m_x\right)\left(m_u - m_y\right) - m_{xy}^2 = 0$

BCEF: $\Phi = \left(m_x - m_y\right)^2 + 4m_{xy}^2 - m_u^2 = 0$

CDE: $\Phi = \left(m_u + m_x\right)\left(m_u + m_y\right) - m_{xy}^2 = 0$

Im vollplastifizierten Zustand (resp. starr-plastisches Verhalten) ist der Spannungszustand auf jeder Seite der Mittelebene konstant →
Fliessbedingung analog wie im ebenen Spannungszustand:

T: $\quad \text{Max}\left(|\sigma_1|,|\sigma_2|,|\sigma_1-\sigma_2|\right) - f_s = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Max}\left(|m_1|,|m_2|,|m_1-m_2|\right) - m_u = 0$

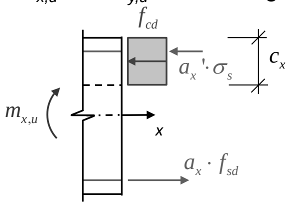
vM: $\quad \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - f_s^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 - m_u^2 = 0$

Fliessbedingungen für isotrope Materialien sind für Stahlbetonplatten nicht verwendbar (auch nicht bei «isotroper Bewehrung», d.h. in beide Richtungen gleich grossen Biegewiderständen).

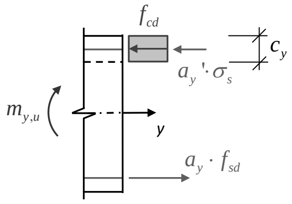
Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingungen für Stahlbetonplatten

Biegewiderstände $m_{x,u}$ und $m_{y,u}$ einer orthogonal bewehrten Platte (Bewehrung in x- und y-Richtung):



Schnitt x-Richtung

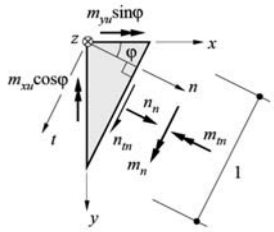


Schnitt y-Richtung

Ohne Normalkräfte ergeben sich die Druckzonenhöhen c_x und c_y und damit $m_{x,u}$ und $m_{y,u}$ aus Gleichgewicht.

Da Bewehrung orthogonal, ist $m_{xy,u} = 0$

Durch Superposition der Biegewiderstände in den Bewehrungsrichtungen und Transformation in eine beliebige Richtung (analog zu den Spannungstransformationen) ergeben sich die Biege- und Drillmomente m_n , m_t und m_{nt} in n- und t-Richtung (statisch zulässiger Spannungszustand):



$$m_n = m_{xu} \cdot \cos^2 \varphi + m_{yu} \cdot \sin^2 \varphi$$

$$m_t = m_{xu} \cdot \sin^2 \varphi + m_{yu} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$m_{nt} = \left(m_{yu} - m_{xu}\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Sämtliche Membrankräfte verschwinden:

$n_t = n_n = n_{nt} = 0$

Die Biegewiderstände einer orthogonal bewehrten Platte können in x- und y-Richtung unabhängig voneinander ermittelt werden. Die Druckzonenhöhen c_x und c_y und somit m_{xu} und m_{yu} werden über das Gleichgewicht am Querschnitt bestimmt. Da die Bewehrung orthogonal angeordnet ist, ist das Drillmoment m_{xy} in den entsprechenden Richtungen gleich null.

Durch Überlagerung der plastischen Momente m_{xu} und m_{yu} in den Bewehrungsrichtungen mit m_{xy} = n_x = n_y = 0 erhält man einen statisch zulässigen Spannungszustand im Element. Die Biege- und Drillmomente, welche diesem Spannungszustand entsprechen, können analog der Spannungstransformation in jeder beliebigen Richtung n bestimmt werden.

Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingung für Stahlbetonplatten

Der Widerstand wird anhand der Normalmomente überprüft («Normalmomenten-Fliessbedingung»).

Falls die Druckzonenhöhen gleich sind, d.h. $c_x = c_y$, resultiert die vollständige Lösung:

- statisch zulässiger Spannungszustand (Gleichgewicht)
- Kinematisch verträglicher Bruchmechanismus (Fliessgelenklinie, siehe später)

$$\underbrace{\begin{aligned} m_{n,u} &= m_{x,u}\cdot\cos^2\varphi + m_{y,u}\cdot\sin^2\varphi \\ m_{t,u} &= m_{x,u}\cdot\sin^2\varphi + m_{y,u}\cdot\cos^2\varphi \end{aligned}}_{\text{Biegewiderstand für positive Biegemomente}} \qquad \underbrace{\begin{aligned} m'_{n,u} &= m'_{x,u}\cdot\cos^2\varphi + m'_{y,u}\cdot\sin^2\varphi \\ m'_{t,u} &= m'_{x,u}\cdot\sin^2\varphi + m'_{y,u}\cdot\cos^2\varphi \end{aligned}}_{\text{Biegewiderstand für negative Biegemomente («‘»)}}$$

(Vorzeichen Biegewiderstand positiv)

Für $c_x \neq c_y$ liefert der statisch zulässige Spannungszustand einen unteren Grenzwert der Traglast:

$$m_{n,u} \geq m_{x,u}\cdot\cos^2\varphi + m_{y,u}\cdot\sin^2\varphi \qquad m'_{n,u} \geq m'_{x,u}\cdot\cos^2\varphi + m'_{y,u}\cdot\sin^2\varphi$$

$$m_{t,u} \geq m_{x,u}\cdot\sin^2\varphi + m_{y,u}\cdot\cos^2\varphi \qquad m'_{t,u} \geq m'_{x,u}\cdot\sin^2\varphi + m'_{y,u}\cdot\cos^2\varphi$$

Die Unterschiede bzgl. der Druckzonenhöhe in x- und y-Richtung sind in der Regel gering, so dass in guter Näherung das Ungleichheitszeichen unterdrückt werden darf.

NB: Mit einem Definitionsbereich für den Winkel φ von $\{0 \leq \varphi \leq \pi\}$ ist die Beziehung für m_n ausreichend.

Die Traglast wird anhand der Normalmomenten-Fliessbedingung überprüft, welche davon ausgeht, dass das Versagen ausschliesslich durch Bildung einer Fliessgelenklinie eintreten kann. Falls die Druckzonenhöhe in *x*- und *y*-Richtung gleich sind, d.h. $c_x = c_y$, kann zu dem statisch zulässigen Spannungszustand ein kinematisch verträglicher Bruchmechanismus (Fliessgelenklinie, siehe später) gefunden werden. Es resultiert daraus somit eine vollständige Lösung.

Im allgemeinen sind die Druckzonenhöhen in den beiden Bewehrungsrichtungen unterschiedlich, $c_x \neq c_y$, und es lässt sich dem betrachteten Spannungszustand kein verträglicher Mechanismus zuordnen. Der ermittelte Wert für m_n ist somit ein unterer Grenzwert für den Biegewiederstand m_{nu} in Richtung n. Die Abweichungen für $c_x \neq c_y$ sind in der Regel sehr gering, und das Ungleichheitszeichen kann daher unterdrückt werden.

Die Herleitung der Formel für negative Momente ist analog derjenigen für positive, wobei das negative plastische Moment positiv definiert wird $m'_{n,u} > 0$.

Ergänzende Bemerkung

- «Normalmomente» sind Biegemomente (zur Unterscheidung von den Drillmomenten so bezeichnet). Die Normalmomenten-Fliessbedingung überprüft, ob in jeder Richtung die Normalmomente (Biegemomente) kleiner sind als der Biegewiderstand.

Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingungen für Stahlbetonplatten

Wird die Einwirkung m_n in der massgebenden Richtung φ_u gleich dem Widerstand $m_{n,u}$ gesetzt, erhält man:

$$m_{x,u}\cdot\cos^2\varphi_u + m_{y,u}\cdot\sin^2\varphi_u = m_{n,u} \overset{!}{=} m_n = m_x\cdot\cos^2\varphi_u + m_y\cdot\sin^2\varphi_u + 2m_{xy}\cdot\sin\varphi_u\cos\varphi_u$$

Unter Beachtung, dass die Bedingung $m_{n,u} \geq m_n$ für alle Richtungen φ erfüllt sein muss, resultiert (*):

für positive Biegemomente:

$$\tan\varphi_u = \sqrt{\frac{(m_{x,u}-m_x)}{(m_{y,u}-m_y)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{m_{x,u}}_{\text{Widerstand}} &= \underbrace{m_x + m_{xy}\cdot\tan\varphi_u}_{\text{Einwirkung}} \\ m_{y,u} &= m_y + m_{xy}\cdot\cot\varphi_u \end{aligned}}$$

für negative Biegemomente:

$$\tan\varphi'_u = \sqrt{\frac{(m'_{x,u}-m_x)}{(m'_{y,u}-m_y)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{m'_{x,u}}_{\text{Widerstand}} &= \underbrace{-m_x - m_{xy}\cdot\tan\varphi'_u}_{\text{Einwirkung}} \\ m'_{y,u} &= -m_y - m_{xy}\cdot\cot\varphi'_u \end{aligned}}$$

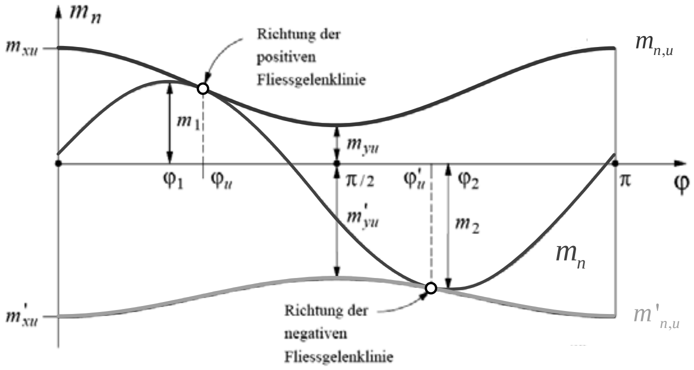
(*) In der massgebenden Richtung φ_u (Berührungspunkt $m_{n,u}(\varphi)$ und $m_n(\varphi)$) ist die Differenz $m_{n,u} - m_n$ minimal, somit:

$$m_{n,u}(\varphi) - m_n(\varphi) = \min! \quad \rightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(m_{n,u}(\varphi) - m_n(\varphi)\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}m_{n,u}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial\varphi}m_n(\varphi) \quad \rightarrow m_{y,u} - m_{x,u} = m_y - m_x + m_{xy}\left(\cot\varphi_u - \tan\varphi_u\right)$$

woraus durch Rückeinsetzen, nach einiger Umformung, die angegebenen Beziehungen folgen.

Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingungen für Stahlbetonplatten



Biegemomente m_n in Funktion von $\varphi \rightarrow$ massgebende Richtung φ_u

φ_1, φ_2 → Richtungen, in der das einwirkende positive bzw. negative Moment maximal werden (Hauptmomentenrichtungen für m_n)
φ_u, φ'_u → Richtungen, in der die Einwirkungskurve die Widerstandskurve berührt. Hier ist $m_n = m_{n,u}$

Allgemein ist $\varphi_1 \neq \varphi_u$ bzw. $\varphi_2 \neq \varphi'_u$ → Bemessung von $m_{n,u}$ auf Hauptmoment m_1 ist nicht konservativ!

Für eine gegebene Beanspruchung, welche durch die Momente m_x, m_y und m_{xy} gegeben ist, variiert abhängig der Richtung φ das Moment $m_n = m_x \cdot \cos^2(\varphi) + m_y \cdot \sin^2(\varphi) + 2 \cdot m_{xy} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$. Der Widerstand variiert gemäss der Fliessbedingung $m_{nu} = m_{xu} \cdot \cos^2(\varphi) + m_{yu} \sin^2(\varphi)$ ebenfalls mit φ. Somit bildet sich das Fliessgelenk im Berührungspunkt der beiden Kurven von Einwirkung und Widerstand. Der zugehörige Winkel φ_u bestimmt die Richtung der Fliessgelenklinie. Es ist zu beachten, dass im Allgemeinen die Richtung des maximalen Moments (Hauptmomentenrichtung φ_1) nicht mit der Richtung der Fliessgelenklinie übereinstimmt. Eine Bemessung des Tragwerks auf das Hauptmoment liegt daher nicht auf der sicheren Seite.

Ergänzende Bemerkung

- Da der Winkel φ ab der *x*-Richtung (= Bewehrungsrichtung) gemessen wird, liegen die Maxima resp. Minima von $m_{n,u}$ und $m'_{n,u}$ bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ (*x*- und *y*-Richtung).
- Maximum und Minimum der Beanspruchung m_n treten (ausser bei $m_{xy} = 0$) in anderen Richtungen auf.
- Allgemein wird die Fliessbedingung nur für positive <u>oder</u> negative Momente erreicht (Abbildung zeigt Spezialfall einer optimalen Bemessung).

Platten – Fliessbedingungen

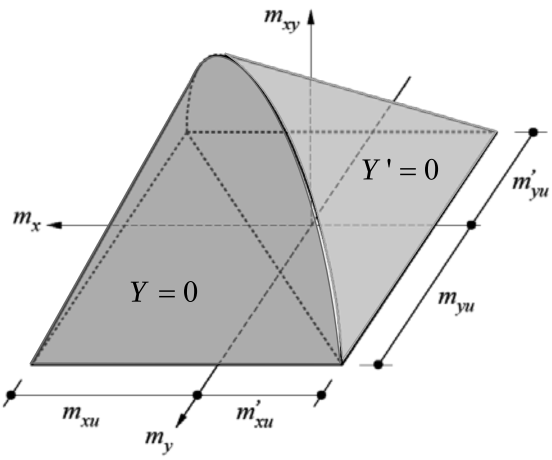
Normalmomenten-Fliessbedingung

Wird φ_u, bzw. φ'_u aus den voherigen Gleichungen eliminiert, folgt aus der Bedingung $-m'_{n,u} \le m_n \le m_{n,u}$ die sogenannte Normalmomenten-Fliessbedingung:

$$\boxed{\begin{aligned} Y &= m_{xy}^2 - \overbrace{\left(m_{x,u} - m_x\right)}^{\ge 0}\overbrace{\left(m_{y,u} - m_y\right)}^{\ge 0} = 0 \\ Y' &= m_{xy}^2 - \underbrace{\left(m'_{x,u} + m_x\right)}_{\ge 0}\underbrace{\left(m'_{y,u} + m_y\right)}_{\ge 0} = 0 \end{aligned}}$$

Ist $Y \ge 0$ bzw. $Y' \ge 0$, so ist die Fliessbedingung erfüllt.

Die Normalmomenten-Fliessbedingung bildet im (m_x, m_y, m_{xy}) - Raum zwei elliptische Kegel. Auf den Kegelflächen ist $\chi_x \chi_y = 0$ (aus Fliessgesetz), d.h. eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet. Die verträglichen Mechanismen entsprechen daher abwickelbaren Flächen.



Die Fliessbedingung für positive Moment $m_{nu} \ge m_n$ kann auch als Momenten-Tensor der Form

$$m_{n,u} - m_n = \left[\cos(\varphi) \quad \sin(\varphi)\right] \cdot \begin{bmatrix} m_{xu} - m_x & m_{xy} \\ m_{xy} & m_{yu} - m_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} = 0$$

ausgedrückt werden. Die Gleichung ist erfüllt, wenn die Determinante des Tensors verschwindet. Daraus lassen sich die Fliessbedingungen in der Form $Y = 0$ direkt herleiten. Das Vorgehen ist für negative Momente analog.

Nach der Theorie des plastischen Potentials sind den Fliessflächen $Y = 0$ über das Fliessgesetz folgende Krümmungsinkremente zugeordnet ($\lambda \ge 0$):

$$\dot{\chi}_x = \lambda \cdot \frac{\partial Y}{\partial m_x} = \lambda \cdot \left(m_{yu} - m_y\right) \qquad \dot{\chi}_y = \lambda \cdot \frac{\partial Y}{\partial m_y} = \lambda \cdot \left(m_{xu} - m_x\right) \qquad 2 \cdot \dot{\chi}_{xy} = \lambda \cdot \frac{\partial Y}{\partial m_{xy}} = 2 \cdot \lambda \cdot m_{xy}$$

Daraus folgt $\dot{\chi}_x \cdot \dot{\chi}_y = \dot{\chi}_{xy}^2$. Die Transformation in die Hauptrichtungen führt schliesslich zu $\dot{\chi}_1 \cdot \dot{\chi}_2 = 0$.

Dies bedingt, dass eine der Hauptkrümmungen verschwindet; somit entsprechen verträglichen Bruchmechanismen kinematisch zulässige Verformungszustände in Form abwickelbarer Flächen.

Platten – Fliessbedingungen

Normalmomenten-Fliessbedingung

Wird φ_u, bzw. φ'_u aus den voherigen Gleichungen eliminiert, folgt aus der Bedingung $-m'_{n,u} \le m_n \le m_{n,u}$ die sogenannte Normalmomenten-Fliessbedingung:

$$\boxed{\begin{aligned} Y &= m_{xy}^2 - \overbrace{\left(m_{x,u} - m_x\right)}^{\ge 0}\overbrace{\left(m_{y,u} - m_y\right)}^{\ge 0} = 0 \\ Y' &= m_{xy}^2 - \underbrace{\left(m'_{x,u} + m_x\right)}_{\ge 0}\underbrace{\left(m'_{y,u} + m_y\right)}_{\ge 0} = 0 \end{aligned}}$$

Dito, mit Schreibweise nach SIA 262:

$$\boxed{\begin{aligned} Y &= m_{xy,d}^2 - \overbrace{\left(m_{x,Rd} - m_{x,d}\right)}^{\ge 0}\overbrace{\left(m_{y,Rd} - m_{y,d}\right)}^{\ge 0} = 0 \\ Y' &= m_{xy,d}^2 - \underbrace{\left(m'_{x,Rd} + m_{x,d}\right)}_{\ge 0}\underbrace{\left(m'_{y,Rd} + m_{y,d}\right)}_{\ge 0} = 0 \end{aligned}}$$

Die Ausdrücke der Fliessbedingungen ergeben sich analog mit der Schreibweise nach SIA 262, wonach die Einwirkungsmoment $m_{x,d}$, $m_{y,d}$ und $m_{xy,d}$ («design») sowie die Biegewiderstände $m_{x,Rd}$ und $m_{y,Rd}$ («Resistance») auf Bemessungsniveau berechnet werden

Platten – Fliessbedingungen

Bemessungsmomente

Normalmomenten-Fliessbedingung in parametrisierter Form: mit $k = |\tan \varphi_u|$ und $k' = |\tan \varphi'_u|$

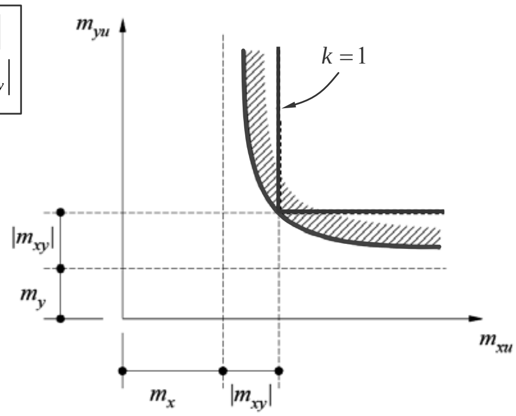
Daraus folgen die Bemessungsmomente:

für positive Biegemomente:

$$\boxed{\begin{aligned} m_{x,u} &\geq m_x + k \cdot |m_{xy}| \\ m_{y,u} &\geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}}$$

für negative Biegemomente:

$$\boxed{\begin{aligned} m'_{x,u} &\geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| \\ m'_{y,u} &\geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}}$$



Der Parameter *k* kann frei gewählt und die Bewehrung direkt bemessen werden. Wird *k* = 1 gesetzt, so folgt daraus die linearisierte Fliessbedingung, welche auch von vielen Computerprogrammen verwendet wird.

Die Normalmomenten-Fliessbedingung kann in parametrisierter Form geschrieben werden, mit den Substitutionen von $k = |\tan\varphi_u|$ und $k' = |\tan\varphi'_u|$. Der Parameter *k* bzw. *k*' ist frei wählbar und es wird oft *k* = *k*' = 1 gesetzt. Daraus folgt die linearisierte Fliessbedingung gem. der Abbildung, welche auch in vielen Computerprogrammen zur Anwendung kommt.

Die Normalmomenten-Fliessbedingung überschätzt den Widerstand, insbesondere für grosse Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen und hohen Bewehrungsgehalten. Diese Überschätzung wird in vielen Fällen durch die günstige Wirkung der bei der Bemessung üblicherweise vernachlässigten Membrankräfte kompensiert. Vorsicht ist jedoch bei Eckstützen geboten, in deren unmittelbarer Umgebung näherungsweise ein Zustand reiner Drillung herrscht.

Die bereits in Stahlbeton II gemachte Feststellung, dass die Normalmomenten-Fliessbedingung den Drillwiderstand von Platten überschätzt, wird auf Folie 26ff. begründet. Insbesondere Bauteile mit hoher Drillbeanspruchung und unterschiedlichem Vorzeichen der Hauptmomente (beispielsweise Eckstützen) müssen näher untersucht werden.

Platten – Fliessbedingungen

Bemessungsmomente

Normalmomenten-Fliessbedingung in parametrisierter Form: mit $k = |\tan \varphi_u|$ und $k' = |\tan \varphi'_u|$

Daraus folgen die Bemessungsmomente:

für positive Biegemomente:

$$\boxed{\begin{aligned} m_{x,u} &\geq m_x + k \cdot |m_{xy}| \\ m_{y,u} &\geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}}$$

für negative Biegemomente:

$$\boxed{\begin{aligned} m'_{x,u} &\geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| \\ m'_{y,u} &\geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| \end{aligned}}$$

Dito, mit Schreibweise nach SIA 262:

$$\boxed{\begin{aligned} m_{x,Rd} &\geq m_{x,d} + k \cdot |m_{xy,d}| \\ m_{y,Rd} &\geq m_{y,d} + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy,d}| \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m'_{x,Rd} &\geq -m_{x,d} + k' \cdot |m_{xy,d}| \\ m'_{y,Rd} &\geq -m_{y,d} + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy,d}| \end{aligned}}$$

NB: Bei mehreren Beanspruchungen resp. Beanspruchungskombinationen ist der erforderliche Biegewiderstand $(m_x, m_y)_{Rd}$ grundsätzlich für zugehörige Schnittgrössen $(m_x, m_y, m_{xy})_d$ zu ermitteln. Die in vielen FE-Programmen implementierte Ermittlung der Biegewiderstände $(m_x, m_y)_{Rd}$ aus nicht zugehörigen, separat ermittelten «Grenzwerten» für $m_{x,d}$, $m_{y,d}$ und $m_{xy,d}$ ist oft stark auf der sicheren Seite.

Auch hier ergibt sich die Schreibweise nach SIA 262 analog zur Fliessbedingung.

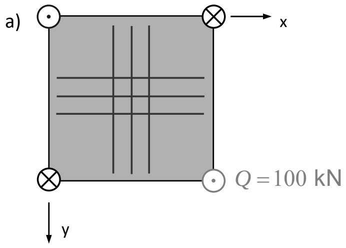
Bei mehreren Beanspruchungskombinationen ist der erforderliche Biegewiderstand $(m_x, m_y)_{Rd}$ grundsätzlich für die zugehörigen Schnittgrössen $(m_x, m_y, m_{xy})_d$ zu ermitteln. In vielen FE-Programmen ist dagegen die Ermittlung der Biegewiderstände $(m_x, m_y)_{Rd}$ aus separat ermittelten «Grenzwerten» für jede einzelne Momenteneinwirkung m_{xd}, m_{yd} und m_{xyd} implementiert. Dieses Vorgehen liegt oft sehr stark auf der sicheren Seite.

Platten – Fliessbedingungen

Bemessungsmomente – Beispiel

Gegeben: An 3 Ecken gestützte Quadratplatte mit Seitenlänge *l*, angreifende Eckkraft *Q* = 100 kN

Gesucht: Bemessungsmomente bei Bewehrung in Koordinatenrichtung und unter 45° dazu



Einwirkung: Eckkraft $2m_{xy} = Q = 100$ kN
(= reine Drillung bezüglich der Bewehrungsrichtungen (*x*,*y*))

$m_x = m_y = 0$

$m_{xy} = 50$ kN

Linearisierte Fliessbedingungen:

$m_{x,u} \geq m_x + k \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50$ kN

$m'_{x,u} \geq -m_x + k' \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50$ kN

$m_{y,u} \geq m_y + \frac{1}{k} \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50$ kN

$m'_{y,u} \geq -m_y + \frac{1}{k'} \cdot |m_{xy}| = 0 + 50 = 50$ kN

→ alle vier Bewehrungslagen (oben und unten in x- und y-Richtung) müssen auf $m_u \geq 50$ kN bemessen werden

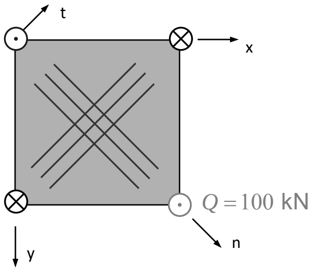
Das Beispiel zeigt eine quadratische Platte mit der Seitenlänge *l*, welche in 3 Ecken punktgestützt ist. In der 4. Ecke greift eine Einzellast *Q* an. Aus Symmetriegründen ergeben sich die dargestellten Stützenreaktionen von ±*Q*.

Die an den Ecken angreifenden Einzelkräfte werden rein über Drillmomente abgetragen (vgl. Folie 11). Die Biegemomente in Richtung der orthogonalen Bewehrung sind somit gleich null. Mithilfe der linearisierten Fliessbedingungen mit *k* = 1 können die erforderlichen Querschnittswiderstände ermittelt werden, welche hier jeweils für positive und negative Momente in beiden Richtungen der Bewehrung gleich sind.

Platten – Fliessbedingungen

Bemessungsmomente – Beispiel

b) Drehen der Bewehrung um 45° in die *n*-*t*-Richtung



Einwirkungen: $\varphi = 45°$
(Bewehrung in Hauptmomentenrichtungen angeordnet!)

$$m_n = m_x \cos^2\varphi + m_y \sin^2\varphi + m_{xy}\sin 2\varphi = m_{xy} = 50 \text{ kN}$$

$$m_t = m_x \sin^2\varphi + m_y \cos^2\varphi - m_{xy}\sin 2\varphi = -m_{xy} = -50 \text{ kN}$$

$$m_{nt} = \left(m_y - m_x\right)\sin\varphi\cos\varphi + m_{xy}\cos 2\varphi = 0$$

Linearisierte Fliessbedingungen:

$$m_{n,u} \geq m_n + k \cdot |m_{nt}| = 50 + 0 = 50 \text{ kN} \qquad m_{t,u} \geq m_t + \frac{1}{k} \cdot |m_{nt}| = -50 + 0 = -50 \text{ kN} \to 0$$

$$m'_{n,u} \geq -m_n + k' \cdot |m_{nt}| = -50 + 0 = -50 \text{ kN} \to 0 \qquad m'_{t,u} \geq -m_t + \frac{1}{k'} \cdot |m_{nt}| = 50 + 0 = 50 \text{ kN}$$

→ Bei Bewehrung in Hauptmomentenrichtung ist die halbe Bewehrungsmenge ausreichend: untere Bewehrung in *n*-Richtung, obere Bewehrung in *t*-Richtung je für $m_u \geq 50$ kN (negative Bemessungsmomente: keine Bewehrung erforderlich)
→ «Trajektorienbewehrung» optimal, aber selten praktikabel (Bewehrungslayout kompliziert, Hauptrichtungen ändern infolge veränderlicher Einwirkungen)

Bei Drehung der orthogonalen Bewehrung um 45° zur ursprünglichen Koordinatenrichtung müssen für die Anwendung der Fliessbedingungen zunächst die Biege- und Drillmomente in Richtung der Bewehrung transformiert werden (vgl. Folie 7). Eine Rotation von 45° bedeutet, dass aus dem Zustand reiner Drillung ein Zustand reiner Biegung entsteht (vgl. Folie 25).

Durch Einsetzen in die Fliessbedingung erkennt man, dass nur der halbe Bedarf an Bewehrung resultiert. Es ist statisch lediglich eine untere Bewehrung in *n*-Richtung und eine obere Bewehrung in *t*-Richtung notwendig.

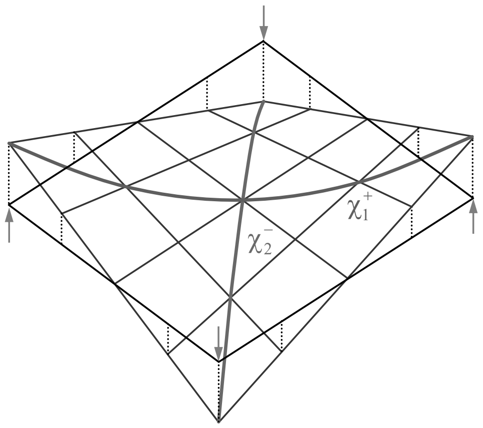
Eine solche «Trajektorienbewehrung» ist zwar am effektivsten bzgl. Materialnutzung, jedoch für die tatsächliche Anwendung wenig praktikabel (höherer Aufwand der Eisenleger, verschiedene Lastfälle infolge veränderlicher Einwirkungen ändern die jeweiligen Hauptrichtungen).

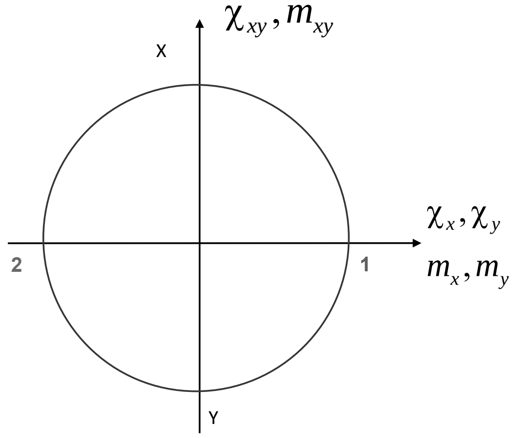
Ergänzende Bemerkung

– In den Fliessbedingungen wurden mit *x* und *y* die Bewehrungsrichtungen bezeichnet. Hier wird davon abgewichen (*n* und *t* als Bewehrungsrichtungen)!

Platten – Fliessbedingungen

Reine Drillung $\chi_{xy}\left(\chi_x = \chi_y = 0\right)$



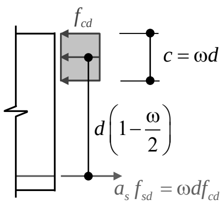


Die Quadratplatte mit abwechselnd positiven und negativen Eckkräften trägt in den Koordinatenachsen über reine Drillung (konstantes Drillmoment). Der Verzerrungszustand kann mit einem Mohrschen Kreis mit Zentrum im Koordinatenursprung dargestellt werden. Eine Drehung des Plattenelements um 45° führt zu den Hauptrichtungen, in denen reine Biegung herrscht.

Die linke Abbildung zeigt die überhöhten Verformungen infolge der gegebenen Belastung (rote Einzelkräfte). Entlang der Koordinatenachsen verlaufen aufgrund der fehlenden Biegebeanspruchung die jeweiligen Plattenstreifen gerade. Die Verformungsfigur ergibt sich damit aus der horizontalen Staffelung gerader Trajektorien. Die Änderung der Neigung entlang der Koordinatenachsen wird durch das Drillmoment erzeugt (Drillung = Torsion). Die blaue und die grüne Kurve zeigen, dass die Platte in Diagonalrichtung gekrümmt ist und dort ein reiner Biegezustand in den Hauptrichtungen vorliegt.

Platten – Fliessbedingungen

Reine Drillung – Untersuchung mit Sandwichmodell (unterer Grenzwert)



Isotrop bewehrt: $m_{x,u} = m_{y,u} = m_u = m'_{x,u} = m'_{y,u}$

$$m_u = a_s f_{sd}\left(d - \frac{a_s f_{sd}}{2 f_{cd}}\right) = d^2 f_{cd}\,\omega\left(1-\frac{\omega}{2}\right)$$

- Normalmomenten-Fliessbedingung: $m_{xy,u} = m_u$

$$m_{xy}^2 - \left(m_{x,u} - m_x\right)\left(m_{y,u} - m_y\right) = 0 \text{ mit } m_x, m_y = 0$$

$$\rightarrow m_{xy,u} = \sqrt{m_{x,u} m_{y,u}} = m_u \qquad \text{für } m' \text{ analog}$$

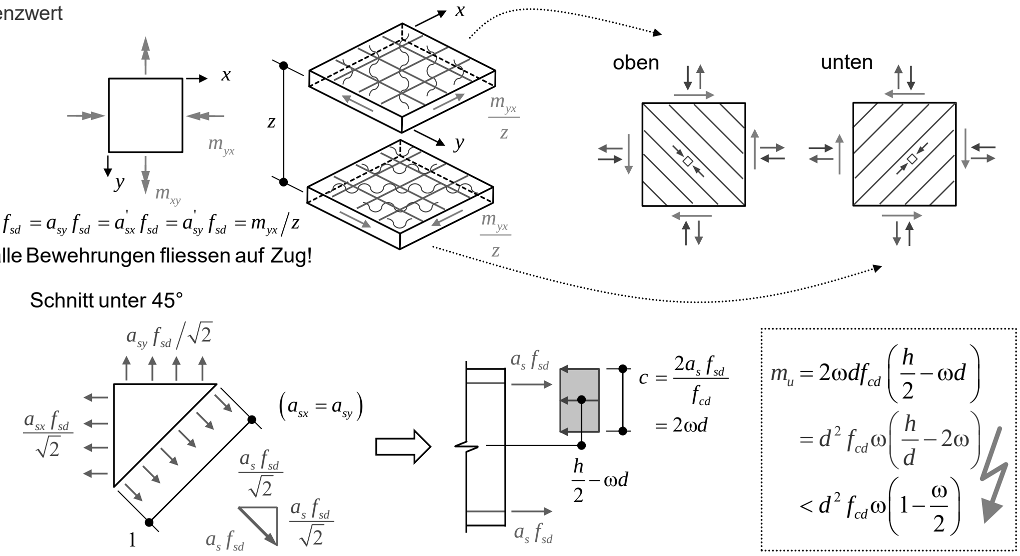
Das Tragverhalten unter reiner Drillung kann auch mit dem Sandwichmodell untersucht werden, welches eine Anwendung der statischen Methode der Plastizitätstheorie darstellt und daher einen unterer Grenzwert des Widerstands liefert. Bei einer isotrop bewehrten Platte sind jeweils die positiven und negativen Biegewiderstände in beiden Richtungen identisch (unter Vernachlässigung der Differenz der statischen Höhe aufgrund der Bewehrungslagen).

In diesem Fall folgt aus der Normalmomenten-Fliessbedingung, dass das maximal aufnehmbare Drillmoment gerade dem Biegewiderstand m_u entspricht.

Platten – Fliessbedingungen

Reine Drillung – Untersuchung mit Sandwichmodell (unterer Grenzwert)

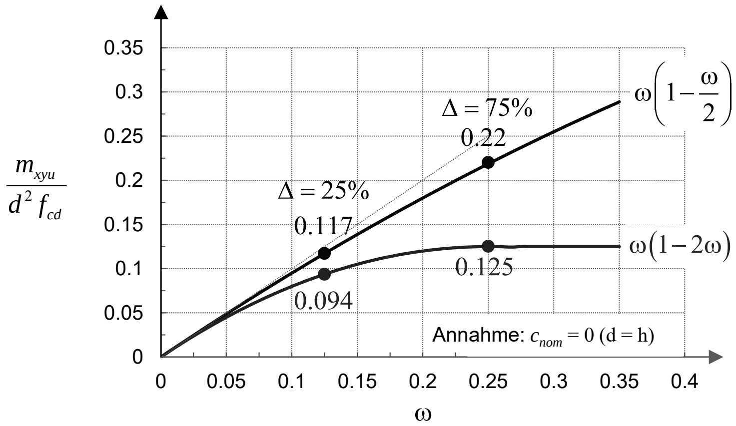
- Unterer Grenzwert



Mithilfe des Sandwichmodells können die Drillmomente an einem Plattenelement in äquivalente Kräftepaare in den Deckeln des Sandwichs aufgeteilt werden, welche somit eine reine Schubbeanspruchung in ihrer Ebene erfahren. In jedem Deckel resultiert ein unter ±45° zu den Bewehrungsrichtungen geneigtes Druckfeld im Beton, welches gemeinsam mit gleich grossen Zugkräften in beiden Bewehrungen mit der Schubbeanspruchung im Gleichgewicht steht. Berücksichtigt man die Zugkräfte in den Bewehrungen in der Berechnung des Biegewiderstand, resultiert aus der höheren Betondruckzone ein kleinerer Hebelarm der inneren Kräfte, wodurch der Biegewiderstand reduziert wird.

Platten – Fliessbedingungen

Reine Drillung – Untersuchung mit Sandwichmodell (unterer Grenzwert)

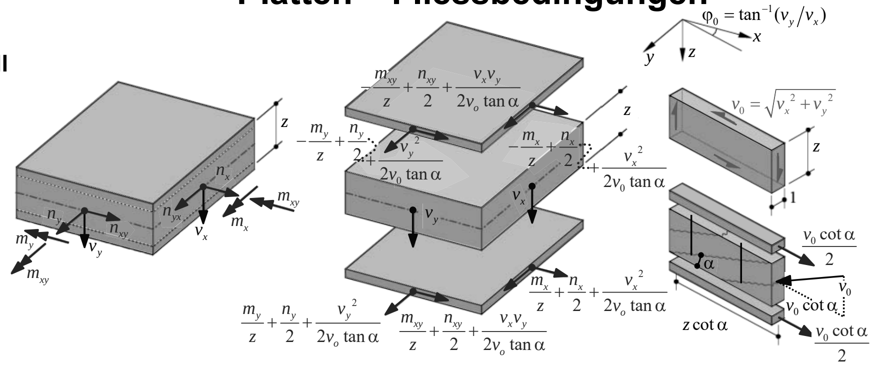


Eckstützen mit grossen Drillmomenten → Vorsicht!

Diese Reduktion des Biegewiderstands führt bei hohen Bewehrungsgehalten zu grossen Differenzen der maximal aufnehmbaren Drillmomente im Vergleich mit der Normalmomenten-Fliessbedingung. Die Normalmomenten-Fliessbedingung überschätzt in diesen Bereichen den Widerstand (vgl. Folie 21). Daher ist insbesondere bei Eckstützen (grosse Drillmomente!) Vorsicht geboten.

Platten – Fliessbedingungen

Sandwichmodell



Gleichgewichtslösung für allgemeine Schalenbeanspruchung (statisch zulässiger Spannungszustand):

- Sandwichdeckel übernehmen Biege- und Drillmomente sowie allfällige Membrankräfte
  - → ebene Beanspruchung, Behandlung als Scheibenelemente mit entsprechender Bewehrung, Behandlung mit Fliessbedingungen für Scheibenelemente
  - → Bemessung von allgemein beanspruchten Schalenelementen (8 Spannungsresultierende)
- Sandwichkern übernimmt Querkräfte
  - → Sandwichkern trägt Hauptquerkraft v_0 in der Richtung φ_0 ab (siehe Querkraft in Platten)

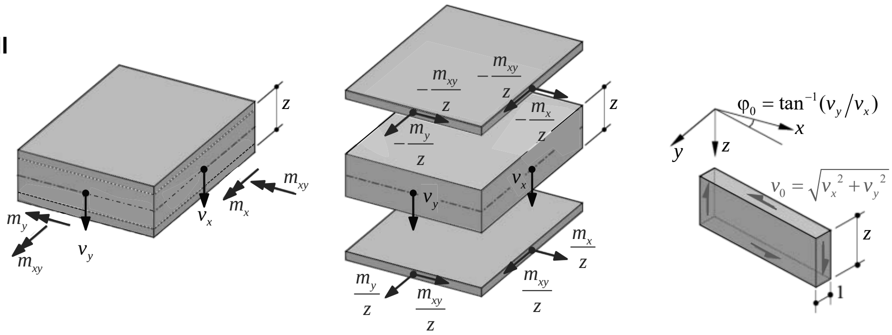
NB: Hohe Membran(druck)kräfte: Kern auch dafür nutzbar (Interaktion mit v beachten)

Die Abbildung zeigt nochmals das Sandwichmodell, hier jedoch mit den unter allgemeiner Beanspruchung einwirkenden Schnittgrössen des freigeschnittenen Plattenelements (Biegespannungszustand und Membranspannungszustand), welche mithilfe von Gleichgewichtsüberlegungen aufgeteilt werden können. Die Membrankräfte sowie die Kräftepaare aus den Biege- und Drillmomente werden auf die Sandwichdeckel verteilt, welche eine ebene Beanspruchung erfahren und somit als Scheibenelemente behandelt werden können. Die Bemessung der Bewehrung erfolgt über die Fliessbedingungen für Scheibenelemente.

Der Sandwichkern nimmt die Plattenquerkräfte auf; die Hauptquerkraft v_0 wird in Richtung φ_0 abgetragen. Diese Richtung kann analog zum Steg eines Trägers behandelt werden. Dabei sind die resultierenden Zugkräfte in der Plattenebene durch die Sandwichdeckel aufzunehmen.

Platten – Fliessbedingungen

Sandwichmodell



→ Platten unter reiner Biegebeanspruchung ohne Schubbewehrung:
$n_x = n_y = n_{xy} = 0$, $v_{0d} \leq v_{Rd} = k_d \tau_{cd} d_v$

→ Terme mit n_x, n_y, n_{xy} entfallen

→ Terme mit v_x, v_y entfallen bei Annahme eines ungerissenen Kerns.

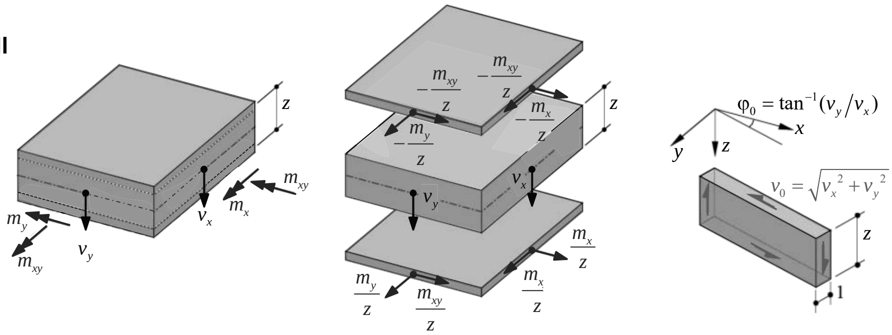
→ Fliessbedingungen für Platten auf Basis des Sandwichmodells = Vereinfachung des allgemeinen Falls eines Schalenelements mit acht Spannungsresultierenden (Platte: nur Biege- und Drillmomente betrachtet, Berücksichtigung Plattenquerkräfte siehe Querkraft in Platten)

Bei den meisten Anwendungen von Platten liegt eine reine Biegebeanspruchung ohne Schubbewehrung vor; der Membranspannungszustand verschwindet und die Querkraft wird über die Schubfestigkeit des Betons aufgenommen (da eine Schubbewehrung in Platten relativ aufwendig zu verlegen ist, ist es aus wirtschaftlichen Gründen günstig, die Plattendicke so zu wählen, dass zumindest ausserhalb der Krafteinleitungsbereiche keine Schubbewehrung erforderlich ist; aus statischer Sicht sollte dies nur bei Plattenstärken bis ca. 400 mm erfolgen).

Die Schnittgrössen des Sandwichelements vereinfachen sich, so dass an den Deckeln in beide Richtungen jeweils nur eine Normal- und Schubspannungskomponente angreift sowie die Querkraft über reine Schubbeanspruchung abgetragen wird.

Platten – Fliessbedingungen

Sandwichmodell



→ Bewehrung der Sandwichdeckel = Fliessbedingungen für Platten nach statischer Methode:

$$a_{sx} f_{sd} \geq \frac{m_x}{z} + k\left|\frac{m_{xy}}{z}\right|$$

$$a_{sy} f_{sd} \geq \frac{m_y}{z} + \frac{1}{k}\left|\frac{m_{xy}}{z}\right|$$

$$a'_{sx} f_{sd} \geq -\frac{m_x}{z} + k'\left|-\frac{m_{xy}}{z}\right|$$

$$a'_{sy} f_{sd} \geq -\frac{m_y}{z} + \frac{1}{k'}\left|-\frac{m_{xy}}{z}\right|$$

d.h.

$$m_{xu} \geq m_x + k\left|m_{xy}\right| \qquad m_{yu} \geq m_y + k^{-1}\left|m_{xy}\right|$$

$$m'_{xu} \geq -m_x + k'\left|m_{xy}\right| \qquad m'_{yu} \geq -m_y + k'^{-1}\left|m_{xy}\right|$$

mit

$$m_{xu} = z a_{sx} f_{sd} \qquad m_{yu} = z a_{sy} f_{sd}$$

$$m'_{xu} = z a'_{sx} f_{sd} \qquad m'_{yu} = z a'_{sy} f_{sd}$$

und durch Multiplikation folgt:

$$\left(\frac{m_{xy}}{z}\right)^2 - \left(\frac{m_{xu}}{z} - \frac{m_x}{z}\right)\left(\frac{m_{yu}}{z} - \frac{m_y}{z}\right) = 0$$

$$\left(\frac{m_{xy}}{z}\right)^2 - \left(\frac{m'_{xu}}{z} + \frac{m_x}{z}\right)\left(\frac{m'_{yu}}{z} + \frac{m_y}{z}\right) = 0$$

Bedingung für Regime 1 (nicht aus Normalmomenten-Fliessbedingung ersichtlich):

$$f_{cd} z t_{inf} \geq m_{xu} - m_x + m_{yu} - m_y$$

$$f_{cd} z t_{sup} \geq m'_{xu} + m_x + m'_{yu} + m_y$$

Das Sandwichmodell beruht auf der statischen Methode der Plastizitätstheorie und liefert somit einen unteren Grenzwert des Widerstands. Aus den Bemessungskriterien für die Scheiben der Sandwichdeckel ergeben sich die Fliessbedingungen für Platten gemäss der Abbildung.

Man erkennt, dass diese den Normalmomenten-Fliessbedingungen entsprechen (solange kein Versagen durch Betonbruch auftritt).

Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingungen für schiefe Bewehrung

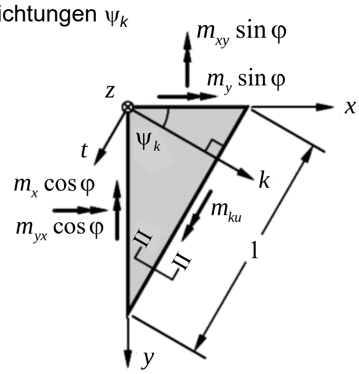
Überlagerung der Biegewiderstände von *k* Bewehrungslagen in den Bewehrungsrichtungen ψ_k

(Transformation aller $\{m_k = m_{ku},\ m_t = 0\}$ in die Richtungen *x*,*y*):

$$\mu_x = \sum_{k-1}^{r} m_{ku} \cos^2 \psi_k \qquad \mu'_x = \sum_{k-1}^{r} m'_{ku} \cos^2 \psi_k$$

$$\mu_y = \sum_{k-1}^{r} m_{ku} \sin^2 \psi_k \qquad \mu'_y = \sum_{k-1}^{r} m'_{ku} \sin^2 \psi_k$$

$$\mu_{xy} = \sum_{k-1}^{r} m_{ku} \sin \psi_k \cos \psi_k \qquad \mu'_{xy} = \sum_{k-1}^{r} m'_{ku} \sin \psi_k \cos \psi_k$$



Normalmomenten-Fliessbedingung für schiefe Bewehrung:

$$m_{au}(\varphi) \approx \sum_{k=1}^{r} m_{ku} \cos^2(\varphi - \psi_k) = \mu_x \cos^2\varphi + \mu_y \sin^2\varphi + 2\mu_{xy} \sin\varphi \cos\varphi$$

$$m'_{au}(\varphi) \approx \sum_{k=1}^{r} m'_{ku} \cos^2(\varphi - \psi_k) = \mu'_x \cos^2\varphi + \mu'_y \sin^2\varphi + 2\mu_{xy} \sin\varphi \cos\varphi$$

('≈' da zwar Druckzonenhöhen unterschiedlich → kein verträgl. Mechanismus, aber Druckfelder im Beton nicht orthogonal → f_{cd} überschritten, somit kein sauberer unterer/oberer Grenzwert; für nicht allzu grosse Bewehrungsgehalte jedoch sehr gute Näherung)

→ Kontrolle der Bedingung $m'_{au}(\varphi) \leq m_a(\varphi) \leq m_{au}(\varphi)$ in alle Richtungen φ siehe nächste Folie

Für die Ermittlung der Fliessbedingung $Y(m_x,\ m_y,\ m_{xy}) = 0$ werden die Biegewiderstände der positiven bzw. negativen Fliessgelenklinien von *k* Bewehrungslagen in den Bewehrungsrichtungen ψ_k überlagert. Aufgrund der schiefen Richtungen der Bewehrungslagen resultiert, im Unterschied zu orthogonaler Bewehrung, ein Anteil m_{xyu}. Daraus ergibt sich die Normalmomenten-Fliessbedingung für schiefe Bewehrung.

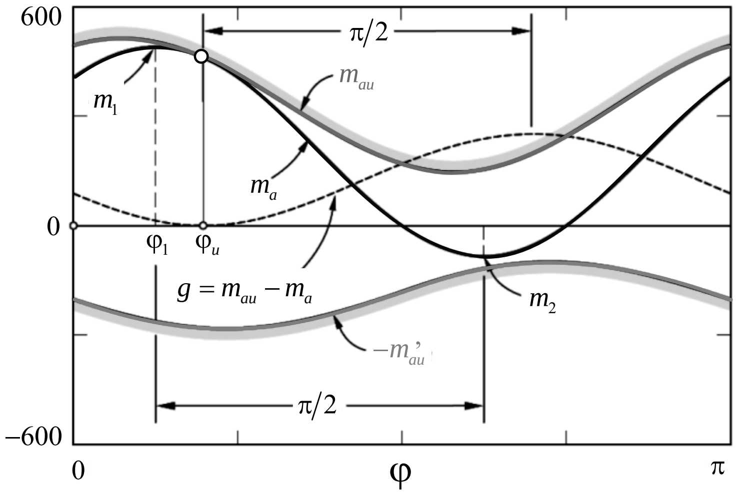
Wie bei einer orthogonalen Bewehrung sind im Allgemeinen die Betondruckzonenhöhen unterschiedlich, $c_x \neq c_y$. Es lässt sich damit kein kinematisch zulässiger Verschiebungszustand zuordnen. Es handelt sich somit um einen unteren Grenzwert der Traglast.

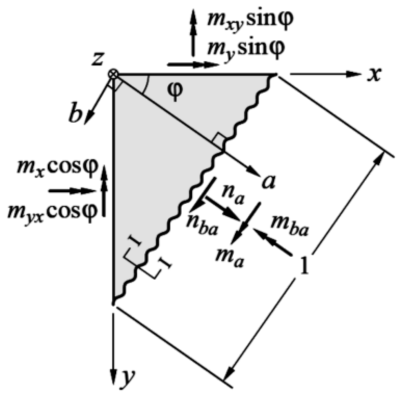
Die Betondruckzonen der verschiedenen Bewehrungsrichtungen verlaufen bei schiefer Bewehrung nicht orthogonal zueinander und verletzen damit die Fliessbedingung. Der Widerstand wird dadurch überschätzt, wobei für nicht allzu grosse Bewehrungsgehalte jedoch eine gute Näherung erreicht wird.

Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingungen für schiefe Bewehrung

Kontrolle der Bedingung $m'_{au}(\varphi) \leq m_a(\varphi) \leq m_{au}(\varphi)$ in alle Richtungen φ:





[Seelhofer (2009)]

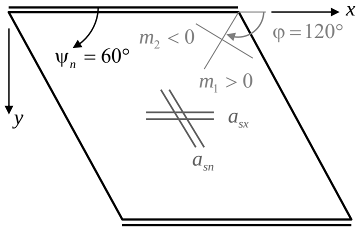
Analog zur orthogonalen Bewehrung können die Kennlinien der Einwirkung und des Widerstands in Abhängigkeit der Richtung φ aufgezeichnet werden. Der Berührungspunkt der beiden Kurven entspricht der massgebenden Richtung φ_u, in welcher die Fliessbedingung erfüllt wird.

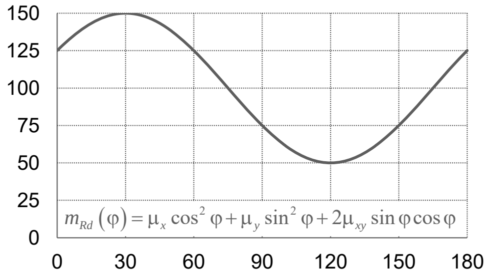
Ergänzende Bemerkung

- Der Normalmomenten-Widerstand ist in den Hauptrichtungen von $m_{au}(\varphi)$ resp. $m'_{au}(\varphi)$ extremal.

Platten – Fliessbedingungen

Beispiel für schiefe Bewehrung





$$m_{Rdx} = 100 \text{ kNm/m}$$
$$m_{Rdn} = 100 \text{ kNm/m}$$
$$\psi_n = 60°$$

$$\mu_x = m_{Rdx}\cdot\cos^2 0° + m_{Rdn}\cdot\cos^2 60° = 125 \text{ kNm/m}$$
$$\mu_y = m_{Rdx}\cdot\sin^2 0° + m_{Rdn}\cdot\sin^2 60° = 75 \text{ kNm/m}$$
$$\mu_{xy} = m_{Rdx}\cdot\sin 0°\cos 0° + m_{Rdn}\cdot\sin 60°\cos 60° = \sqrt{3}\cdot 25 = 43.3 \text{ kNm/m}$$

$$\varphi = 120°:\ m_{Rdmin} = 50 \text{ kNm/m}$$
$$\varphi = 30°:\ m_{Rdmax} = 150 \text{ kNm/m}$$

Maxima und Minima der Biegewiderstände treten nicht in den Bewehrungsrichtungen auf.
Vielmehr tritt ein Minimum im Bereich der Winkelhalbierenden des stumpfen Winkels auf, und der Widerstand ist bereits bei geringer Schiefe deutlich reduziert

Das Beispiel zeigt eine zweiseitig einfach gelagerte Stahlbetonplatte mit dem Grundriss eines Parallelogramms. Die Bewehrung ist entsprechend der Plattengeometrie in einem Winkel von 60° angeordnet; die plastischen Widerstandsmomente sind in *x*- und *n*-Richtung gleich.

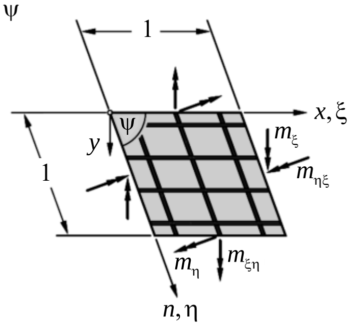
In Richtung der Koordinatenachsen können die Biegewiderstände überlagert werden. Die Normalmomenten-Fliessbedingung zeigt, dass die Maxima und Minima des Widerstands nicht in den Bewehrungsrichtungen sondern in den Winkelhalbierenden auftreten. Der Widerstand wird dabei bereits bei geringer Schiefe zwischen den beiden Bewehrungsrichtungen im Bereich des stumpfen Winkels deutlich reduziert.

Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingungen für schiefe Bewehrung

Unter Verwendung schiefwinkliger Koordinaten können Bemessungsgleichungen formuliert werden (wie bei Scheiben):

$$m_\xi = m_x \sin\psi + m_y \cos\psi \cot\psi - 2m_{xy}\cos\psi \qquad m_\eta = m_y / \sin\psi \qquad m_{\xi\eta} = m_{\eta\xi} = m_{xy} - m_y \cot\psi$$



Die Normalmomenten-Fliessbedingung in schiefwinkligen Koordinaten lautet:
(mit Nebenbedingungen)

$$Y = m_{\xi\eta}^2 - \left(m_{xu}\sin\psi - m_\xi\right)\left(m_{nu}\sin\psi - m_\eta\right) = 0 \qquad Y' = m_{\xi\eta}^2 - \left(m_{xu}'\sin\psi + m_\xi\right)\left(m_{nu}'\sin\psi + m_\eta\right) = 0$$

$$-m_{xu}'\sin\psi \le m_\xi \le m_{xu}\sin\psi \qquad -m_{nu}'\sin\psi \le m_\eta \le m_{nu}\sin\psi$$

Darstellung in Parameterform
→ direkte Bemessung möglich:
(Parameter *k* und *k'* frei wählbar, minimale Bewehrung resultiert für *k* = *k'* = 1)

$$m_{xu} \ge \frac{1}{\sin\psi}\left(m_\xi + k\left|m_{\xi\eta}\right|\right) \qquad m_{nu} \ge \frac{1}{\sin\psi}\left(m_\eta + k^{-1}\left|m_{\xi\eta}\right|\right) \qquad m_{xu}' \ge \frac{1}{\sin\psi}\left(-m_\xi + k'\left|m_{\xi\eta}\right|\right) \qquad m_{nu}' \ge \frac{1}{\sin\psi}\left(-m_\eta + \left(k'\right)^{-1}\left|m_{\xi\eta}\right|\right)$$

$$k = \left|\sin\psi \tan\varphi_u + \cos\psi\right| \qquad k' = \left|\sin\psi \tan\varphi_u' + \cos\psi\right|$$

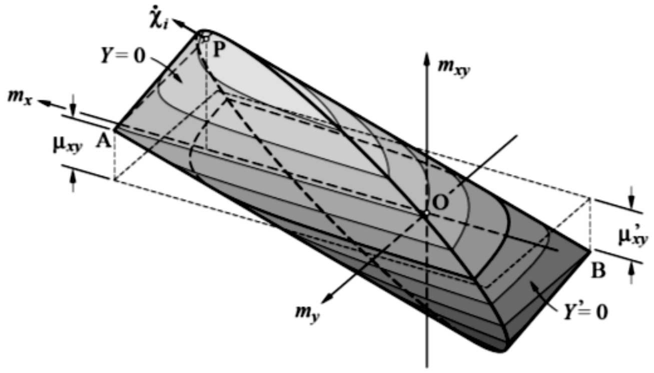
[Seelhofer (2009)]

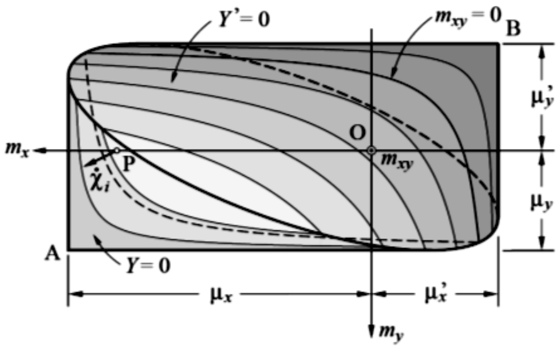
Für die Ermittlung der Bemessungsgleichungen ist es hilfreich, wenn die Schnittgrössen in einem schiefwinkligen Koordinatensystem definiert und somit von schiefen Spannungskomponenten ausgegangen wird. Die entsprechenden Biege- und Drillmomente können dann gemäss der Abbildung definiert werden. Die Definitionen der Normalmomenten-Fliessbedingung und die äquivalente Darstellung in Parameterform erfolgt analog wie bei der orthogonalen Bewehrung.

Platten – Fliessbedingungen

Fliessbedingungen für schiefe Bewehrung

Darstellung der Fliessbedingung:
(zwei elliptische Kegel; bei orthogonaler Bewehrung liegen die Spitzen in der Ebene m_{xy} = 0 und die Schnittellipse in einer Ebene parallel zur m_{xy}-Achse).





[Seelhofer (2009)]

Wie bei orthogonaler Bewehrung resultieren zwei elliptische Kegel. Die schiefe Bewehrung führt jedoch dazu, dass die Spitzen der Kegel nicht mehr in der Ebene m_{xy} = 0 liegen. Die Punkte der umhüllenden Fläche sind jeweils verträglich zu den positiven (*Y* = 0) bzw. negativen (*Y*' = 0) Fliessgelenklinien. Auf der Schnittellipse der beiden Flächen sind die Spannungspunkte verträglich zum Schnittpunkt einer positiven mit einer negativen Fliessgelenklinie. Die Punkte A und B bezeichnen dagegen den Schnittpunkt zweier positiver bzw. negativer Fliessgelenklinien.

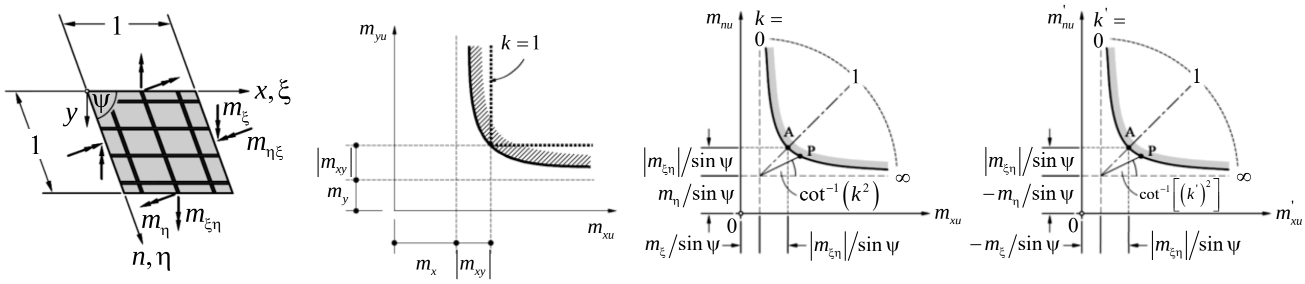
Platten – Fliessbedingungen

Schiefe Bewehrung

Unter Verwendung der Parameterform ist die Bemessung (und die graphische Darstellung) analog wie bei orthogonaler Bewehrung möglich.

$$m_{xu} \geq \frac{1}{\sin\psi}\left(m_\xi + k\left|m_{\xi\eta}\right|\right) \qquad m_{nu} \geq \frac{1}{\sin\psi}\left(m_\eta + k^{-1}\left|m_{\xi\eta}\right|\right) \qquad k = \left|\sin\psi\tan\varphi_u + \cos\psi\right|$$

$$m'_{xu} \geq \frac{1}{\sin\psi}\left(-m_\xi + k'\left|m_{\xi\eta}\right|\right) \qquad m'_{nu} \geq \frac{1}{\sin\psi}\left(-m_\eta + \left(k'\right)^{-1}\left|m_{\xi\eta}\right|\right) \qquad k' = \left|\sin\psi\tan\varphi'_u + \cos\psi\right|$$



Für Fälle, in denen in einer der beiden Bewehrungsrichtungen keine obere resp. untere Bewehrung erforderlich ist, wird auf Seelhofer (2009) verwiesen.

3 Platten

Vertiefung und Ergänzungen zu Stahlbeton II
(Kapitel 7.2)

3.3 Gleichgewichtslösungen

Platten – Gleichgewichtslösungen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden – Übersicht

Elastische Plattentheorie

Plastische Plattentheorie

Lösungen zur Bemessung und Überprüfung der Tragsicherheit von Stahlbetonplatten auf Basis der statischen und kinematischen Methoden der Plastizitätstheorie wurden bereits in Stahlbeton II behandelt. Das entsprechende Wissen wird vorausgesetzt.

- Lösung der Plattendifferentialgleichung
- Approximative Lösungen mit Energieverfahren

Methode der Finiten Elemente

- Momentenansätze
- Methode der stellvertretenden Rahmen
- Streifenmethode
  - einfach
  - erweitert

Fliessgelenklinienmethode

Platten – Gleichgewichtslösungen

Übersicht

Gleichgewichtslösungen beruhen auf dem unteren bzw. statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie.

Voraussetzungen:	→ statisch zulässiger Spannungszustand (Gleichgewicht und statische Randbedingungen erfüllt) → Fliessbedingungen nirgends verletzt

Ermittlung statisch zulässiger Spannungszustände:

- Elastische Plattentheorie: Neben Gleichgewicht und statischen Randbedingungen sind hier auch die elastischen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt. Mit der Methode der Finiten Elemente können Fälle mit beliebiger Geometrie und Belastungen behandelt werden (heute am weitesten verbreitetes Vorgehen). Daneben existieren verschiedene Lehrbücher mit entsprechenden Tabellenwerken.
- Momentenansätze: Kombination verschiedener Momentenfelder für ausgewählte Geometrien und Belastungen
- Streifenmethode: Diese auf HILLERBORG zurückgehende Methode geht von streifenförmigen Biegeelementen in zwei orthogonalen Richtungen aus (einfache Streifenmethode). Mit der erweiterten Streifenmethode lassen sich Einzelkräfte unter Zuhilfenahme entsprechender Momentenansätze resp. Lastverteilelemente behandeln.
- Stellvertretende Rahmen: Globale Gleichgewichtslösung für Flach- und Pilzdecken (Verteilung der Momente in Querrichtung in Anlehnung an elastische Lösungen).

Werden statisch zulässige Spannungszustände betrachtet, welche die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen erfüllen, so resultiert nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie ein unterer Grenzwert für die Traglast einer Platte, falls die Fliessbedingungen nirgends verletzt werden. Wird eine Platte auf dieser Grundlage bemessen, so liegt ihre Traglast, sofern ihr Verformungsvermögen ausreicht, in keinem Fall unter der zur betrachteten Gleichgewichtslösung gehörigen Belastung. Der Kraftfluss kann dabei bis in Detail verfolgt werden, was eine entsprechende konstruktive Durchbildung ermöglicht.

Die Bemessung von Stahlbetonplatten erfolgt heute weitgehend aufgrund Berechnungen mittels der Methode der Finiten Elemente, welche auf der Kirchhoffschen Theorie dünner elastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen basiert. Oft ergeben sich jedoch bereits unter Eigengewicht Risse, insbesondere im Bereich von Krafteinleitungen, womit eine Umlagerung der inneren Kräfte verbunden ist. Durch Zwängungen, welche stets vorhanden sind, rechnerisch aber praktisch nicht erfasst werden können, ergeben sich weitere Umlagerungen. Somit weichen die inneren Kräfte bereits im Gebrauchszustand von den für ein homogenes elastisches Verhalten berechneten Werten ab. Es ist deshalb unrichtig, die Verwendung von nach der Kirchhoffschen Theorie dünner elastischer Platten berechneten Schnittgrössen damit zu begründen, dass der wirkliche Spannungszustand mit ausreichender Genauigkeit erfasst werde. Vielmehr handelt es sich um ein spezielles Vorgehen nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie, liefert doch die elastische Lösung einen von unendlich vielen möglichen Gleichgewichtszuständen in der Platte.

Platten – Gleichgewichtslösungen

Übersicht

Gleichgewichtslösungen eignen sich insbesondere für die Bemessung von Platten. Wird eine Platte nach diesen Verfahren bemessen und ist ihr Verformungsvermögen ausreichend, so liegt ihre Traglast in keinem Fall unter der zugehörigen Belastung.

Mit der statischen Methode der Plastizitätstheorie wird ein ausreichender Biegewiderstand sichergestellt. Der Einfluss von Querkräften ist jedoch nicht berücksichtigt und separat zu untersuchen.

Findet sich zu einer Gleichgewichtslösung ein verträglicher Bruchmechanismus (siehe Kapitel Fliessgelenklinienmethode), so entspricht die gefundene Lösung einer vollständigen Lösung der Plastizitätstheorie. Es resultiert die (theoretisch) korrekte Traglast.

Beschränkt man sich bei der Bemessung auf die nach der elastischen Plattentheorie ermittelten Momente, so ergeben sich oft wenig praktikable Lösungen. In der Praxis werden daher die Momente oftmals in Querrichtung über eine bestimmte Breite ausgemittelt, insbesondere im Bereich von Momentenspitzen bei konzentrierten Krafteinleitungen. Dieses Vorgehen ist insofern fragwürdig, als der Einfluss auf die Drillmomente und auf die Momente senkrecht zur betrachteten Richtung vernachlässigt wird und daher im allgemeinen kein Gleichgewichtszustand resultiert. Dies ist zwar meist unbedenklich, grundsätzlich aber unbefriedigend, und es stellt sich die Frage, ob nicht bereits bei der Schnittgrössenberechnung von über eine bestimmte Breite konstanten Momenten ausgegangen werden kann.

Diesem Wunsch nach grösserer Freiheit bei der praktischen Bemessung kommt die statische Methode der Plastizitätstheorie entgegen. In den folgenden Kapiteln werden für Handrechnungen geeignete Verfahren vorgestellt, welche es ermöglichen, eine Platte mit Gleichgewichtslösungen zu bemessen.

Mit der Bemessung einer Platte nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie wird ein ausreichender Biegewiderstand sichergestellt. Der Einfluss von Querkräften wird dabei nicht berücksichtigt; dies gilt insbesondere auch für die erwähnten Computerprogramme. Da Querkräfte zu einem schlagartigen Versagen führen können, wobei die spröde Natur des Bruches eine Schnittgrössenumlagerung verunmöglicht, dürfen sie bei der Bemessung keinesfalls ausser acht gelassen werden. Für die Berücksichtigung ihres Einflusses wird auf die Vorlesung *3.2 Platten* verwiesen

Platten – Gleichgewichtslösungen

Einfache Streifenmethode: Grundidee

→ Vernachlässigen der Drillmomente, Gleichgewichtsbedingungen nur mit m_x und m_y erfüllen
→ Aufteilen der Belastung q in die Anteile q_x und q_y (q_{xy} = 0)

$$\boxed{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\cancel{\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0 \qquad \rightarrow q = q_x + q_y\,, \qquad \underbrace{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -q_x}_{\text{Balken in x-Richtung}}\,, \qquad \underbrace{\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q_y}_{\text{Balken in y-Richtung}}}$$

→ gesamte Belastung q wird damit durch Balkentragwirkung in x- und y-Richtung abgetragen
→ Aufteilung der Last kann grundsätzlich frei gewählt werden.
→ um ein ausreichendes Verformungsvermögen und zufriedenstellendes Verhalten im Gebrauchszustand zu gewährleisten, ist eine gewisse Vorsicht bei der Wahl von q_x und q_y angebracht
→ ebenso bei der Wahl allfälliger überzähliger Grössen bei der Berechnung der einzelnen Streifen nach Balkentheorie

Die Idee, eine Platte als zueinander orthogonale Schar von Balken aufzufassen, wurde sehr früh entwickelt. Marcus (1931) schlug beispielsweise vor, die Aufteilung der Belastung so zu wählen, dass die elastischen Durchbiegungen der fiktiven Balken in Plattenmitte übereinstimmen (→ verteilte Last: pro Richtung ~ L^{-4}).

HILLERBORG zeigte, dass es sich bei der Streifenmethode um eine Anwendung des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie handelt, und verallgemeinerte die Methode.

Die Grundidee der einfachen Streifenmethode besteht darin, Drillmomente zu vernachlässigen und die Gleichgewichtsbedingungen mit Biegemomenten m_x und m_y allein zu erfüllen. Durch Aufspalten der Belastung q in zwei Anteile q_x und q_y erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung mit m_{xy} = 0 die Formeln gemäss der Folie; somit ist im Unterschied zur allgemein gültigen Beziehung q_{xy} = 0. Die gesamte Belastung q wird durch Balkentragwirkung in den Richtungen x und y abgetragen. Die Idee, das Tragverhalten von Platten anhand von zueinander orthogonalen Balkenscharen zu untersuchen, wurde bereits sehr früh verwendet.

Hillerborg zeigte, dass die Behandlung von Platten als zueinander orthogonale Balkenscharen eine Anwendung des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie darstellt, und dass die Aufteilung der Belastung in die beiden Anteile q_x und q_y frei und an jeder Stelle der Platte unterschiedlich gewählt werden darf. Um ein ausreichendes Verformungsvermögen und ein zufriedenstellendes Verhalten im Gebrauchszustand zu gewährleisten, ist jedoch eine gewisse Vorsicht bei der Wahl von q_x und q_y angebracht, wie auch bei der Wahl allfälliger überzähliger Grössen bei der Berechnung der einzelnen Streifen nach Balkentheorie.

Platten – Ergänzungen

Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilelemente

Um Stützen und Einzellasten mit der Streifenmethode behandeln zu können, werden Lastverteilelemente eingesetzt. Diese wandeln eine Punktlast in eine Flächenlast um oder umgekehrt. Sie entsprechen somit den Lösungen für (in der Mitte) punktgestützte Platten unter gleichmässig verteilter Last.

Stützen: Die Lastverteilelemente werden als Flächenlager mit gleichmässiger Pressung betrachtet, welche durch indirekt gelagerte Streifen oder (in der Regel) versteckte Unterzüge belastet werden. Den resultierenden Biegewiderständen aus den Unterzügen werden die für die Lastabtragung im Stützenbereich erforderlichen Biegewiderstände superponiert.

Einzellasten: Die Einzellasten werden als gleichmässig verteilte Flächenlasten auf die Platte aufgebracht, welche durch Streifen oder (in der Regel) versteckte Unterzüge zu den Auflagern abgetragen werden. Den resultierenden Biegewiderständen werden die für die Umwandlung der Punktlast in eine gleichmässig verteilte Belastung erforderlichen Biegewiderstände superponiert.

Die Streifenmethode eignet sich naturgemäss primär für die Behandlung von linien- oder flächengestützten Platten mit verteilter Belastung. Die erweiterte Streifenmethode ermöglicht es, auch konzentrierte Belastungen und Punktstützen zu berücksichtigen. Dies wird nachfolgend für Punktstützen illustriert; konzentrierte Belastungen können analog behandelt werden.

Bei der Anwendung der erweiterten Streifenmethode kann ähnlich vorgegangen werden wie bei der Behandlung versteckter Unterzüge. Dabei denkt man sich in einem ersten Schritt die Punktstützen als Flächenlager mit endlichen Abmessungen und gleichmässig verteilter Reaktion und berechnet die entsprechenden Plattenmomente m_x und m_y. Hierzu können auch versteckte Unterzüge berücksichtigt werden. Im zweiten Schritt werden diesen Momenten die Biegewiderstände m_{xu} und m_{yu} superponiert, so dass die mit umgekehrtem Vorzeichen als Belastung aufgebrachten, gleichmässig verteilten Reaktionen der Flächenlager zu den punktförmigen Stützen abgetragen werden können, ohne die Fliessbedingungen zu verletzen.

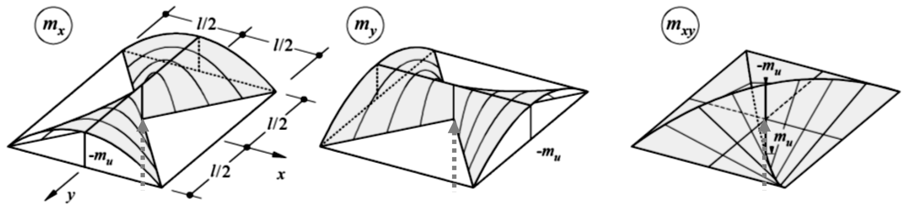
Platten – Ergänzungen

Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilelemente – Repetition Momentenfelder

Die untenstehenden Momentenfelder sind als «Lastverteilelemente» zur Umwandlung von Punktlasten in Flächenlasten geeignet.

Überlagert man ihnen konstante positive Momente m_x und m_y , so erhält man mit m_{xu} = m_{yu} = m_u und m'_{xu} = m'_{yu} = λm_u den unteren Grenzwert für die Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmässig verteilter Belastung (Marti 1981):

$$\boxed{q \geq 4(1+\lambda)\frac{m_u}{l^2},\ \lambda = \frac{m'_{xu}}{m_u} = \frac{m'_{yu}}{m_u}}$$



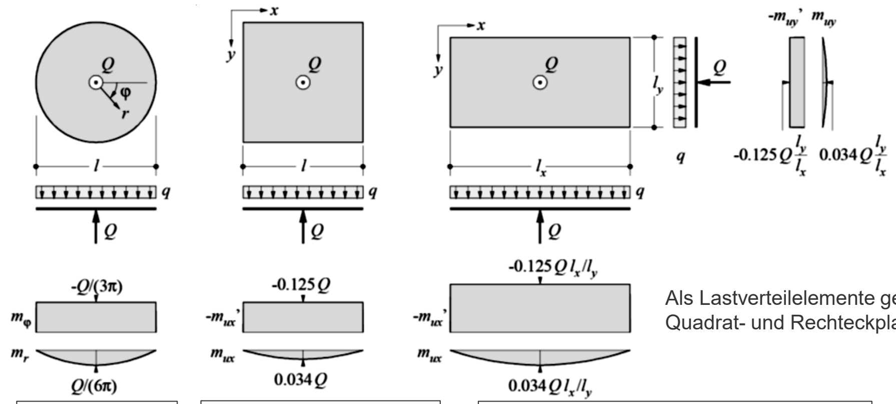
$$m_x = 0 \qquad m_y = m_u\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right) \qquad m_{xy} = m_u\left(\frac{y}{x}-\frac{4xy}{l^2}\right) \quad \text{für } (x^2 > y^2)$$

$$m_x = m_u\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right) \qquad m_y = 0 \qquad m_{xy} = m_u\left(\frac{x}{y}-\frac{4xy}{l^2}\right) \quad \text{für } (x^2 < y^2)$$

Im zweiten Schritt wird eine Gleichgewichtslösung für eine in der Mitte gestützte, durch eine gleichmässig verteilte Flächenlast belastete Rechteckplatte mit freien Rändern benötigt. Zu diesem Zweck können für eine Quadratplatte grundsätzlich die in der Abbildung illustrierten diskontinuierlichen Momentenfelder, beziehungsweise die daraus resultierenden Gleichungen, verwendet werden. Die Fliessbedingung für positive Momente ist mit m_{xu} = m_{yu} = m_u nirgends verletzt und nur im Plattenzentrum gerade erfüllt. Die Fliessbedingung für negative Momente ist für m'_{xu} = m'_{yu} = m_u ebenfalls nirgends verletzt und lediglich entlang der Koordinatenachsen x = 0 und y = 0 gerade erfüllt. Überlagert man diesen Momentenfeldern konstante positive Momente m_x und m_y, so erhält man mit m_{xu} = m_{yu} = m_u und m'_{xu} = m'_{yu} = λm_u einen unteren Grenzwert q für die Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmässig verteilter Belastung.

Platten – Ergänzungen

Erweiterte Streifenmethode: Lastverteilelemente



Als Lastverteilelemente geeignet:
Quadrat- und Rechteckplatte

$(m_u + m'_u) \geq \frac{Q}{2\pi}$	$m'_u \geq \frac{Q}{8}$ $m_u \geq \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{8}\right) Q = 0.034 \cdot Q$	$m'_{x,u} \geq \frac{Q}{8}\frac{l_x}{l_y}$ $\quad m_{x,u} \geq 0.034 \cdot q l_x^2 = 0.034 \cdot Q \frac{l_x}{l_y}$ $m'_{y,u} \geq \frac{Q}{8}\frac{l_y}{l_x}$ $\quad m_{y,u} \geq 0.034 \cdot q l_y^2 = 0.034 \cdot Q \frac{l_y}{l_x}$

(vollständige Lösung) (Lösungen entsprechen oberen Grenzwerten, aber Stützenabmessungen sind endlich und unterer Grenzwert $q \geq 4(1+\lambda) m_u / l^2$ aus Momentenfeldern liegt stark auf sicherer Seite → für Bemessung ok)

Die Abbildung zeigt weitere Beispiele von punktgestützten Lastverteilelementen mit den zugehörigen Bedingungen der Biegewiderstände.

Für die Kreisplatte kann dasselbe Resultat mit dem oberen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie hergeleitet werden, womit dieses der vollständigen Lösung entspricht.

Für die Quadratplatte mit freien Rändern ist in Anlehnung an die Kreisplatte auch eine Lösung nach Nielsen (1984) möglich. Der negative Widerstand m'_u = Q/8, welcher dem Mittelwert der negativen Biegemomente in den Stützenachsen entspricht, ist über die gesamte Platte beizubehalten, während der positive Widerstand wie bei der Kreisplatte parabolisch abgestuft werden darf. Für eine Platte beliebiger Geometrie unter punktförmiger Belastung Q entspricht diese Lösung eigentlich einem oberen Grenzwert. Da in Wirklichkeit immer endliche Stützenabmessungen vorhanden sind und der untere Grenzwert stark auf der sicheren Seite liegt, können die Beziehungen trotzdem für die Bemessung benützt werden.

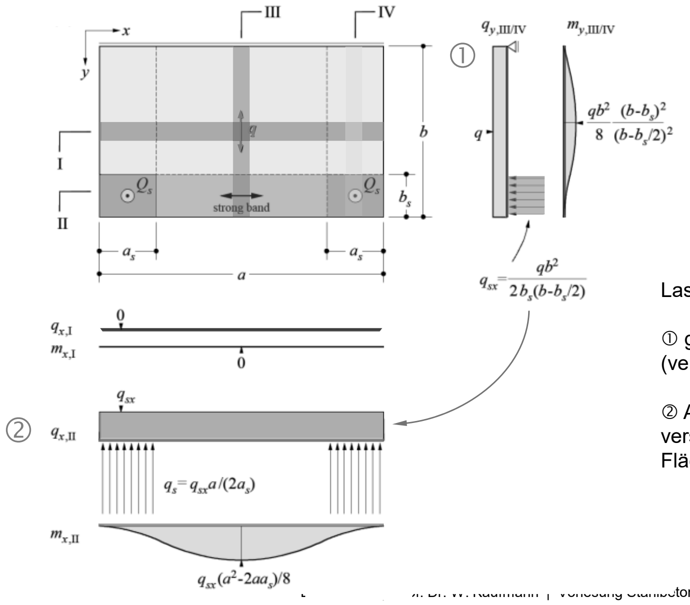
Ist die Fläche, auf welcher die gleichmässig verteilte Flächenlast angreift, nicht quadratisch, sondern rechteckig, so erhält man durch Anwendung des Affinitätstheorems die oben angegeben Formulierungen.

Ergänzende Bemerkung

– Mithilfe des Affinitätstheorems kann eine in den Koordinaten x und y gültige Lösung für eine isotrop bewehrte Platte mit den Biegewiderständen m_u (positive Momente) und m'_u (negative Momente) unter verteilter Belastung q und punktförmiger Belastung Q auf eine orthotrop bewehrte Platte mit $m_{yu} = \mu \cdot m_{xu} = \mu \cdot m_u$ und $m'_{yu} = \mu \cdot m'_{xu} = \mu \cdot m'_u$ übertragen werden. Dabei sind die Koordinaten gemäss den Beziehungen $x^* = x$ und $y^* = y^* \sqrt{\mu}$ zu transformieren, eine konzentrierte Belastung gemäss $Q^* = Q \cdot \sqrt{\mu}$, und verteilte Belastungen $q^* = q$ (siehe auch Folie 67).

Platten – Ergänzungen

Erweiterte Streifenmethode: Beispiel Rechteckplatte, einseitig aufgelegt, auf 2 Stützen gelagert



Lastabtrag:

① gesamte Belastung zuerst in y-Richtung abgetragen (versteckter Unterzug als Flächenlager $a{\cdot}b_s$)

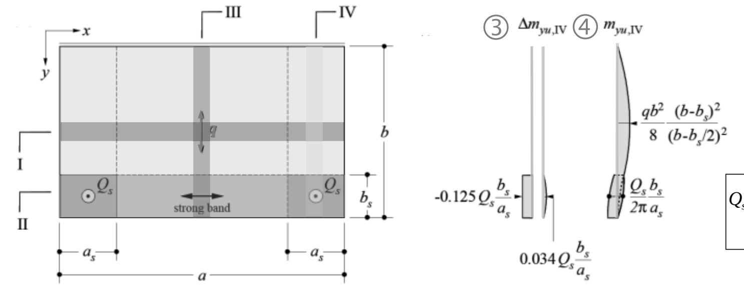
② Abtrag der Reaktionen auf $a{\cdot}b_s$ durch den versteckten Unterzug in x-Richtung (Stützen als Flächen-lager $a_s{\cdot}b_s$)

Das Beispiel illustriert die Anwendung der Lastverteilelemente auf eine einseitig aufgelegte und auf zwei Stützen gelagerten Rechteckplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast.

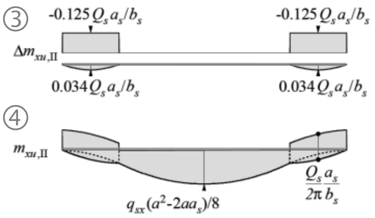
Die gesamte Belastung wird zunächst in *y*-Richtung abgetragen, wobei der versteckte Unterzug der Breite b_s entlang des freien Randes als Flächenlager mit gleichmässig verteilter Auflagerpressung betrachtet wird. Die entsprechenden Reaktionen werden sodann vom versteckten Unterzug in *x*-Richtung abgetragen, wobei nun die Stützen als Flächenlager mit über den Bereich $a_s{\cdot}b_s$ gleichmässig verteilten Auflagerpressungen betrachtet werden. Im letzten Schritt werden den auf die beschriebene Weise berechneten Momenten die für die Lastabtragung im Stützenbereich $a_s{\cdot}b_s$, also für die Aufnahme der mit umgekehrten Vorzeichen als Belastung aufgebrachten, gleichmässig verteilten Auflagerpressungen durch die konzentrierte Stützenkraft, erforderlichen Biegewiderstände Δm_u superponiert.

Platten – Ergänzungen

Erweiterte Streifenmethode: Beispiel Rechteckplatte, einseitig aufgelegt, auf 2 Stützen gelagert



$$Q_s = q_s a_s b_s = \frac{qab}{4}\frac{b}{\left(b-\frac{b_s}{2}\right)}$$



Lastabtrag:

③ Ermitteln der erforderlichen Biegewiderstände für die Umwandlung der Flächenlast q_s auf $a_s{\cdot}b_s$ in eine Einzellast Q_s

④ Überlagerung sämtlicher erforderlicher Biegewiderstände

Gemäss der Superposition der Momentenbeanspruchung ist im Bereich von Punktlasten und Punktstützen sowohl eine obere als auch eine untere Bewehrung in beiden Bewehrungsrichtungen erforderlich. Dies rührt daher, dass zur Aufnahme der punktförmigen Lasten Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen verwendet werden, welche gemäss den Fliessbedingungen sowohl eine obere als auch eine untere Bewehrung erfordern.

Durch die Verwendung von statischen Diskontinuitäten ist es möglich, punktförmige Lasten auch ohne Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen aufzunehmen. Dies wird jedoch hier nicht weiter erläutert.

Platten – Bruchmechanismen

Tragwerksanalyse / Berechnungsmethoden – Übersicht

- Elastische Plattentheorie
  - Lösung der Plattendifferentialgleichung
  - Approximative Lösungen mit Energieverfahren
  - Methode der Finiten Elemente
- Plastische Plattentheorie
  - Statische Methode der Plastizitätstheorie
    - Methode der Finiten Elemente
    - Momentenansätze
    - Methode der stellvertretenden Rahmen
    - Streifenmethode
      - einfach
      - erweitert
  - Kinematische Methode der Plastizitätstheorie
    - Fliessgelenklinienmethode

3 Platten

Vertiefung und Ergänzungen zu Stahlbeton II
(Kapitel 7.3)

3.4 Bruchmechanismen

Platten – Ergänzungen

Fliessgelenklinienmethode

- Die Fliessgelenklinienmethode (Johansen, 1962) ist eine Anwendung der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie.
- *Vorgehen*: kinematisch zulässigen Mechanismus annehmen, Arbeit der äusseren Kräfte mit Dissipationsarbeit gleichsetzen → oberer Grenzwert für die Traglast.
- In der Regel sind verschiedene Bruchmechanismen zu untersuchen, für jeden Mechanismus ist die Traglast bezüglich allfälliger freier Parameter zu minimieren.
- Starre Teile der Mechanismen in der Regel hochgradig innerlich statisch unbestimmt → im Gegensatz zu Stabtragwerken gelingt die Plastizitätskontrolle ($m \leq m_u$) nur in einfachen Spezialfällen.

Die auf Johansen (1962) zurückgehende Fliessgelenklinienmethode ist eine Anwendung der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie. Dabei erhält man durch Gleichsetzen der Arbeit der äusseren Kräfte mit der Dissipationsarbeit für einen kinematisch zulässigen Bruchmechanismus einen oberen Grenzwert für die Traglast. In der Regel ist es erforderlich, verschiedene Bruchmechanismen zu untersuchen, wobei für jeden Mechanismus die Traglast bezüglich allfälliger freier Parameter zu minimieren ist. Da die starren Teile der Mechanismen in der Regel hochgradig innerlich statisch unbestimmt sind, ist es im Gegensatz zu Stabtragwerken nur in einfachen Spezialfällen möglich, eine Plastizitätskontrolle durchzuführen.

Die Fliessgelenklinienmethode ist im Vergleich mit Lösungen nach elastischer Plattentheorie oder auch Gleichgewichtslösungen recht einfach anzuwenden. Aus diesem Grund hat die kinematische Methode der Plastizitätstheorie bei Platten eine weitaus grössere Verbreitung erlangt als für Balken und Scheiben. Dazu beigetragen hat wohl auch, dass Lösungen nach der Fliessgelenklinienmethode – in Unkenntnis der Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie und in Anbetracht der Tatsache, dass die Traglast in Versuchen oft wesentlich über den berechneten Werten liegt – vielfach als untere Grenzwerte für die Traglast betrachtet wurden.

Der unter Umständen analytisch aufwendige Minimierungsprozess beim Vorgehen nach der Fliessgelenklinienmethode kann mit der sogenannten «Gleichgewichtsmethode» (Ingerslev, 1923), welche bereits einige Jahre vor der Verbreitung der Fliessgelenklinienmethode angewendet wurde, umgangen werden. Dabei wird Gleichgewicht an den einzelnen, starren Plattenteilen eines Mechanismus formuliert, wobei bestimmte sogenannte Knotenkräfte zu berücksichtigen sind. Da diese Methode nur beschränkt gültig ist und der Minimierungsprozess heute mit numerischen Verfahren problemlos durchgeführt werden kann, wird nicht näher auf diese Methode eingegangen.

Platten – Ergänzungen

Fliessgelenklinienmethode

- Im Vergleich mit Lösungen nach elastischer Plattentheorie oder auch Gleichgewichtslösungen recht einfach anzuwenden, insbesondere bei der Überprüfung bestehender Tragwerke → kinematische Methode der Plastizitätstheorie hat bei Platten eine weitaus grössere Verbreitung erlangt als für Balken und Scheiben (vor allem in Skandinavien sehr verbreitet, auch für die Bemessung).

- Mit der sogenannten «Gleichgewichtsmethode» (Ingerslev, 1923) kann der analytisch oft aufwendige Minimierungsprozess beim Vorgehen nach der Fliessgelenklinienmethode umgangen werden. Dabei wird Gleichgewicht an den einzelnen, starren Plattenteilen eines Mechanismus formuliert, wobei sogenannte «Knotenkräfte» zu berücksichtigen sind. Die Methode ist jedoch nur beschränkt gültig, und der Minimierungsprozess kann heute mit numerischen Verfahren problemlos durchgeführt werden. Daher wird darauf nicht eingegangen.

Platten – Ergänzungen

Fliessgelenklinienmethode – Dissipation in Fliessgelenklinie

- Platte, orthogonal bewehrt (*x*, *y*)
- Fliessgelenklinie in beliebiger Richtung *t*:
  Unter Vernachlässigung von Membrankräften (n_n = 0) gilt: $dD = m_n \dot{\omega}_n dt$
- Einsetzen von Beziehung: $m_{nu} = m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi$
- ergibt Dissipationsarbeit: $dD = \left(m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi\right)\dot{\omega}_n dt$
- mit Rotationsgeschwindigkeiten um die y- resp. x-Achse: $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_n\cos\varphi,\quad \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_n\sin\varphi$
  $d_y = dt\cos\varphi,\quad d_x = dt\sin\varphi$

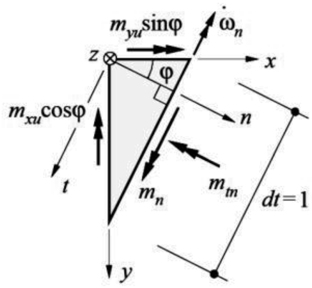
→ Dissipationsarbeit: $\boxed{dD = m_{xu}\dot{\omega}_x dy + m_{yu}\dot{\omega}_y dx}$

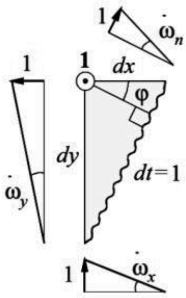
= Summe der Produkte in den beiden Bewehrungs-richtungen von:

Biegewiderstand

Rotationsgeschwindigkeit um die entsprechende Achse

auf diese Achse projizierte Länge der Fliessgelenklinie





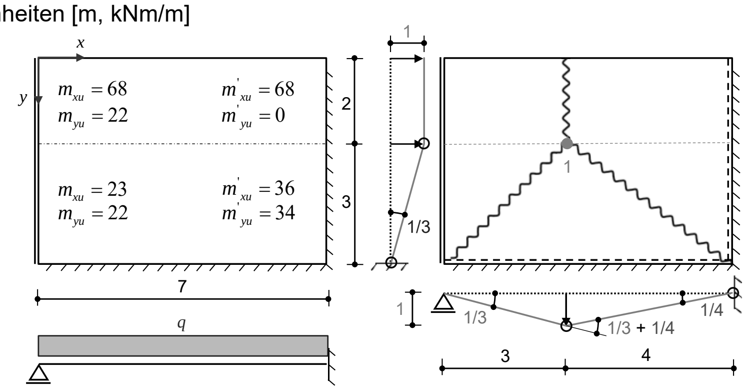
Für die Dissipationsarbeit pro Einheitslänge einer Fliessgelenklinie in einem durch Biege- und Drillmomente sowie Membran- und Querkräfte beanspruchten Plattenelement, erhält man $dD = m_n \cdot \dot{\omega}_n + n_n \cdot \dot{\delta}_n$. Dabei bezeichnen $\dot{\omega}_n$ und $\dot{\delta}_n$ die Gelenkrotation und die Gelenköffnung in Plattenmittelebene. Für verschwindende Membrankräfte, n_n = 0, folgt somit für die Dissipationsarbeit pro Elementlänge *dt* einer Fliessgelenklinie in *t*-Richtung $dD = m_n \cdot \dot{\omega} \cdot dt$.

Der Biegewiderstand einer orthotrop bewehrten Platte in einer beliebigen, unter dem Winkel φ gegenüber der *x*-Achse gedrehten Richtung wird durch die in Folie 16 gezeigten Beziehung beschrieben. Durch Einsetzen ergibt sich die Dissipationsarbeit in Abhängigkeit der Biegewiderstände in *x*- und *y*-Richtung. Die Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\omega}_n$ lässt sich gemäss der Abbildung ebenfalls in ihre Anteile entsprechend der Koordinatenachsen transformieren.

Gemäss der resultierenden Beziehung kann die Dissipationsarbeit aus der Summe der Produkte von Biegewiderstand, Rotationsgeschwindigkeit um die entsprechende Achse und auf diese Achse projizierter Länge der Fliessgelenklinie in den beiden Bewehrungsrichtungen berechnet werden. Dies ist in der Praxis sehr hilfreich.

Platten – Ergänzungen

Beispiel, Einheiten [m, kNm/m]

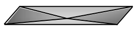
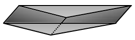


Signaturen für Fliessgelenklinien
(n = Richtung der Randnormalen)

positive Fliessgelenklinie, $m_n = m_{nu}$

negative Fliessgelenklinie, $m_n = -m_{nu}' = \lambda m_{nu}$

$\lambda = m_u'/m_u$

Arbeit der äusseren Kräfte $W =$ (Pyramide  + Prisma ) $\cdot\, q \;= 1\cdot\left(3\cdot 7\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 7\cdot\frac{1}{2}\right)q = 14q$

Dissipationsarbeit

$$D = \underbrace{68\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot 2+68\cdot\frac{1}{4}\cdot 2+23\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot 3+36\cdot\frac{1}{4}\cdot 3}_{\text{x - Rtg.}}+\underbrace{22\cdot\frac{1}{3}\cdot 7+34\cdot\frac{1}{3}\cdot 7}_{\text{y - Rtg.}} = 311.25$$

$$W = D \rightarrow q_u \leq 22.2 kN/m^2$$

Das Beispiel zeigt eine Rechteckplatte, welche an zwei Seiten eingespannt, an einer Seite einfach gelagert und auf der vierten Seite frei ist. Die Bewehrung ist so abgestuft, dass zwei Bereiche mit unterschiedlichen Bewehrungswiderständen entstehen. Der gewählte Mechanismus setzt sich aus einer Pyramide und einem Prisma zusammen, deren Proportionen gemäss der Trennlinie der Widerstände gewählt wurden.

Die Lage der Pyramidenspitze könnte auch so optimiert werden, dass die innere Arbeit minimiert wird (die äussere Arbeit ist unabhängig dieses Parameters, da das Volumen der Bruchfigur gleich bleibt). Aus Gleichsetzen der inneren und äusseren Arbeit folgt die Traglast q.

Platten – Ergänzungen

Fliessgelenklinienmethode – Fächermechanismen

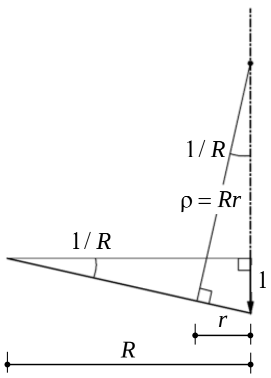
- Platte, isotrop bewehrt ($m_{xu} = m_{yu} = m_u$)

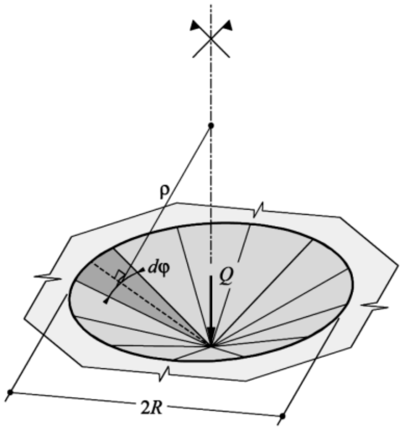
- Hauptkrümmungsradius im Kegelelement

  aus $\rho = Rr \qquad \frac{r}{\rho} = \frac{1}{R}$

$\rightarrow$ Hauptkrümmung $\quad \chi_1 = \rho^{-1} = (Rr)^{-1}$

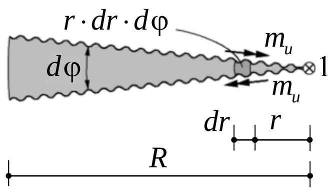
$\rightarrow$ Rotation $\quad \dot{\omega}_\varphi = \chi_1 r d\varphi$





- Dissipationsarbeit pro Flächenelement im Fächer:

$$dD = m_u \dot{\omega}_\varphi dr = m_u \frac{1}{\rho} r d\varphi dr$$



Die Abbildung illustriert die Berechnung der Dissipation für einen Fächermechanismus in einer isotrop bewehrten Platte, $m_{xu} = m_{yu} = m_u$.

Die Hauptkrümmung folgt aus geometrischen Überlegungen an der Bruchfigur (Kegel resp. «Trichter», einfach gekrümmt = abwickelbar), aus der sich mittels Integration über den Winkel φ die Rotation bestimmen lässt. Daraus folgt dann die differentielle Dissipationsarbeit pro Flächenelement im Fächer.

Platten – Ergänzungen

Fliessgelenklinienmethode – Fächermechanismen

- Dissipationsarbeit pro Flächenelement im Fächer:

$$dD = m_u \dot{\omega}_\varphi dr = m_u \frac{1}{\rho} r d\varphi dr$$

Dissipationsarbeit im Inneren eines Fächers mit Öffnungswinkel β:

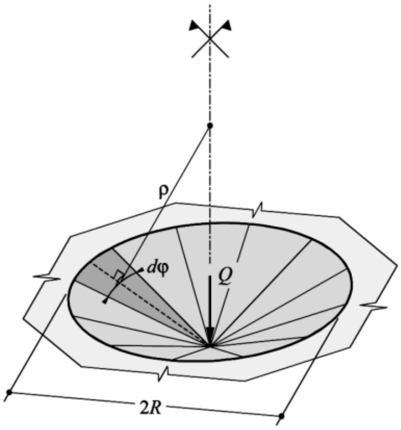
$$D = \left\{ \int_0^\beta \frac{1}{R(\varphi)} \int_0^{R(\varphi)} m_u(r,\varphi) dr \right\} d\varphi \qquad \text{mit} \qquad \rho = Rr$$

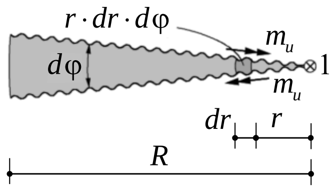
- wobei m_u und R allgemeine Funktionen des Winkels φ sein können
- Dissipation entlang der Fächerberandung (unabhängig von R):

$$D = \int_0^\beta \frac{1}{R} m'_u R d\varphi = \int_0^\beta m'_u(r,\varphi) d\varphi$$

→ Dissipationsarbeit im Fächer mit Öffnungswinkel β für konstantes m_u und $m'_u = \lambda m_u$:

$$\boxed{D = \beta(m_u + m'_u) = \beta m_u (1+\lambda)}$$

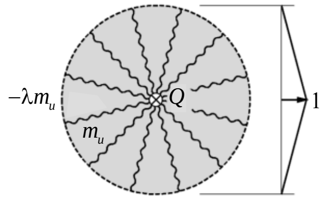




Die Dissipation im Inneren eines Fächers mit einem Öffnungswinkel β folgt aus dem Integral, wobei m_u und R allgemeine Funktionen des Winkels φ sein können. Die Beziehung für die Dissipation entlang der Fächerberandung folgt analog aus der Bruchgeometrie und dem daraus resultierenden Integral über den Winkel φ.

Für konstante m_u und $m'_u = \lambda \cdot m_u$ kann die Dissipationsarbeit entsprechend der Abbildung vereinfacht werden.

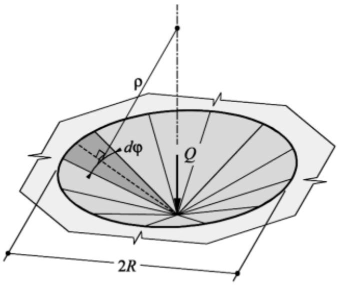
Platten – Ergänzungen



Einzellast auf Platte beliebiger Geometrie

$$\left.\begin{aligned} W &= Q\cdot 1 \\ D &= 2\pi m_u (1+\lambda) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{Q_u \le 2\pi\left(m_u + m'_u\right) = 2\pi m_u \left(1+\lambda\right)}$$

Gleiche Traglast wie mit Momentenfeld für zentrisch gestützte Kreisplatte unter gleichmässiger Belastung, unabhängig von R → vollständige Lösung für eine Kreisplatte; für andere Fälle oberer Grenzwert.



Durch Anwendung des Affinitätstheorems (*) erhält man daraus für eine orthotrop bewehrte Platte beliebiger Geometrie den oberen Grenzwert:

$$\boxed{Q_u \le 2\pi\left(\sqrt{m_{xu} m_{yu}} + \sqrt{m'_{xu}\, m'_{yu}}\right) = 2\pi\sqrt{m_{xu} m_{yu}}\left(1+\lambda\right)}$$

(*) Eine für eine isotop bewehrte Platte mit Biegewiderständen m_u, m'_u unter Belastungen q, Q in den Koordinaten (x,y) gültige Lösung kann auf eine orthotrop bewehrte Platte mit $m_{yu} = \mu\cdot m_{xu} = \mu\cdot m_u$, $m'_{yu} = \mu\cdot m'_{xu} = \mu\cdot m'_u$ übertragen werden. Dabei sind die Koordinaten mit $x^* = x$, $y^* = y\sqrt{\mu}$ zu transformieren, die Lasten mit $q^* = q$ und $Q^* = Q\sqrt{\mu}$
(praktischer Nutzen begrenzt, beispielsweise entspricht einer isotrop bewehrten Quadratplatte eine orthotrop bewehrte Platte mit stärkerer Bewehrung in der längeren Richtung, was nicht sinnvoll ist).