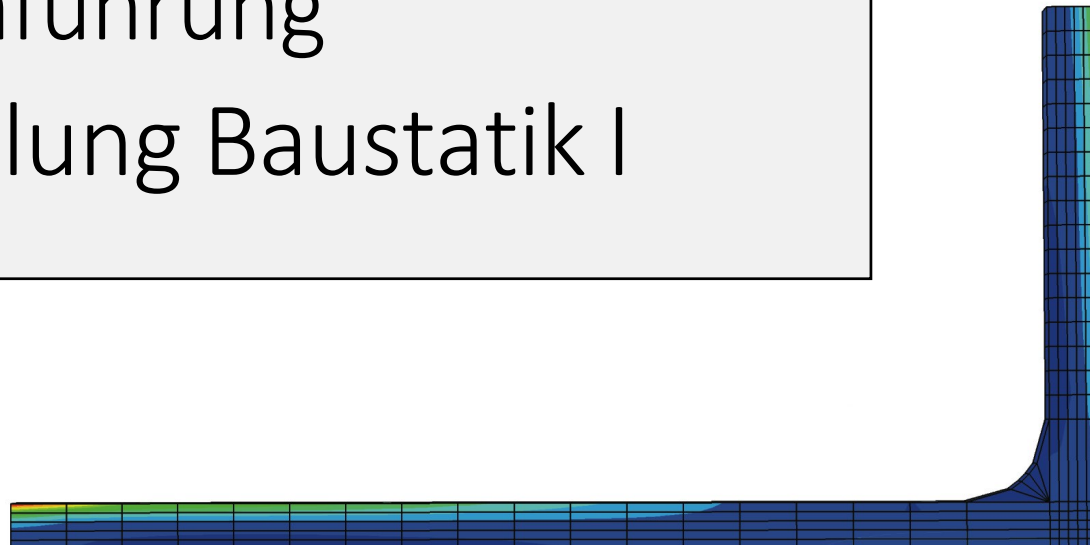


Baustatik II

Kapitel I

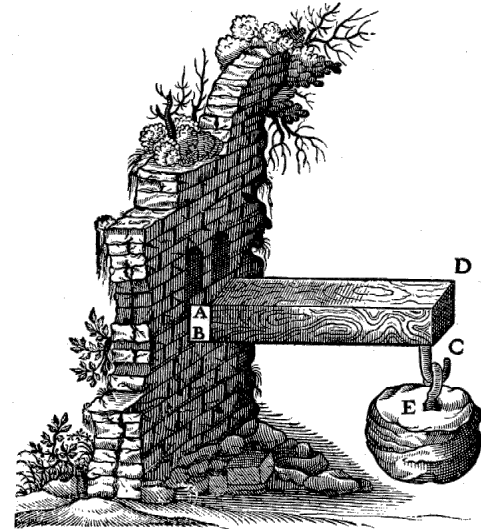
Einführung

Wiederholung Baustatik I



Informationen zum Unterricht

Mi 10:00-12:00, HIL E1



- Lehrerin: Prof. Dr. Eleni Chatzi
- Assistenten: Adrian Egger (HIL H19.5), Yunus Emre Harmanci (HIL H19.5), Claude Leyder (HIL E43.1), Dr. Kostas Agathos (HIL E 19.6)
- Homepage: <http://www.chatzi.ibk.ethz.ch/education/baustatik.html>
- Literatur: Zweidler, S. (2016). Baustatik I. vdf Hochschulverlag AG, ETH Zürich. Marti, P. (2013). Baustatik – Grundlagen, Stabtragwerke, Flächentragwerke (2 ed.). Ernst & Sohn.

Von Frau Prof. Dr. Chatzi empfohlen

Titel
Baustatik

Autor
Peter Marti

ISBN
9783433030936

Studentenpreis
CHF 100.00

Preis Normal
CHF 115.00



Erhältlich in den Filialen:

ETH Store Polyterrasse
Offen Mo-Fr 9-18 Uhr

ETH Store Hönggerberg
Offen Mo-Fr 8-18 Uhr Sa
11-16 Uhr

Hörsaalverkauf: Mi, 28. Februar von 10:45 bis 11:00

Online bestellen:
www.eth-store.ch

Von Frau Prof. Dr. Chatzi empfohlen

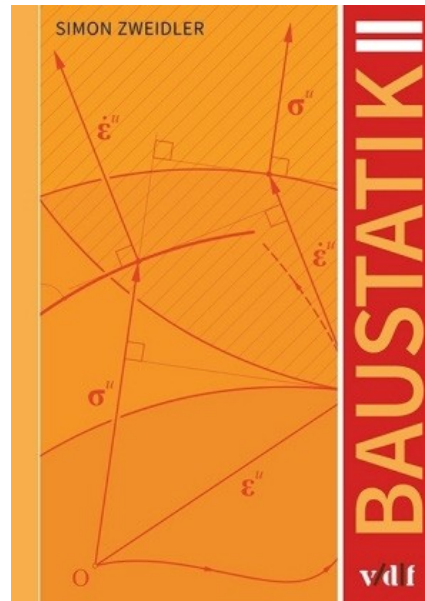
Titel
Baustatik II

Autor
Simon Zweidler

ISBN
978-3-7281-3807-1

Studentenpreis
CHF 40.00

Preis Normal
CHF 50.00



Erhältlich in den Filialen:

ETH Store Polyterrasse
Offen Mo-Fr 9-18 Uhr

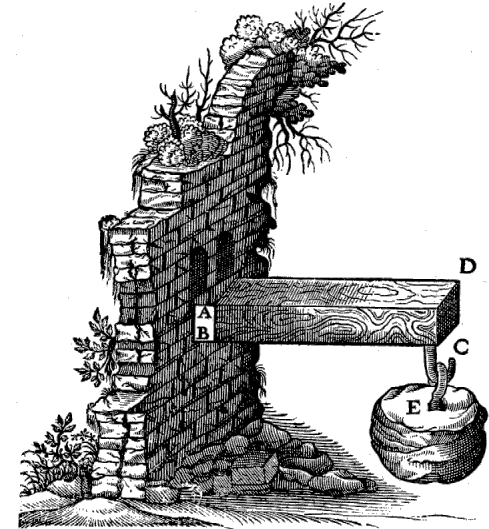
ETH Store Höggerberg
Offen Mo-Fr 8-18 Uhr Sa
11-16 Uhr

Hörsaalverkauf: Mi, 28. Februar von 10:45 bis 11:00

Online bestellen:
www.eth-store.ch

Informationen zum Kolloquium

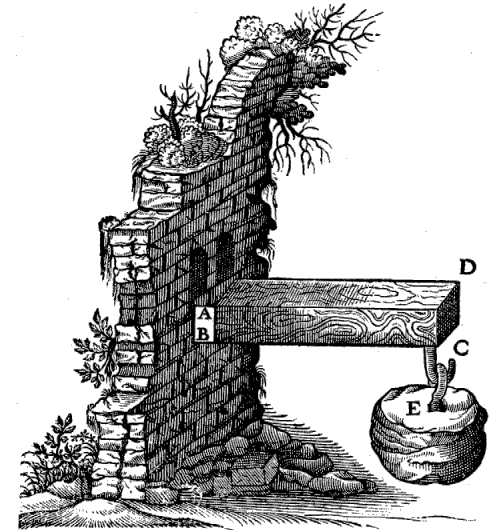
Mo 10:00-12:00, in Gruppen



Gruppe	Leiter	Raum	Zeit	Name von	Name bis
Gruppe 1	David Lindegger	HIL D60.1	10:00-11:45	A	Boh
Gruppe 2	Jeremy Külling	HIL E10.1	10:00-11:45	Boi	Ern
Gruppe 3	Stefano Pons	HIL E4	10:00-11:45	Ero	Haur
Gruppe 4	Adrian Egger	HIL E9	10:00-11:45	Haus	Koh
Gruppe 5	Franziska Wieland	HIL F10.3	10:00-11:45	Koi	Neu
Gruppe 6	Jonas Wydler	HIL F11.1	10:00-11:45	Nev	Sol
Gruppe 7	Yunus Emre Harmanci	HIT H42	10:00-11:45	Som	Z

Informationen zum Kolloquium

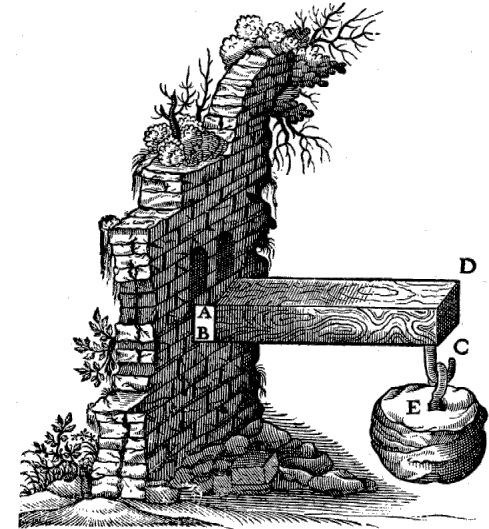
Mo 10:00-12:00, in Gruppen



Das erste Kolloquium findet am Montag, 26. Februar, statt in HIL E4 und ist gemeinsam für alle Gruppen

Informationen zum Kolloquium

Di., Do., Fr. 09:00-12:00, HIL E19.5



Die erste Sprechstunde findet am Dienstag, 27. Februar, statt.

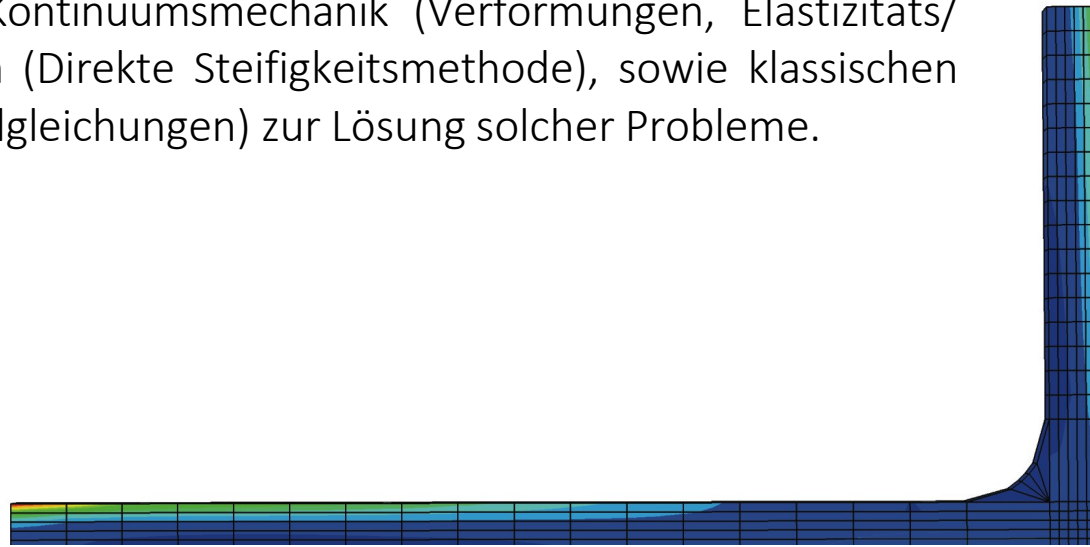
Betreuung	Zeit	Raum
Claude Leyder	Mittwoch, 15:00 - 15:45	HIL E43.1
Yunus Emre Harmanci	Donnerstag, 09:00 - 09:45	HIL E19.5
Adrian Egger	Freitag, 09:00 - 09:45	HIL E19.5

Baustatik

Ziel

Das Ziel der Baustatik ist es, reale Bauwerke mit statischen Ansätzen und Methoden zu modellieren, indem die Geometrie und Einwirkungen so idealisiert werden, dass eine Berechnung des Kräfteverlaufs von den Kraftangriffspunkten zu den Lagerungen ermöglicht wird. Die entsprechenden Berechnungsmethoden erlauben es zu prüfen, ob der Entwurf der verschiedenen Tragwerkselemente zulässig ist.

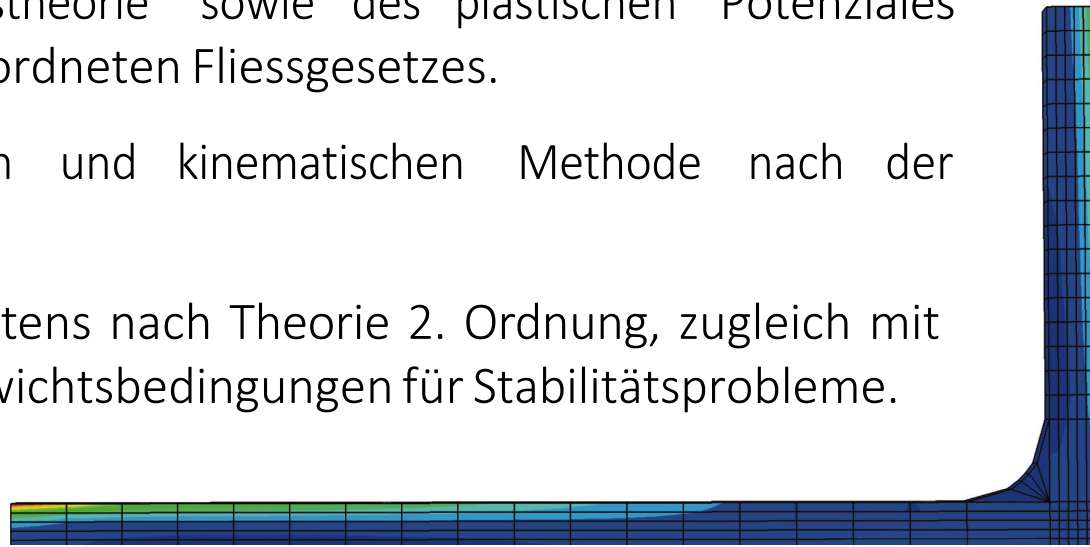
Die Baustatiklehre basiert auf den Prinzipien der Strukturmechanik (Kräfte, Momente, Auflagerreaktionen, Verbindungen), Kontinuumsmechanik (Verformungen, Elastizitäts/Plastizitätstheorie), Matrizenmethoden (Direkte Steifigkeitsmethode), sowie klassischen Methoden der Mathematik (Differenzialgleichungen) zur Lösung solcher Probleme.



Baustatik II

Lernziele

- Das Lösen statisch unbestimmter Systeme durch die zur Kraftmethode dualen Verformungsmethode.
- Die Ermittlung von Schrittgrößen bzw. Zustandlinien von statisch unbestimmten Tragwerken im elastischen Zustand.
- Die Berechnung des Tragverhaltens von "Elastisch-plastischen Systemen" bis zum Erreichen der Traglast.
- Die Einführung der Plastizitätstheorie sowie des plastischen Potenziales (Fließbedingung) und des zugeordneten Fließgesetzes.
- Die Einführung der statischen und kinematischen Methode nach der Plastizitätstheorie.
- Das Verständnis des Tragverhaltens nach Theorie 2. Ordnung, zugleich mit der Formulierung von Gleichgewichtsbedingungen für Stabilitätsprobleme.



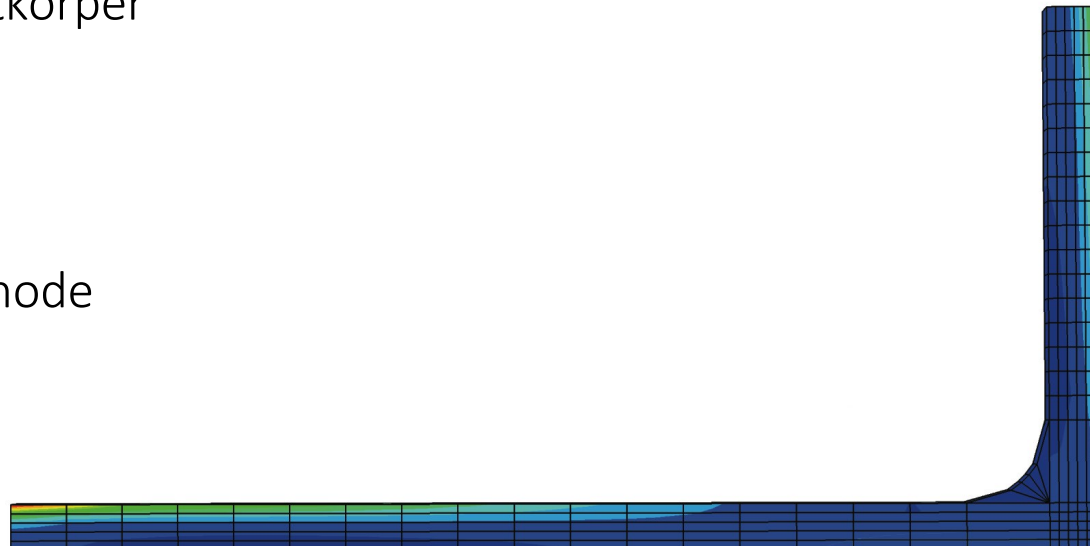
Baustatik II

Lernziele dieses Kapitels

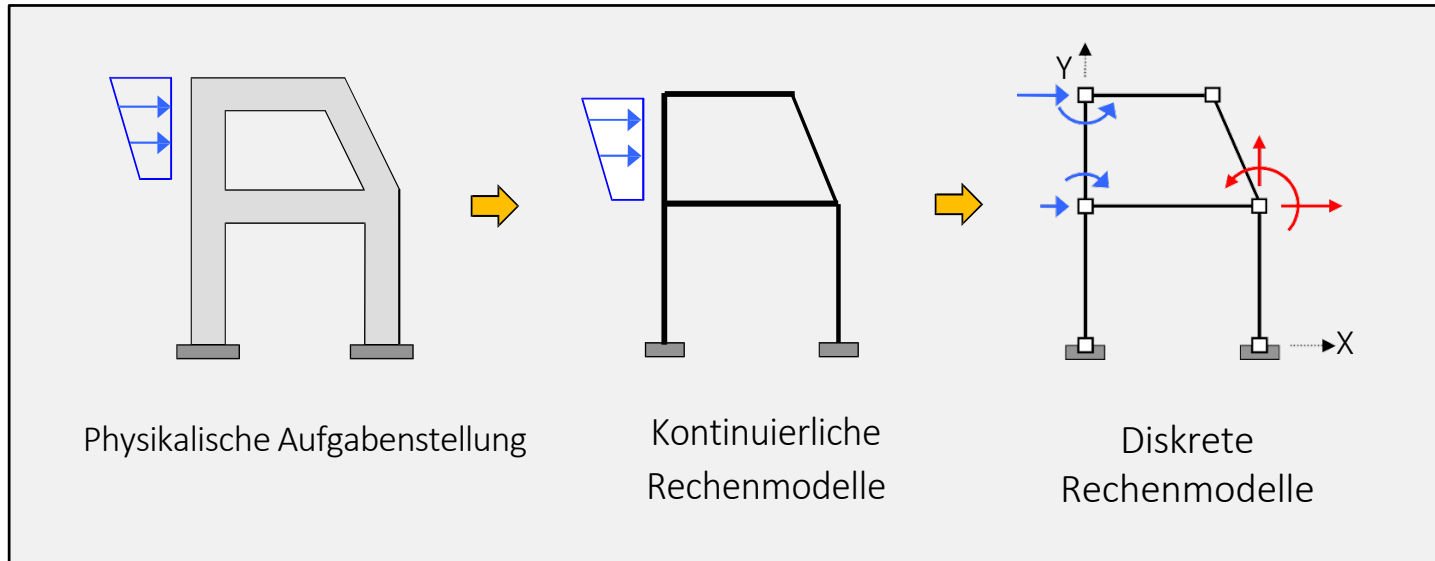
Wiederholung nützlicher Konzepte von Baustatik I

- Statische Unbestimmtheit
- Kinematische Unbestimmtheit
- Prinzip der virtuellen Arbeit
 - Für Starrkörper
 - Für deformierbare Festkörper
 - Für Balken
- Die Kraftsmethode

Einführung in die Verformungsmethode

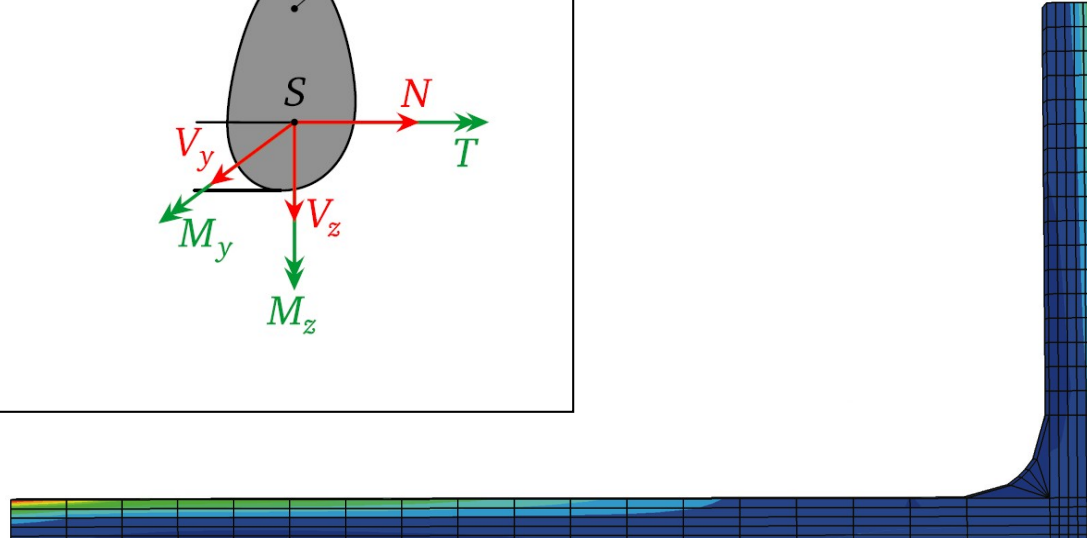
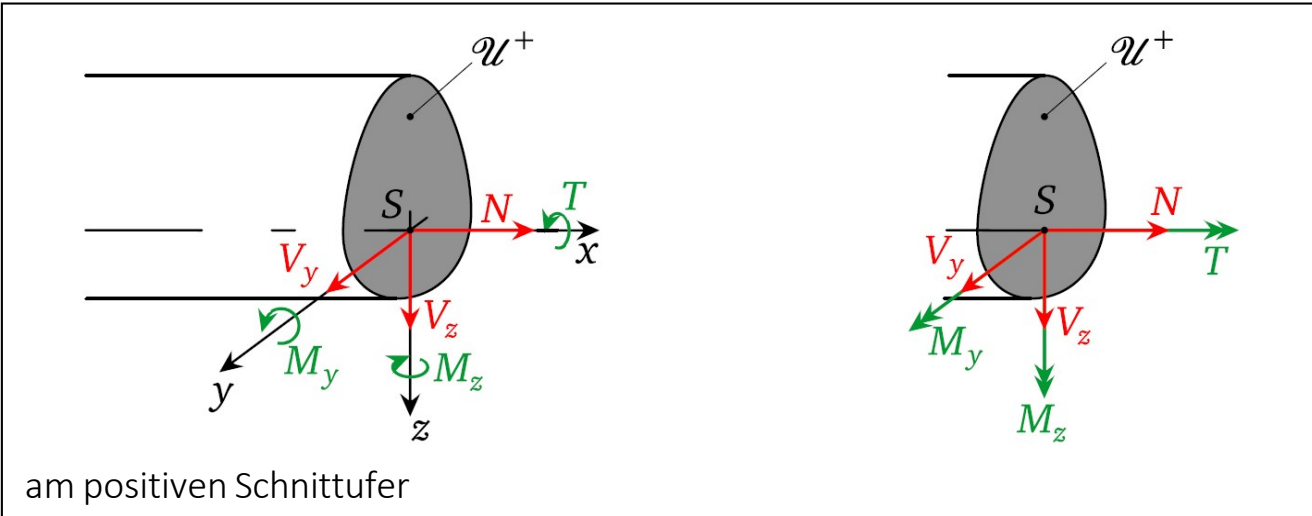
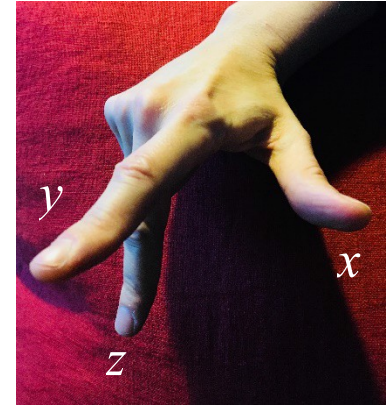
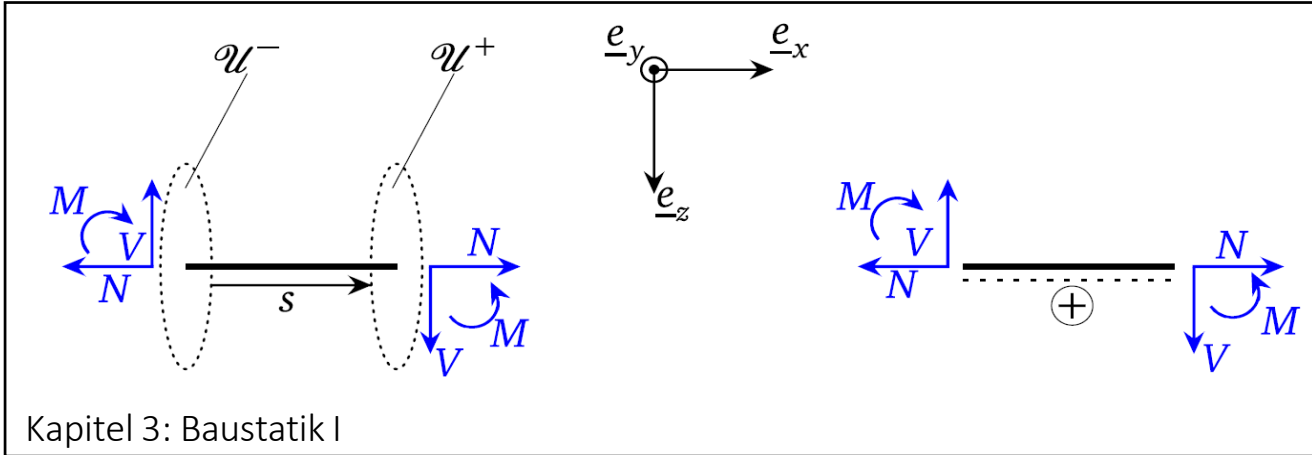


Numerische Strukturanalyse



Modellierung ist der wichtigste Schritt
im Strukturanalyseprozess!

Zusammenfassung Baustatik I ... Orientierungs- und Vorzeichenkonventionen



Kommentar

Als erstes sehen wir mal wieder die Orientierungs- und Vorzeichenkonventionen, die in der Baustatik I eingeführt wurden. So, für einen geraden horizontalen Balken in der Ebene wird der Vektor e_x von links nach rechts orientiert, der Vektor e_y wird hingegen senkrecht zur Zeichenebene und zum Leser hingrichtet. Was den Vektor e_z betrifft, so wird der vertikal nach unten gewählt, sodass ein rechtshändiges Drei-Finger entsteht (x-y-z).

Die Komponente N bezeichnet die *Normalkraft*, wobei ein positives Vorzeichen einer Zugkraft, während ein negatives einer Druckkraft entspricht.

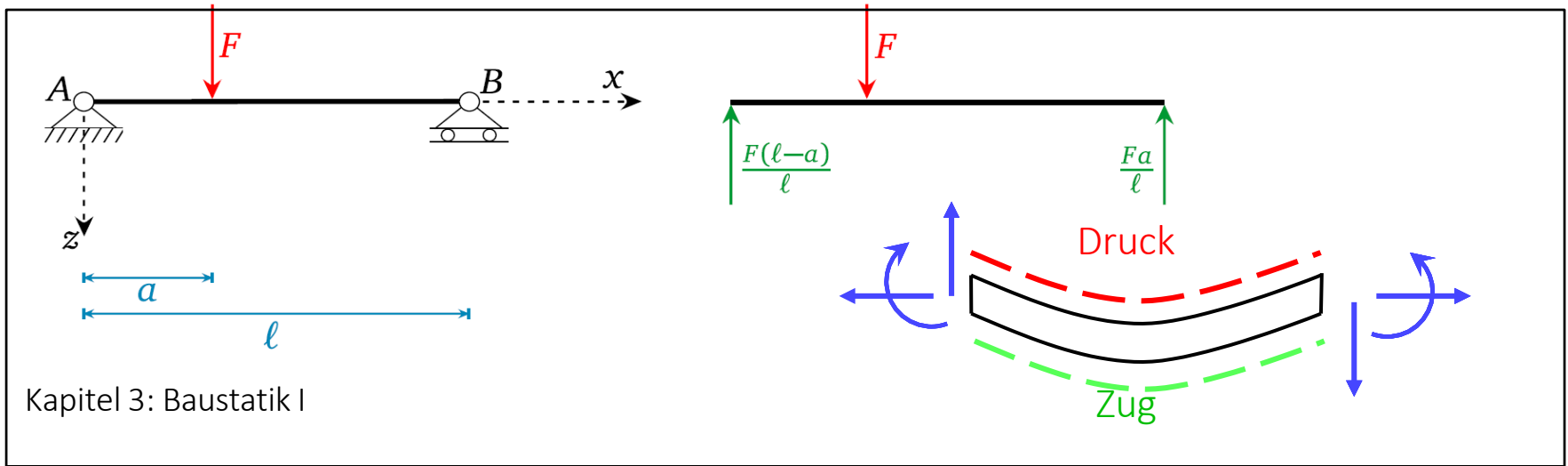
- Die Komponente V bezeichnet die *Querkraft*. Sie impliziert eine Verformung des Balkens in transversaler Richtung entlang des Querschnitts.

Die drei Komponenten des resultierenden Moments M sind:

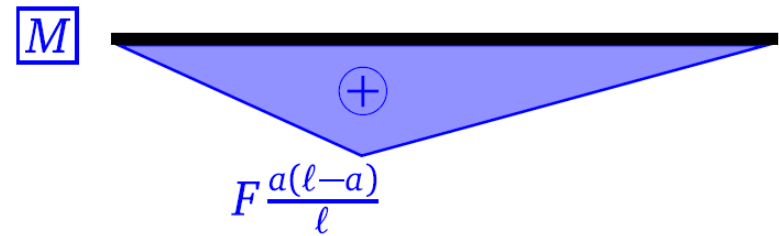
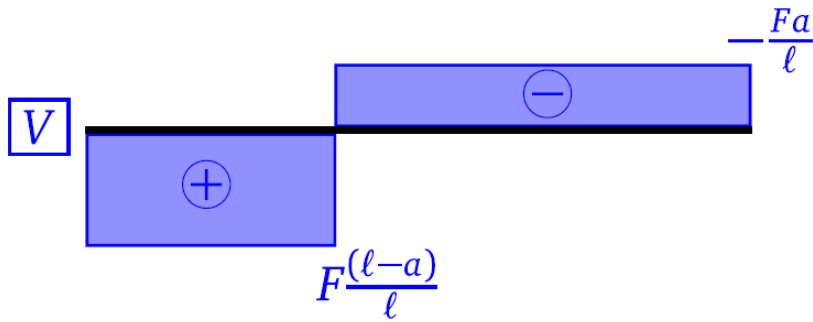
- Das *Torsionsmoment* T , das eine Verdrehung des Balkens um seine Achse x induziert.
- Die *Biegemomente* M_y und M_z . Die induzieren die eine Biegung des Balkens um die entsprechenden Achsen.

Um die Orientierung dieser drei Momente herauszufinden nutzen wir die Rechte-Hand-Regel.

Zusammenfassung Baustatik I ... Orientierungs- und Vorzeichenkonventionen



Kapitel 3: Baustatik I



Kommentar

Weiterhin, ist besonders wichtig auch die Notation von positiven Querkräften und Momenten in Erinnerung zu bringen. Da zeichnen wir die positiven Wertigkeiten auf die gespannte Seite. Konkreter ist es die grüne gestrichelte Linie in dieser Graphik.

Nun, in diesem einfachen Beispiel bleibt die Querkraft konstant und sie weist eine Diskontinuität im Angriffspunkt der Kraft F auf. Dem entsprechend hat der Moment eine dreieckige Form. Auch relevant ist hier zu erwähnen dass die Querkraft als Ableitung des Moments berechnet werden kann.

Um die Orientierung dieser drei Momente herauszufinden nutzen wir die Rechte-Hand-Regel.

Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

Die Gleichungen des statischen Gleichgewichts werden verwendet, um den statischen Gleichgewichtszustand zu bestimmen und Kräfte in einer Struktur zu berechnen. Es gibt drei statische Gleichgewichtsgleichungen, die für 2D-Strukturen angewendet werden können:

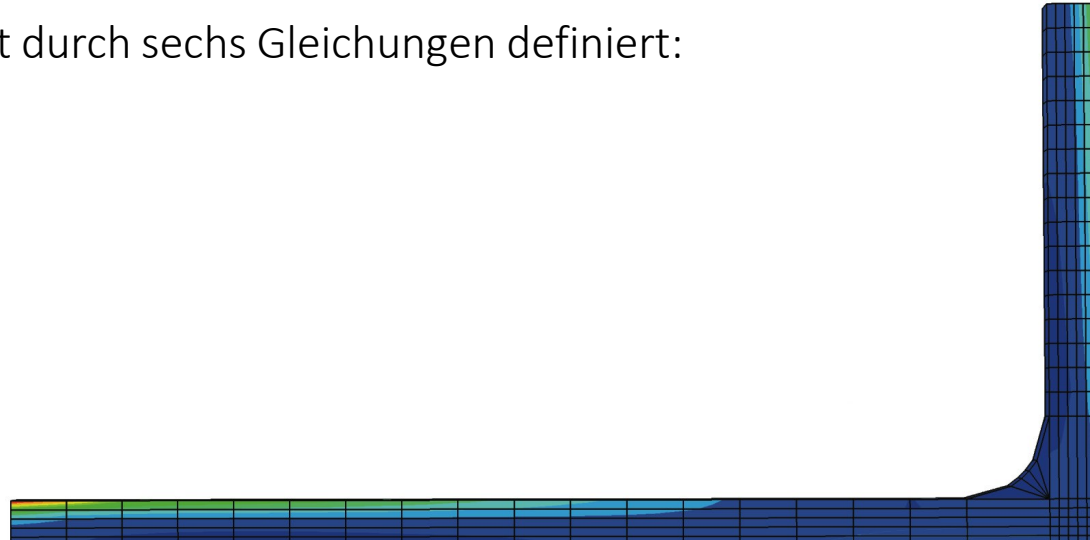
$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \text{ and } \sum M_z = 0 \quad xy \text{ Ebene}$$

$$\sum F_x = 0, \sum F_z = 0, \text{ and } \sum M_y = 0 \quad xz \text{ Ebene}$$

Für 3D-Strukturen ist das Gleichgewicht durch sechs Gleichungen definiert:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0, \text{ and}$$

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$



Kommentar

Um diese Grösse zu berechnen, müssen wir den Gleichgewichtszustand verwenden. Das bedeutet drei statische Gleichgewichtsgleichungen, für 2 Dimensionale Strukturen. Um alle Kräfte in einer Struktur zu berechnen, muss die Anzahl von unbekanntem Grössen gleich der Anzahl der Gleichungen sein.

Die statischen Gleichgewichtsgleichungen können in jedem Knoten angewendet werden (einschließlich Auflager).

Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

Externe statische Unbestimmtheit

Wenn eine Struktur extern bestimmt ist, können alle Reaktionen unter Verwendung des globalen Gleichgewichts allein berechnet werden. Es gilt allgemein, dass der Grad der statischen Unbestimmtheit in 2D Rahmen h_e ist:

$h_e = r - (3 + e_h)$ dabei ist r die Anzahl der Auflagerreaktionen und e_h ist die Anzahl der (zusätzlichen) Bedingungsgleichungen, die von interne Bindungen angeboten werden

z.B. für ein Biegegelenk, das n Elemente verbindet $\Rightarrow e_h = n-1$

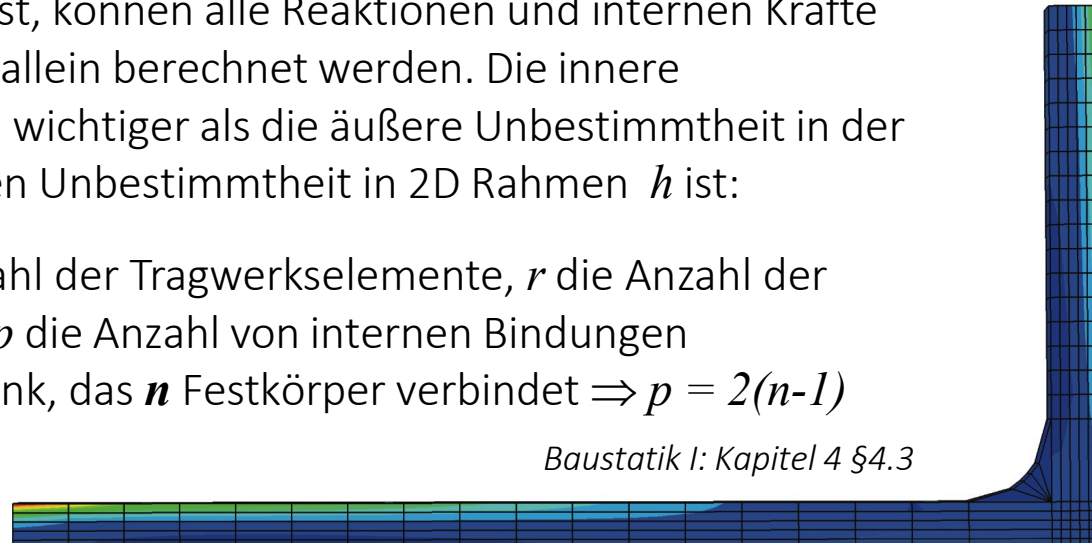
(Interne) statische Unbestimmtheit – Variante I

Wenn eine Struktur (intern) bestimmt ist, können alle Reaktionen und internen Kräfte unter Verwendung des Gleichgewichts allein berechnet werden. Die innere Unbestimmtheit ist im allgemeinen viel wichtiger als die äußere Unbestimmtheit in der Strukturanalyse. Der Grad der statischen Unbestimmtheit in 2D Rahmen h ist:

$h = p + r - 3n$ dabei ist n is die Anzahl der Tragwerkselemente, r die Anzahl der Auflagerreaktionen, p die Anzahl von internen Bindungen

z.B. für ein Biegegelenk, das n Festkörper verbindet $\Rightarrow p = 2(n-1)$

Baustatik I: Kapitel 4 §4.3



Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

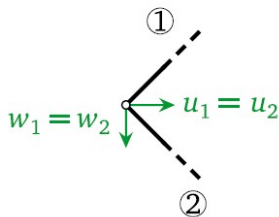
(Interne) statische Unbestimmtheit – Variante I

Wenn eine Struktur (intern) bestimmt ist, können alle Reaktionen und internen Kräfte unter Verwendung des Gleichgewichts allein berechnet werden. Der Grad der statischen Unbestimmtheit in 2D Rahmen h ist:

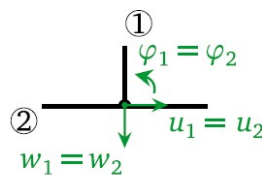
$$h = p + r - 3n$$

dabei ist n die Anzahl der Festkörper, r die Anzahl der Auflagerreaktionen, p die Anzahl von internen Bindungen für ein Biegegelenk, das n Festkörper verbindet $\Rightarrow p = 2(n-1)$

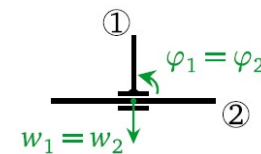
Bindungen stellen die Verbindungen zwischen Tragwerkselementen durch die Blockierung **relativer Verschiebungen** dar:



Biegegelenk ($p = 2$)



Einspannung ($p = 3$)



Gleitgelenk ($p = 2$)

Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

(Interne) statische Unbestimmtheit – Variante II

Für 2D Rahmen kann auch eine alternative Definition verwendet werden:

Der Grad der statischen Unbestimmtheit in 2D Rahmen h ist:

$$h = 3m + r - (3j + e_h)$$

dabei ist

m is die Anzahl der Tragwerkselementen

r die Anzahl der Auflagerreaktionen

j die Anzahl von Knoten

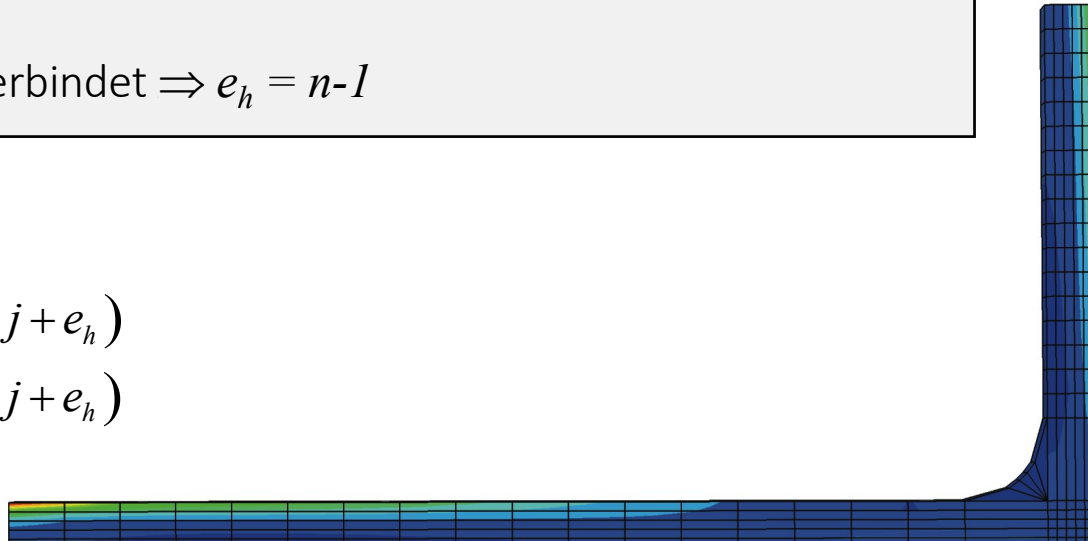
e_h ist die Anzahl der (zusätzlichen) Bedingungsgleichungen, die von interne Bindungen angeboten werden.

für ein Biege Gelenk, das n Elemente verbindet $\Rightarrow e_h = n-1$

Weitere Fälle

$$\text{3D Rahmen} \Rightarrow h = 6m + r - (6j + e_h)$$

$$\text{ebenen Gitter} \Rightarrow h = 3m + r - (3j + e_h)$$

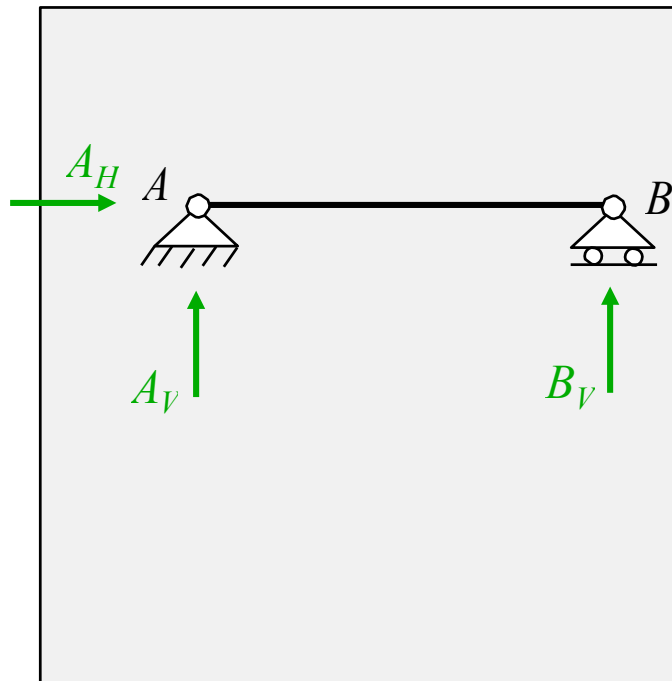


Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

Balken – Externe statische Unbestimmtheit

Wenn eine Struktur extern bestimmt ist, können alle Reaktionen unter Verwendung des globalen Gleichgewichts allein berechnet werden.

Bei zweidimensionale Tragwerke ist statisches Gleichgewicht mit drei Gleichgewichtsbedingungen gewährleistet.



Beispiel: Einfacher Balken
Externe statische Unbestimmtheit

3 unbekannte Reaktionskräfte: A_H , A_V and $B_V \Rightarrow r = 3$
3 globale Gleichgewichtsbedingungen

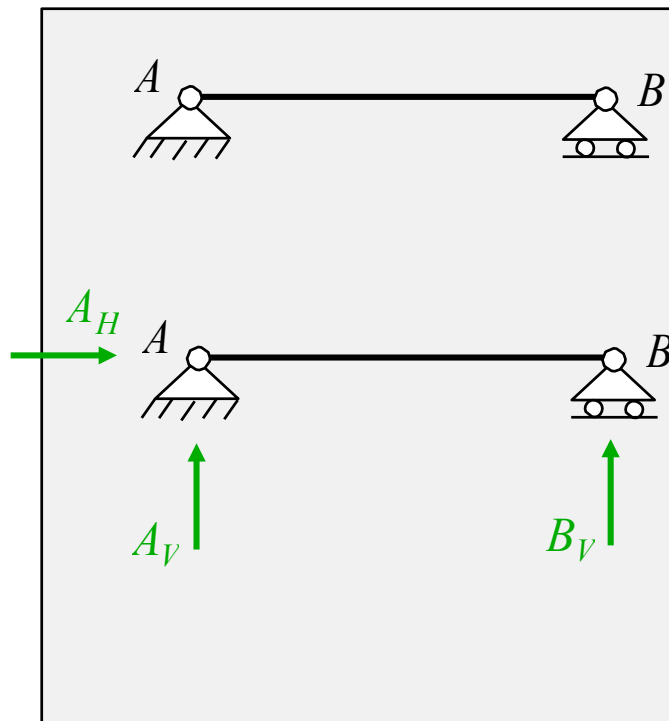
Der Grad der externen statischen Unbestimmtheit entspricht: $h_e = r - 3 = 0$

Das System ist statisch bestimmt.

Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

Balken – statische Unbestimmtheit (Variante I)

Bei zweidimensionale Tragwerke bestehen drei 3 Gleichgewichtsbedingungen pro Festkörper



The diagram shows a horizontal beam of length l supported at two points, A and B . Support A is a pin support, and support B is a roller support. Reaction forces are shown as green arrows: A_H (horizontal, pointing right) and A_V (vertical, pointing up) at A , and B_V (vertical, pointing up) at B .

Beispiel: Einfacher Balken
Interne statische Unbestimmtheit

1 Festkörper $\Rightarrow 3n = 3$
3 unbekannte Reaktionskräfte: A_H, A_V and $B_V \Rightarrow r = 3$
0 interne Bindungen (Gelenke) $\Rightarrow p = 0$

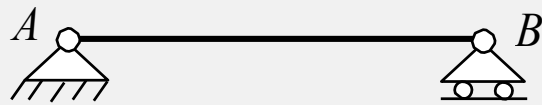
Der Grad der internen statischen Unbestimmtheit entspricht:
$$h = p + r - 3n = 0 + 3 - 3 \cdot 1 = 0$$

Das System ist statisch bestimmt.

Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

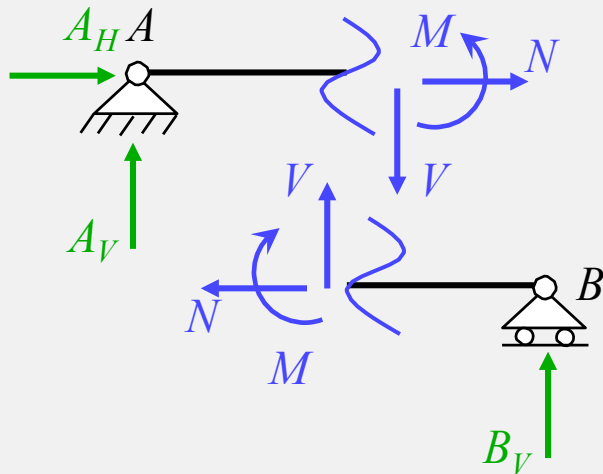
Balken – statische Unbestimmtheit – Variante II

Bei zweidimensionale Tragwerke bestehen drei unbekannte Schnittkräfte, Normalkraft (in Richtung der Trägerachse), Querkraft (senkrecht zur Trägerachse) und Biegemoment (bezogen auf den Schwerpunkt des Schnittes), d.h. 3 Gleichgewichtsbedingungen pro Element.



Beispiel: Einfacher Balken

Interne statische Unbestimmtheit



3 unbekannte innere Kräfte pro Element $\Rightarrow 3m = 3$

2 Knoten $\Rightarrow j = 2$

3 unbekannte Reaktionskräfte: A_H , A_V and $B_V \Rightarrow r = 3$

0 interne Bindungen (Gelenke) $\Rightarrow e_h = 0$

Der Grad der internen statischen Unbestimmtheit entspricht:

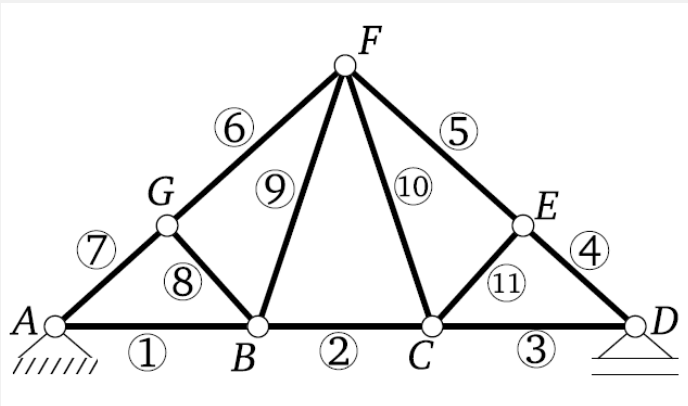
$$h = 3m + r - (3j + e_h) = 3 \cdot 1 + 3 - 3 \cdot 2 = 0$$

Das System ist statisch bestimmt.

Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

Fachwerke – Externe statische Unbestimmtheit

Wenn eine Struktur extern bestimmt ist, können alle Reaktionen unter Verwendung des globalen Gleichgewichts allein berechnet werden.



Kapitel 4 §4.3: Baustatik I

Beispiel: Polonceau-Binder

3 unbekannte Reaktionskräfte :

$$A_H, A_V \text{ and } D_V \Rightarrow r = 3$$

Der Grad der externen statischen Unbestimmtheit entspricht:

$$h_e = r - 3 = 3 - 3 = 0$$

Ergo, das System ist extern statisch bestimmt.

Zusammenfassung Baustatik I ... Statisch bestimmte Stabtragwerke

Fachwerke – statische Unbestimmtheit

Bei Fachwerkelementen sind nur die internen Normalkräfte unbekannt.

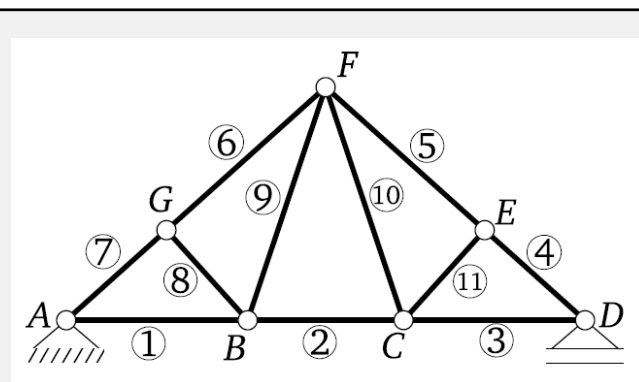
Die Anzahl der unbekannt inneren Kräfte ist daher gleich der Anzahl der Elemente, s .

Zusätzliche Unbekannte sind die Anzahl der Auflagerkräfte, r .

Anzahl der Unbekannten ist daher $= r+s$

Bei zweidimensionalen Fachwerken entstehen zwei Gleichgewichtsbedingungen bei jedem Knotenpunkt (bzw. drei Gleichgewichte im Fall räumlicher Fachwerke). Sei k die totale Anzahl der Knoten, einschliesslich derer an den Lagern. Der Grad der statischen Unbestimmtheit entspricht der Anzahl überzähliger

Unbekannter: $h = r + s - 2 k$

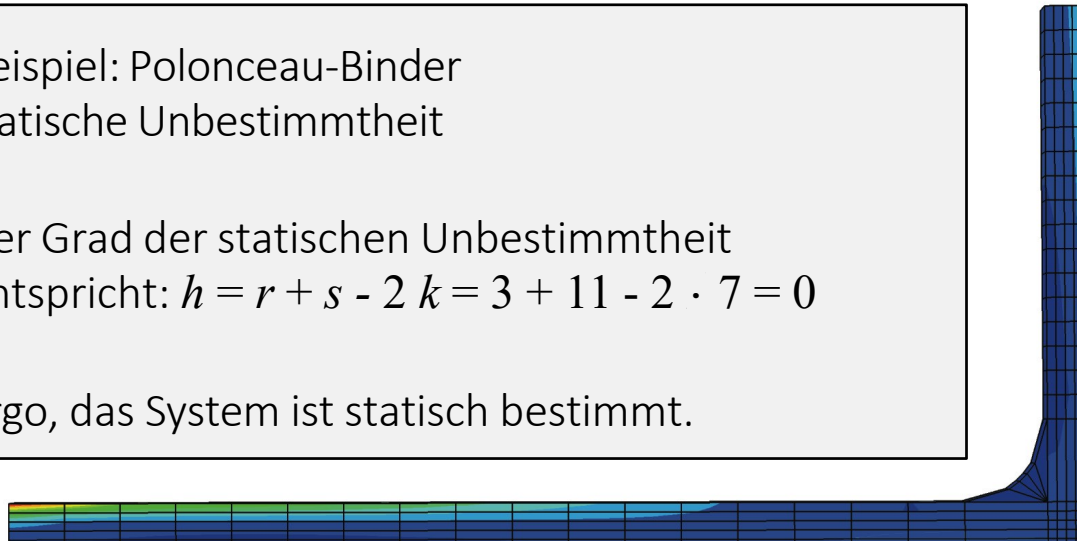


Kapitel 4 §4.3: Baustatik I

Beispiel: Polonceau-Binder
statische Unbestimmtheit

Der Grad der statischen Unbestimmtheit
entspricht: $h = r + s - 2 k = 3 + 11 - 2 \cdot 7 = 0$

Ergo, das System ist statisch bestimmt.

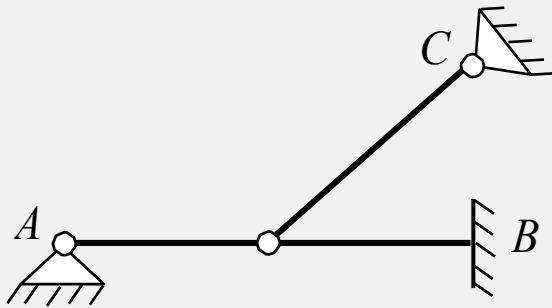


Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Biegegelenke - Externe statische Unbestimmtheit

Biegegelenke erzeugen eine Momentenfreigabe und stellen einen zusätzlichen Freiheitsgrad dar (in Ergänzung zu den Gleichungen des statischen Gleichgewichts).

Die Anzahl der zusätzlichen Bedingungsgleichungen ist gleich der Anzahl der Elemente, die mit dem Gelenk verbunden sind -1.



Beispiel: Gelenkrahmen

Externe statische Unbestimmtheit

7 unbekannte Reaktionskräfte: $A_H, A_V, B_H, B_V, B_M, C_H, C_V \Rightarrow r = 7$

3 globale Gleichgewichtsbedingungen

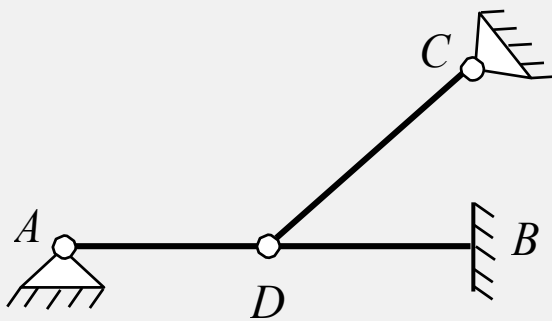
1 interne Bindung $\Rightarrow e_h = 3 - 1 = 2$

Der Grad der externen statischen Unbestimmtheit entspricht: $h_e = r - (3 + e_h) = 2$

Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Biegegelenke – Interne statische Unbestimmtheit – Variante I

Die Anzahl von zusätzlichen Bindungskräften für ein Gelenk, das n Festkörper verbindet
 $\Rightarrow p = 2(n-1)$



Beispiel: Gelenkrahmen
statische Unbestimmtheit

3 Festkörper $\Rightarrow n = 3$

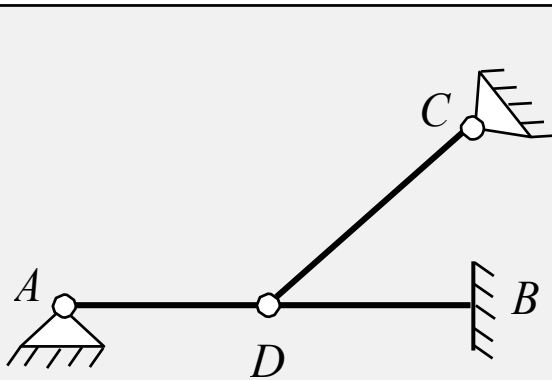
1 Gelenk, 3 verknüpfte Elemente $\Rightarrow p = 2 \cdot (3-1) = 4$
Bindungskräfte

Der Grad der internen statischen Unbestimmtheit
entspricht: $h_i = p + r - 3n = 4 + 7 - 9 = 2$

Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Biegegelenke – Interne statische Unbestimmtheit – Variante II

Die Anzahl von zusätzlichen Bindungskräften für ein Gelenk, das n Elemente verbindet $\Rightarrow p = 2(n-1)$



Beispiel: Gelenkrahmen
statische Unbestimmtheit

4 Knoten $\Rightarrow j = 4$

3 unbekannte innere Kräfte pro Element: $3m = 9$

7 unbekannte Reaktionskräfte: $A_H, A_V, B_H, B_V, B_H, B_M, C_H, C_V \Rightarrow r = 7$

1 interne Bindung $\Rightarrow e_h = 3-1=2$

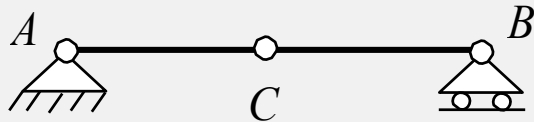
Der Grad der internen statischen Unbestimmtheit

entspricht: $h_i = 3m + r - (3j + e_h) = 3 \cdot 3 + 7 - (3 \cdot 4 + 2) = 2$

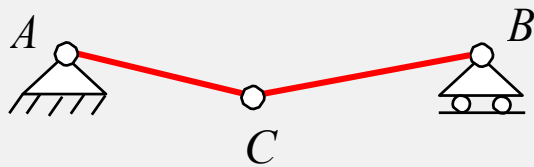
Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Stabilität

Stabilität ist mit der internen Unbestimmtheit verknüpft. Eine Struktur wird instabil falls die unbekannt Grössen weniger als die Gleichgewichtsgleichungen sind. Solche Strukturen sind *unterbestimmt*. In einem solchen Fall bildet das Tragwerk ein *Mechanismus*.



Beispiel: Einfacher Balken
Interne statische Unbestimmtheit



Mechanismus

2 Festkörper $\Rightarrow n = 2$

3 unbekannte Reaktionskräfte: A_H , A_V and $B_V \Rightarrow r = 3$

1 Gelenk, 2 verknüpfte Elemente $\Rightarrow p = 2 \cdot (2-1) = 2$

Bindungskräfte

Der Grad der internen statischen Unbestimmtheit entspricht:

$$h_i = p + r - 3n = 2 + 3 - 6 = -1$$

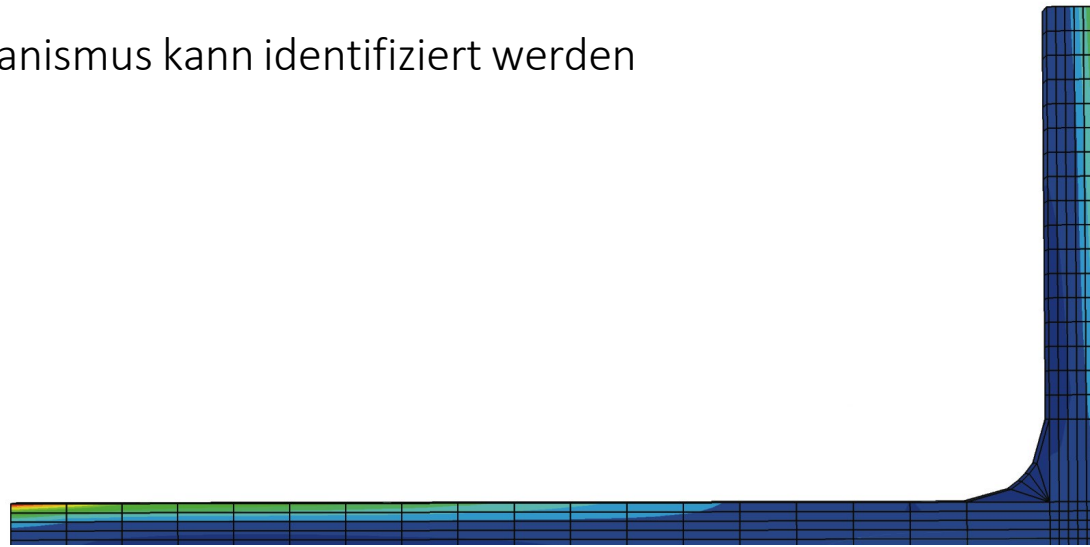
Das System bildet ein Mechanismus

Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Stabilität

Nicht alle bestimmten Strukturen sind stabil. Instabilität kann durch folgendes verursacht werden:

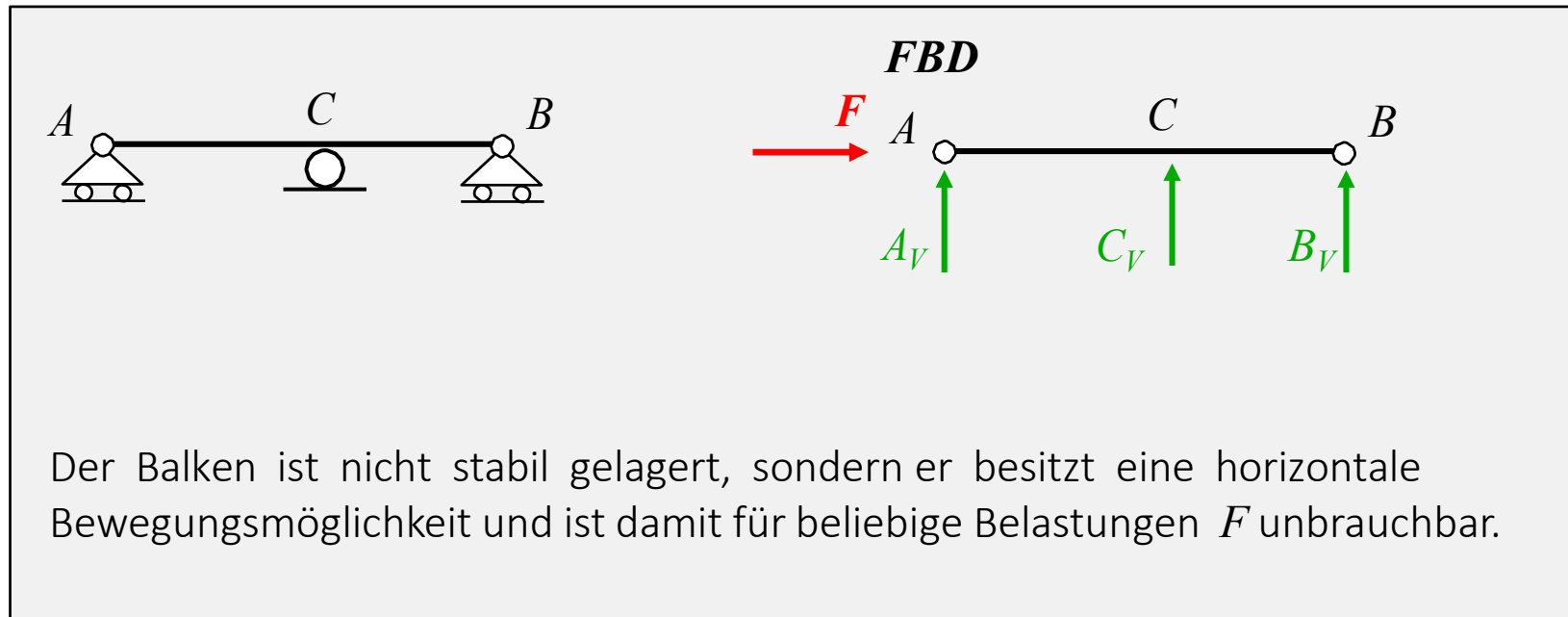
- Mängel an ausreichenden Reaktionen (siehe früheres Beispiel).
- Die Reaktionen sind parallel, können daher nur die Kräfte entlang einer einzigen Richtung annehmen.
- Alle Stützreaktionen treffen sich am gleichen Punkt: Das System ist frei, sich als starrer Körper um den Punkt zu drehen, an dem sich die Reaktionskomponenten treffen.
- Ein interner Zusammenbruchmechanismus kann identifiziert werden (Verschieblichkeit).



Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Instabilität

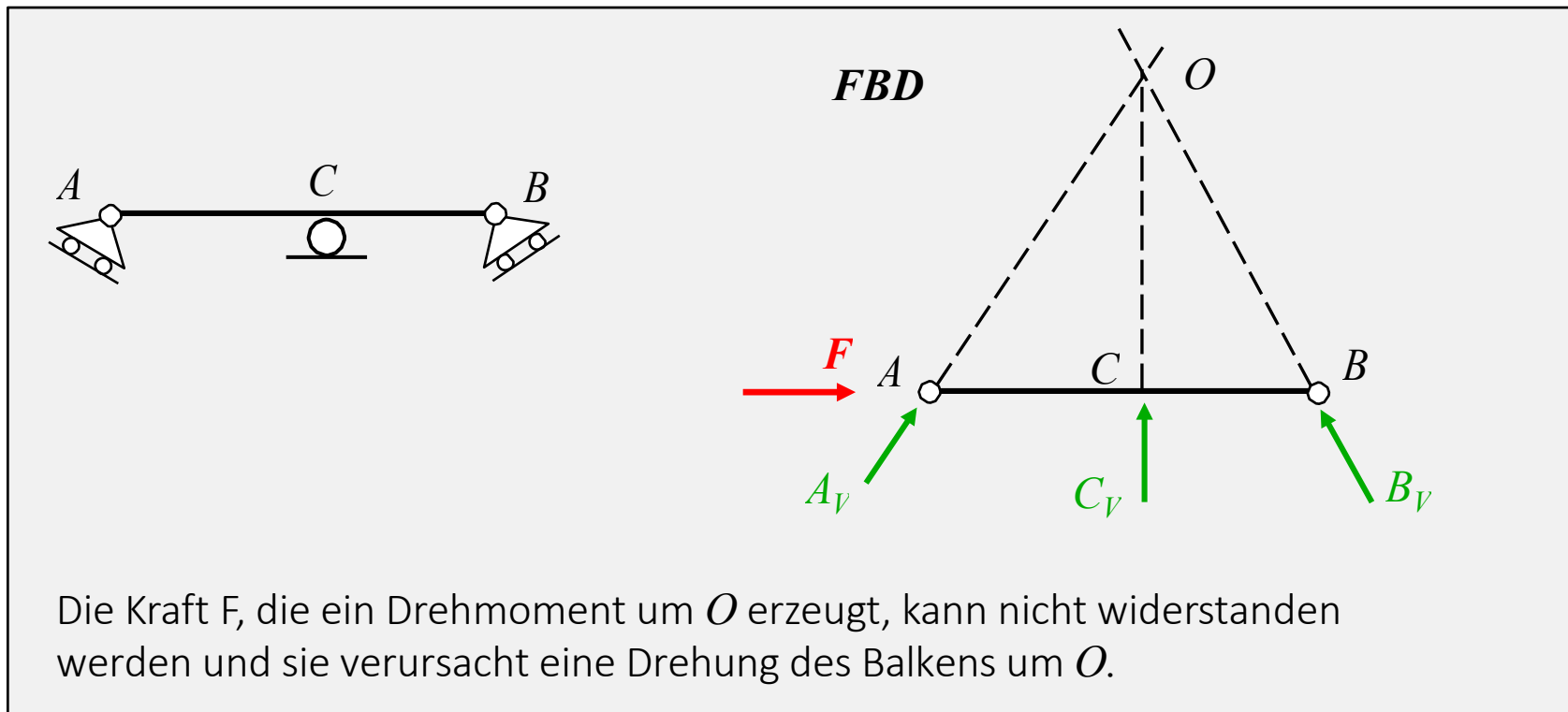
- Die Reaktionen sind parallel, können daher nur die Kräfte entlang einer einzigen Richtung annehmen.



Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Instabilität

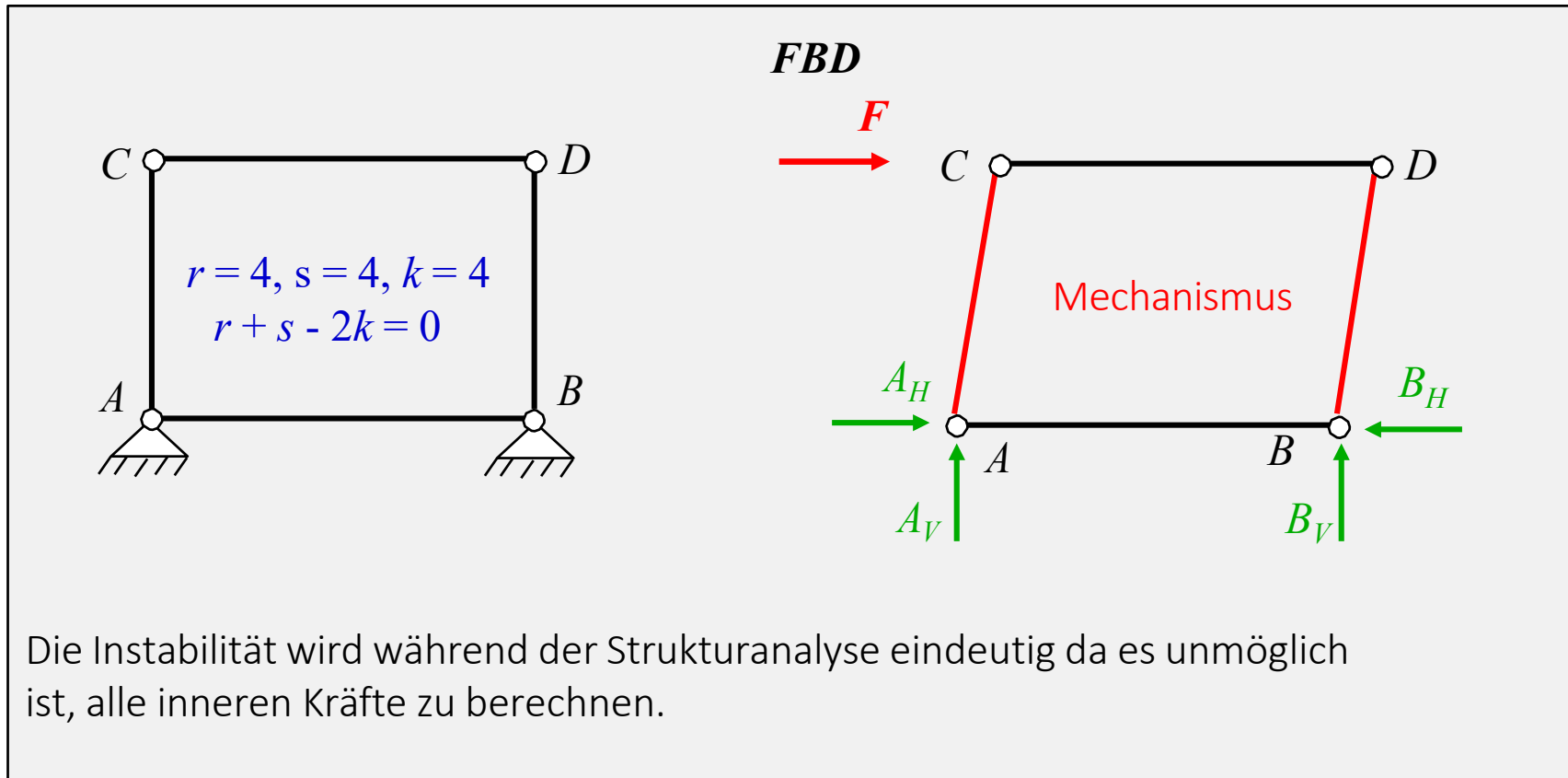
- Alle Stützreaktionen treffen sich am gleichen Punkt: Das System ist frei, sich als starrer Körper um den Punkt zu drehen, an dem sich die Reaktionskomponenten treffen.



Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Instabilität

- Ein interner Zusammenbruchmechanismus kann identifiziert werden (Verschieblichkeit).



Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Vorteile von statisch unbestimmten Strukturen

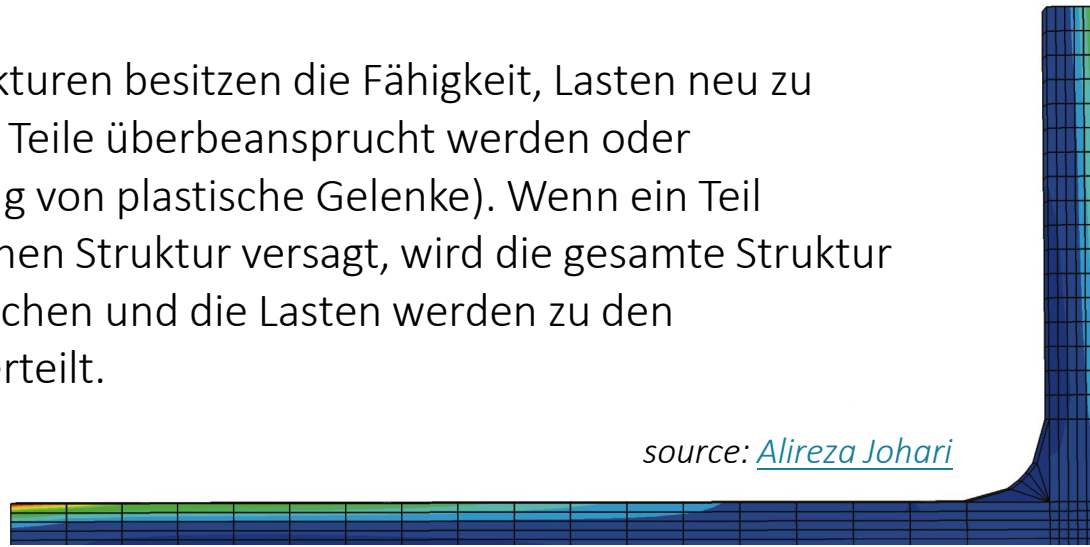
Statisch unbestimmte Strukturen neigen dazu, strukturell effizienter zu sein, indem sie die Belastung teilen. Vorteile davon sind:

Geringere Spannungen: Die maximalen Spannungen in statisch unbestimmten Strukturen sind im Allgemeinen niedriger als die in vergleichbaren bestimmten Strukturen.

Höhere Steifigkeit: Statisch unbestimmte Strukturen haben im Allgemeinen höhere Steifigkeiten (d.h. kleinere Verformungen) als solche von vergleichbaren bestimmten Strukturen.

Redundanz: Statisch unbestimmte Strukturen besitzen die Fähigkeit, Lasten neu zu verteilen, wenn bestimmte strukturelle Teile überbeansprucht werden oder zusammenbrechen (z.B. die Entwicklung von plastische Gelenke). Wenn ein Teil (Biegeelemente oder Stütze) einer solchen Struktur versagt, wird die gesamte Struktur nicht notwendigerweise zusammenbrechen und die Lasten werden zu den benachbarten Teilen der Struktur umverteilt.

source: [Alireza Johari](#)



Mangel an Redundanz kann fatal sein



46 Menschen starben, als die Silberne Brücke über den Ohio River am 15. Dezember 1967 zusammenbrach. (Foto: The West Virginia Encyclopedia)

Kommentar

Brücken werden häufig als bestimmte Systeme gebaut, da sie auf diese Weise keinen Belastungen durch Temperaturschwankungen ausgesetzt sind. Leider wurde der Mangel an Redundanz auch mit tödlichen Zusammenbrüchen verlinkt.

Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Nachteile von statisch unbestimmten Strukturen

Eine komplexere Analyse ist erforderlich. Alle drei grundlegenden Gleichungstypen der Strukturanalyse, d.h. Gleichgewichtsbedingungen, Kompatibilitätsbedingungen und Kraft-Verformungs-Beziehungen müssen verwendet werden, um eine unbestimmte Struktur analysieren zu können. Für statisch bestimmte Strukturen reichen die Gleichgewichtsbedingungen.

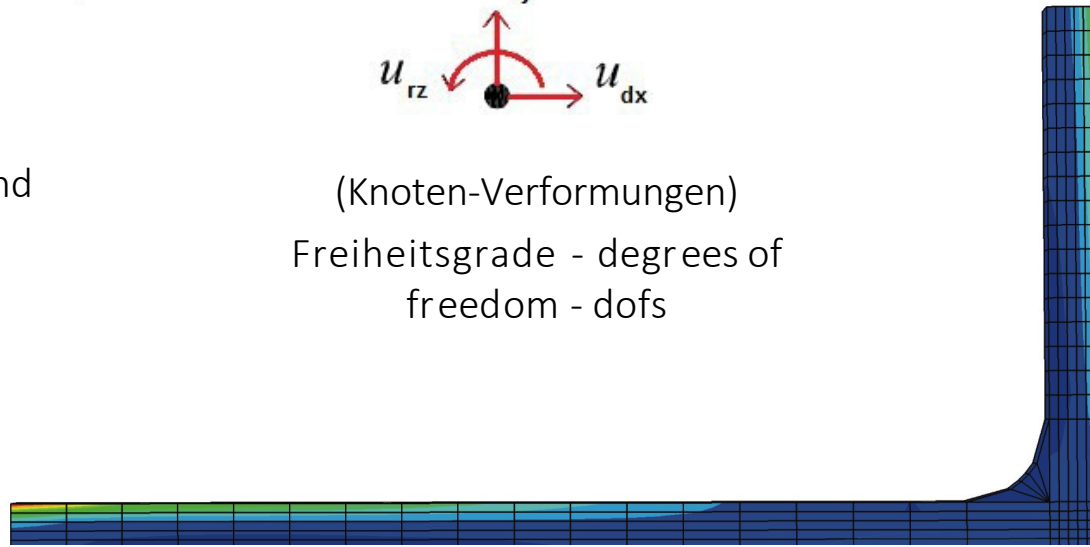
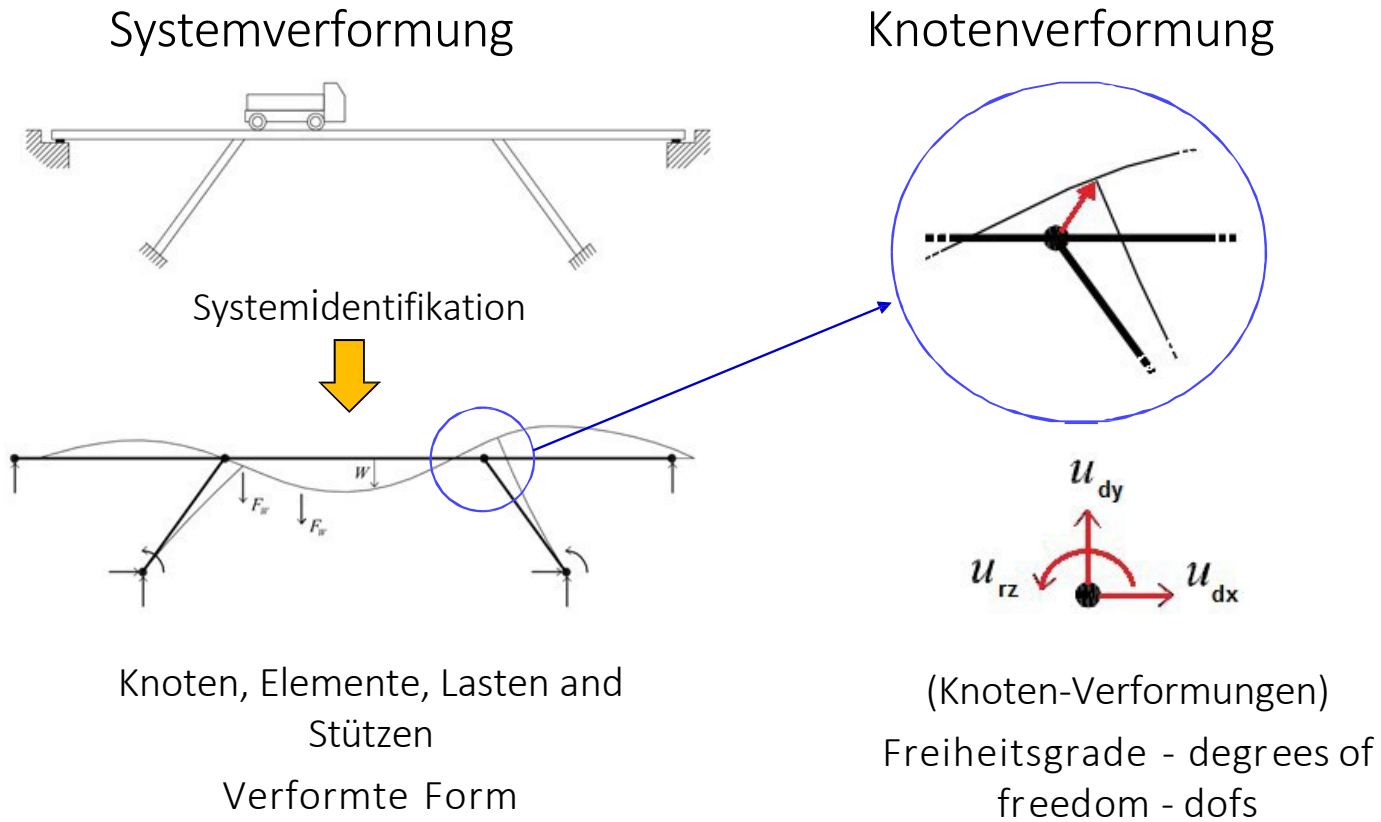
Spannungen aufgrund von Fundamentabsenkungen: Absenkungen verursachen keine Spannungen in bestimmten Strukturen; sie können jedoch signifikante Spannungen in unbestimmten Strukturen induzieren.

Spannungen aufgrund von Temperaturänderungen und Herstellungsfehlern: Diese Effekte können in unbestimmten Strukturen signifikante Spannungen induzieren.

source: [Alireza Johari](#)



Verformungen



Kommentar

Kommen wir jetzt zu den Verformungen eines Systems, die sich durch Verformung seiner Elemente ausdrücken.

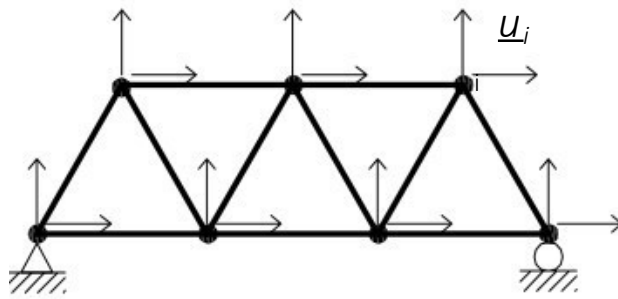
Für diskrete Systeme, bestimmen die Knotenverformungen die sogenannte **Freiheitsgrade** des Systems.

Konkreter entspricht die Anzahl der Freiheitsgrade der Gesamtzahl der unabhängigen Verschiebungen oder Bewegungsarten.

Freiheitsgrade

Wir nehmen an, dass die Elementen axial dehnbar sind

Fachwerke

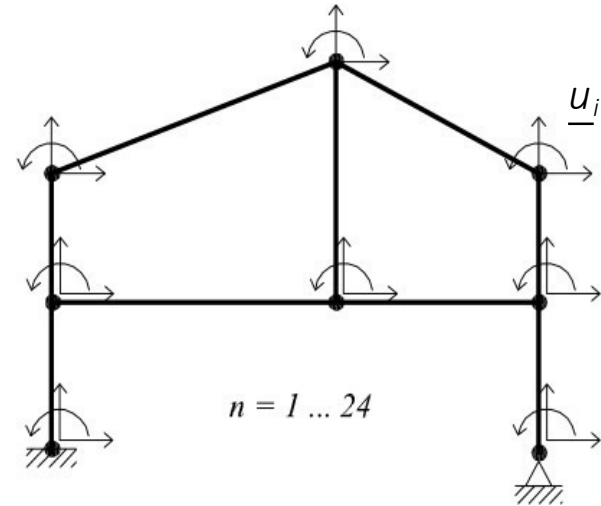


$$n = 1 \dots 14$$

$$\underline{u}_i = (u_{dx}, u_{dy})$$

$$7 * 2 = 14 \text{ dof}$$

Rahmen



$$n = 1 \dots 24$$

$$\underline{u}_i = (u_{dx}, u_{dy}, \varphi)$$

$$8 * 3 = 24 \text{ dof}$$

dof pro Knoten

dof pro Struktur

Kommentar

Im fall von Fachwerken, gibt es zwei Freiheitsgrade pro Knoten.

Im Rahmen dagegen, gibt es 3 Freiheitsgrade pro Knoten.

Daher sind die gesamten Freiheitsgrade pro Struktur als die Summe der Freiheitsgraden der Knoten zu betrachten.

Statisch unbestimmte Stabtragwerke

Kinematische Unbestimmtheit

Diese Form der Unbestimmtheit äußert sich in den Freiheitsgraden der Struktur (dofs); Dies ist von besonderer Relevanz in der Steifigkeitsmethode, wo die Unbekannten die Verschiebungen sind.

Der Grad der kinematischen Unbestimmtheit ist die Anzahl der unbekanntten Verschiebungen an den Knoten und wird definiert als:

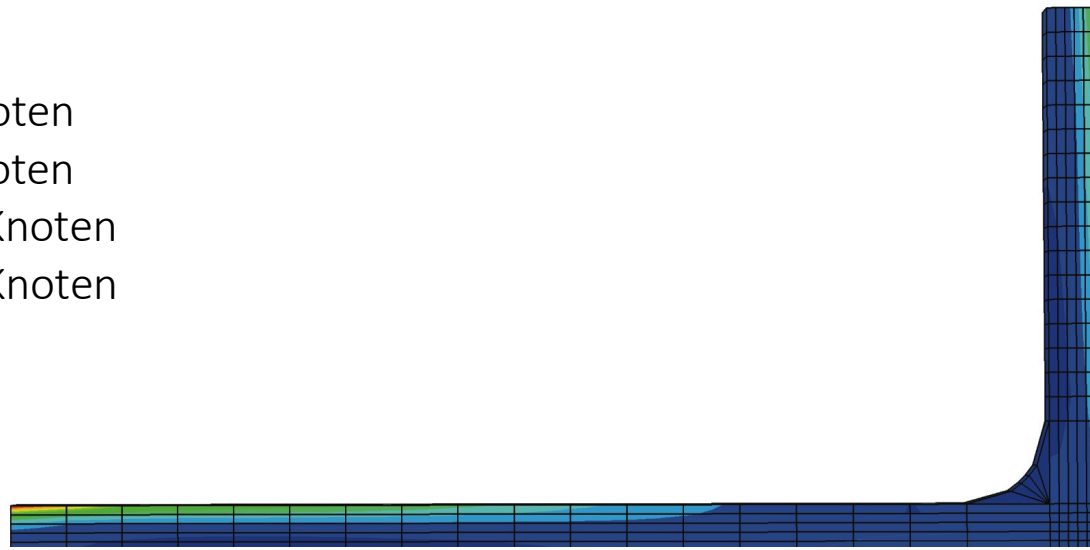
$k = N_{dof} - r$ wobei N_{dof} die Anzahl der Freiheitsgrade der Knoten, und r die Anzahl der Auflagerreaktionen ist.

3D Rahmen \Rightarrow 6 Freiheitsgrade pro Knoten

2D Rahmen \Rightarrow 3 Freiheitsgrade pro Knoten

3D Fachwerke \Rightarrow 3 Freiheitsgrade pro Knoten

2D Fachwerke \Rightarrow 2 Freiheitsgrade pro Knoten

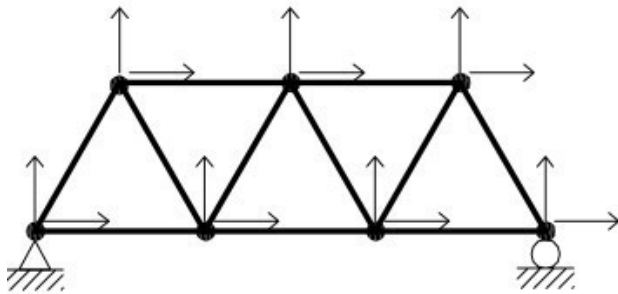


Kinematische Unbestimmtheit

Der Grad der kinematischen Unbestimmtheit bezeichnet sich als: $k = N_{dof} - r$

Beispiel

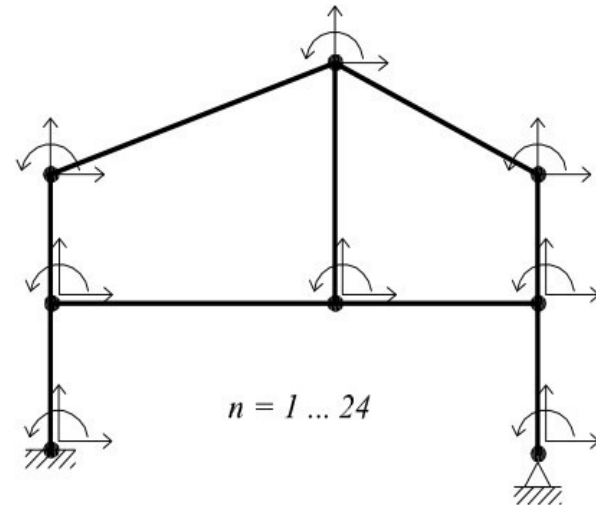
Fachwerke



$$n = 1 \dots 14$$

$$k = 2 \cdot 7 - 3 = 11$$

Rahmen



$$n = 1 \dots 24$$

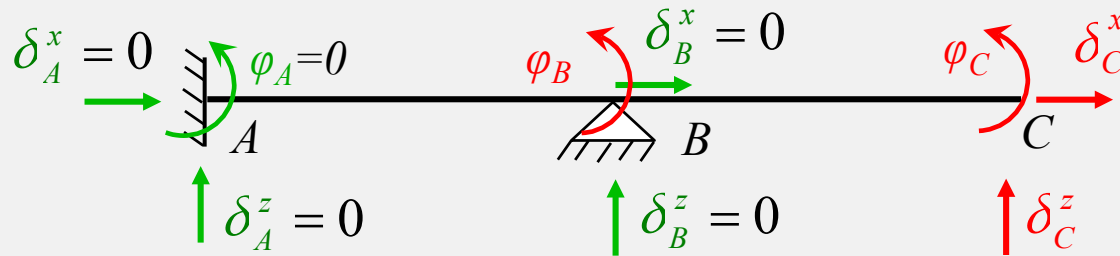
$$k = 24 - 3 = 21$$

Wir nehmen an, dass die Elementen axial dehnbar sind

Kinematische Unbestimmtheit

Der Grad der kinematischen Unbestimmtheit bezeichnet sich als: $k = N_{dof} - r$

Sonderfall



$$k = 3 \cdot 3 - 5 = 4$$

Die unbekannt (elastische Einspannungen) Freiheitsgrade sind: $\varphi_B, \varphi_C, \delta_C^x, \delta_C^z$

Jedoch werden Balken oft als nicht (axial) dehnbar angenommen. Dies impliziert

$$\delta_C^x = \delta_B^x = \delta_A^x = 0$$

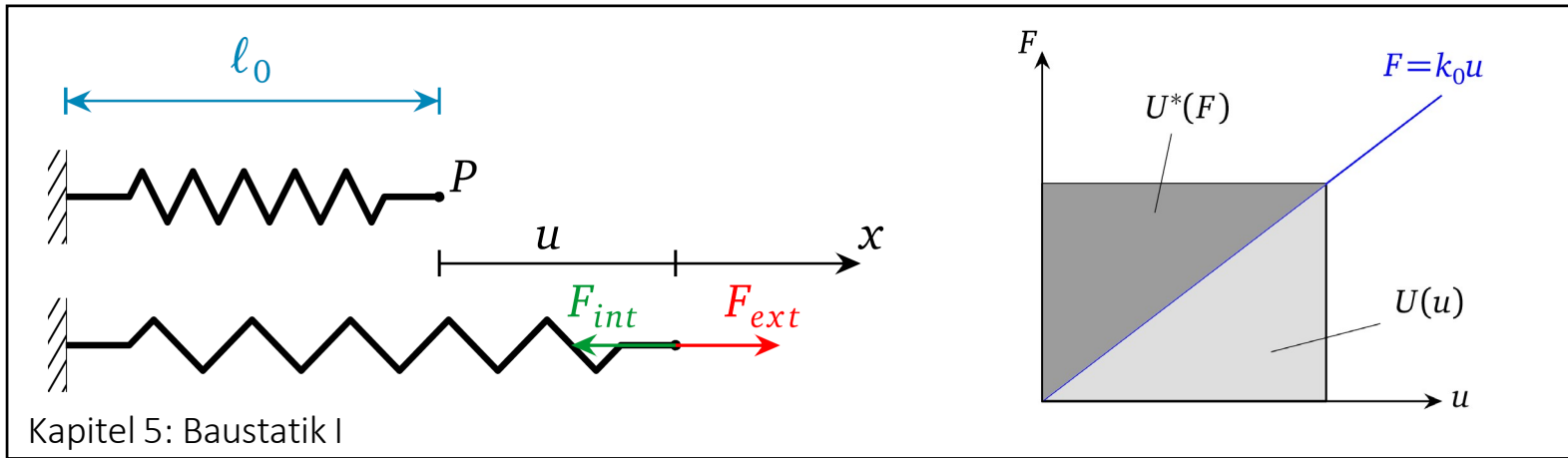
Fazit: die unbekannt (elastischen Eigenspannungen) Freiheitsgrade sind schliesslich:

$$\varphi_B, \varphi_C, \delta_C^z \text{ und } k = 3 \neq 4$$

Kommentar

In dieser Regel haben wir einen Sonderfall im Fall von Elementen die nicht axial deformierbar sind. Dies impliziert, dass die axialen Verschiebungen entlang der Balkenelemente gleich sein müssen.

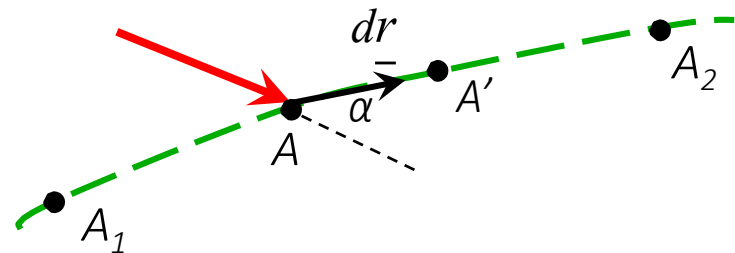
Zusammenfassung Baustatik I ...



Allgemeine Beschreibung der Arbeit

Die Arbeit entsteht infolge der Kraft \underline{F}
während der Verschiebung $d\underline{r}$:

$$dW = \underline{F} \cdot d\underline{r}$$



Kommentar

Aus der Baustatik I haben wir schon die allgemeine Beschreibung der Arbeit gesehen. Nur kurz zu wiederholen, die Arbeit entsteht infolge der Kraft \underline{F} während der Verschiebung $d\mathbf{r}$ und ist als internes Produkt der beiden (Kraft & Verschiebung) definiert.

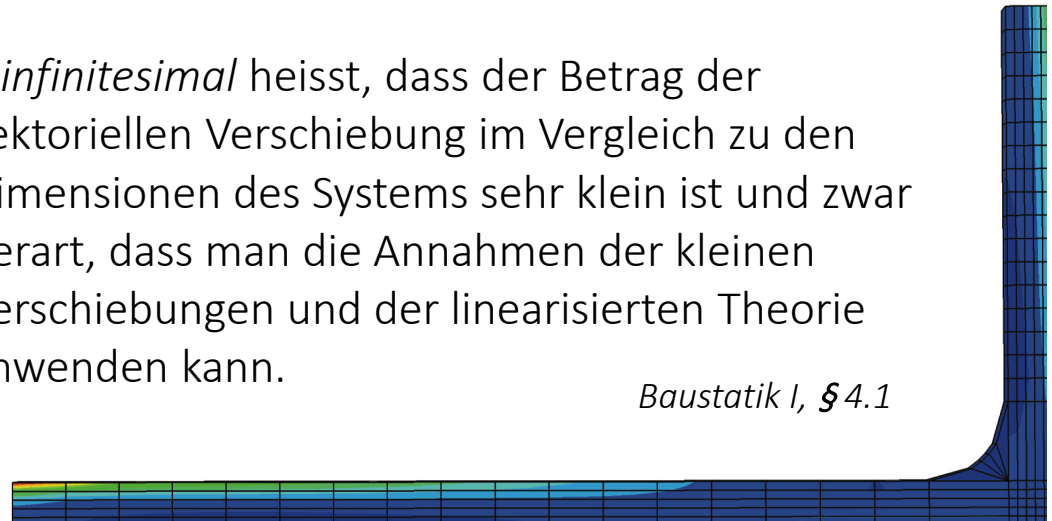
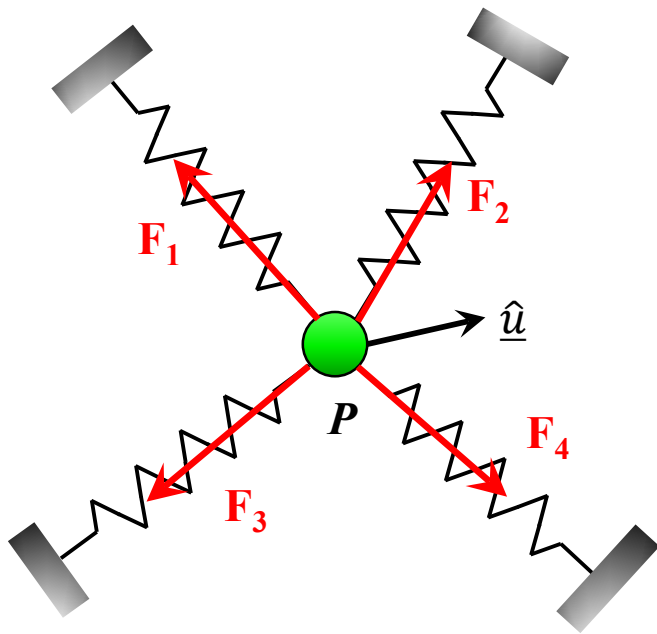
Für das Beispiel einer Feder, bei der wir eine linear ansteigende Kraft haben, ergibt sich die Arbeit als die Fläche unter dem Kraftverschiebungsdiagramm.

Prinzip der virtuellen Arbeit

Nehmen wir eine kleine *virtuelle Verschiebung* (\hat{u}) von einem Partikel P an, die von mehreren Kräften beansprucht wird.

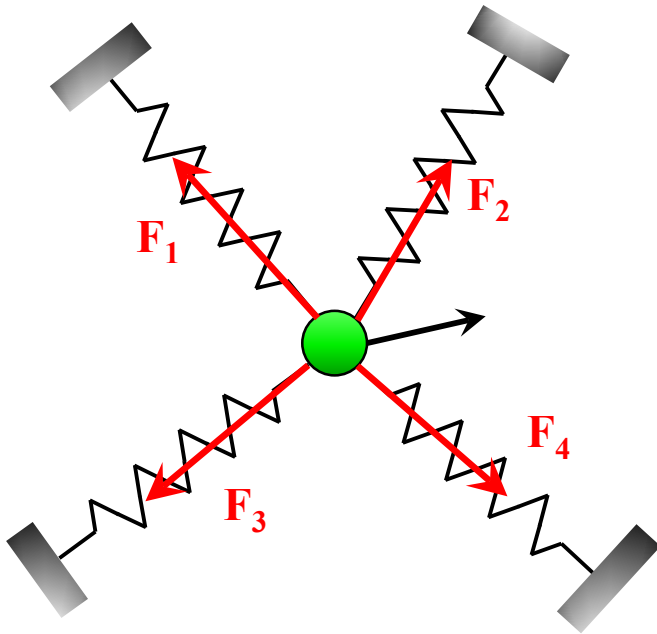
Ein Feld virtueller Verschiebungen ist in jedem Punkt P durch den fiktiven, infinitesimalen Verschiebungsvektor \hat{u} definiert:

- *fiktiv* heisst, dass es eine gedankliche Verschiebung ist, die nichts mit der realen Verschiebung des Systems aufgrund der Lasten zu tun hat.
- *infinitesimal* heisst, dass der Betrag der vektoriellen Verschiebung im Vergleich zu den Dimensionen des Systems sehr klein ist und zwar derart, dass man die Annahmen der kleinen Verschiebungen und der linearisierten Theorie anwenden kann.



Zusammenfassung Baustatik I ... Prinzip der virtuellen Arbeit

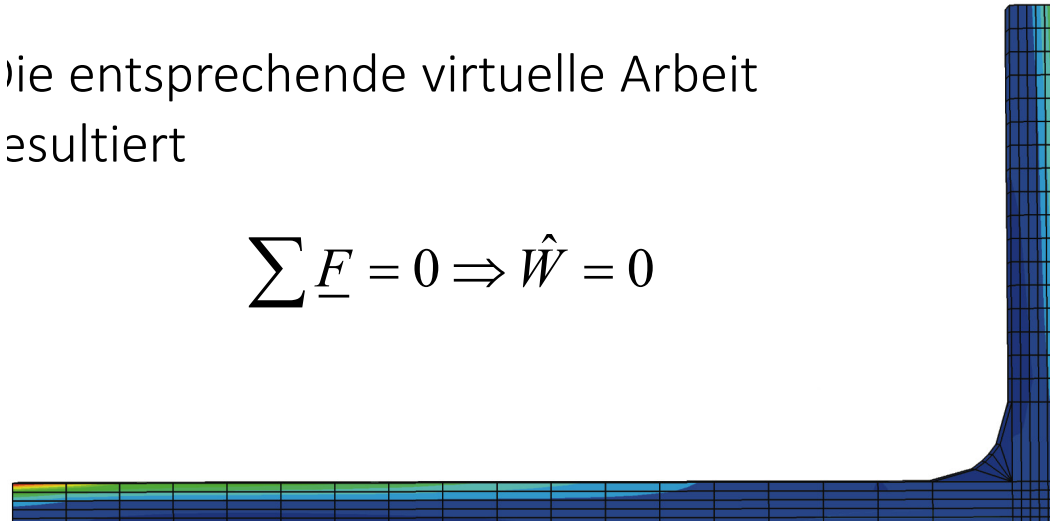
Nehmen wir eine kleine *virtuelle Verschiebung* () von einem Partikel P an, die von mehreren Kräften beansprucht wird.



$$\begin{aligned}\hat{W} &= \underline{F}_1 \cdot \hat{\underline{u}} + \underline{F}_2 \cdot \hat{\underline{u}} + \underline{F}_3 \cdot \hat{\underline{u}} + \underline{F}_4 \cdot \hat{\underline{u}} \\ &= (\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4) \cdot \hat{\underline{u}} = \\ &= \sum \underline{F} \cdot \hat{\underline{u}}\end{aligned}$$

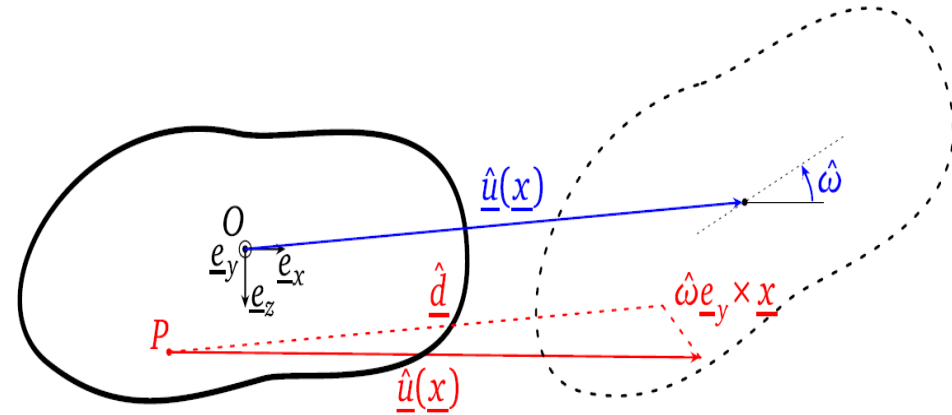
Die entsprechende virtuelle Arbeit resultiert

$$\sum \underline{F} = 0 \Rightarrow \hat{W} = 0$$



Prinzip der virtuellen Arbeit

Undeformierbare Festkörper



Nehmen wir ein mechanisches System (\mathcal{S}) an, belastet durch eine Anzahl von Einzellasten, $\{\underline{F}_i, i=1, \dots, n\}$, angreifend in den Punkten A_i sowie eine Anzahl von Drehmomenten, $\{\underline{M}_j, j=1, \dots, m\}$ angreifend in den Punkten B_j . Die virtuelle Arbeit der angreifenden Kräfte und Momente im virtuellen Verschiebungsfeld ist definiert durch:

$$\hat{V}_e \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \bar{\underline{F}}_i \cdot \hat{\underline{u}}(A_i) + \sum_{j=1}^m \underline{M}_j \cdot \hat{\underline{\omega}}$$

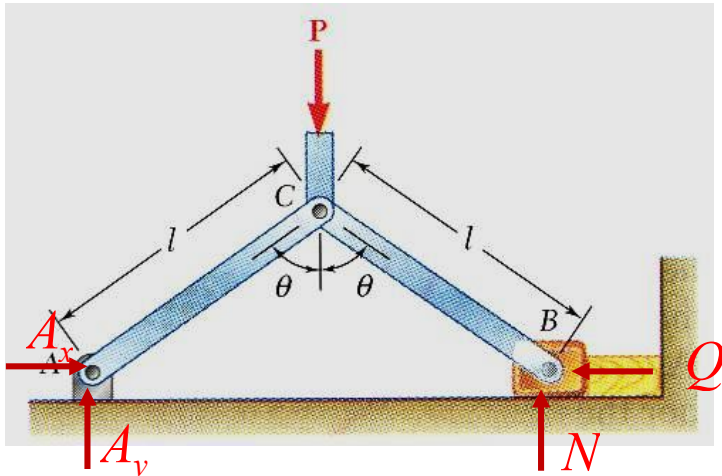
Prinzip der virtuellen Arbeit (PVA).

Das System (\mathcal{S}) ist im Gleichgewicht, wenn und nur wenn die Arbeit der äusseren Kräfte für alle virtuellen Verschiebungsfelder null ist.

$$\text{Gleichgewicht} \iff \hat{\mathcal{W}}_e = 0 \quad (4.28)$$

Prinzip der virtuellen Arbeit - Beispiel

Bestimmen Sie die Auflagerkräfte, die infolge einer Kraft P , welche in C angreift, entstehen. Nehmen Sie an, dass es keine Reibung gibt.



Das System ist in Gleichgewicht.
In Punkt B bietet ein Metallschraubstock eine horizontale Kraft

Zuerst betrachten wir die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - Q = 0$$

Kräftegleichgewicht entlang x-Achse

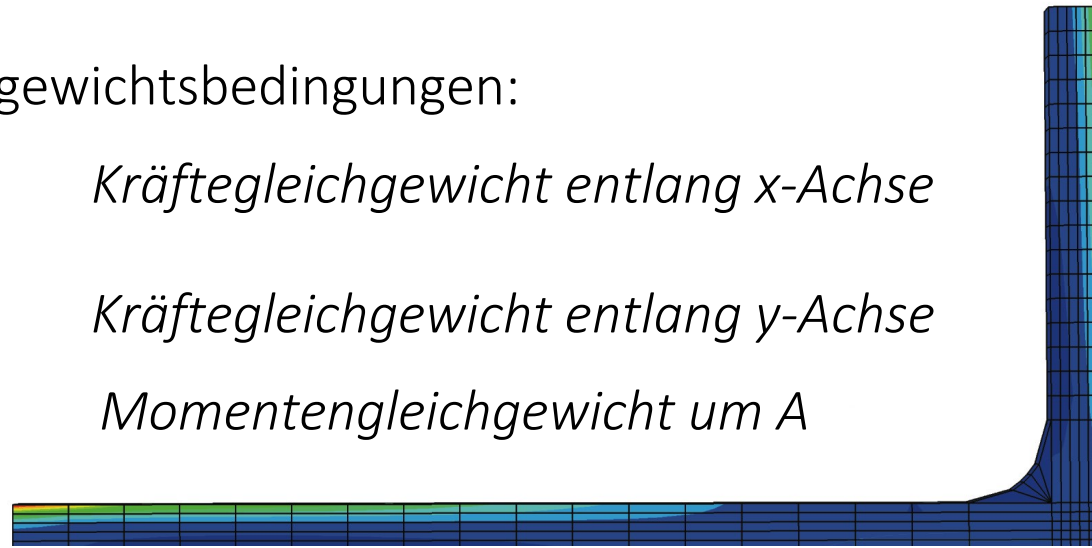
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + N - P = 0$$

Kräftegleichgewicht entlang y-Achse

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N x_B - P x_B = 0$$

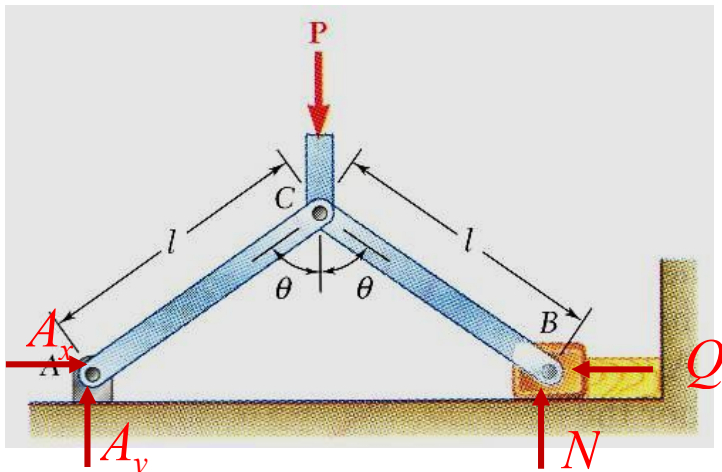
Momentengleichgewicht um A

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N x_B - \frac{P x_B}{2}$$



Prinzip der virtuellen Arbeit - Beispiel

Bestimmen Sie die Auflagerkräfte, die infolge einer Kraft P , welche in C angreift, entstehen. Nehmen Sie an, dass es keine Reibung gibt.



Das System ist in Gleichgewicht.
In Punkt B bietet ein Metallschraubstock eine horizontale Kraft

Zuerst betrachten wir die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - Q = 0$$

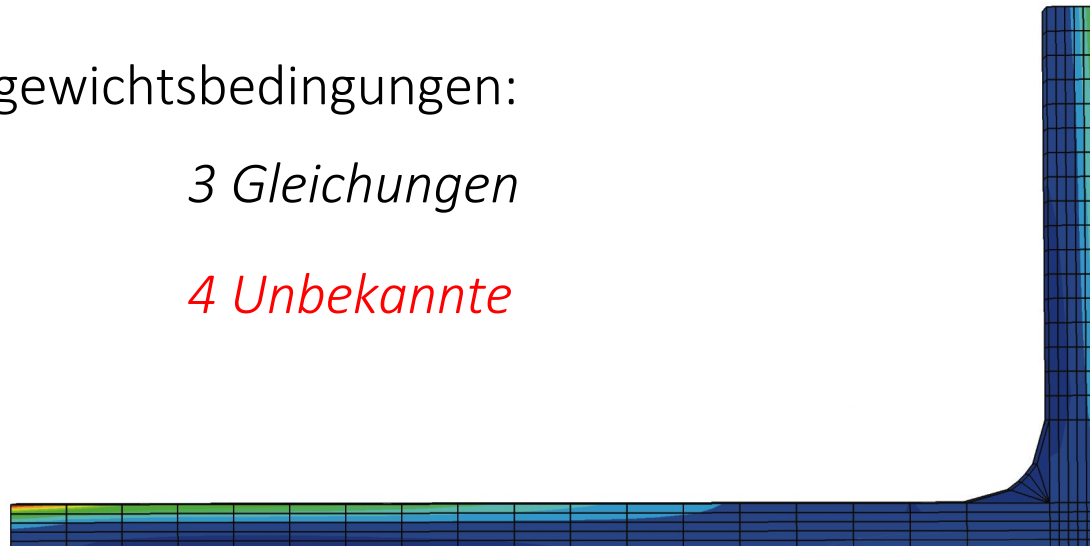
3 Gleichungen

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + N - P = 0$$

4 Unbekannte

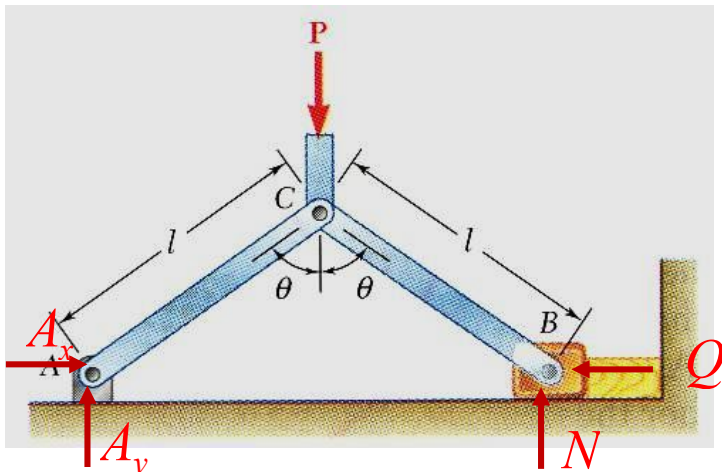
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N x_B - P x_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N x_B - \frac{P x_B}{2}$$



Prinzip der virtuellen Arbeit - Beispiel

Bestimmen Sie die Auflagerkräfte, die infolge einer Kraft P , welche in C angreift, entstehen. Nehmen Sie an, dass es keine Reibung gibt.



Das System ist in Gleichgewicht.
In Punkt B bietet ein Metallschraubstock eine horizontale Kraft

Zuerst betrachten wir die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum_{\rightarrow+} F_x = 0 \Rightarrow A_x = Q$$

3 Gleichungen

$$\sum_{\uparrow+} F_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2}$$

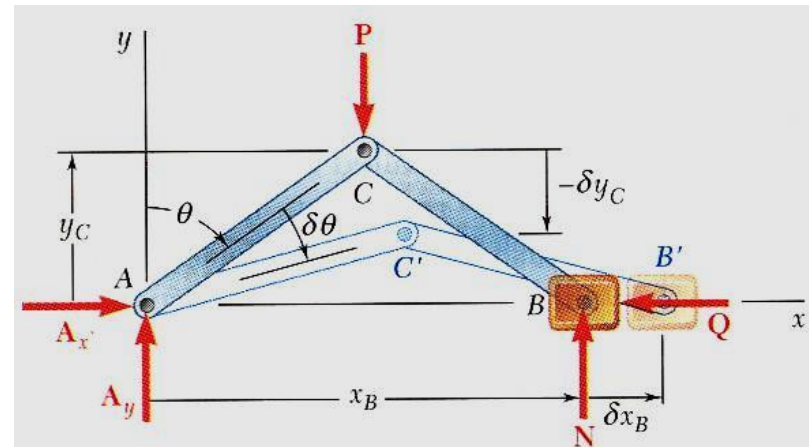
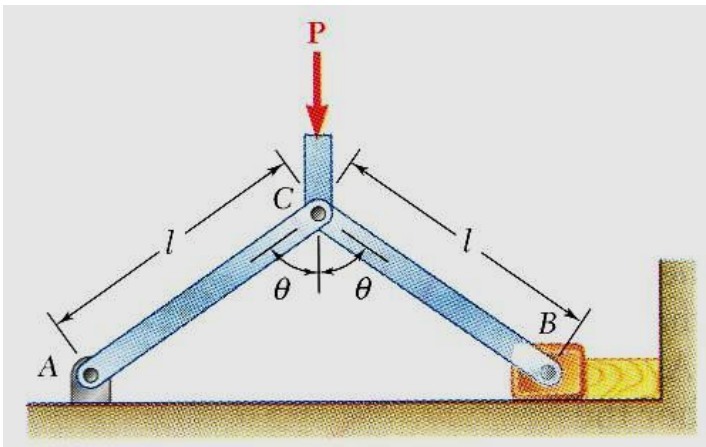
4 Unbekannte

$$\sum_{\circlearrowleft+} M_A = 0 \Rightarrow N = \frac{P}{2}$$

A_x, Q bleiben unbekannt

Prinzip der virtuellen Arbeit - Beispiel

Bestimmen Sie die Auflagerkräfte im Block, die infolge einer Kraft P , welche in C angreift, entstehen. Nehmen Sie an, dass es keine Reibung gibt.

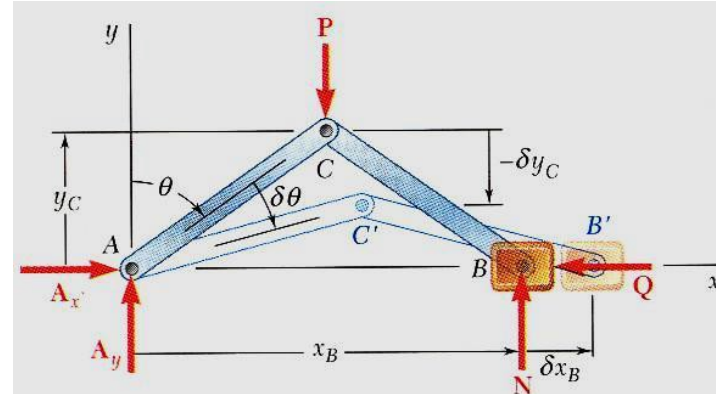
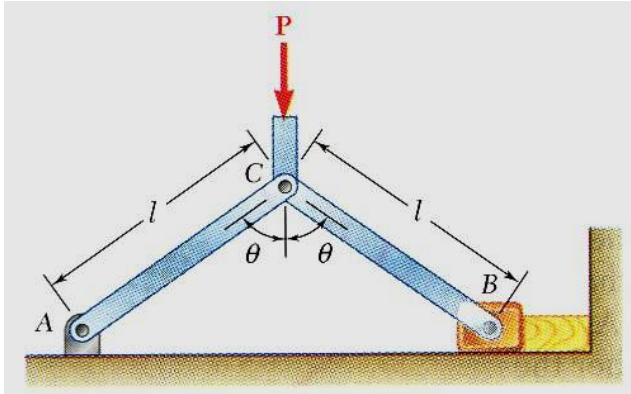


Wir berücksichtigen die Arbeit bei denjenigen Kräften, die eine virtuelle Rotation $\Delta\theta$ verursachen; $\Delta\theta$ ist ein positives Inkrement von θ .

Nur die Kräfte P und Q erzeugen eine Arbeit ungleich Null.

$$dW_Q = (-Q) \cdot \|\delta x\|_B, \quad dW_P = P \cdot \|\delta y_C\|$$

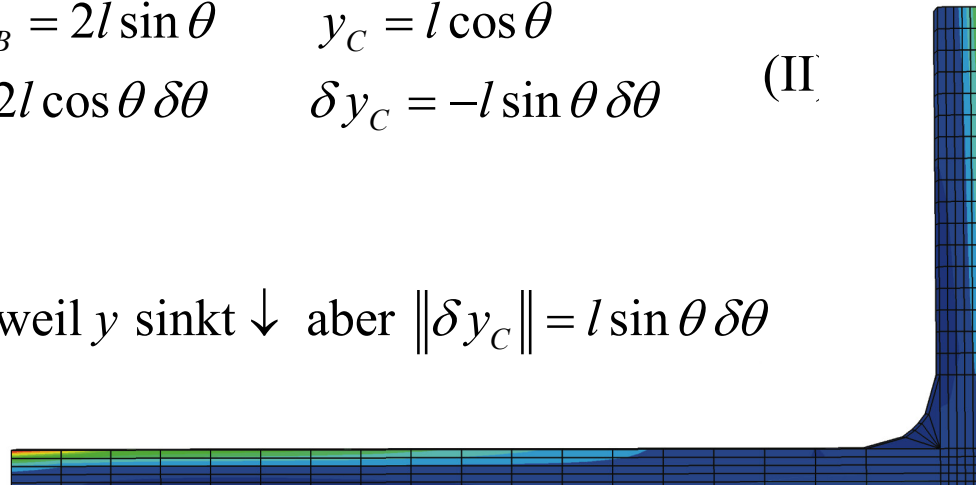
Prinzip der virtuellen Arbeit - Beispiel



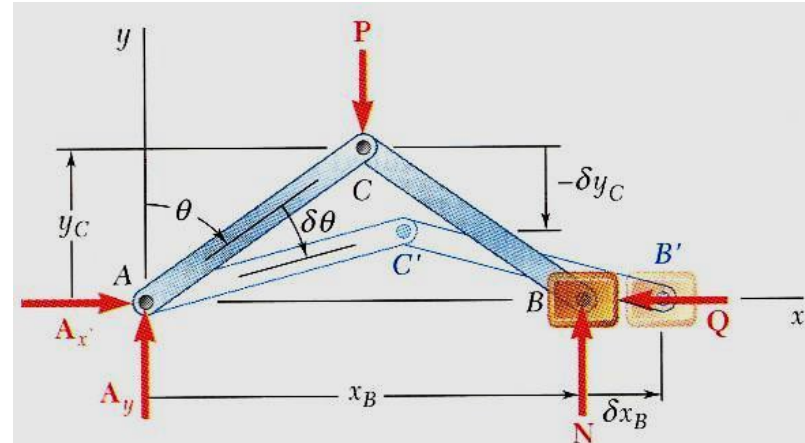
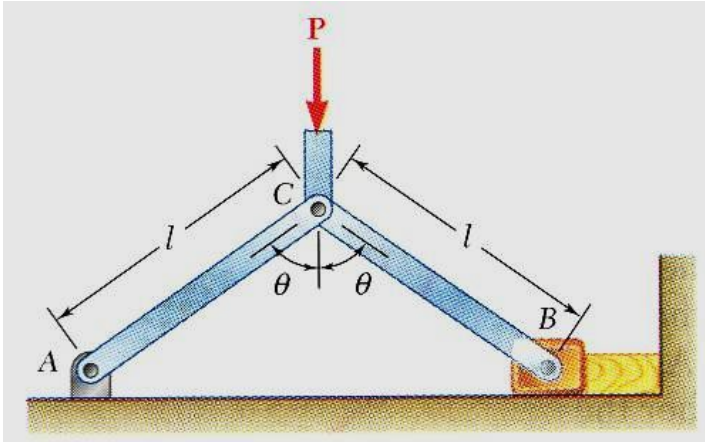
$$dW = 0 \Rightarrow \delta W_Q + \delta W_P = 0 \Rightarrow -Q \|\delta x_B\| + P \|\delta y_C\| = 0$$

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \sin \theta & y_C &= l \cos \theta \\ \delta x_B &= 2l \cos \theta \delta \theta & \delta y_C &= -l \sin \theta \delta \theta \end{aligned} \quad (\text{II})$$

$$\delta y_C = -l \sin \theta \delta \theta < 0 \text{ weil } y \text{ sinkt } \downarrow \text{ aber } \|\delta y_C\| = l \sin \theta \delta \theta$$



Prinzip der virtuellen Arbeit - Beispiel



$$(I) \stackrel{(II)}{\Rightarrow} -Q2l \cos \theta \delta\theta + Pl \sin \theta \delta\theta = 0 \Rightarrow Q = \frac{P}{2} \tan \theta = A_x$$

Durch das Prinzip der virtuellen Arbeit sind alle unbekannte Kräfte definiert.

Prinzip der virtuellen Arbeit

Deformierbare Festkörper - Kontinuumsmechanik

$$\left(\right) \quad \left(\right) \quad \left(\right)$$

$$\hat{W}_e = \int_V \underline{q}(\underline{x}) \cdot \hat{\underline{u}}(\underline{x}) dV + \int_{\partial V} \hat{\underline{u}}(\underline{x}) \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) dA$$

$$\hat{W}_i = - \int_V \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{x}) : \hat{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV$$

Kapitel 5 §6.1: Baustc

Prinzip der virtuellen Arbeit (PVA).

Für jedes statisch zulässige Spannungsfeld $\underline{\tilde{\sigma}}$ und jedes kinematisch zulässige Verschiebungsfeld $\hat{\underline{u}}$ ist die Summe der virtuellen Arbeit der inneren und äusseren Kräfte null:

$$\forall \underline{\tilde{\sigma}} \text{ stat. zul.}, \forall \hat{\underline{u}} \text{ kin. zul.}, \quad \hat{W}_i + \hat{W}_e = 0 \quad (5.139)$$

wobei die jeweiligen Ausdrücke in (5.137) und (5.138) gegeben sind.

Kommentar

Bei verformbaren Körpern kann die interne Arbeit als Ergebnis des Beitrags der Spannungs- und Spannungstensoren berechnet werden.

Prinzip der virtuellen Arbeit

Tragwerke

Kapitel 8 §3.5: Baustatik I

Prinzip der virtuellen Arbeit (Balken).

Für jedes statisch zulässige Schnittgrössenfeld $\tilde{\mathbb{T}}$ und jedes kinematisch zulässige, virtuelle Verschiebungsfeld $(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\varphi}})$ ist die Summe der inneren Arbeiten $\hat{\mathcal{W}}_i$ und äusseren Arbeiten $\hat{\mathcal{W}}_e$ null:

$$\hat{\mathcal{W}}_i + \hat{\mathcal{W}}_e = 0 \quad (8.37)$$

wobei^a:

$$\hat{\mathcal{W}}_i = - \int_{\mathcal{L}} (\tilde{N} \hat{\varepsilon} + \tilde{V}_y \hat{\gamma}_y + \tilde{V}_z \hat{\gamma}_z + \tilde{M}_y \hat{\chi}_y + \tilde{M}_z \hat{\chi}_z) dx \quad (8.38)$$

und:

$$\hat{\mathcal{W}}_e = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot \hat{\underline{u}}(x_i) + \sum_{j=1}^m \underline{\Gamma}_j \cdot \hat{\underline{\varphi}}(x_j) + \int_{\mathcal{L}} \underline{q}(x) \cdot \hat{\underline{u}}(x) dx + \int_{\mathcal{L}} \underline{m}(x) \cdot \hat{\underline{\varphi}}(x) dx \quad (8.39)$$

^aIm Fall von Torsion kommt ein weiterer Term hinzu, der das Torsionsmoment T mit der Veränderung der Verdrehung des Querschnitts $\vartheta = \varphi'_x$ um die Achse (Ox) verbindet.

Kommentar

Im Fall eines Balkens sind die “Spannungsvariablen” die Schnittgrößen (N, V, M). Die Verzerrungsvariablen sind die Dehnung ε und die Krümmungen (χ_y, χ_z) der Stabachse sowie die mittleren Schiebungen (γ_y, γ_z). Die Komponenten des Spannungstensors können als Funktionen der Schnittgrößen geschrieben werden und über den Querschnitt A integriert werden.

Prinzip der virtuellen Arbeit

Tragwerke

Die virtuelle Arbeitsgleichung für Elemente unter Normalkraft-, Querkraft- und Momentenbelastung kann vereinfacht folgendermassen formuliert werden:

$$\hat{W}_i = \sum_i \int_0^{L_i} \frac{\tilde{N}_i \hat{N}_i}{EA} + \frac{\tilde{M}_i \hat{M}_i}{EI} + \frac{\tilde{V}_i \hat{V}_i}{GA_V} dx$$

Um virtuelle Verschiebungen einzuführen, um reelle Kräfte aufzutragen, um reelle Verschiebungen zu berechnen, wähle man beliebige resp. zulässige Grössen, womit die virtuelle Arbeit von externen Punktlasten wie unten formuliert wird

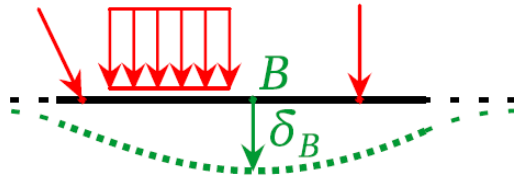
$$\hat{W}_e = \hat{W}_i = \sum \tilde{F} \hat{\Delta} = \sum_i \int_0^{L_i} \frac{\tilde{N}_i \hat{N}_i}{EA} + \frac{\tilde{M}_i \hat{M}_i}{EI} + \frac{\tilde{V}_i \hat{V}_i}{GA_V} dx$$

$$\hat{W}_e = \hat{W}_i = \sum \hat{F} \tilde{\Delta} = \sum_i \int_0^{L_i} \frac{\hat{N}_i \tilde{N}_i}{EA} + \frac{\hat{M}_i \tilde{M}_i}{EI} + \frac{\hat{V}_i \tilde{V}_i}{GA_V} dx$$

Bei der virtuellen Arbeit, tendiert man dazu, nur eine virtuelle Kraft auf ein Mal wirken zu lassen.

Weiter Energiesätze von Tragwerke

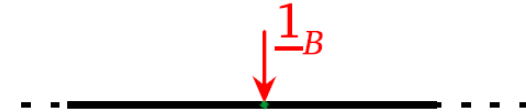
Satz von Müller-Breslau



M



(a) System unter tatsächlicher Belastung



\bar{M}



(b) System unter Einheitslast

Die Verschiebung δ_B beträgt dann:

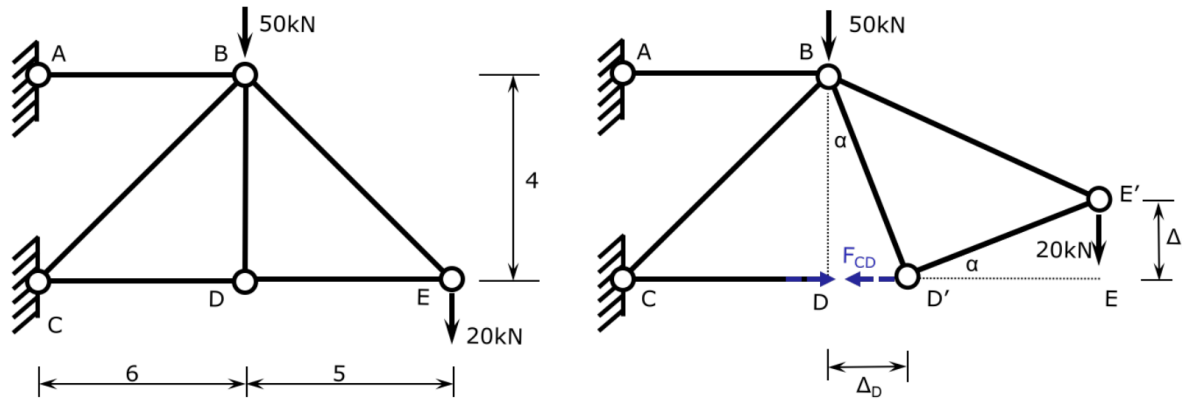
$$\delta_B = \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{N \bar{N}}{EA} + \frac{V \bar{V}}{GA_v} + \frac{M \bar{M}}{EI} \right) dx \quad (8.80)$$

Kommentar

Satz von Müller-Breslau

Man betrachte ein elastisches System unter den Belastungen F_i , $i = 1, \dots, n$, an den Punkten A_i und die daraus resultierenden Schnittgrößen N , V , M .

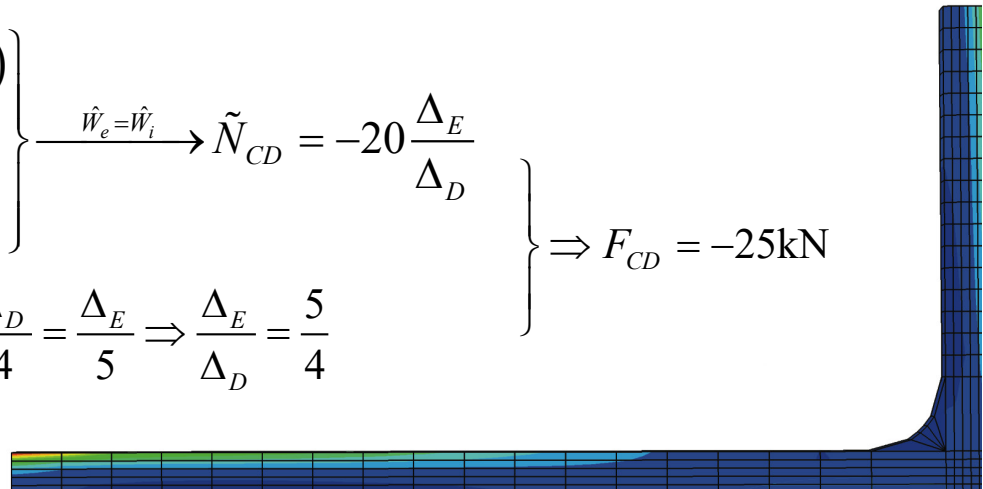
Will man die Verschiebung B des Punktes B in Richtung e berechnen, so setzt man eine Einheitshilfskraft am Punkt B in dieser Richtung an, aus welcher die Schnittgrößen N , V , M resultieren.

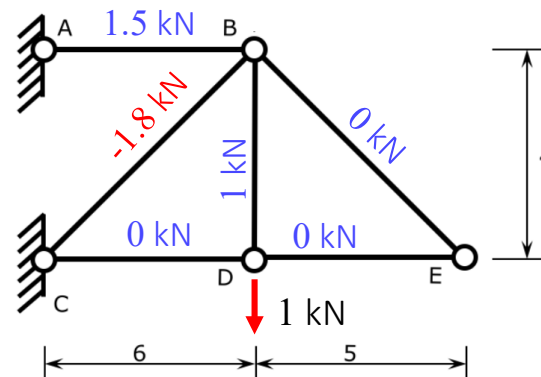
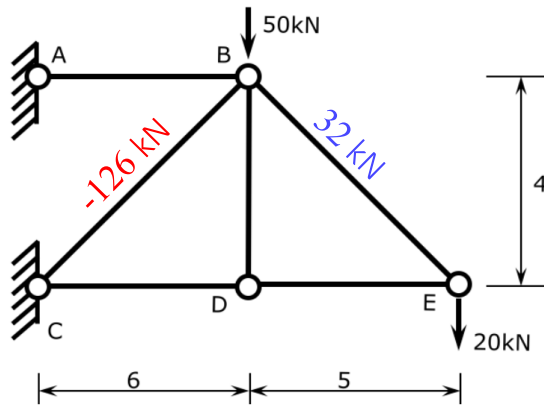


ang der virtuellen Verschiebung $D \rightarrow D'$

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{W}_e &= \sum \tilde{F} \hat{\Delta} = 50 * 0 + 20(-\Delta_E) \\
 \hat{W}_i &= \tilde{N}_{CD} \left(\frac{\hat{N}_{CD}}{EA} L_{CD} \right) = \tilde{N}_{CD} \Delta_D
 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\hat{W}_e = \hat{W}_i} \tilde{N}_{CD} = -20 \frac{\Delta_E}{\Delta_D}$$

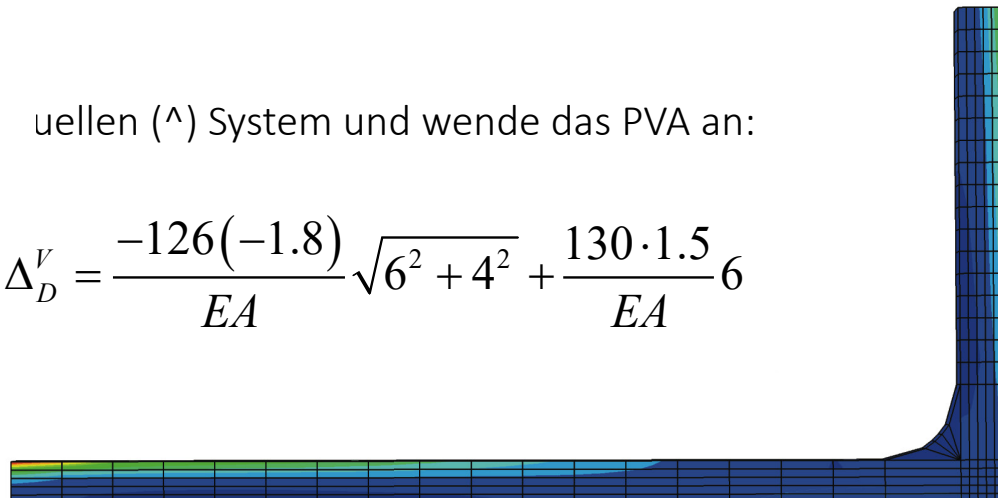
$$\left. \begin{aligned}
 \text{metrische Beziehung: } \tan \alpha &= \frac{\Delta_D}{4} = \frac{\Delta_E}{5} \Rightarrow \frac{\Delta_E}{\Delta_D} = \frac{5}{4}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_{CD} = -25 \text{ kN}$$





uellen (^) System und wende das PVA an:

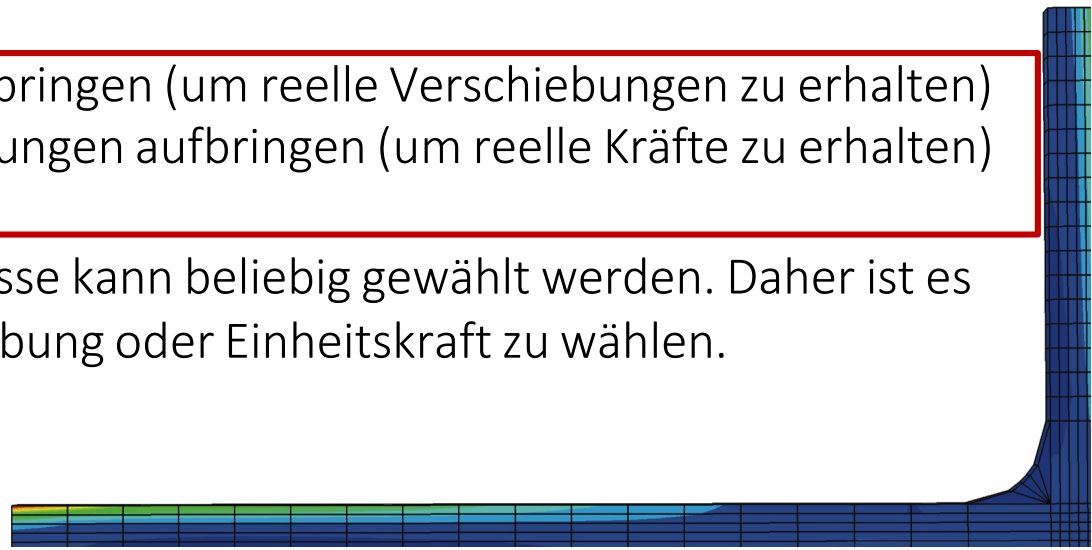
$$\hat{W}_e = \hat{W}_i \Rightarrow 1 \cdot \Delta_D^V = \sum_{i=1}^6 \frac{\hat{N}_i \tilde{N}_i}{EA} L_i \Rightarrow \Delta_D^V = \frac{-126(-1.8)}{EA} \sqrt{6^2 + 4^2} + \frac{130 \cdot 1.5}{EA} 6$$



Prinzip der virtuellen Arbeit - Tragwerke

Bemerkungen

- Bei Starrkörperrotation ist die interne Arbeit gleich null.
- Für ein System im Gleichgewicht ist die Arbeit infolge externen Kräften gleich der Arbeit infolge interner Kräfte.
- Die virtuelle Arbeitsgleichung kann als zwei Komponenten betrachtet werden: Kräfte im Gleichgewicht und verträgliche Verschiebungen.
- Wir können virtuelle Kräfte aufbringen (um reelle Verschiebungen zu erhalten)
- Wir können virtuelle Verschiebungen aufbringen (um reelle Kräfte zu erhalten)
- Der Betrag einer virtuellen Größe kann beliebig gewählt werden. Daher ist es geeignet, eine Einheitsverschiebung oder Einheitskraft zu wählen.

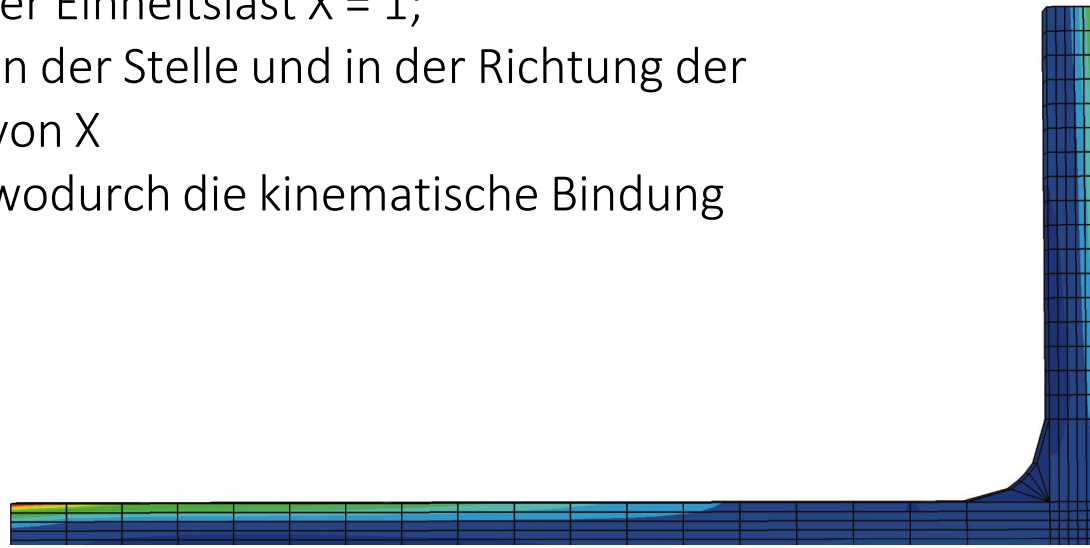


Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

Die Kraftmethode kann als direkte Anwendung des PVA betrachtet werden.

Bei einem statisch unbestimmten System:

- Bestimme den Grad der statischen Unbestimmtheit h
- Lösen überzähliger Bindungen (hier einer Lagerreaktion), um ein statisch bestimmtes System zu erhalten, und Ersetzen der gelösten Bindung durch eine Unbekannte X ;
- Berechnung der Lagerreaktionen und Schnittgrößen, jeweils unter der externen Belastung und unter der Einheitslast $X = 1$;
- Berechnung der Verschiebung an der Stelle und in der Richtung der gelösten Bindung, als Funktion von X
- Bestimmung der Grösse von X , wodurch die kinematische Bindung erfüllt wird

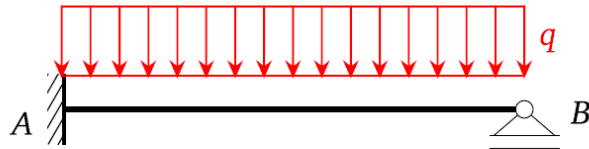


Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

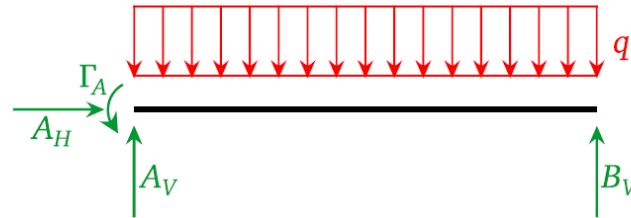
Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

- Bestimme den Grad der statischen Unbestimmtheit h



(a) Statisches System



(b) Schnittkörperdiagramm

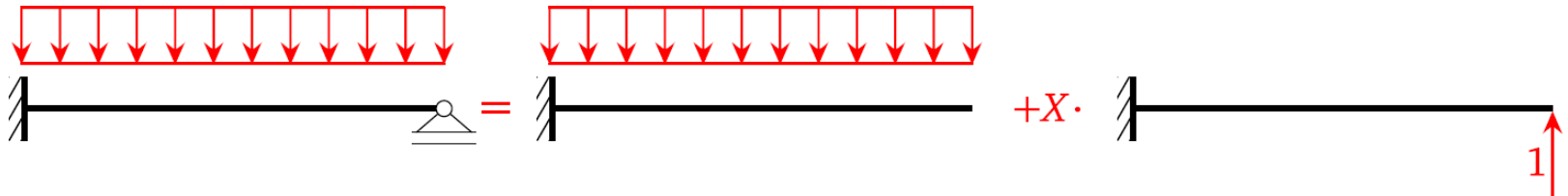
Der Grad der statischen Unbestimmtheit dieses Systems ist 1, da es 4 Lagerreaktionen und 1 Festkörper gibt (4 Unbekannte bei 3 Gleichgewichtsgleichungen).

Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

- Lösen von einer überzähligen Bindung (hier einer Lagerreaktion), um ein statisch bestimmtes System zu erhalten, und Ersetzen der gelösten Bindung durch eine Unbekannte X ;



Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

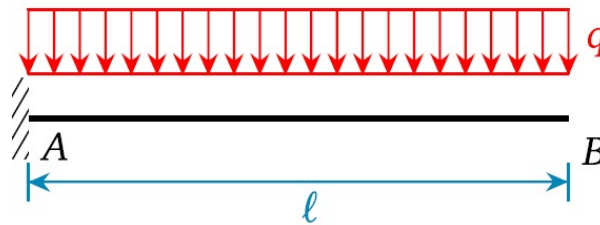
Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

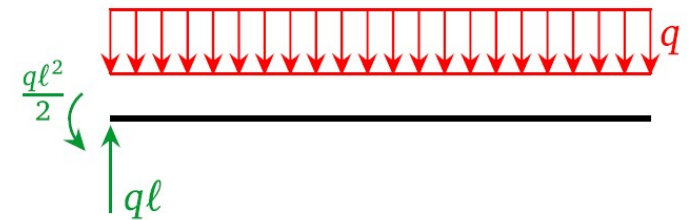
- Berechnung der Lagerreaktionen und Schnittgrößen unter der externen Belastung

$$A_H = 0, A_V = ql, \Gamma_A = ql^2 / 2$$

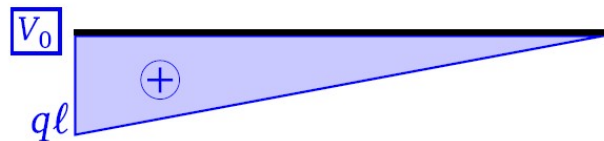
Zustand „0“



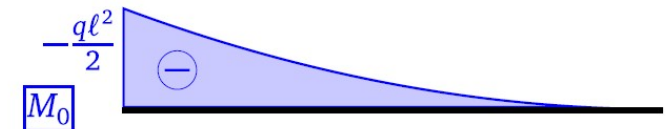
(a) Statisches System



(b) Schnittkörperdiagramm



(c) Querkraft V_0



(d) Biegemoment M_0

Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

- Berechnung der Lagerreaktionen und Schnittgrößen unter der Einheitslast $X = 1$

$$A_H = 0, A_V = -1, \Gamma_A = -l$$

Zustand „1“

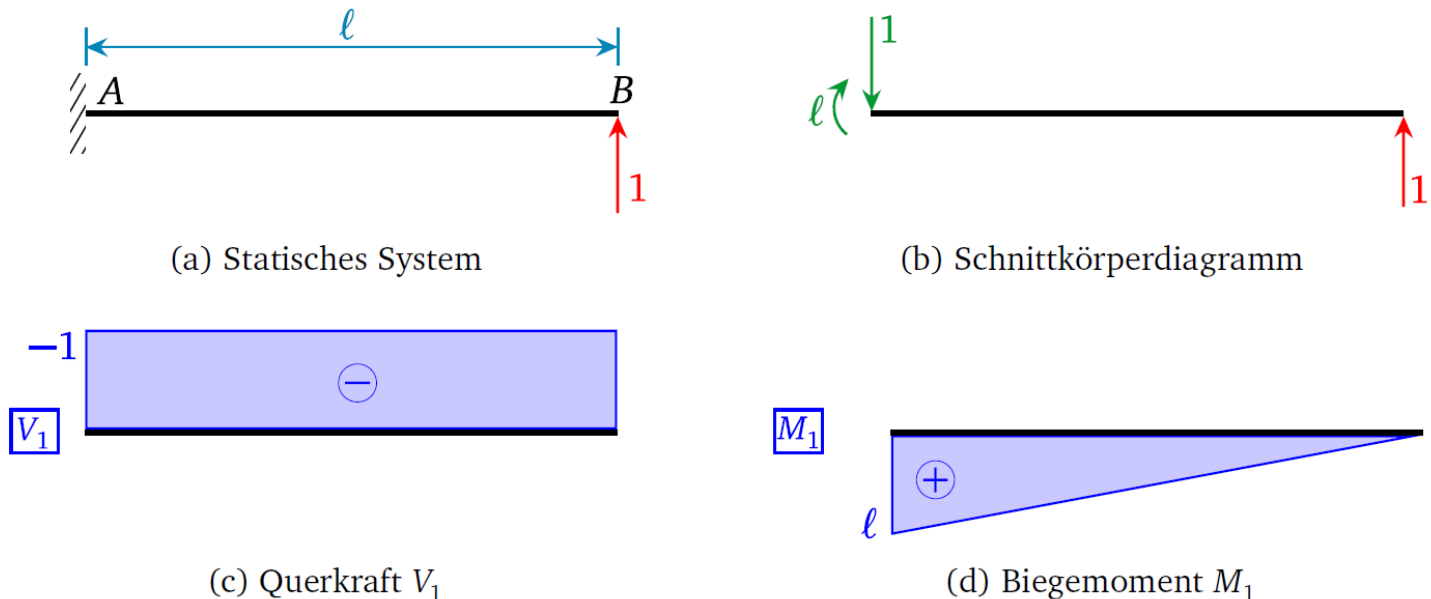


Abbildung 9.4: Kragarm unter Einheitslast

Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

- Berechnung der Verschiebung an der Stelle und in der Richtung der gelösten Bindung, als Funktion von X

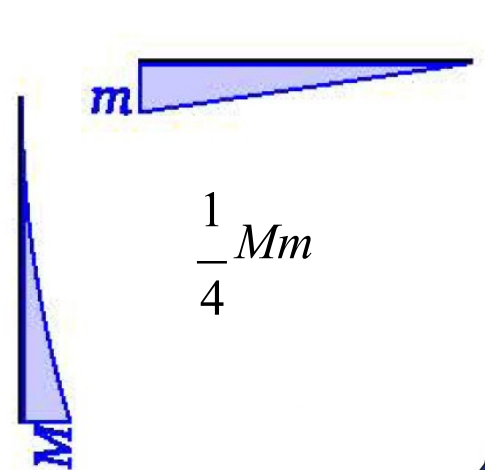
Zustand „0“

Infolge des PVA oder des Satzes von Müller Breslau (Kapitel 8, §4.6), sowie unter Ausschluss von Effekten infolge Normalkraft, Querkraft und Torsion:

$$\delta_{10} = \int_0^l \frac{M_0 M_1}{EI} dx$$

Um dieses Integral zu berechnen, verwendet man erneut die Tabelle aus dem Anhang des vorherigen Kapitels 8 (BS I):

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \frac{1}{4} \left(-\frac{ql^2}{2} \right) \cdot l \cdot l = -\frac{ql^4}{8EI}$$



Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

- Berechnung der Verschiebung an der Stelle und in der Richtung der gelösten Bindung, als Funktion von X

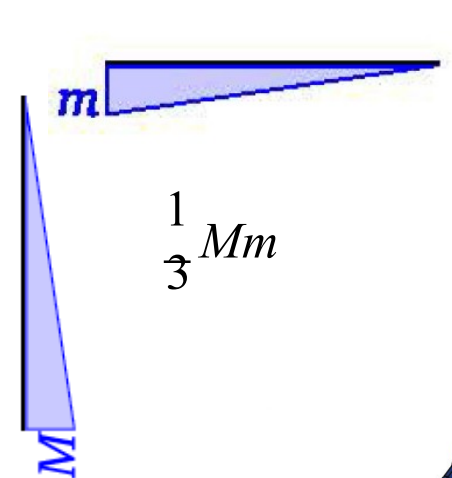
Zustand „1“

Infolge des PVA oder des Satzes von Müller Breslau (Kapitel 8, §4.6), sowie unter Ausschluss von Effekten infolge Normalkraft, Querkraft und Torsion:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx$$

Um dieses Integral zu berechnen, verwendet man erneut die Tabelle aus dem Anhang des vorherigen Kapitels 8 (BS I):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} l \cdot l \cdot l = \frac{l^3}{3EI}$$



Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

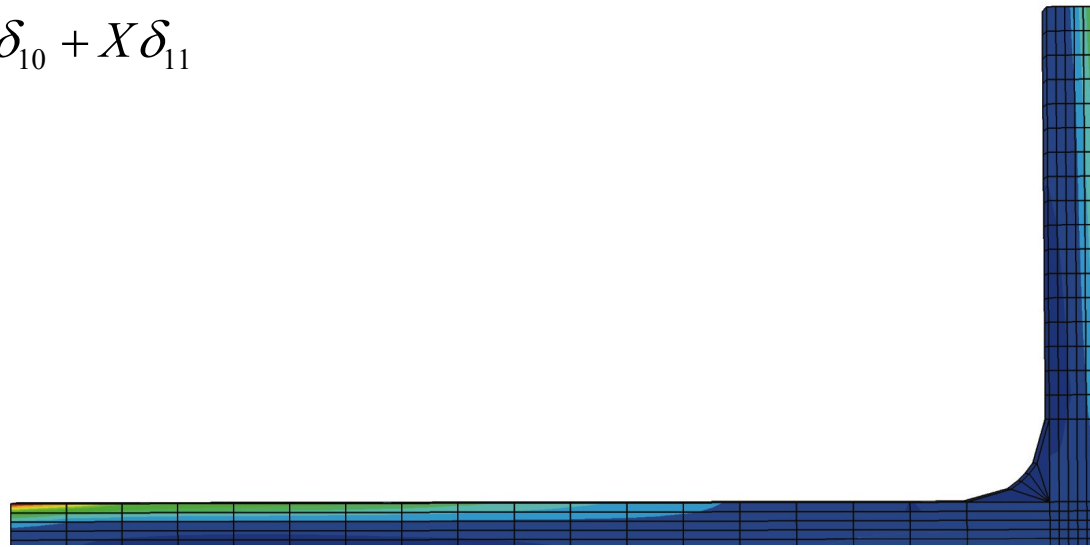
Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

- Berechnung der Verschiebung an der Stelle und in der Richtung der gelösten Bindung, als Funktion von X

Unter Einwirkung der Kraft X , erhält man aufgrund der Linearität die Verschiebung $X\delta_{11}$.
Somit beträgt die totale Verschiebung des Punktes B unter q und X :

$$w_B = \delta_{10} + X\delta_{11}$$



Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

- Bestimmung der Grösse von X , wodurch die kinematische Bindung erfüllt wird (Verträglichkeitsbedingung)

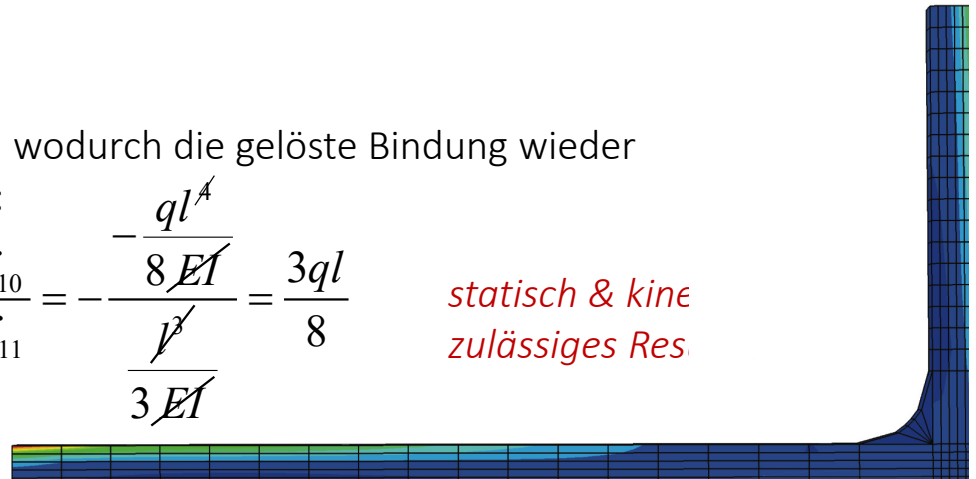
Um die Lagerbedingung in B zu erfüllen, d.h. $w_B = 0$, muss die Kraft X so gewählt werden, dass:

$$w_B = 0 = \delta_{10} + X \delta_{11}$$

Bedingung, wodurch die gelöste Bindung wieder erfüllt ist somit:

$$X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{ql^4}{8EI}}{\frac{ql^3}{3EI}} = \frac{3ql}{8}$$

statisch & kinematisch zulässiges Res.



Zusammenfassung Baustatik I ... Die Kraftmethode

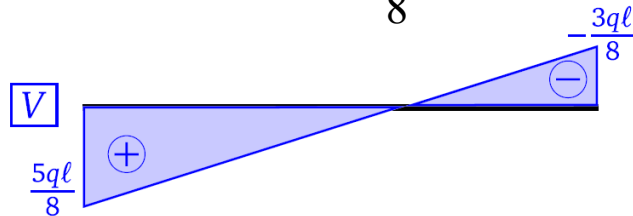
Beispiel

Eingespannter und aufgelegter Balken

Nun können auch die anderen Reaktionen berechnet werden, indem das Superpositionsprinzip angewendet wird:

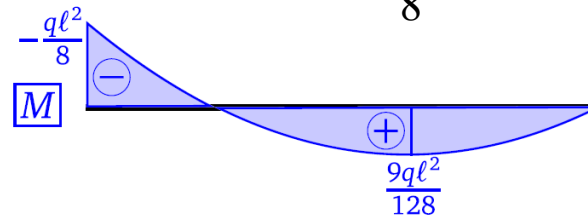
$$A_H = 0, A_V = \frac{5ql}{8}, M_A = \frac{ql^2}{8} \quad \& \quad B_V = X = \frac{3ql}{8}$$

$$V = V_0 + \frac{3ql}{8} V_1$$



(a) Querkraft V

$$M = M_0 + \frac{3ql}{8} M_1$$



(b) Biegemoment M

