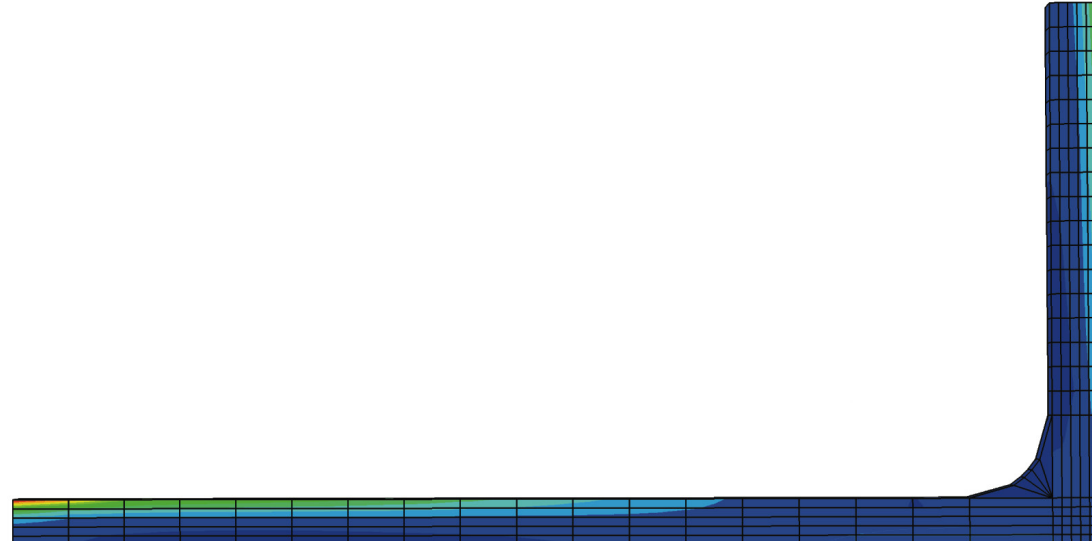


Vorlesung 13

Wiederholung



Fokus auf statisch unbestimmte Systeme



(Genoa Brücke, Italien, 1967)



(Rio-Antirrio Brücke, Griechenland, 2004)

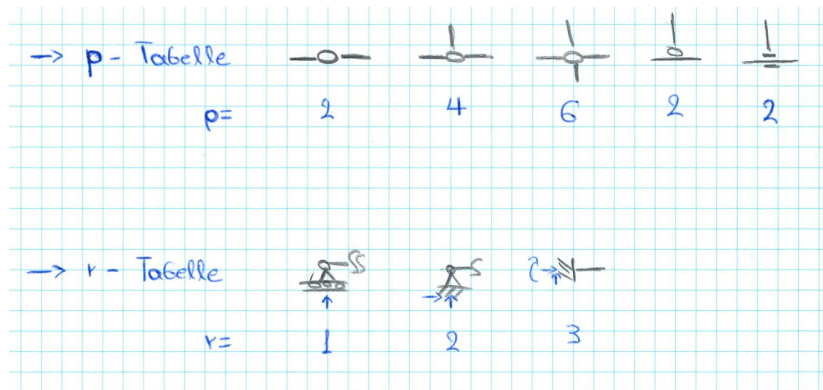
1. Statische Unbestimmtheit

$$h_i = p + r - 3n$$

n : die Anzahl der Festkörper

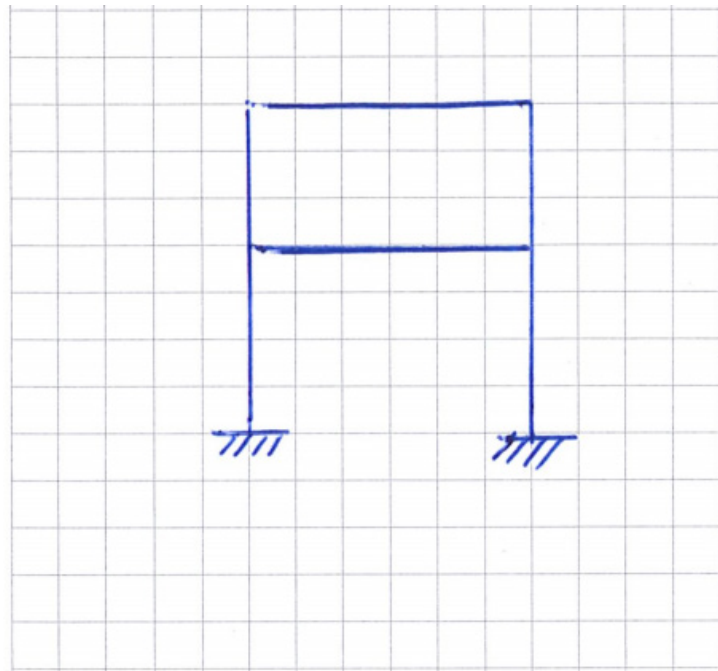
r : die Anzahl der Auflagerreaktionen

p : die Anzahl von internen Bindungen



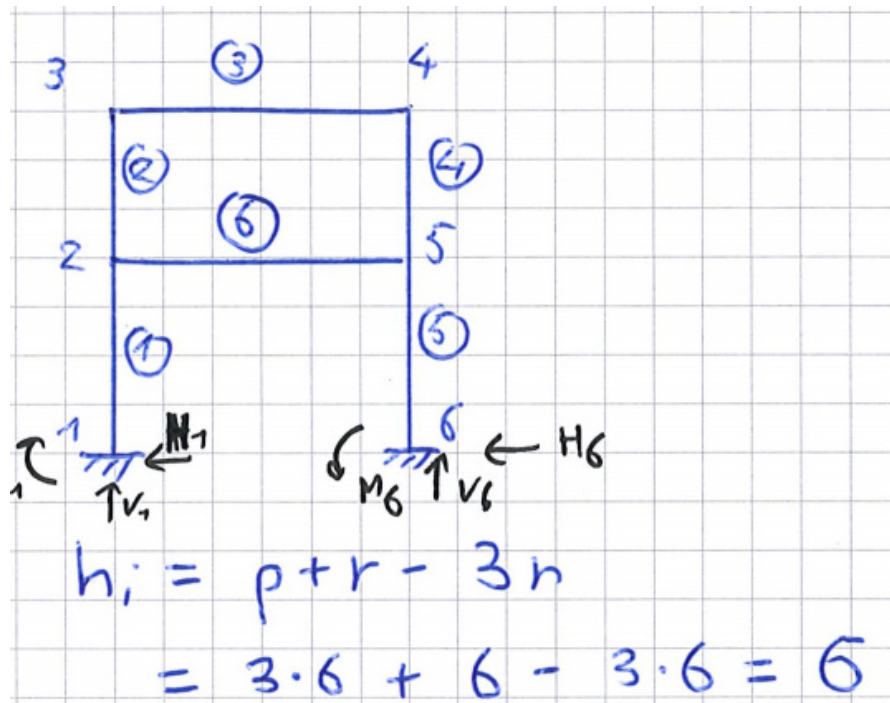
1. Statische Unbestimmtheit: Eduapp 1

$$h_i = p + r - 3n = ?$$



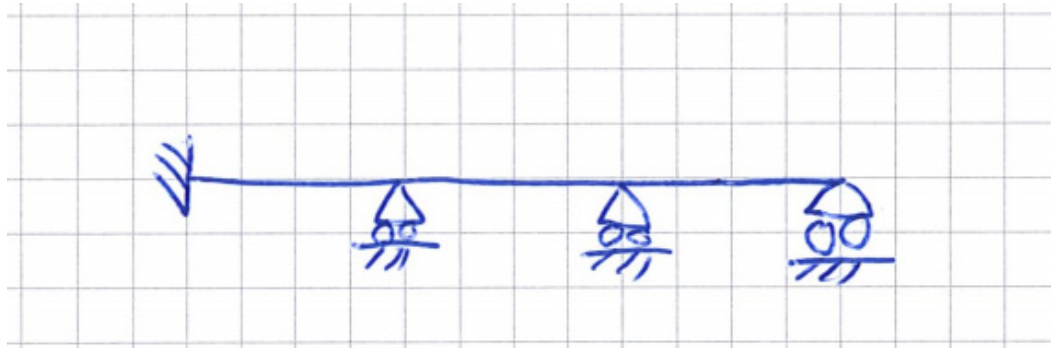
1. Statische Unbestimmtheit: Eduapp 1

$$h_i = p + r - 3n = ?$$



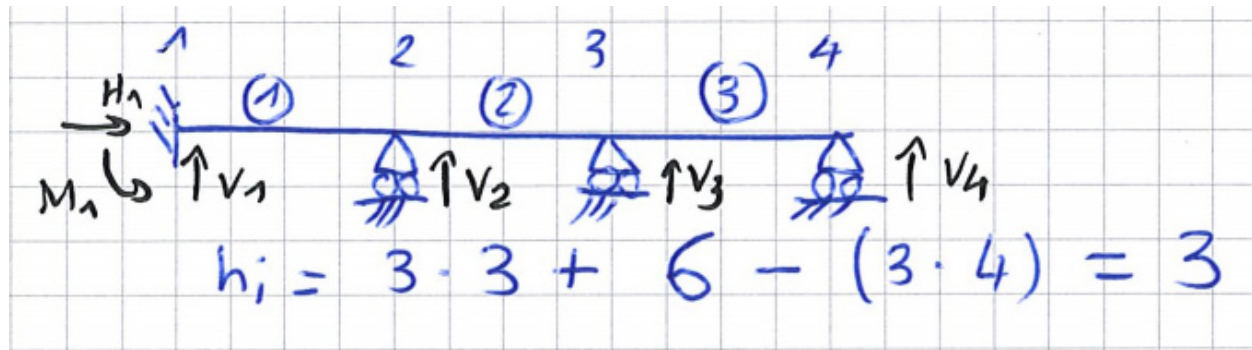
1. Statische Unbestimmtheit: Eduapp 2

$$h_i = p + r - 3n = ?$$



1. Statische Unbestimmtheit: Eduapp 2

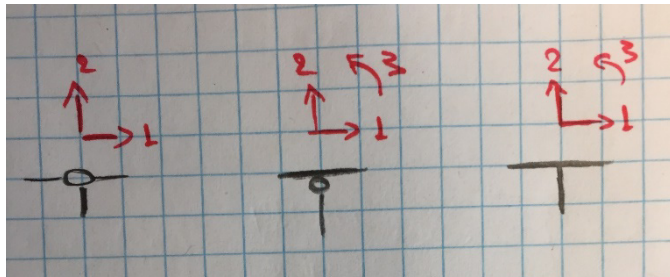
$$h_i = p + r - 3n = ?$$



2. Kinematische Unbestimmtheit

$$K = N_{DOF} - r$$

N_{DOF} : die Anzahl der Freiheitsgrade
 r : die Anzahl der Auflagerreaktionen

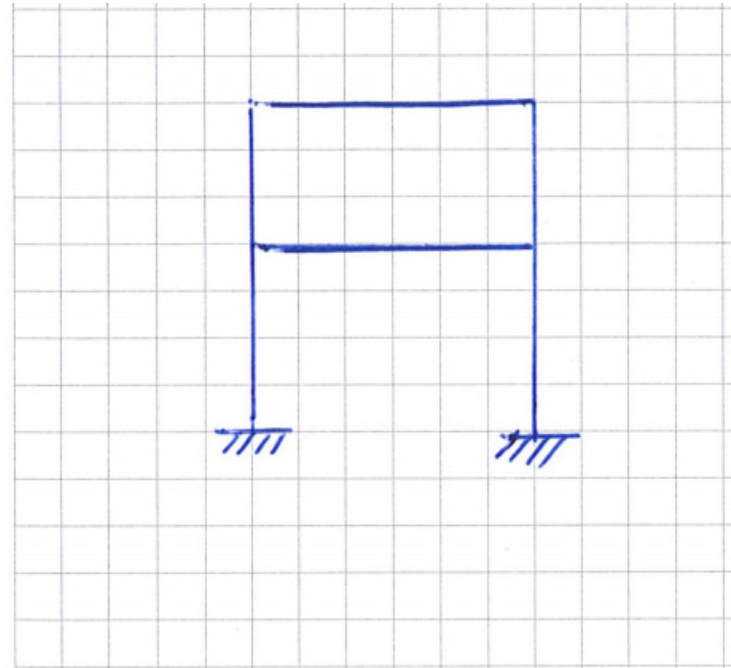


2. Kinematische Unbestimmtheit: Eduapp 1

$$K = N_{DOF} - r = ?$$

N_{DOF} : die Anzahl der Freiheitsgrade
 r : die Anzahl der Auflagerreaktionen

Annahme: EA sehr gross

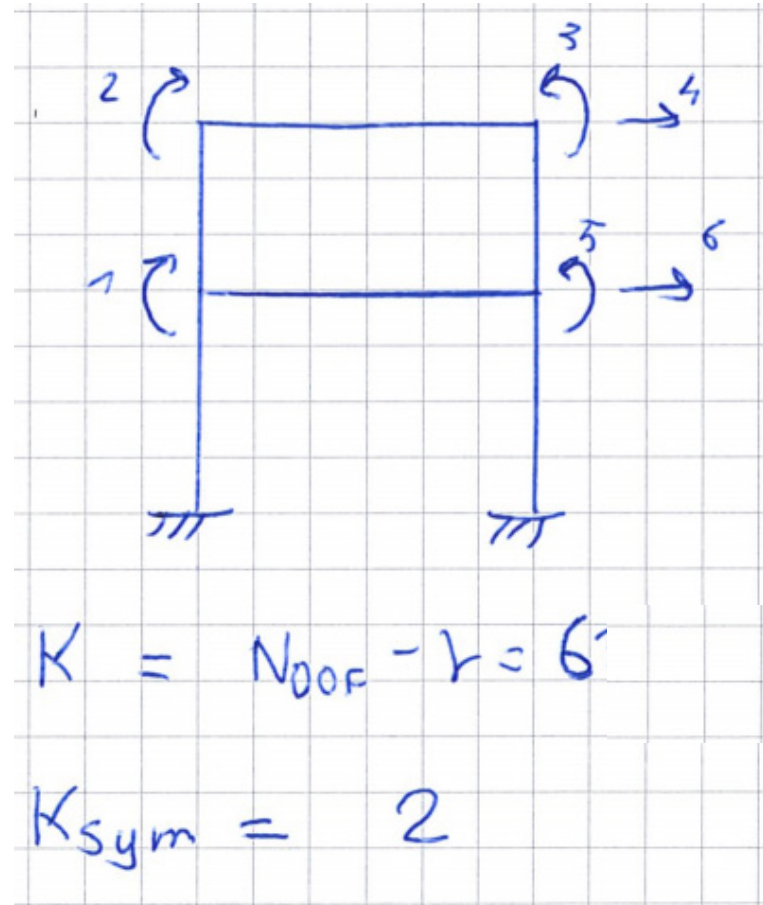


2. Kinematische Unbestimmtheit: Eduapp 1

$$K = N_{DOF} - r = ?$$

N_{DOF} : die Anzahl der Freiheitsgrade
 r : die Anzahl der Auflagerreaktionen

Wenn das System symmetrisch belastet ist, sind effektiv nur 2 Freiheitsgrade nötig um die Schnittkräfte zu rechnen.



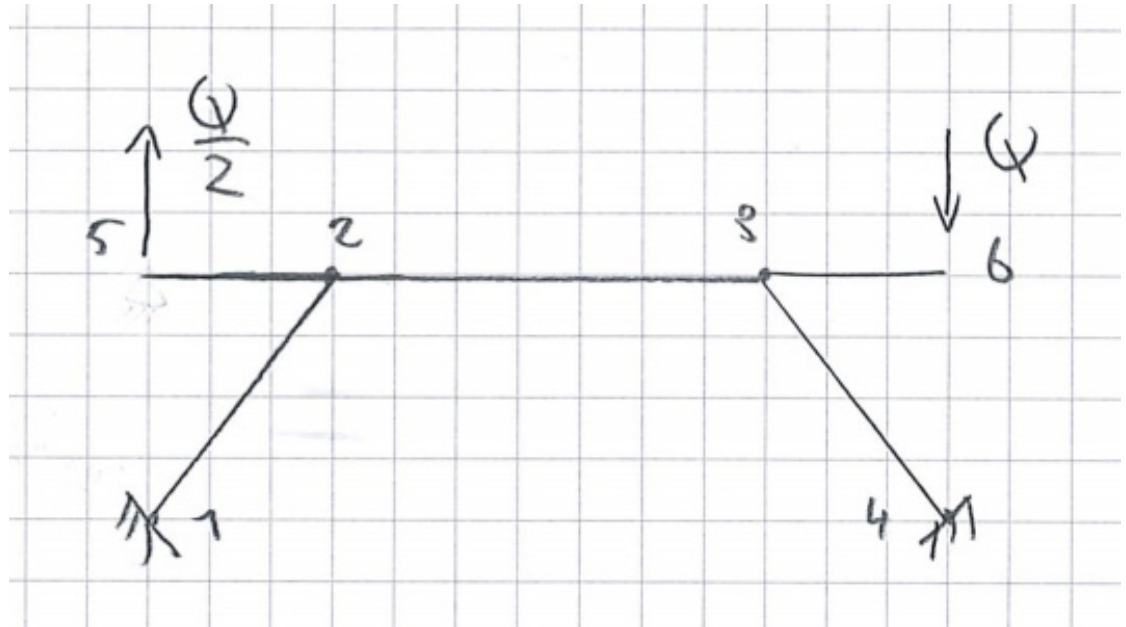
2. Kinematische Unbestimmtheit: Eduapp 2

$$K = N_{DOF} - r = ?$$

N_{DOF} : die Anzahl der Freiheitsgrade

r : die Anzahl der Auflagerreaktionen

Annahme: EA sehr gross

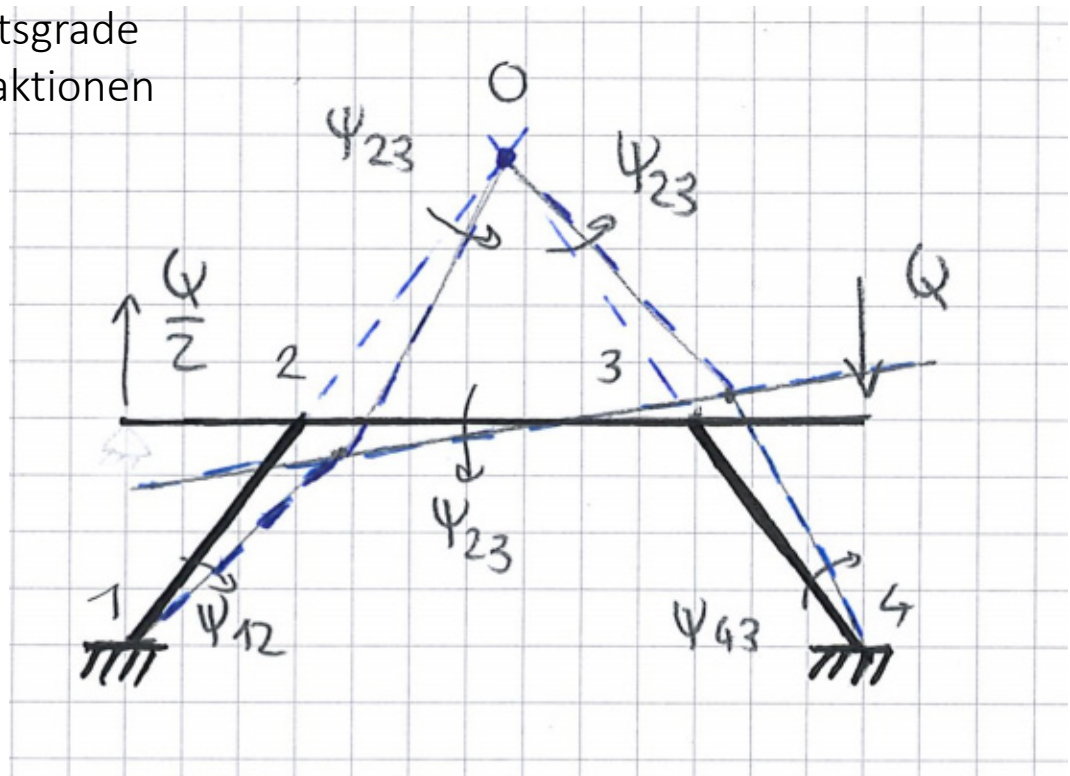


2. Kinematische Unbestimmtheit: Eduapp 2

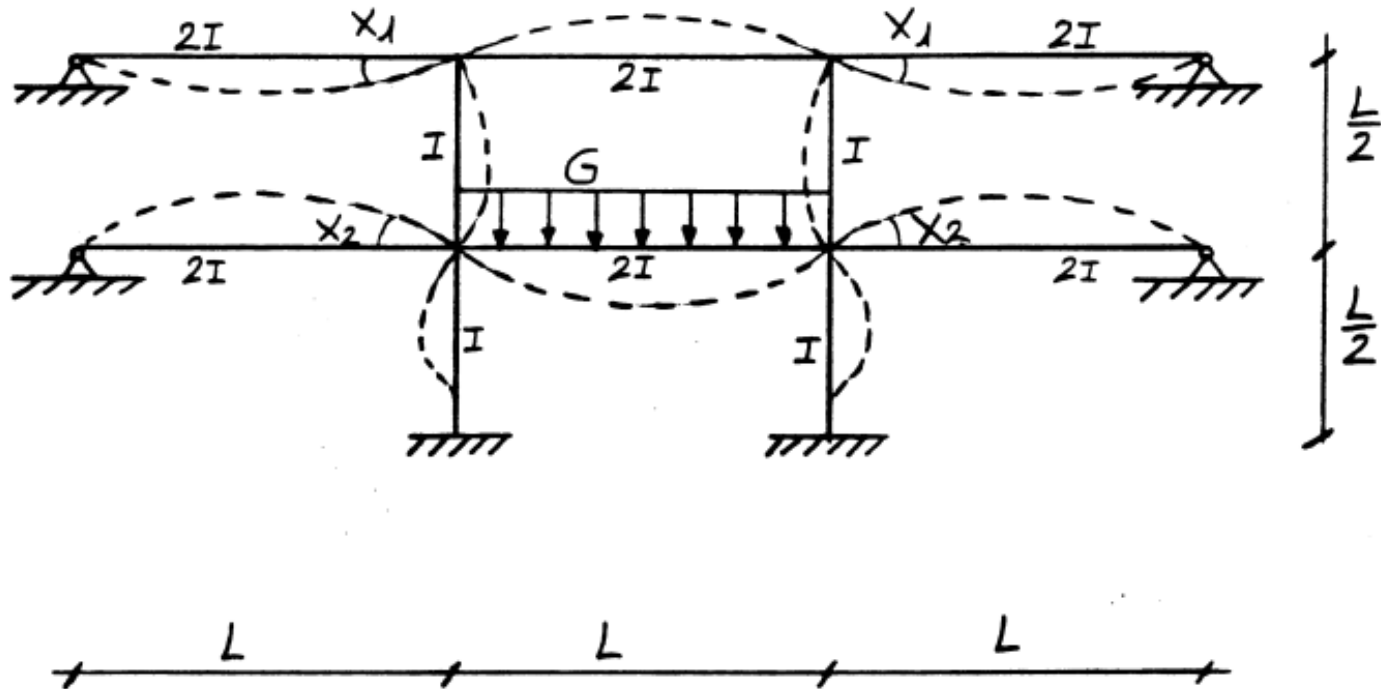
$$K = N_{DOF} - r = ?$$

N_{DOF} : die Anzahl der Freiheitsgrade
 r : die Anzahl der Auflagerreaktionen

$$K = 3 (\phi_2, \phi_3, \Psi)$$

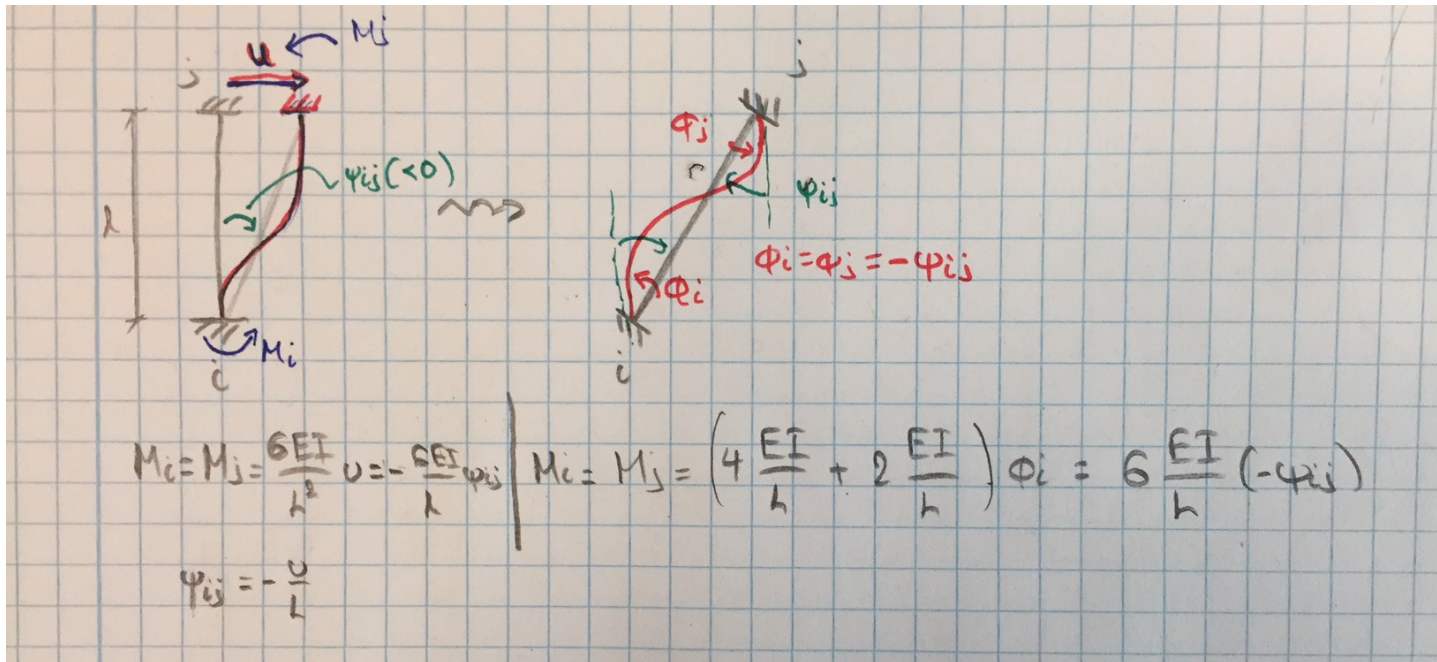


3. Verformungsmethode: Anwendung



3. Verformungsmethode: Drehwinkelverfahren

Die Definition des Drehwinkels erlaubt es uns, alle möglichen Verformungen des Balkens in Form von Verdrehungen auszudrücken.



3. Verformungsmethode: Hilfsmittel

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zürich

Prof. Dr. Eleni Chatzi, Professor für Strukturmechanik
Institut für Baustatik und Konstruktion, D-BAUG, FS 2018

Tabelle I
Festeinspannmomente für beidseitig eingespannte Stäbe

Tabelle II
Festeinspannmomente für einseitig eingespannte Stäbe

Tabelle III
Stabmomente infolge Verformungen

Beidseitig eingespannt Einseitig eingespannt

s_j : Stabsteifigkeit
 t_j : Kreuzsteifigkeit

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zürich

Prof. Dr. Eleni Chatzi, Professor für Strukturmechanik
Institut für Baustatik und Konstruktion, D-BAUG, FS 2018

Tabelle IV – Drehwinkelverfahren Stab/Kreuzsteifigkeiten

	S_{ik}	S_{kj}	$t_{ik} = t_{ki}$
	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{2EI}{L}$
	$\frac{EI}{L}$	$\frac{EI}{L}$	$-\frac{EI}{L}$
	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$
	$\frac{3EI}{a} \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right]$	$\frac{3EI}{b} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right]$	$\frac{3EI}{a^2} \frac{b}{\left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right]}$
	0	0	0
	$\frac{3EI}{L}$	0	0
	$\frac{1}{\left(\frac{L}{3EI} \right) + c_m}$	0	0
	$\frac{4EI \left[L + 3EI \cdot c_m \right]}{L \cdot \left[L + 4EI \cdot c_m \right]}$	$\frac{1}{\left(\frac{L}{4EI} \right) + c_m}$	$\frac{1}{\left(\frac{L}{2EI} \right) + 2c_m}$
	$\frac{80EI}{11L}$	$\frac{48EI}{11L}$	$\frac{32EI}{11L}$
	$\frac{3}{\left(\frac{a}{EI_1} \right) + \left(\frac{b^3}{a^2 EI_2} \right)}$	$\frac{3}{\left(\frac{a^3}{b^2 EI_1} \right) + \left(\frac{b^2}{a EI_2} \right)}$	$\frac{3 \cdot b}{\left(\frac{a^3}{EI_1} \right) + \left(\frac{b^3}{a EI_2} \right)}$
	$\frac{1}{a \left(\frac{L}{L} + \frac{b^3}{L^2} + \frac{b^3}{3EI_2} \right)}$	0	0
	$\frac{GK}{L}$	$\frac{GK}{L}$	$-\frac{GK}{L}$
	$\frac{3EI}{L + 3EI \cdot c_m}$	$\frac{3EI}{L + 3EI \cdot c_m}$	$\frac{3EI}{L + 3EI \cdot c_m}$

Source: Prof. Thomas Vogel (DBAUG, ETHZ) – FS2001

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + s_{ij} \varphi_i + t_{ij} \varphi_j - (s_{ij} + t_{ij}) \psi_{ij}$$

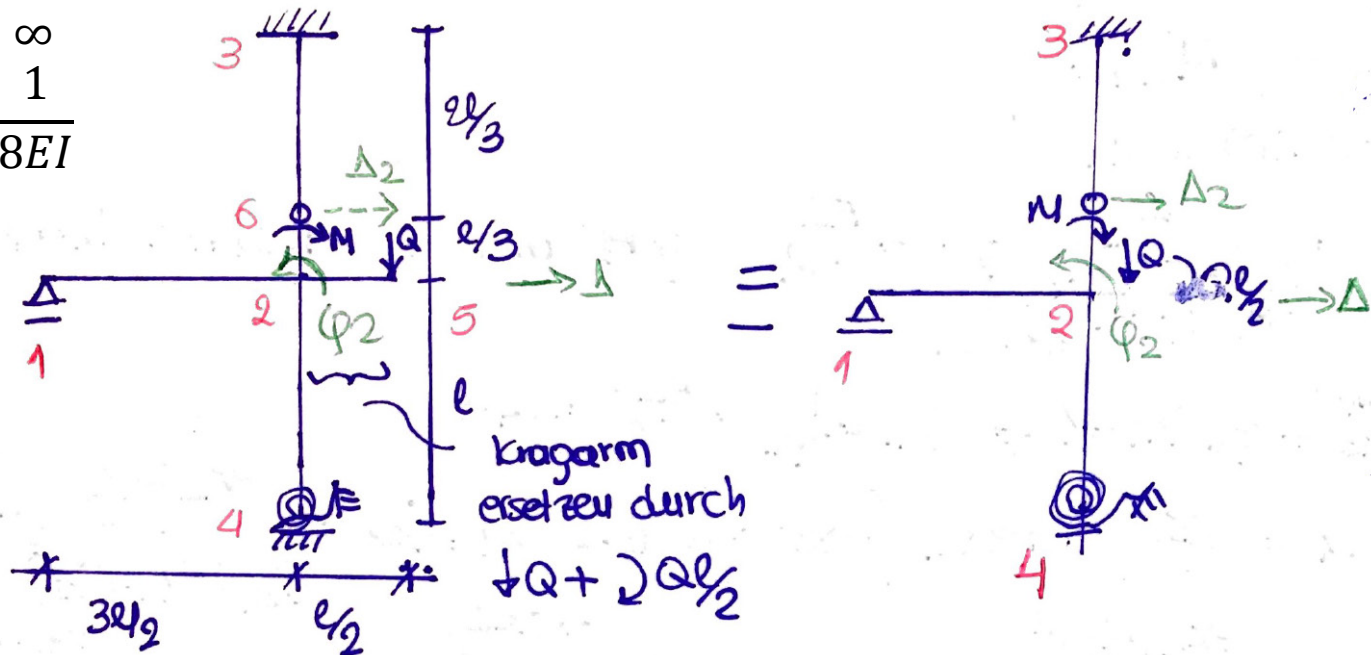
3. Verformungsmethode: Beispiel

Angaben:

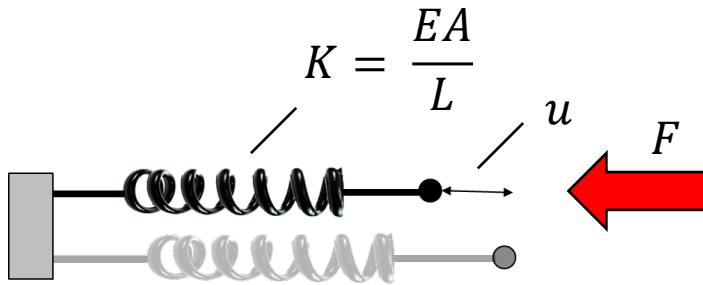
$EI = \text{constant}$

$EA \rightarrow \infty$

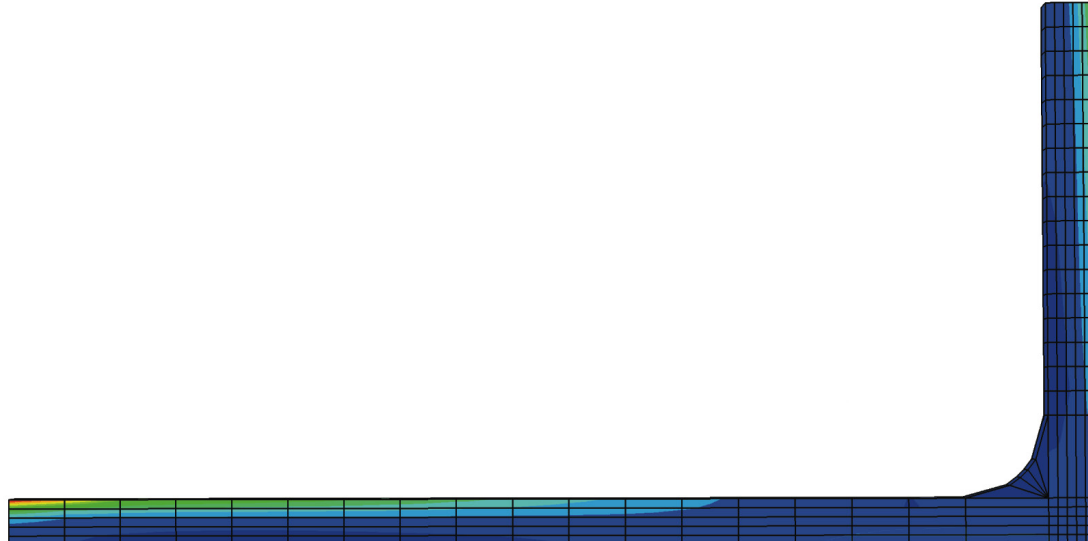
$$cf = \frac{1}{8EI}$$



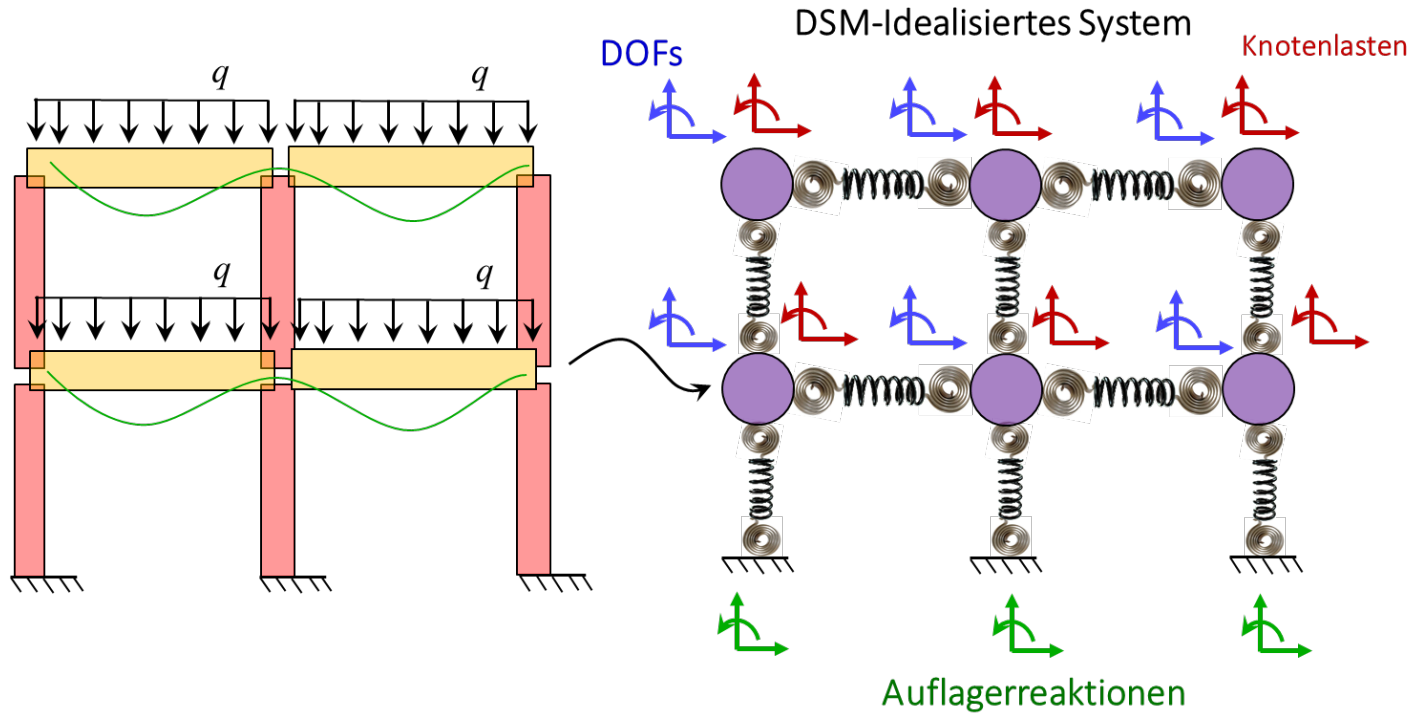
4. Direkte Steifigkeitsmethode



$$F = K \cdot u \rightarrow u = \frac{F}{K}$$

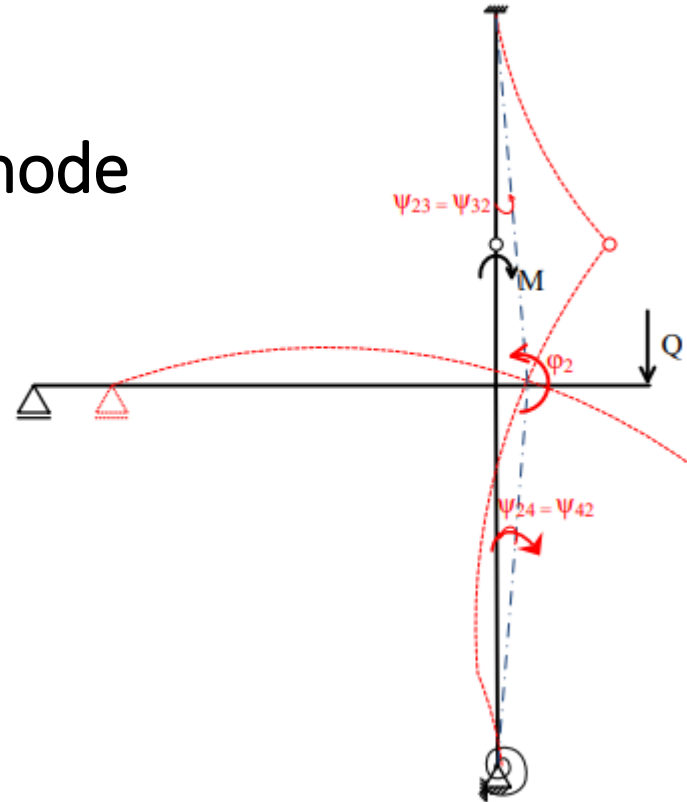


4. Direkte Steifigkeitsmethode



$$\tilde{F} = \tilde{K} \cdot \tilde{u} \rightarrow \tilde{u} = \frac{\tilde{F}}{\tilde{K}}$$

4. Direkte Steifigkeitsmethode



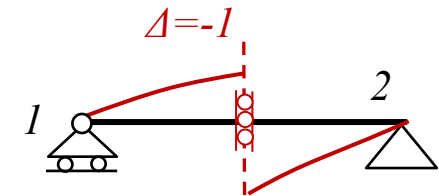
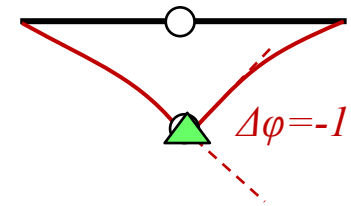
$$\begin{aligned}
 & F = KU \\
 U = K^{-1}F = & \begin{bmatrix} \frac{20EI}{3\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{2EI}{\ell} & \frac{18EI}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{5}{6}M - \frac{Q\ell}{2} \\ \frac{M}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9QL^2 + 14ML}{116EI} \\ \frac{3QL^2 - 5ML}{348EI} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5. Einflusslinien

Das Verfahren zum Konstruieren von qualitativen Einflusslinien für unbestimmte Strukturen ist:

- (1) Der Struktur die Bindung entfernen, welche zur gefragten Antwortfunktion gehört,
- (2) eine negative Einheitsverschiebung oder Rotation auf die entbundene Struktur in der gewünschten Antwortfunktionsrichtung einführen
- (3) die qualitative Einflusslinie der entbundenen Struktur in Übereinstimmung mit allen verbleibenden Auflager- und Kontinuitätsbedingungen zeichnen.

(entgegengesetzt zu der positiven M)

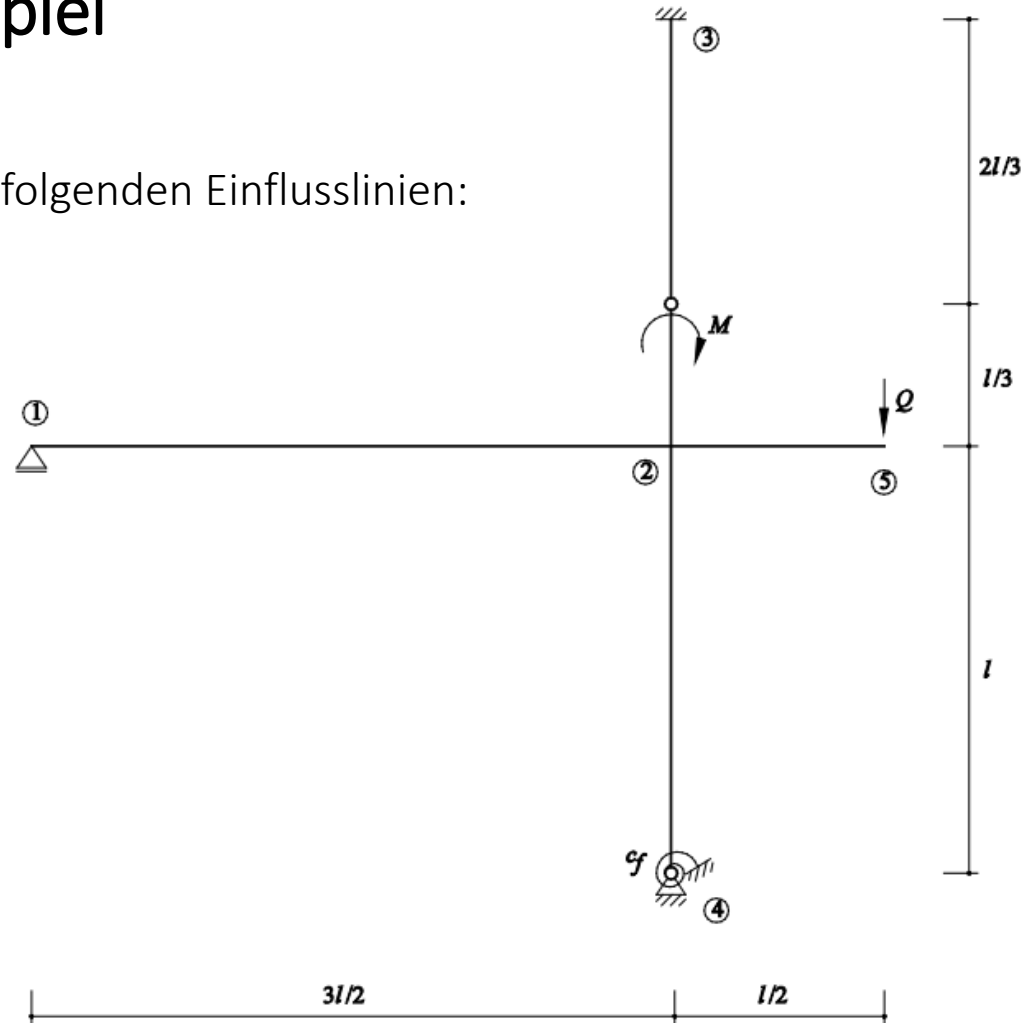


(entgegengesetzt zu der positiven V)

5. Einflusslinien: Beispiel

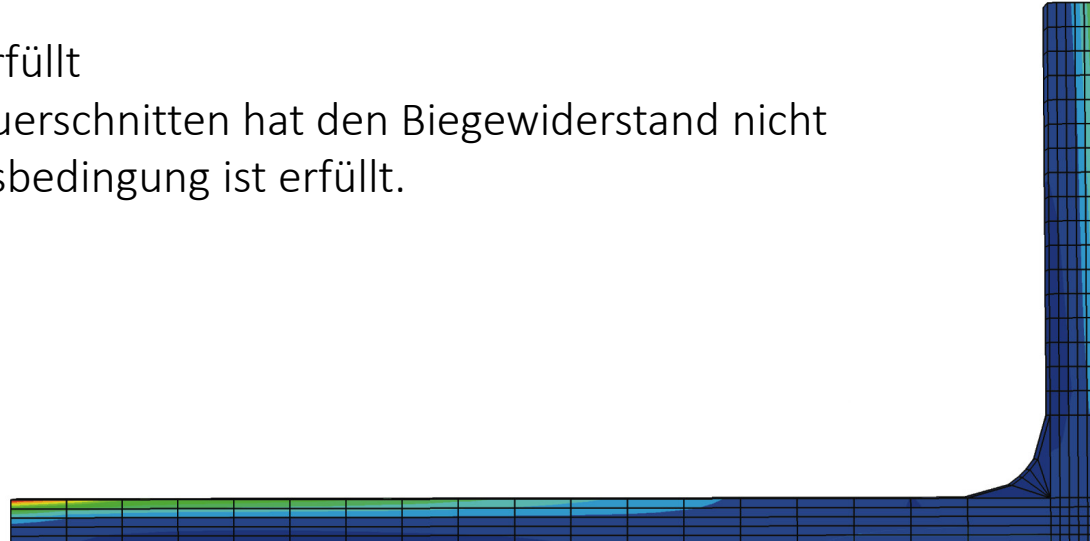
Zeichnen Sie den Verlauf von folgenden Einflusslinien:

- η_{R_1}
- $\eta_{M_2,Rechts}$
- $\eta_{M_2,Links}$
- $\eta_{V_2,Links}$
- $\eta_{V_{12},Mitte}$



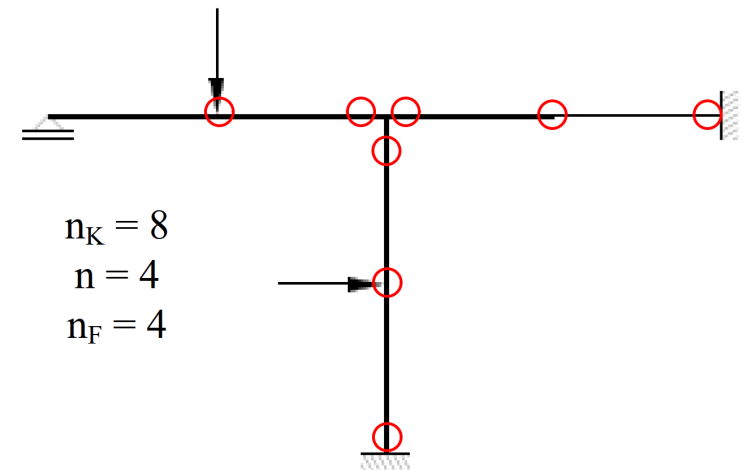
6. Traglastverfahren

- Zum Kollapszeitpunkt wurde das System in einen Mechanismus umgewandelt
- Kinematisch zulässige Kollapsmechanismen sollten:
 - ✓ Die **Randbedingungen erfüllen**
 - ✓ Verschiebungen enthalten, für welche sich die **totale Arbeit von externen Lasten positiv ergibt.**
- Zu jedem Zeitpunkt der Analyse muss für die Momentenverteilung gelten:
 - ✓ Das Gleichgewicht ist erfüllt
 - ✓ Das Moment in allen Querschnitten hat den Biege­widerstand nicht überschritten. Die Fließbedingung ist erfüllt.



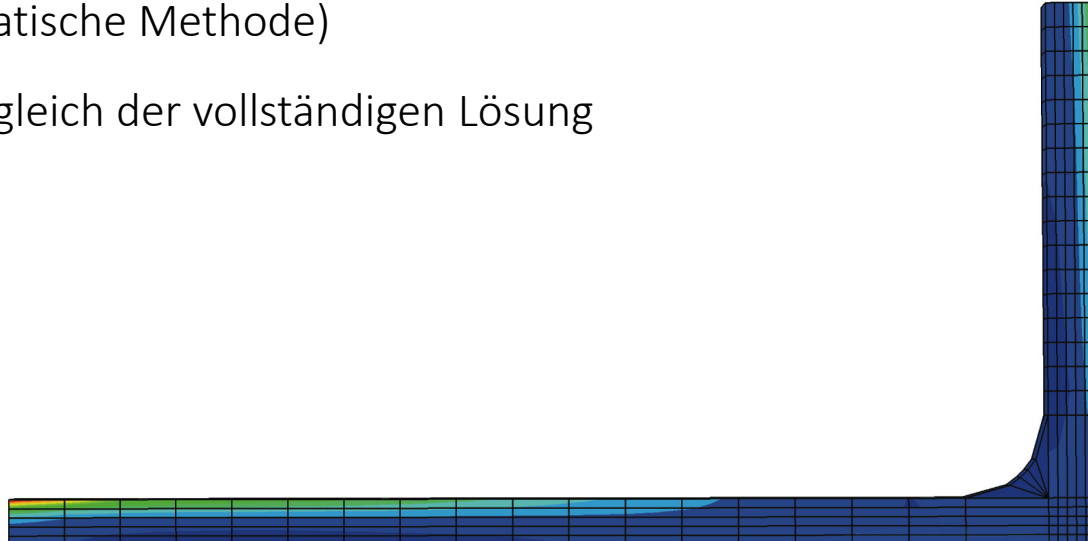
6. Traglastverfahren: kritische Querschnitte

- In der Regel werden sich plastische Gelenke am Querschnitt an Stellen von lokalen Extrema der Biegemomente oder von Diskontinuitäten des Momentenwiderstands M_u bilden, wie z.B.:
 - ✓ Auflager
 - ✓ Lasteinleitung von konzentrierten Lasten
 - ✓ Für verteilte Lasten an der Stelle wo $V=0$
 - ✓ Rahmenknoten, Querschnittsübergänge



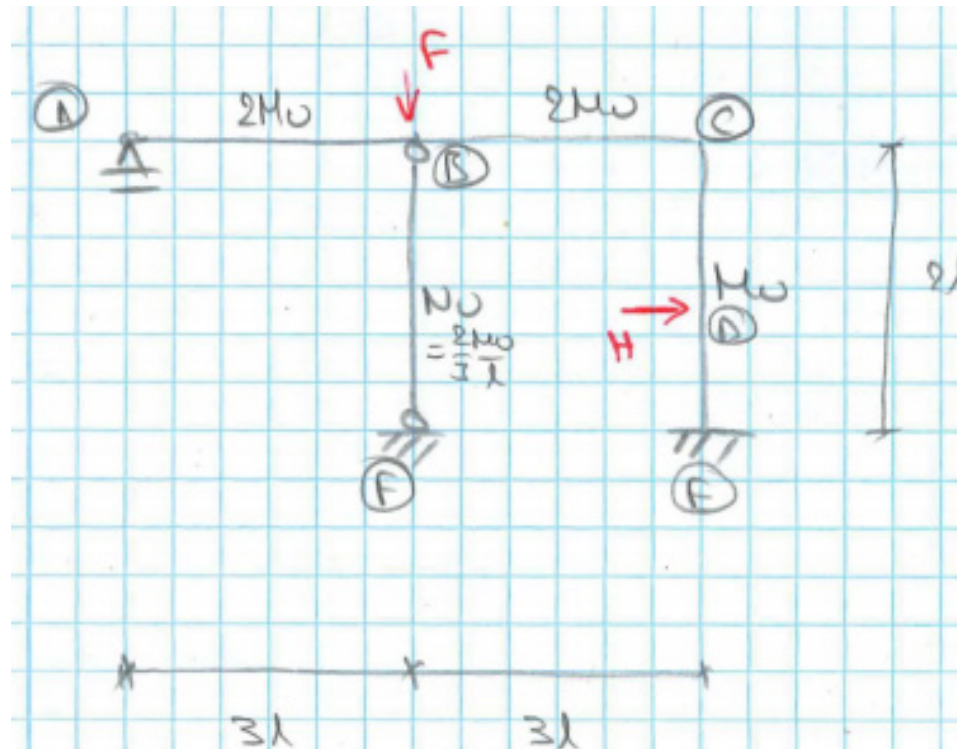
6. Traglastverfahren: Methoden

- “inkrementelles” Vorgehen
 - + Genaue Berechnung der Traglast
 - - Mehrere Iterationen notwendig
- Oberer Grenzwertsatz (kinematische Methode)
 - Traglast grösser oder gleich der vollständigen Lösung
- Unterer Grenzwertsatz (statische Methode)
 - Traglast kleiner oder gleich der vollständigen Lösung



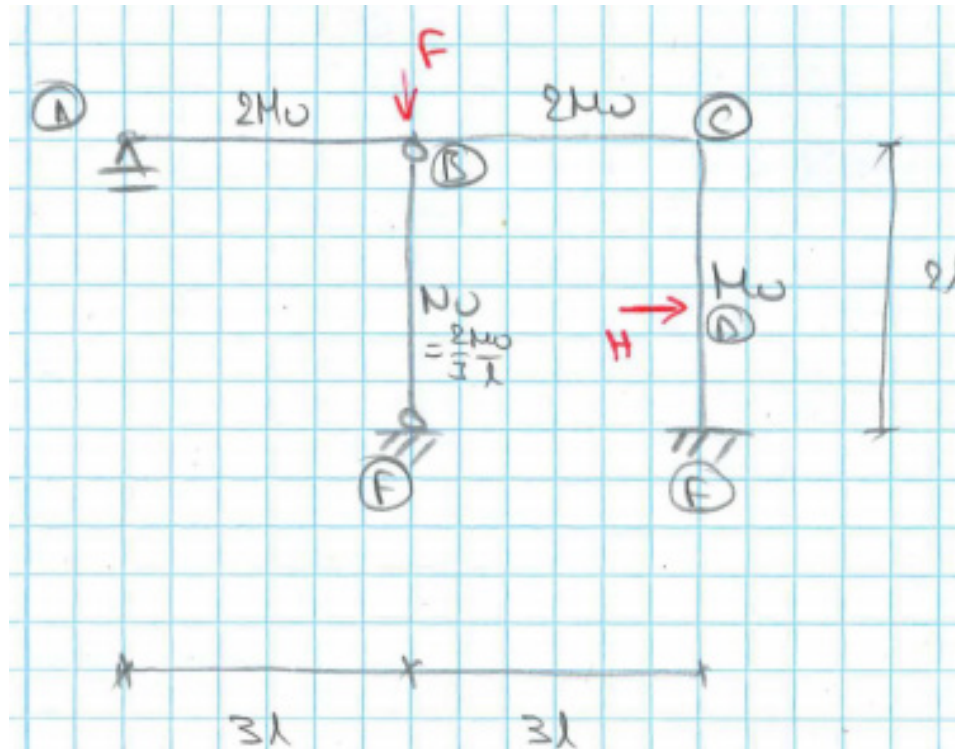
6. Traglastverfahren: Beispiel

- Traglastermittlung mittels Oberer Grenzwertsatz (kinematische Methode) SS18(5)



6. Traglastverfahren: EdupApp 1

- Wie viele Grundmechanismen gibt es?



6. Traglastverfahren: EdupApp 1

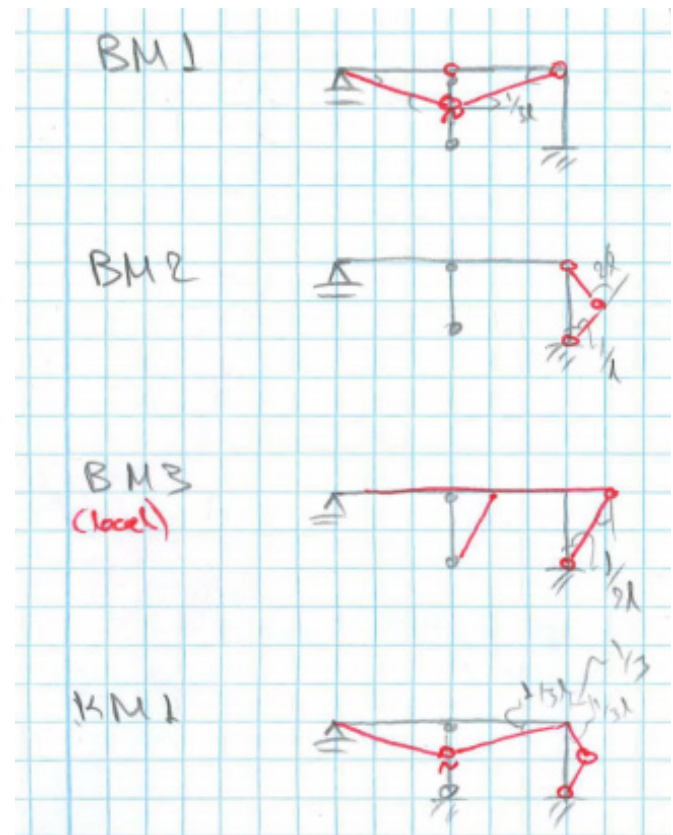
➤ Wie viele Grundmechanismen gibt es?

➤ $m = k - h_i = 5 - 2 = 3$

m : Anzahl Grundmechanismen

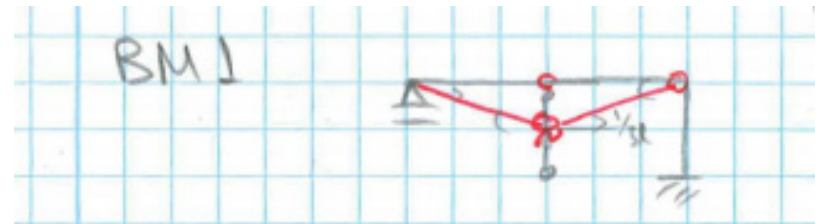
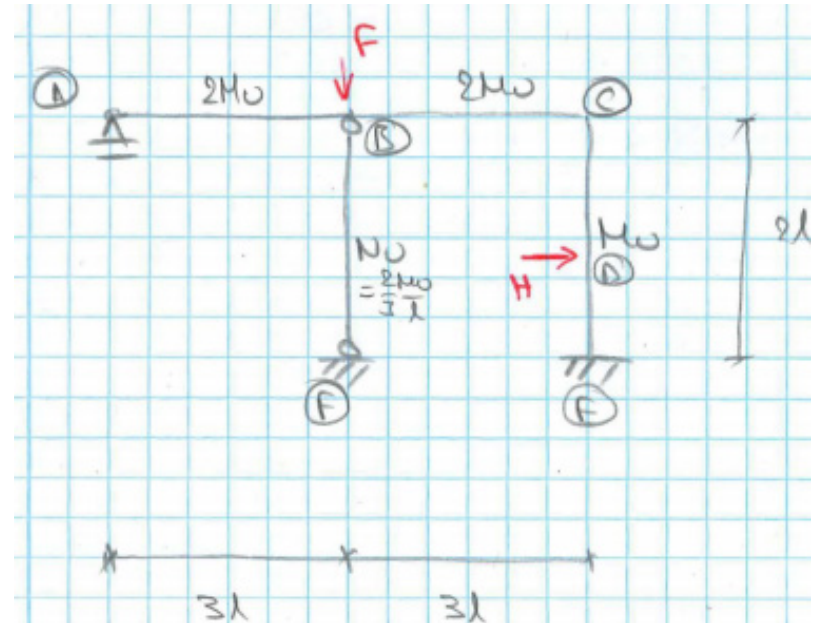
k : Anzahl kritischer QS

h_i : Stat. Unbestimmtheit



6. Traglastverfahren: EdupApp 2

- Oberer Grenzwert für BM1?



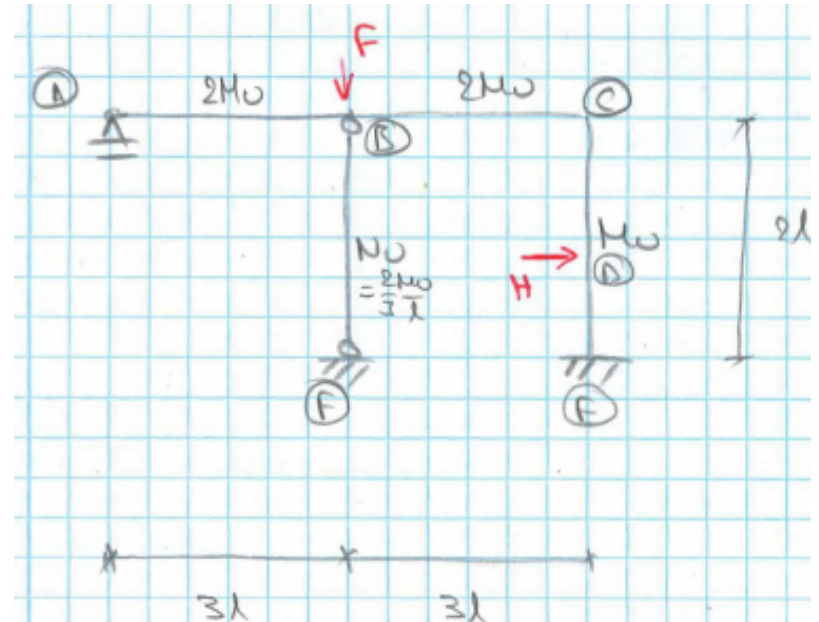
6. Traglastverfahren: EdupApp 2

- Oberer Grenzwert für BM1?

$$W = F * \Delta$$

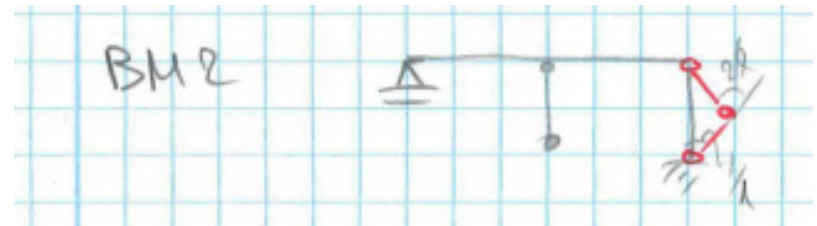
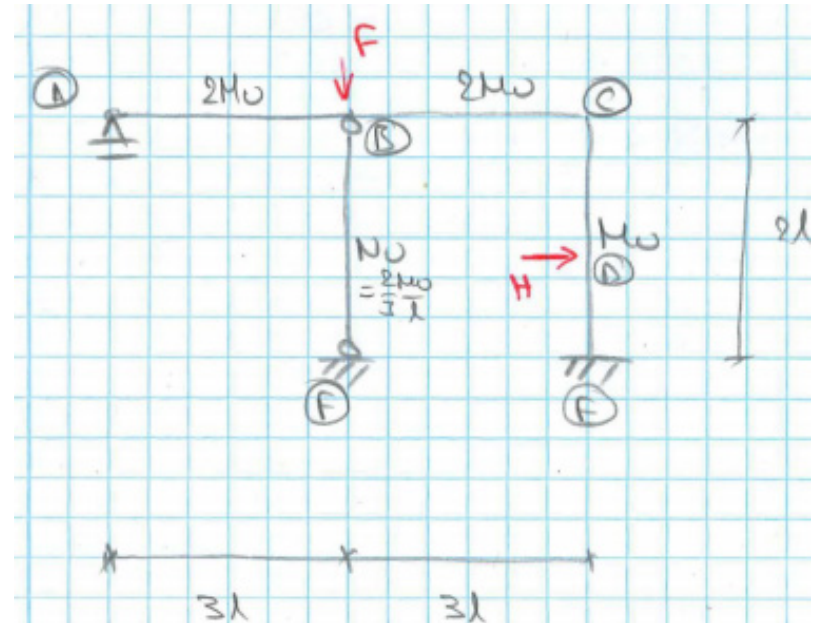
$$D = \frac{\Delta}{3l} (2 * 2M_u + M_u) + N_u * \Delta$$

$$\text{➤ } F_u \leq \frac{7M_u}{3l}$$



6. Traglastverfahren: EdupApp 3

- Oberer Grenzwert für BM2?



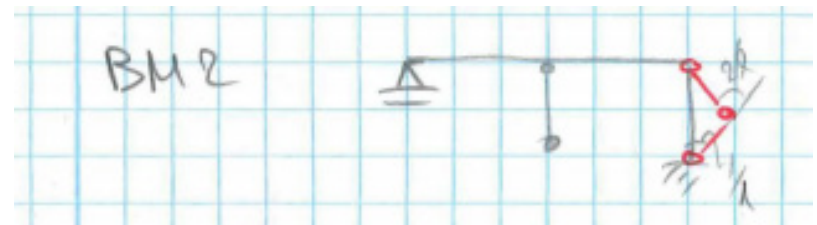
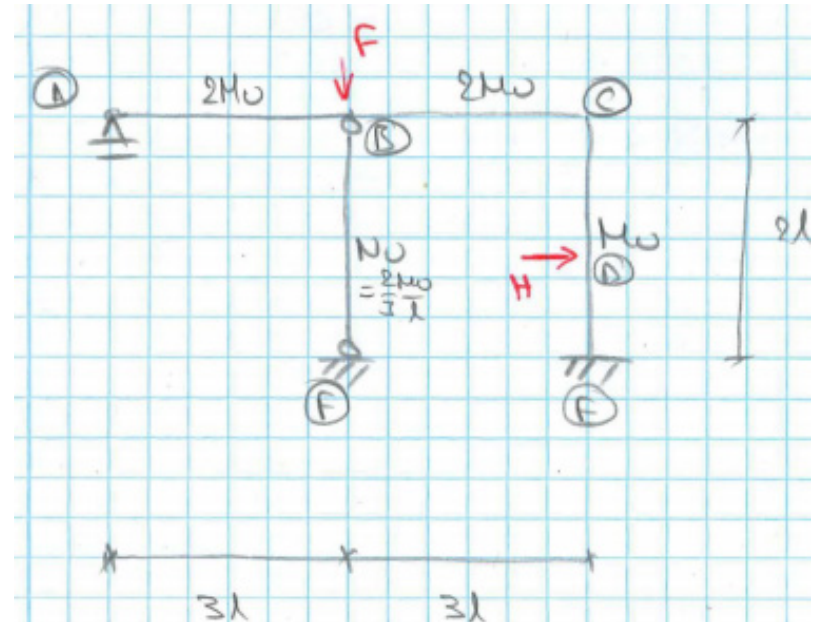
6. Traglastverfahren: EdupApp 3

- Oberer Grenzwert für BM2?

$$W = H * \Delta$$

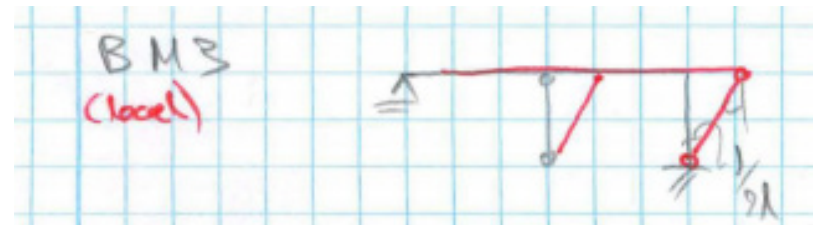
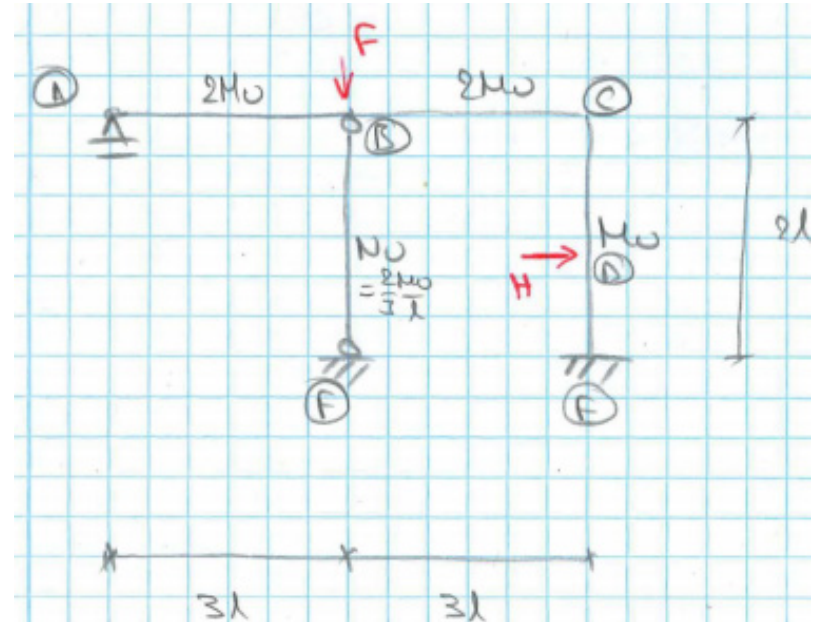
$$D = \frac{\Delta}{l} (M_u + M_u + 2M_u)$$

$$\text{➤ } H_u \leq \frac{4M_u}{l}$$



6. Traglastverfahren: EdupApp 4

- Oberer Grenzwert für BM3?



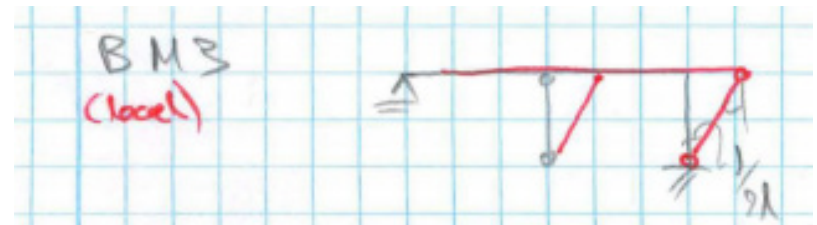
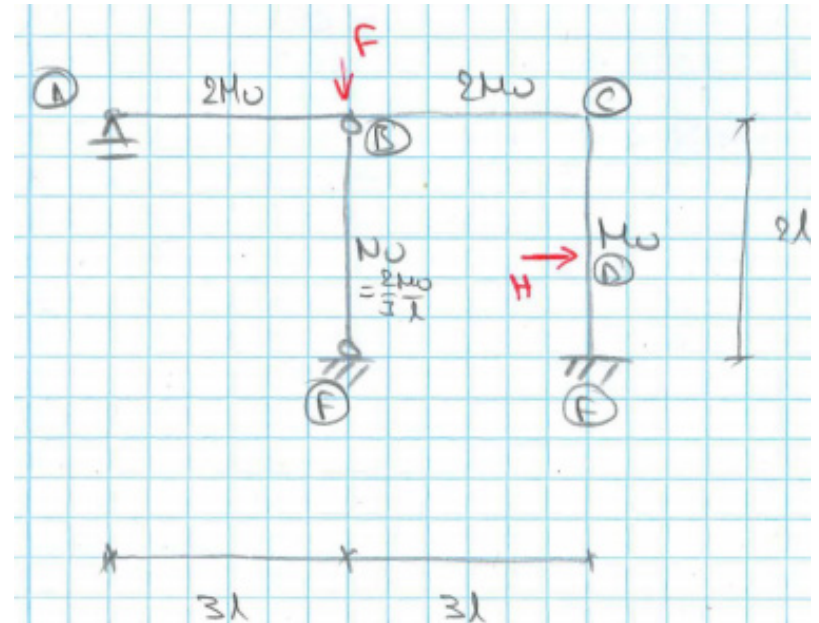
6. Traglastverfahren: EdupApp 4

- Oberer Grenzwert für BM3?

$$W = H * \frac{\Delta}{2}$$

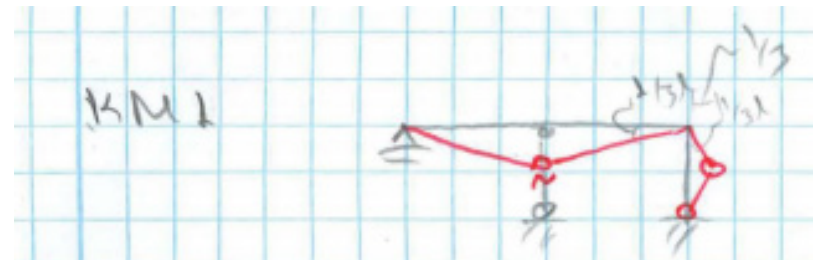
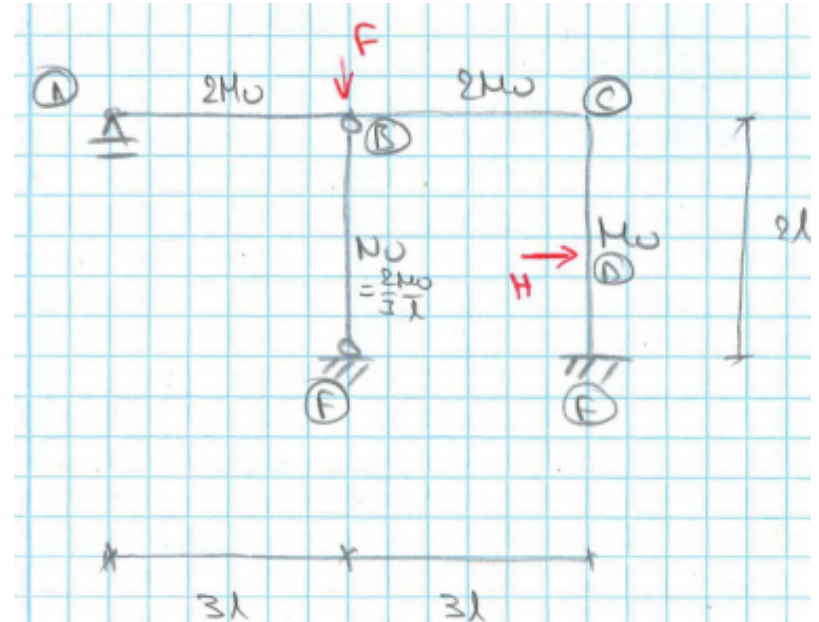
$$D = \frac{\Delta}{2l} (M_u + M_u)$$

$$\text{➤ } H_u \leq \frac{2M_u}{l}$$



6. Traglastverfahren: EdupApp 5

- Oberer Grenzwert für KM1?



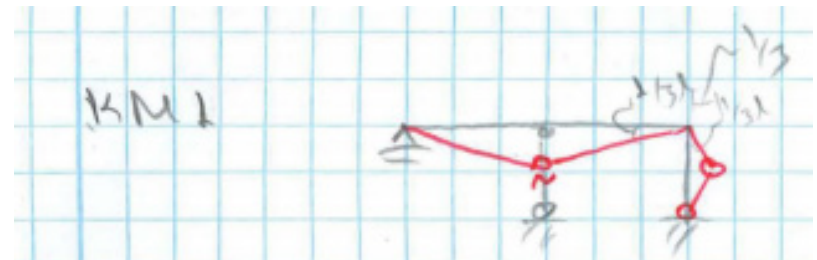
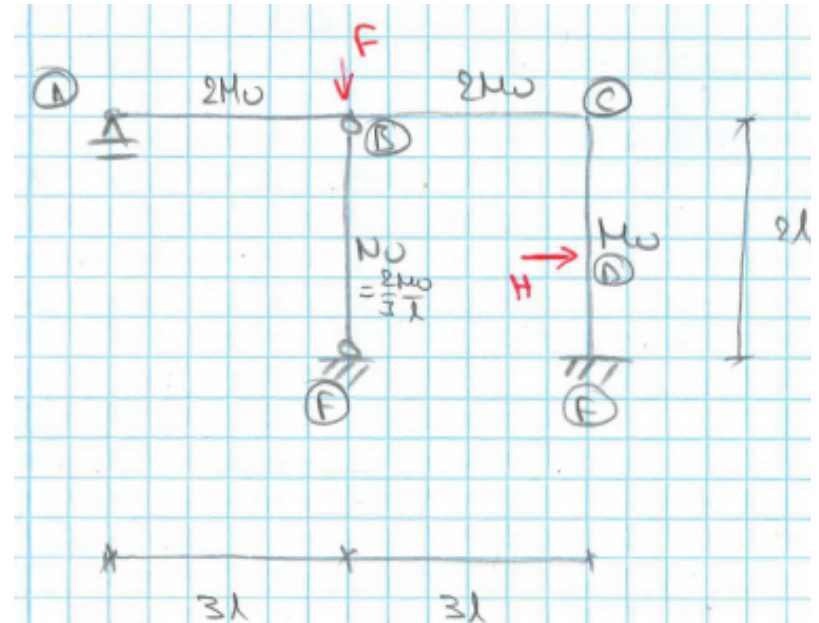
6. Traglastverfahren: EdupApp 5

- Oberer Grenzwert für KM1?

$$W = F\Delta + H\frac{\Delta}{3}$$

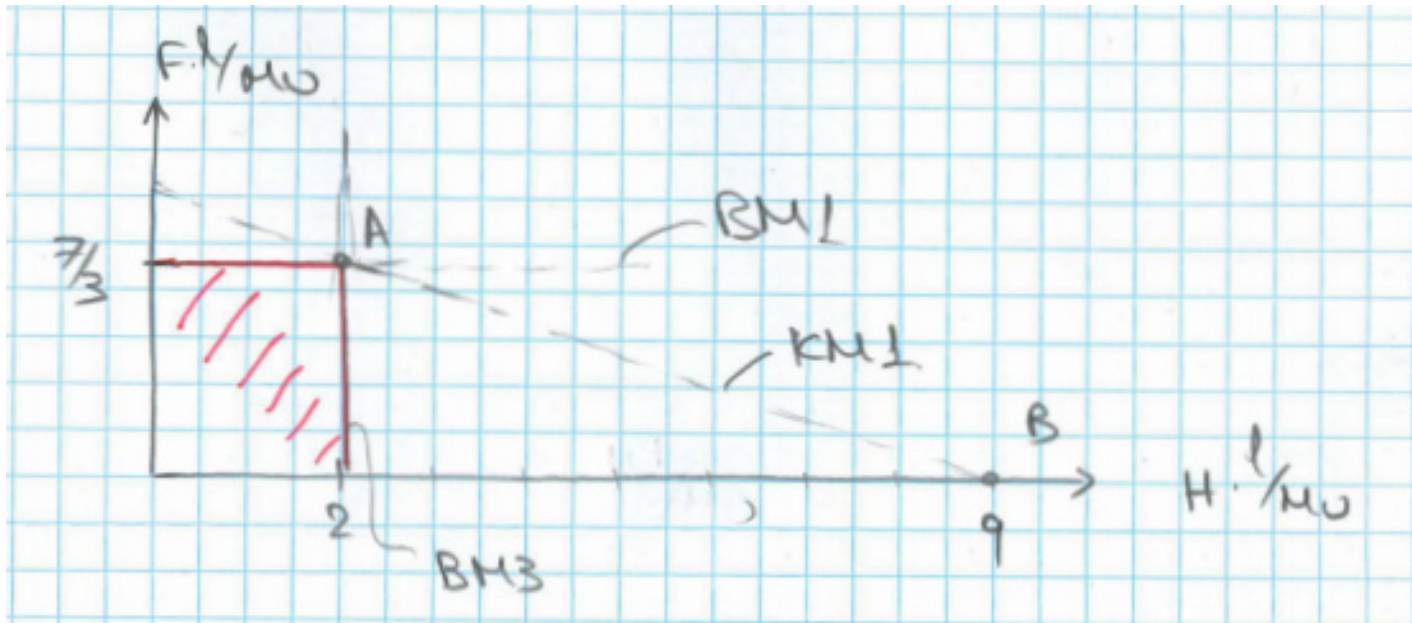
$$D = \frac{\Delta}{3l}(4M_u + 2M_u + M_u) + N_u\Delta$$

$$\text{➤ } F + \frac{H}{3} \leq \frac{3M_u}{l}$$



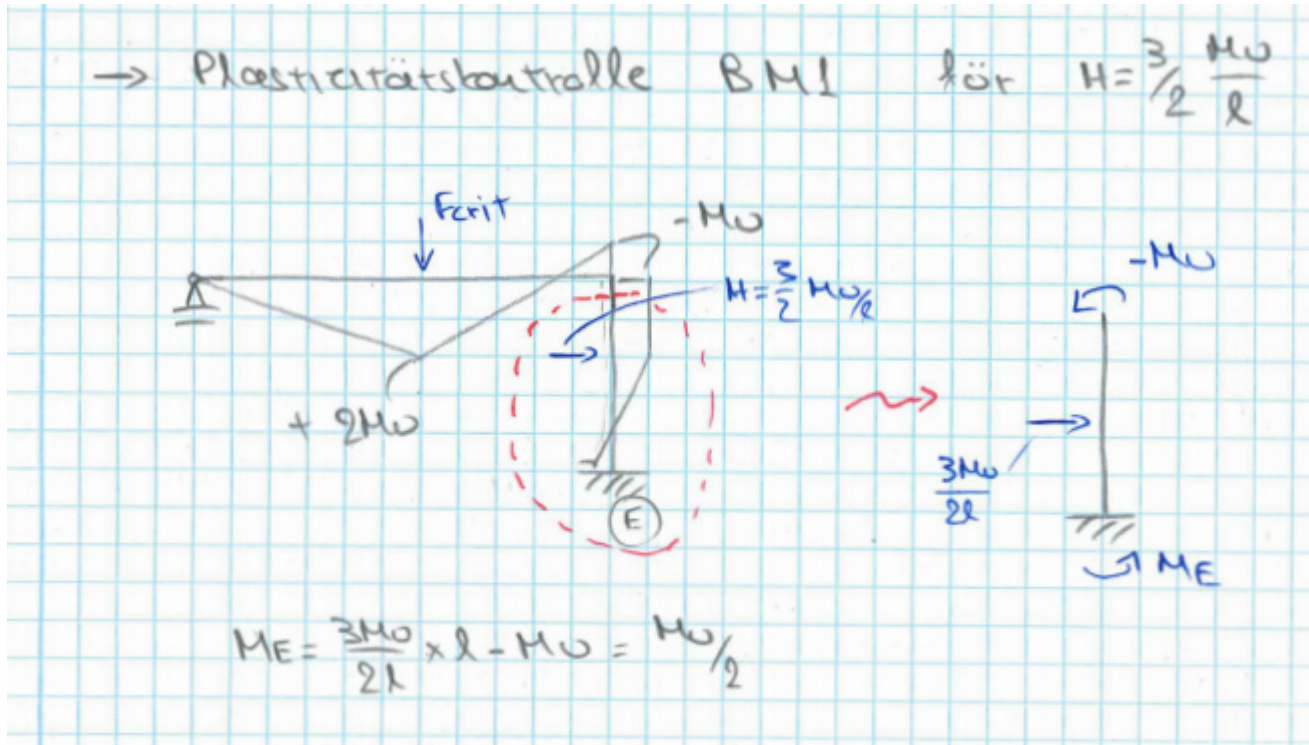
6. Traglastverfahren: Fliessfigur

➤ Fliessfigur



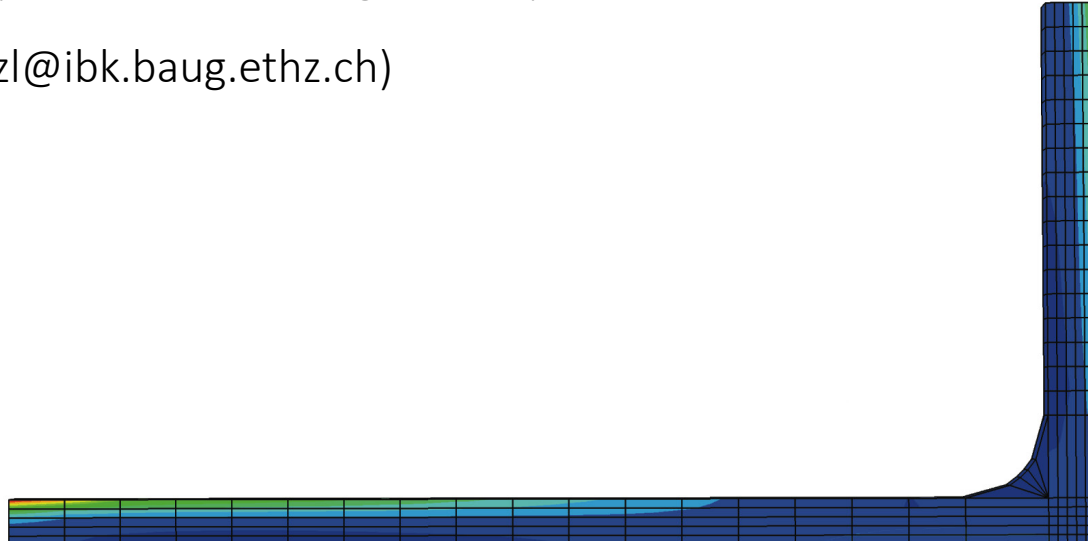
6. Traglastverfahren: Plastizitätskontrolle

- Plastizitätskontrolle BM1 für $F = \frac{7}{3} \frac{M_u}{l}$ und $H = \frac{3}{2} \frac{M_u}{l}$



Weitere Unterstützung

- Prüfungsvorbereitungskurs (von AIV organisiert)
- Allgemeine Fragen auf Piazza!
- Sonst per Email an:
 - Sergio Nicoli (nicoli@ibk.baug.ethz.ch)
 - Panagiotis Martakis (martakis@ibk.baug.ethz.ch)
 - Cyprien Hoelzl (hoelzl@ibk.baug.ethz.ch)



Herzlichen Dank und viel Erfolg!

