Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institute for Dynamic Systems and Control
IDSC
Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik

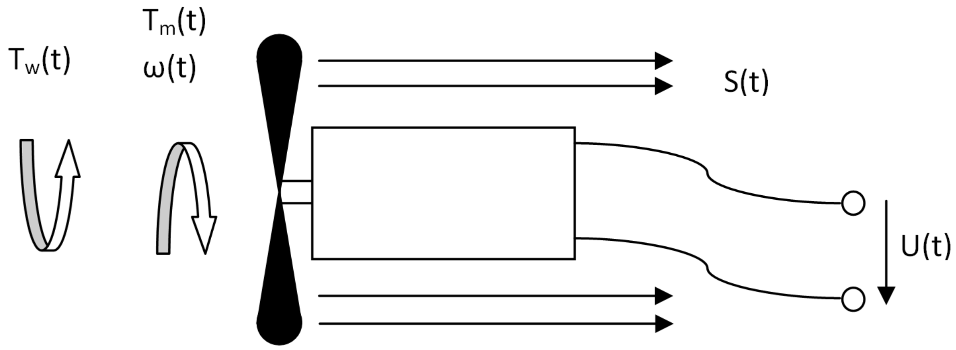
BSc - Sessionsprüfung **9.8.2010**

Regelungstechnik I **(151-0591-00)** **Prof. L. Guzzella**

Musterlösung

Dauer der Prüfung:	**120 Minuten**
Anzahl der Aufgaben:	**8** (**unterschiedlich** gewichtet, total 60 Punkte)
Bewertung:	Um die Note 6 zu erlangen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Bei jeder Aufgabe ist die Punktezahl angegeben.
Erlaubte Hilfsmittel:	20 A4-Blätter (**40 Seiten**) Taschenrechner (**zur Verfügung gestellt**) Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben.
Zur Beachtung:	Alle Lösungen, ausser die Antworten bei Multiple-Choice Aufgaben, sind zu begründen. Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern.

Aufgabe 1 (Modellieren, Linearisieren [Ott (Amacher)]) 6 Punkte



Ein Ventilator erzeugt einen Luftmassenstrom $S(t)$, der von der Lüfterdrehzahl $\omega(t)$ abhängig ist.

$$S(t) = c_1 \cdot \sqrt{\omega(t)} \tag{1}$$

Das Widerstandsmoment $T_w(t)$ des Ventilators ist

$$T_w(t) = c_2 \cdot \omega(t)^2 \tag{2}$$

Der Ventilator wird von einem Elektromotor angetrieben, welcher ein Moment $T_m(t)$ erzeugt

$$T_m(t) = k_1 \cdot U(t) - k_1 \cdot k_2 \cdot \omega(t) \tag{3}$$

Wobei $U(t)$ die Ankerspannung des Motors ist. Das System Lüfter-Motor habe eine Massenträgheit von Θ. Alle Reibungseffekte können vernachlässigt werden. Alle eingeführten Parameter $(c_1, c_2, k_1, k_2, \Theta)$ sind konstant und positive reelle Zahlen ($\in \mathbb{R}^+$).

a) (2 Punkte) Die Ankerspannung $U(t)$ sei die Eingangsgrösse des Systems, die Drehzal $\omega(t)$ sei die Zustandsgrösse des Systems und der Luftmassenstrom $S(t)$ sei die Ausgangsgrösse des Systems. Leiten Sie die Systemgleichungen her. Das Resultat soll in folgender Form angegeben werden:

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = f(\omega(t), U(t)) \qquad S(t) = g(\omega(t), U(t)) \tag{4}$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Drehzahl ω_e und die Ankerspannung U_e so, damit das System bei einem Luftmassenstrom von S_e im Gleichgewicht ist.

c) (2 Punkte) Linearisieren Sie das System um den Gleichgewichtspunkt (U_e, ω_e, S_e), auf eine vorgängige Normierung wird verzichtet. Verwenden Sie folgende Beziehungen:

$$\omega(t) = \omega_e + \delta\omega(t) \tag{5}$$
$$U(t) = U_e + \delta U(t) \tag{6}$$
$$S(t) = S_e + \delta S(t) \tag{7}$$

Und geben Sie das Resultat in folgender Form an:

$$\frac{d}{dt}\delta\omega(t) = a \cdot \delta\omega(t) + b \cdot \delta U(t) \qquad \delta S(t) = c \cdot \delta\omega(t) + d \cdot \delta U(t) \tag{8}$$

Lösung 1

a) Der Drallsatz ergibt

$$\Theta \cdot \frac{d}{dt}(\omega(t)) = T_m(t) - T_w(t) \tag{9}$$

Einsetzen von Gl. 2 und Gl. 3 liefert die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(\omega(t)) = \frac{1}{\Theta} \cdot \left(-c_2 \cdot \omega(t)^2 - k_1 \cdot k_2 \cdot \omega(t) + k_1 \cdot U(t)\right) \tag{10}$$

Die Gleichung für den Ausgang ist bereits in Gl. 1 in der geforderten Form

$$S(t) = c_1 \cdot \sqrt{\omega(t)} \tag{11}$$

b) Im Gleichgewicht muss die Ableitung der Drehzahl null sein.

$$\frac{d}{dt}(\omega(t)) = 0 \tag{12}$$

Daraus ergibt sich:

$$\omega_e = \frac{S_e^2}{c_1^2} \tag{13}$$

$$U_e = \frac{c_2 \cdot S_e^4}{k_1 \cdot c_1^4} + \frac{k_2 \cdot S_e^2}{c_1^2} \tag{14}$$

c) Die koeffizienten (a, b, c, d) ergeben sich aus

$$\begin{aligned}
a &= \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_e, U=U_e, S=S_e} &&= \frac{1}{\Theta} \cdot \left(-\frac{2c_2 \cdot S_e^2}{c_1^2} - k_1 \cdot k_2\right) \\
b &= \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)_{\omega=\omega_e, U=U_e, S=S_e} &&= \frac{k_1}{\Theta} \\
c &= \left(\frac{\partial g}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_e, U=U_e, S=S_e} &&= \frac{c_1^2}{2 \cdot S_e} \\
d &= \left(\frac{\partial g}{\partial U}\right)_{\omega=\omega_e, U=U_e, S=S_e} &&= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Aufgabe 2 (Frequenzbereich, Zeitbereich [Ott (Amacher)]) 8 Punkte

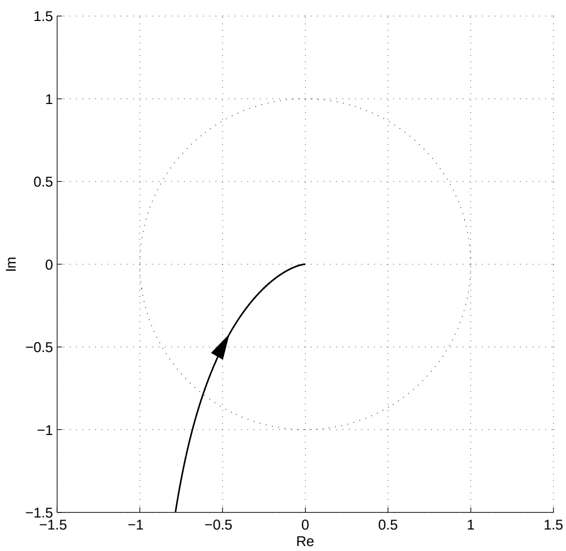
Gegeben sind 4 Übertragungsfunktionen offener Regelkreise $(L_1(s), L_2(s), L_3(s), L_4(s))$, die Nyquistdiagramme der offenen Regelkreise (Diagramm A, Diagramm B, Diagramm C, Diagramm D), sowie die Sprungantworten der geschlossenen Regelkreise (Sprungantwort 1, Sprungantwort 2, Sprungantwort 3, Sprungantwort 4). Ordnen sie jeder Übertragungsfunktion das entsprechende Nyquistdiagramm des offenen Regelkreises, sowie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises zu. Verwenden Sie für die Lösung die vorbereitete Tabelle.

Punktevergabe:
Pro richtige Zuordnung: +1 Punkt
Pro falsche Zuordnung: −1 Punkt
Minimalpunktzahl der Aufgabe: 0 Punkte

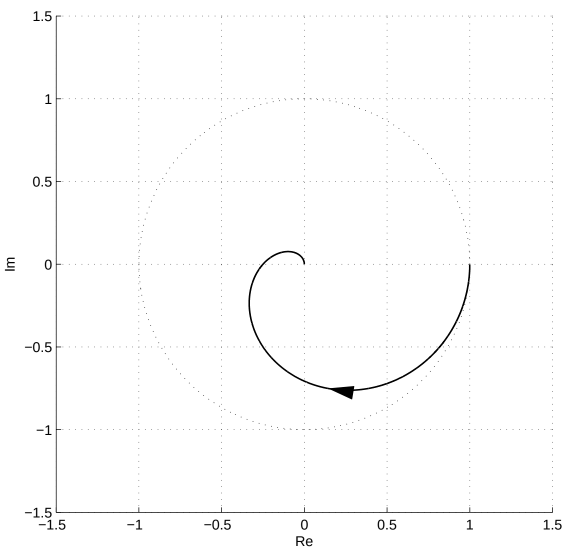
Tabelle für Lösung

Übertragungfunktion	$L_1(s) = \frac{1}{s+1} \cdot e^{-0.7\cdot s}$	$L_2(s) = \frac{1.5\cdot s+1}{(s+1)\cdot(s^2+1.4\cdot s+1)}$	$L_3(s) = \frac{1-0.3\cdot s}{(0.6\cdot s+1)^2}$	$L_4(s) = \frac{2}{s\cdot(0.5\cdot s+1)}$
Nyquistdiagramm				
Sprungantwort				

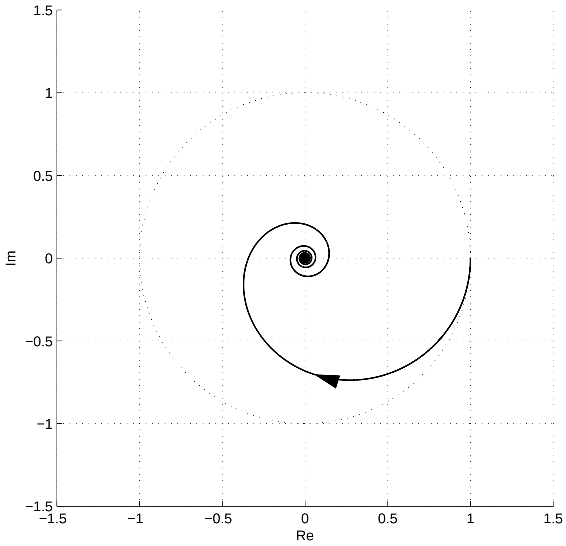
Nyquistdiagramm A



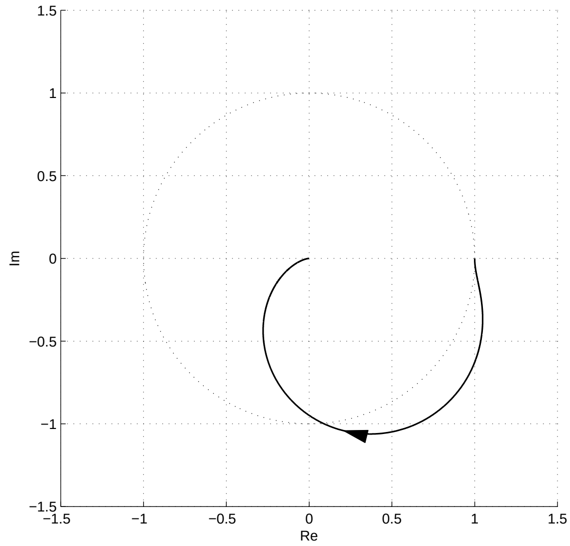
Nyquistdiagramm B



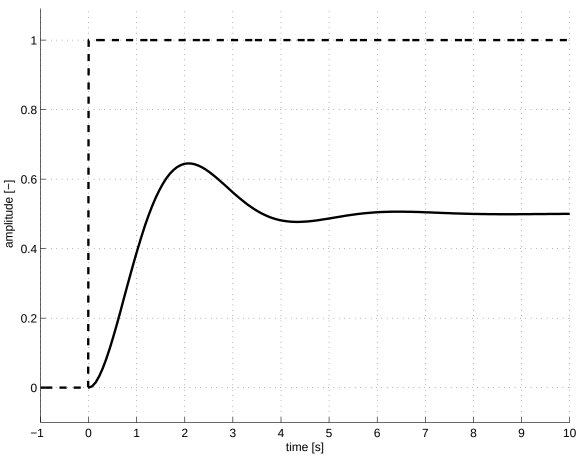
Nyquistdiagramm C



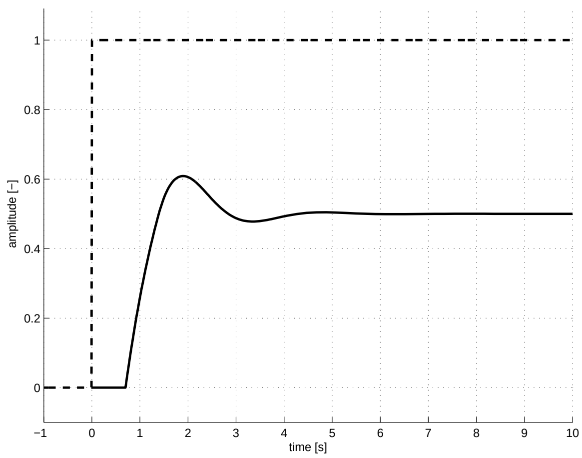
Nyquistdiagramm D



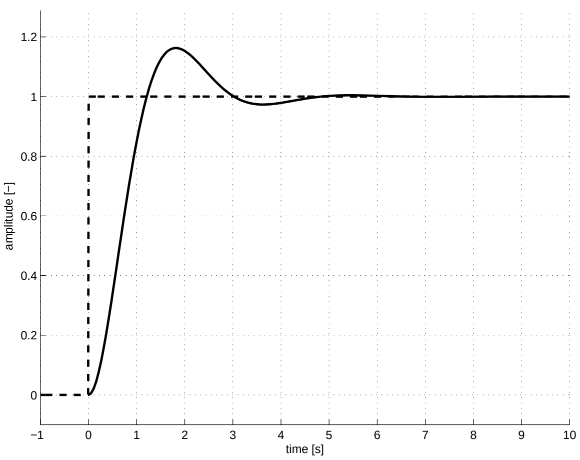
Sprungantwort 1



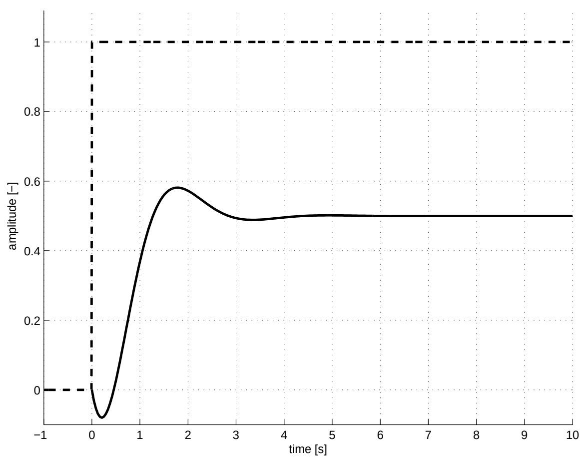
Sprungantwort 2



Sprungantwort 3



Sprungantwort 4



Lösung 2

Paare

Übertragungfunktion	$L_1(s) = \frac{1}{s+1} \cdot e^{-0.7 \cdot s}$	$L_2(s) = \frac{1.5 \cdot s+1}{(s+1) \cdot (s^2+1.4 \cdot s+1)}$	$L_3(s) = \frac{1-0.3 \cdot s}{(0.6 \cdot s+1)^2}$	$L_4(s) = \frac{2}{s \cdot (0.5 \cdot s+1)}$
Nyquistdiagramm	C	D	B	A
Sprungantwort	2	1	4	3

Erklärungen:

System 1

Das System hat eine Totzeit, diese ergibt im Nyquistdiagramm eine Spirale, in der Sprungantwort ist die Totzeit direkt ersichtlich.

System 2

Das System hat 3 stabile Pole und 1 minimalphasige Nullstelle somit ist

$$\lim_{\omega \to \infty} (arg(L(j\omega))) = -180^\circ$$

dies trifft nur auf Diagramm D zu. Da das System minimalphasig ist und keine Totzeit hat, kommen nur Sprungantworten 1 und 3 in Frage. Entweder kann man die statische Verstärkung von $T(j\omega)$ berechnen

$$\lim_{\omega \to 0} (|T(j\omega)|) = \frac{1}{2}$$

womit nur Sprungantwort 1 passt. Oder man ordent zuerst alle anderen Sprungantworten zu, womit nur noch Sprungantwort 1 übrig bleibt.

System 3

Das System hat 2 stabile Pole und 1 nicht-minimalphasige Nullstelle somit ist

$$\lim_{\omega \to \infty} (arg(L(j\omega))) = -270^\circ$$

dies trifft nur auf Diagramm B zu. Die nicht-minimalphasige Nullstelle führt dazu, dass das System im ersten Moment in die 'falsche Richtung' reagiert. Somit passt nur Sprungantwort 4.

System 4

Das System hat einen offenen Integrator, damit gilt:

$$\lim_{\omega \to 0} (|L(j\omega)|) = \infty$$

Dies trifft nur auf Diagramm A zu. Der offene Integrator verhindert einen statischen Nachlauffehler, womit nur Sprungantwort 3 passt.

Aufgabe 3 (Reglerauslegung [Schick (Ott)]) **7 Punkte**

Gegeben ist folgende Strecke

$$P(s) = \frac{1}{(s+0.5)\cdot(s+2)} \cdot e^{-T_d \cdot s}, \quad T_d = \frac{\pi}{8} \text{ Sekunden.}$$

a) (4 Punkte) Für diese Regelstrecke müssen Sie einen PI-Regler $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$ auslegen. Es wird gefordert, dass das Regelsystem eine Durchtrittsfrequenz von 1 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ und eine Phasenreserve von 45° haben soll. Bestimmen Sie die beiden Parameter (k_p, k_i) des Reglers!

b) (1 Punkt) Es soll alternativ ein Regler mittels der Methode von Ziegler und Nichols ausgelegt werden. Hierzu müssen experimentell die kritische Verstärkung k^* sowie die kritische Periodendauer T^* bestimmt werden. Wie würden Sie vorgehen, um diese Grössen experimentell zu bestimmen?

c) (1 Punkt) Aus Experimenten ergeben sich für die kritische Verstärkung k^* und die kritische Periodendauer T^* folgende Werte:

$$k^* = 7.36$$

$$T^* = 2.63\ s.$$

Bestimmen Sie die Reglerparameter k_p, T_i, T_d und τ eines PID-Reglers der Form

$$C_{PID}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + s \cdot T_d\right) \cdot \frac{1}{(s \cdot \tau + 1)^2}$$

mittels der Methode von Ziegler und Nichols!

d) (1 Punkt) Was ist bei der Spezifikation und Auslegung eines Reglers für eine Strecke mit Totzeit zu beachten?

Lösung 3

a) (4 Punkte)
Die Kreisverstärkung des Regelsystems lautet für die Durchtrittsfrequenz $\omega = 1\ \frac{rad}{s}$

$$L(j \cdot 1) = P(j \cdot 1) \cdot C(j \cdot 1) = \frac{1}{(j+0.5)\cdot(j+2)} \cdot e^{-i\frac{\pi}{8}} \cdot (k_P + \frac{k_I}{j}).$$

Durch eine Umformung kann sie in der folgenden Form geschrieben werden:

$$L(j \cdot 1) = (xk_P + yk_I) + (-xk_I + yk_P) \cdot j$$

mit

$$x = -0.1531, \quad y = -0.3696.$$

Für eine Spezifikation mit einer Phasenreserve von 45° muss die Kreisverstärkung bei der Durchtrittsfrequenz $\omega = 1\ \frac{rad}{s}$ die folgende Form besitzen:

$$L(j \cdot 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot j.$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhält man ein Gleichungssystem für die Bestimmung der Reglerparameter. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die folgenden Zahlenwerte für die Reglerparameter:

$$k_P \approx 2.3097$$

$$k_I \approx 0.9567.$$

b) (1 Punkt)
Zunächst wird der Regelkreis durch ein P-Element geschlossen. Anschliessend wird die Verstärkung k_p soweit erhöht bis das Ausgangssignal bei einem Sprung mit etwa konstanter Amplitude schwingt. Die notwendige Verstärkung entspricht k^*, während die Periodendauer der sich einstellenden Schwingung T^* ist.

c) (1 Punkt)
Die korrekten Reglerparameter ergeben sich aus Tabelle 1.

	k_p	T_i	T_d	τ
PID	$0.6 \cdot k_p^*$	$0.50 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$	$\approx T_d/10$
Zahlenwerte	4.42	1.32 s	0.33 s	0.033 s

Tabelle 1: Ziegler-Nichols controller parameters

d) (1 Punkt)
Bei Strecken mit Totzeit ist die erzielbare Bandbreite des Regelsystems beschränkt. Der Regler ist entsprechend langsam auszulegen.

Aufgabe 4 (Laplace Transformation [Amacher (Schick)]) 8 Punkte

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) (4 Punkte) Eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ sei gegeben:

$$\Sigma(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5 \cdot s + 6}$$

Die Strecke wird mit dem folgenden Eingangssignal $u(t)$ angeregt:

$$u(t) = 4 \cdot \sin(3t)$$

Berechnen Sie das resultierende Ausgangssignal $y(t)$ im Zeitbereich.

b) (4 Punkte) Ein lineares zeitinvariantes SISO-System wird mit dem Signal

$$u(t) = \sin(2t)$$

angeregt. Die Systemantwort (im Zeitbereich) ist gegeben durch:

$$y(t) = \frac{4}{9} t e^{-t} + \frac{52}{405} e^{-t} + \frac{5}{2106} e^{-10t} + \frac{1}{130} \left(-17 \cdot \cos(2t) - 19 \cdot \sin(2t)\right)$$

i) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ des Systems.

ii) Wie lautet der statische Verstärkungsfaktor des Systems?

iii) Wie lauten die Pole des Systems?

iv) Approximieren Sie die Anstiegszeit t_{90} des Systems indem Sie die nicht relevante Dynamik des Systems vernachlässigen.

Lösung 4

a) Es gilt:

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s)$$

Die Laplacetransformation des Eingangssignals lautet wie folgt:

$$U(s) = \frac{12}{s^2 + 9}$$

$Y(s)$ kann also wie folgt geschrieben werden:

$$Y(s) = \frac{12 \cdot (s+1)}{(s+2) \cdot (s+3) \cdot (s+3j) \cdot (s-3j)}$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung kann dieser Ausdruck in einfach transformierbare Terme zerlegt werden. Für p Pole π_i der Vielfachheit ϕ_i ist sie definiert durch:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k} \qquad \rho_{i,k} \in \mathbb{C}$$

Die Residuen $\rho_{i,k}$ werden folgendermassen berechnet:

$$\rho_{i,k} = \lim_{s\to\pi_i} \frac{1}{(\phi_i - k)!}\left[\frac{d^{(\phi_i-k)}}{ds^{(\phi_i-k)}}\left\{Y(s)\cdot(s-\pi_i)^{\phi_i}\right\}\right]$$

Es gibt folgende Pole:

$$\pi_1 = -2;\ \pi_2 = -3;\ \pi_3 = 3j;\ \pi_4 = -3j$$

wobei die Vielfachheiten ϕ_i alle gleich 1 sind. Damit lassen sich die Residuen berechnen:

$$\begin{aligned}
\rho_{1,1} &= \lim_{s\to-2}\frac{1}{(1-1)!}\left[\frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}}\left\{\frac{12\cdot(s+1)}{(s+3)\cdot(s+3j)\cdot(s-3j)}\right\}\right]\\
&= \lim_{s\to-2}\frac{12\cdot(s+1)}{(s+3)\cdot(s^2+9)} = -\frac{12}{13}\\
\rho_{2,1} &= \lim_{s\to-3}\frac{1}{(1-1)!}\left[\frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}}\left\{\frac{12\cdot(s+1)}{(s+2)\cdot(s+3j)\cdot(s-3j)}\right\}\right]\\
&= \lim_{s\to-3}\frac{12\cdot(s+1)}{(s+2)\cdot(s^2+9)} = \frac{4}{3}\\
\rho_{3,1} &= \lim_{s\to3j}\frac{1}{(1-1)!}\left[\frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}}\left\{\frac{12\cdot(s+1)}{(s+2)\cdot(s+3)\cdot(s+3j)}\right\}\right]\\
&= \lim_{s\to3j}\frac{12\cdot(s+1)}{(s+2)\cdot(s+3)\cdot(s+3j)} = \frac{12\cdot(1+3j)}{-90-18j} = \frac{2}{39}(-4-7j)\\
\rho_{4,1} &= \lim_{s\to-3j}\frac{1}{(1-1)!}\left[\frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}}\left\{\frac{12\cdot(s+1)}{(s+2)\cdot(s+3)\cdot(s-3j)}\right\}\right]\\
&= \lim_{s\to-3j}\frac{12\cdot(s+1)}{(s+2)\cdot(s+3)\cdot(s-3j)} = \frac{12\cdot(1-3j)}{-90+18j} = \frac{2}{39}(-4+7j)
\end{aligned}$$

Die einzelnen Terme können nun einfach transformiert werden:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{s+2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{2}{39}\cdot\frac{42-8s}{s^2+9}\right\}\\
&= -\frac{12}{13}\cdot e^{-2t}+\frac{4}{3}\cdot e^{-3t}+\frac{2}{39}\left(14\cdot\sin(3t)-8\cdot\cos(3t)\right)
\end{aligned}$$

b) i) Es gilt:

$$Y(s) = \Sigma(s)\cdot U(s)$$

Die Anregung $U(s)$ im Frequenzbereich kann mit der Tabelle bestimmt werden:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{2}{s^2+4}$$

Die Systemantwort $Y(s)$ im Frequenzbereich kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{4}{9}\cdot t\cdot e^{-t}+\frac{52}{405}\cdot e^{-t}+\frac{5}{2106}\cdot e^{-10t}+\dots\right.\\
&\quad\dots\left.+\frac{1}{130}\left(-17\cdot\cos(2t)-19\cdot\sin(2t)\right)\right\}\\
&= \frac{4}{9\cdot(s+1)^2}+\frac{52}{405\cdot(s+1)}+\frac{5}{2106\cdot(s+10)}-\frac{17\cdot s}{130\cdot(s^2+4)}-\frac{19\cdot 2}{130\cdot(s^2+4)}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck kann auf folgende Form gebracht werden:

$$Y(s) = \frac{a_1 \cdot s^4 + a_2 \cdot s^3 + a_3 \cdot s^2 + a_4 \cdot s + a_5}{(s+1)^2 \cdot (s+10) \cdot (s^2+4)}$$

Aus einem Koeffizientenvergleich folgt für die Werte a_i: $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 20$.
Die gesuchte Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ ist somit:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)^2 \cdot (s+10)}$$

ii) Der statische Übertragungsfaktor $|\Sigma(0)|$ ist gleich 1.

iii) Die Pole des Systems sind

$$\pi_{1,2} = -1$$

und

$$\pi_3 = -10$$

iv) Das System kann als Übertragungsfunktion zweiter Ordnung approximiert werden indem die zum schnellsten Pol zugehörige Dynamik vernachlässigt wird.

$$\Sigma_{approx}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Die Anstiegszeit des vereinfachten Systems kann dann wie folgt approximiert werden:

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{4 \cdot \delta^4 + 1} - 2 \cdot \delta^2} \approx 0.49$$

$$t_{90} = \frac{1.7}{\omega_c} \approx 3.5$$

Aufgabe 5 (Nebenbedingungen [Guzzella (Shafai)]) 8 Punkte

Die zu regelnde Strecke ist das im Bild 1 dargestellte Pendel-Wagen-System. Aus der Vorlesung kennen Sie die Übertragungsfunktion der zu regelnden Strecke (der Eingang $u(t)$ ist die Kraft auf den Wagen, der Ausgang $y(t)$ ist die Position der Pendelspitze)

$$Y(s) = P(s) \cdot U(s), \qquad P(s) = \frac{-g}{s^2 \cdot (l \cdot M \cdot s^2 - g \cdot (m + M))}$$

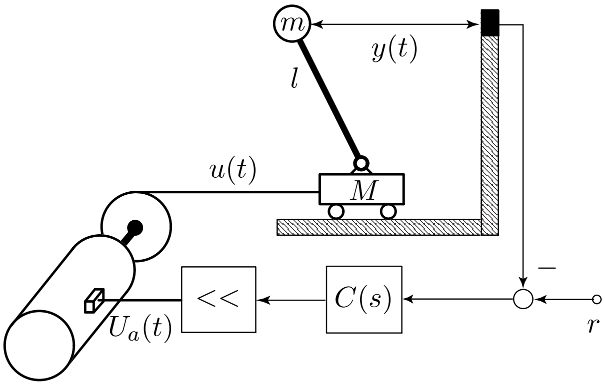


Abbildung 1: Regelsystem "Pendel auf einem Wagen".

Sie sind dafür verantwortlich, ein *möglichst kostengünstiges* Regelsystem zu entwerfen, welches das Pendel in seiner oberen Lage stabilisieren kann (die Auslegung des Reglers $C(s)$ ist *nicht* Teil dieser Aufgabe).

Der bereits gekaufte elektronische Verstärker (im Bild 1 mit << bezeichnet) ist sehr schnell und kann deshalb als idealer Verstärker betrachtet werden. Für die Elektromotoren haben Sie drei Typen zur Auswahl. Die aus dem Katalog des Herstellers entnommenen Bode-Diagramme der Elektromotoren sind in Bild 2 dargestellt (Eingang elektrische Spannung $U_a(t)$, Ausgang Kraft $u(t)$). Der Typ EM-1 kostet 1'000 Fr., der Typ EM-2 kostet 2'000 Fr. und der Typ EM-3 kostet 3'000 Fr.

Die Parameter des Pendels entnehmen Sie aus den Konstruktionsunterlagen als

$$m = 3 \text{ kg}, \quad M = 1 \text{ kg}, \quad l = 0.1 \text{ m}$$

und für die Erdbeschleunigung gilt $g \approx 10$ m/s^2.

a) (8 Punkte) Welcher der drei Elektromotoren wählen Sie aus? Begründen Sie Ihre Antwort mit quantitativen Argumenten!

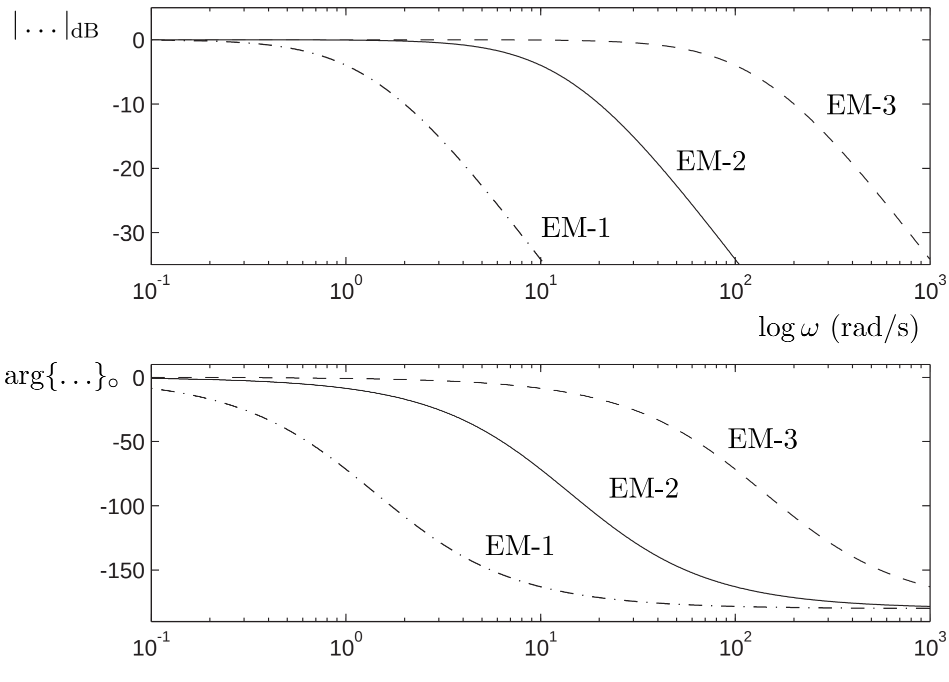


Abbildung 2: Bode-Diagramme der drei zur Verfügung stehenden Elektromotoren.

Lösung 5

a) Die Strecke ist offensichtlich instabil. Dies erkennt man direkt aus den Polen der Übertragungsfunktion (π_4 hat einen positiven Realteil)

$$\pi_1 = 0, \;\; \pi_2 = 0, \;\; \pi_3 = -\sqrt{\frac{g}{l} \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right)} \approx -20\text{rad/s}, \;\; \pi_4 = +\sqrt{\frac{g}{l} \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right)} \approx +20\text{rad/s}$$

Damit das Pendel in seiner oberen Lage stabilisiert werden kann, muss der Regelkreis genügend "schnell" sein. Dies führt auf eine Bedingung für die Durchtrittsfrequenz ω_c der Kreisverstärkung $L(j\omega)$ (pro memoria: ω_c ist diejenige Frequenz, bei der die Kreisverstärkung den Betrag 1 hat, d.h. $|L(j\omega_c)| = 1$).

Gemäss den in der Vorlesung eingeführten Faustregeln muss gelten, dass

$$\omega_c > 2 \cdot \pi^+$$

wobei π^+ der "schnellste" instabile Pol ist, d.h. derjenige Pol mit dem grössten Realteil. In der hier vorliegenden Aufgabe ist der "schnellste" instabile Pol gleich $\pi_4 \approx 20$ rad/s. Die Durchtrittsfrequenz ω_c muss demzufolge die Bedingung

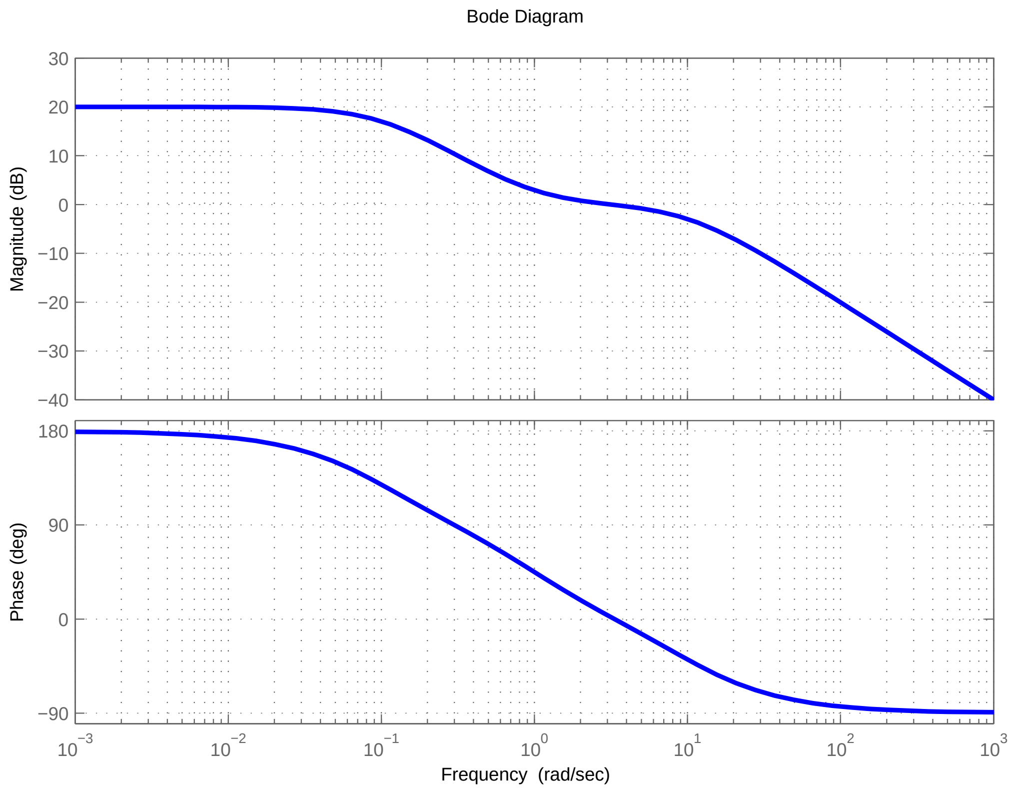
$$\omega_c > 40 \;\; \text{rad/s}$$

erfüllen. Damit aber eine solche Durchtrittsfrequenz überhaupt realisierbar ist, darf der im Regelkreis eingebaute Elektromotor bei dieser Frequenz nicht bereits einen grossen Phasenverlust einführen (stark negative Phase haben). Nur wenn dies der Fall ist, kann ein Regler gefunden werden, der eine genügende Phasenreserve produzieren wird. Aus diesem Grunde kommen weder EM-1 (erzeugt fast $-180°$ Phasenverlust), noch EM-2 (erzeugt etwa $-140°$ Phasenverlust) in Frage. Nur der teuerste Elektromotor EM-3 (erzeugt nur etwa $-30°$ Phasenverlust) kommt in Frage. Schlechte Nachrichten für Ihre Chefin ....

Bemerkung: Die Begründung, dass EM-1 und EM-2 bei der Frequenz $\omega_c \approx 40$ rad/s bereits -60 dB bzw. bereits -20 dB Verstärkungsabfall haben, und dass nur EM-3 solch hohen Frequenzen gut folgen kann, wird ebenfalls akzeptiert.

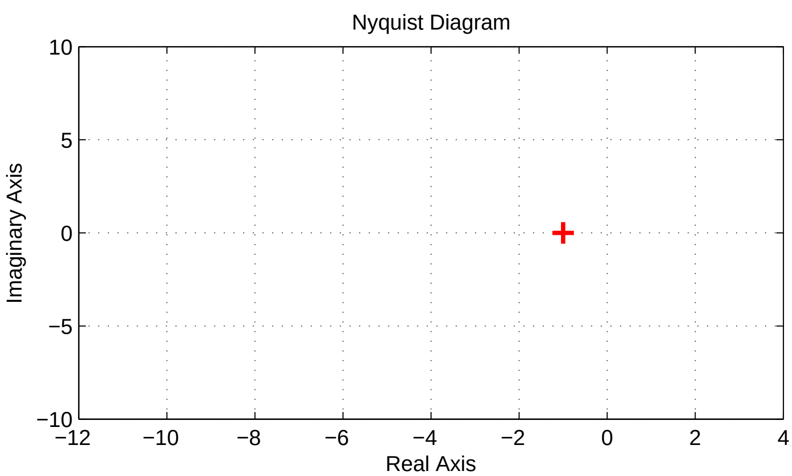
Aufgabe 6 (Bode-Diagramm/Nyquist-Kriterium [Amacher (Schick)]) 7 Punkte

Für eine Regelstrecke wurde das folgende Bode-Diagramm gemessen:



a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ der vermessenen Strecke.

b) (1 Punkt) Skizzieren Sie das Nyquist-Diagramm des analysierten Systems im vorbereiteten Bild:



c) (3 Punkte) Die Strecke wird mit einem P-Regler (Verstärkung k_p) stabilisiert. Verwenden Sie das Nyquist-Kriterium, um zu bestimmen, innerhalb welcher Grenzen k_p gewählt werden muss, damit ein asymptotisch stabiles geschlossenes Regelsystem resultiert.

Lösung 6

a) Das System $\Sigma(s)$ besteht aus einer Nullstelle und zwei Polen. Da bei der Nullstelle (Anstieg der Amplitude) die Phase weiter sinkt, kann geschlossen werden dass die Nullstelle nicht minimalphasig ist. Der statische Übertragungsfaktor des Systems ist negativ (die Phase des Systems ist bei 180° für Frequenzen $\omega \to 0$). Die folgende Struktur kann also festgelegt werden:

$$\Sigma(s) = \frac{-k \cdot (-T_1 \cdot s + 1)}{(T_2 \cdot s + 1) \cdot (T_3 \cdot s + 1)}$$

Der Verstärkungsfaktor k ergibt sich durch die Umrechnung ausgehend von der gemessenen Amplitude für $\omega \to 0$:

$$k = 10^{\frac{|\Sigma(0)|_{dB}}{20}} = 10^{\frac{20}{20}} = 10$$

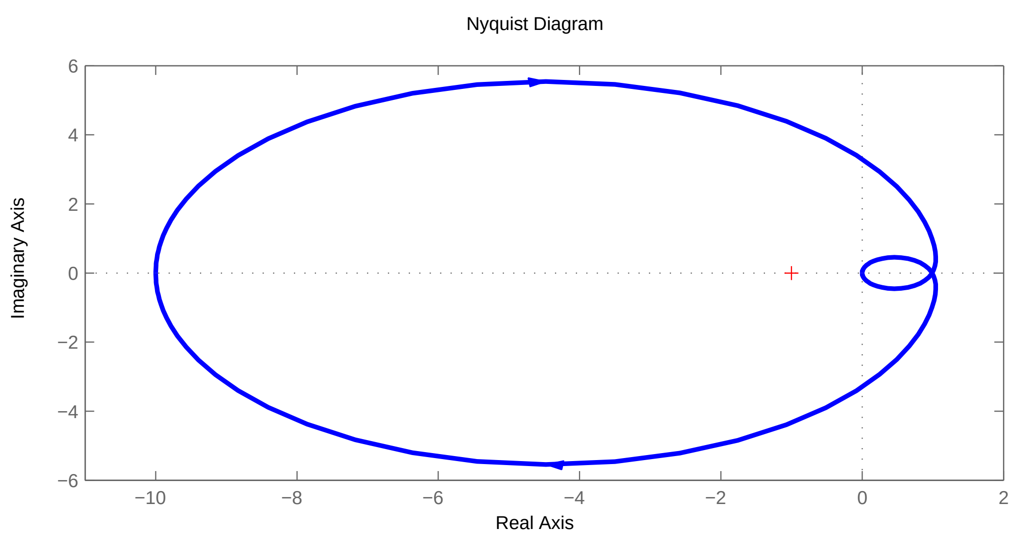
Die Werte T_i ergeben sich aus dem gegebenen Bode-Plot:

$$T_1 = 1; \; T_2 = 10; \; T_3 = 0.1$$

Daraus folgt:

$$\Sigma(s) = \frac{10 \cdot (s - 1)}{(10 \cdot s + 1) \cdot (0.1 \cdot s + 1)}$$

b) Das Nyquistdiagramm des Systems $\Sigma(s)$ sieht wie folgt aus:



c) Ein System ist gemäss Nyquist-Kriterium asymptotisch stabil wenn gilt:

$$n_c = n_+ + \frac{n_0}{2}$$

wobei n_c die Anzahl Umdrehungen[1] der Nyquistkurve des offenen Regelkreises um den Punkt $(-1, 0)$, n_+ die Anzahl Pole von $L(s)$ in der offenen rechten Halbebene und n_0 die Anzahl Pole von $L(s)$, welche auf der imaginären Achse liegen, ist.

Im vorliegenden Fall sind n_+ und n_0 beide gleich 0, die beiden vorhandenen Pole sind beide asymptotisch stabil. Daraus folgt, dass die Anzahl Umdrehungen n_c ebenfalls gleich 0 sein muss. Die Grenzen für die Reglerverstärkung k_p lassen sich also aus den Schnittpunkten des Loop-Gains $L(s) = k_p \cdot \Sigma(s)$ mit der realen Achse bestimmen.

$$\begin{aligned}
\Sigma(j\omega) &= \frac{-10 \cdot (-j\omega + 1)}{(10j\omega + 1) \cdot (0.1j\omega + 1)} = \frac{(10j\omega - 10) \cdot (1 - \omega^2 - 10.1j\omega)}{(1 - \omega^2 + 10.1j\omega) \cdot (1 - \omega^2 - 10.1j\omega)} \\
&= \frac{111\omega^2 - 10 + j(-10\omega^3 + 111\omega)}{\omega^4 + 100.01\omega^2 + 1}
\end{aligned}$$

Die Frequenzen bei denen der Imaginärteil gleich 0 wird sind:

$$-10\omega^3 + 111\omega \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0; \;\; \omega_{2,3} = \pm\sqrt{11.1}$$

Die Realteile bei den berechneten Frequenzen sind:

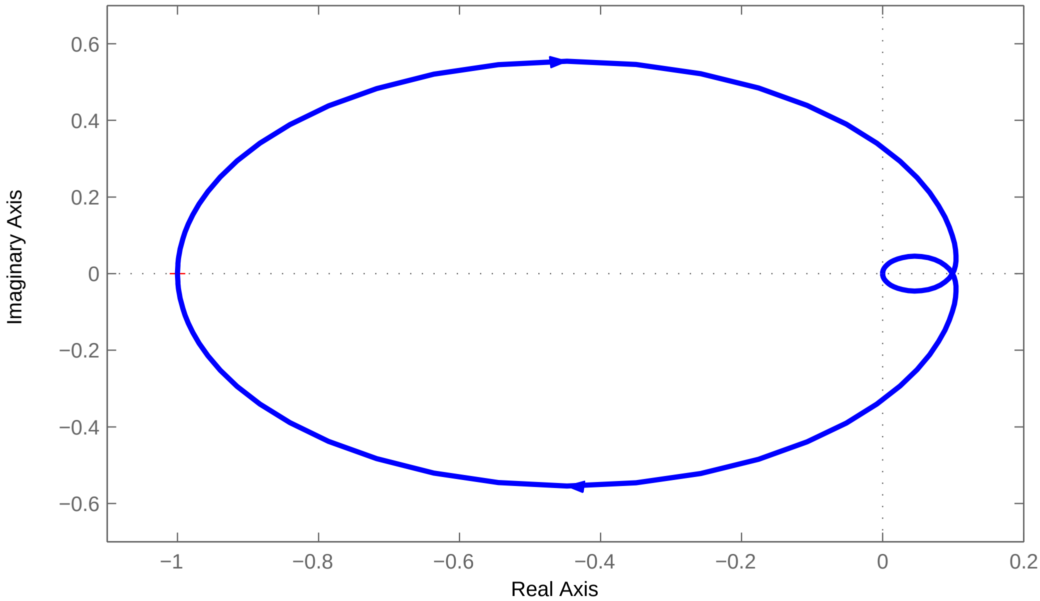
$$\begin{aligned}
\Sigma(\omega_1) &= -10 \\
\Sigma(\omega_2) &= \frac{1222.1}{1234.321} \approx 0.9901
\end{aligned}$$

Damit keine Umrundungen um den Punkt -1 im Nyquistdiagramm auftreten muss die Verstärkung k_p also wie folgt gewählt werden:

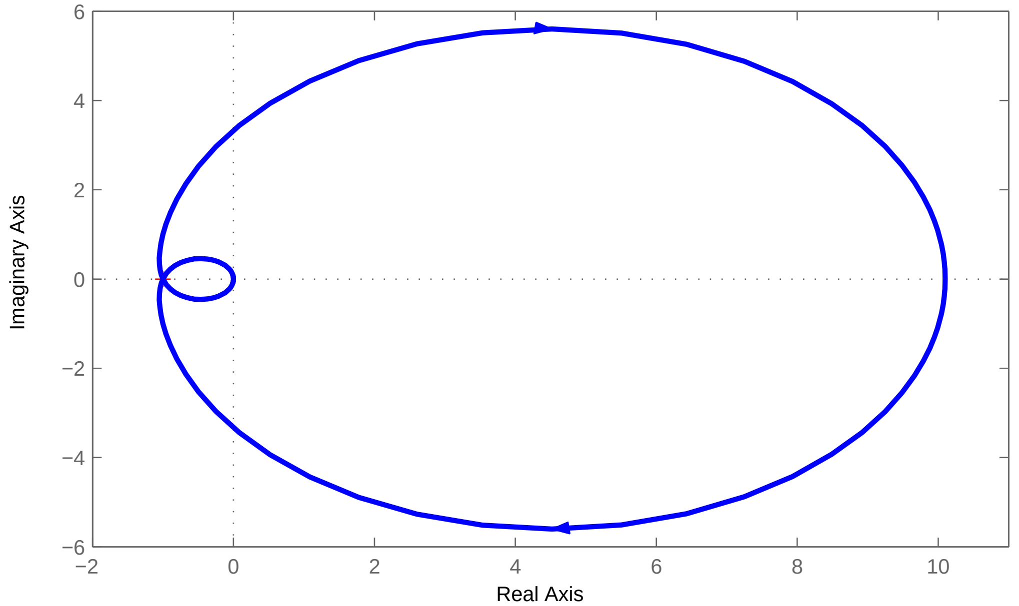
$$-\frac{1}{\Sigma(\omega_2)} < k_p < -\frac{1}{\Sigma(\omega_1)}$$

[1]Wenn ω von $-\infty$ zu ∞ geht, werden Umdrehungen im Gegenuhrzeigersinn dabei positiv und jene im Uhrzeigersinn negativ gezählt

$k_p = -|\Sigma(\omega_1)|^{-1}$



$k_p = -|\Sigma(\omega_2)|^{-1}$



Aufgabe 7 (Systemanalyse [Schick (Ott)]) 8 Punkte

Gegeben sei ein lineares System als Zustandsraummodell

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t)$$

$$y(t) = c \cdot x(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Ist das gegebene System vollständig steuerbar? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch!

b) (1 Punkt) Ist das gegebene System vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch!

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems! Ist es stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) (1 Punkt) Ist das System stabilisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

e) (2 Punkte) Leiten Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ des Systems her! Berechnen Sie die Pole und Nullstellen!

f) (1 Punkt) Gegeben sei das detaillierte Signalflussbild eines anderen linearen dynamischen Systems mit der Eingangsgrösse $u(t)$ und der Ausgangsgrösse $y(t)$ (Fig. 3). Leiten Sie die Systemmatrizen A, b, c, d des gegebenen Systems her!

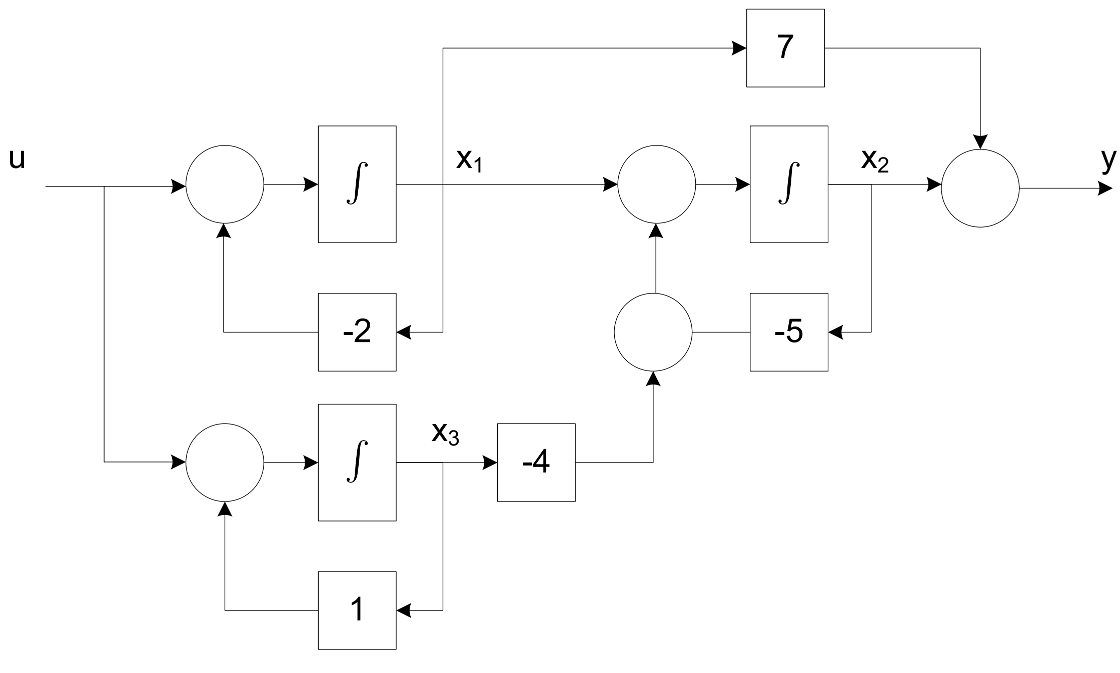


Abbildung 3: Signalflussbild

Lösung 7

a) (1 Punkt)
Das System ist vollständig steuerbar.

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} b & A \cdot b & A^2 \cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}_3$ hat vollen Rang (Rang($\mathcal{R}_3$) = 3).

b) (1 Punkt)
Das System ist nicht vollständig beobachtbar.

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}_3$ hat nicht vollen Rang (Rang($\mathcal{O}_3$) = 2).

c) (2 Punkte)
Die Stabilität kann anhand der Eigenwerte λ_i der Systemmatrix A beurteilt werden:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^3 \overset{!}{=} 0.$$

Die drei Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1.$$

Das System hat mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil und ist somit instabil.

d) (1 Punkt)
Das instabile System ist zwar steuerbar, aber nicht beobachtbar. Deshalb lässt sich das System nicht stabilisieren.

e) (2 Punkte)
Die Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems n-ter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ y(t) &= c \cdot x(t) \end{aligned}$$

lautet:

$$\begin{aligned} \Sigma(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b &= \frac{c \cdot \mathrm{Adj}(sI - A) \cdot b}{\det(sI - A)} \\ \overset{PNK}{=} \frac{b(s)}{a(s)} &= \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad m < n. \end{aligned}$$

Eventuelle gemeinsame Wurzeln[2] des Zählers und des Nenners werden im dritten Schritt der Rechnung gekürzt (Pol-Nullstellen-Kürzung).

[2] Nullstellen eines Polynoms

Für das gegebene System berechnet sich die Determinante der Matrix:

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & -1 \\ -2 & 0 & s-1 \end{pmatrix} = (s-1)^3.$$

Aufgrund der 0-Einträge in den Vektoren b und c benötigt man für die Berechnung des Zählerpolynoms von $\Sigma(s)$ nur vier Einträge der Adjungierten $\mathrm{Adj}(sI - A)$.
Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} c \cdot \mathrm{Adj}(sI - A) \cdot b &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (s-1)^2 & \# & 0 \\ \# & \# & \# \\ 2(s-1) & \# & (s-1)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= s^2 - 1. \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion lautet somit nach der Pol-Nullstellen-Kürzung:

$$\Sigma(s) = \frac{s^2 - 1}{(s-1)^3} = \frac{s+1}{(s-1)^2}.$$

Die Pole π_k des Systems entsprechen den Wurzeln des Nennerpolynoms $a(s)$ von $\Sigma(s)$:

$$\pi_1 = 1, \quad \pi_2 = 1.$$

Die Nullstellen ξ_j sind die Wurzeln des Zählerpolynoms $b(s)$:

$$\xi_1 = -1.$$

Das Zustandsraummodell ist nicht beobachtbar und somit eine nicht minimale Realisierung des I/O-Verhaltens. Deshalb kommt es zu einer Kürzung von Polen und Nullstellen bei der resultierenden Übertragungsfunktion.

f) (1 Punkt)
Die Systemmatrizen A, b, c, d lauten:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0.$$

Aufgabe 8 (Multiple-Choice [Shafai (Guzzella)]) 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben je einen Punkt Abzug[3]. Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

a) $\{x_e = \frac{\pi}{3}, u_e = \frac{\pi}{6}\}$ ist eine Gleichgewichtslage des Systems $\dot{x} = -\cos(x) \cdot x + 2\sin(u) \cdot u$.

☐ Richtig ☐ Falsch

b) Die Differentialgleichung $\delta\dot{x} = -\frac{\pi}{2} \cdot \delta x + \frac{\pi}{2} \cdot \delta u$ beschreibt das linearisierte System des nichtlinearen Systems $\dot{x} = -x^2 + \sin(2x) \cdot u^2$ um den Gleichgewichtspunkt $\{x_e = \frac{\pi}{4}, u_e = \frac{\pi}{4}\}$.

☐ Richtig ☐ Falsch

c) Ein System wird durch folgende Differentialgleichung modelliert:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 5y(t) = 3\frac{d^2}{dt^2}u(t) + 4u(t)$$

Die Übertragungsfunktion für dieses System ist somit $P(s) = \frac{3s^2+4}{s^3+2s^2-5s}$.

☐ Richtig ☐ Falsch

d) Eine instabile Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $\frac{1}{s\cdot(s-5)}$ kann mit einem P-Regler $C(s) = k_p$ ($k_p \in \mathbb{R}$) stabilisiert werden.

☐ Richtig ☐ Falsch

e) Jemand hat das Bode-Diagramm einer Regelstrecke fünfter Ordnung korrekt dargestellt, obwohl sie zwei instabile Pole besitzt. Mit Hilfe dieses Bode-Diagramms kann herausgefunden werden, für welche Werte der Verstärkung k_p eines P-Reglers ein asymptotisch stabiles geschlossenes Regelsystem resultiert.

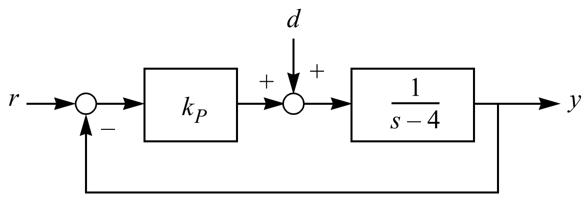
☐ Richtig ☐ Falsch

f) Eine asymptotisch stabile Strecke wird mittels eines PI-Reglers geregelt. Die Zeitkonstante des Integrators (Nachstellzeit) T_i beträgt 0.3s. Angefangen bei $k_p = 0$ wird die Reglerverstärkung schrittweise erhöht, bis die kritische Verstärkung erreicht wird. Die Nachstellzeit wird nun auf 0.4s erhöht. Das Regelsystem wird darauf instabil.

☐ Richtig ☐ Falsch

[3] Seien Sie also vorsichtig!

g) Eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $P(s) = \frac{1}{s-4}$ wird mit einem P-Regler stabilisiert. Die Regelstrecke hat eine Störgrösse d an dessen Eingang.



Mit einem $k_P > 4$ kann erreicht werden, dass das Maximum der Impulsantwort (d.h. $d(t) = \delta(t)$ bei anfänglicher Ruhelage und $r(t) = 0$) kleiner als $\frac{1}{4}$ bleibt.

☐ Richtig ☐ Falsch

h) Eine Regelsrecke mit der Übertragungsfunktion $P(s) = \frac{s-6}{s^2+5s-6}$ soll mit einem Regler stabilisiert werden. Eine Bandbreite von $\omega_c = 3\ rad/s$ ist für die Auslegung des Reglers eine sinnvolle Spezifikation.

☐ Richtig ☐ Falsch

Lösung 8

a) Richtig. Die Bedingung für eine Gleichgewichtslage ist $\dot{x}_e = 0$. Diese Bedingung ist erfüllt, da $\dot{x}_e = -\cos(x_e) \cdot x_e + 2\sin(u_e) \cdot u_e = -\cos(\frac{\pi}{3}) \cdot \frac{\pi}{3} + 2\sin(\frac{\pi}{6}) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = 0$.

b) Richtig. Die Systemparameter A und b in der linearisierten Differentialgleichung

$$\delta\dot{x} = A \cdot \delta x + b \cdot \delta u$$

erhalten wir durch partielle Differentiation der Funktion $f(x,u) = -x^2 + \sin(2x) \cdot u^2$ nach x resp. u und deren Auswertung an der Gleichgewichtslage wie folgt:

$$A = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}|_{x=x_e,u=u_e} = -2x_e + 2u_e^2\cos(2x_e) = -2(\frac{\pi}{4}) + 2(\frac{\pi}{4})^2 \cdot 0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$b = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}|_{x=x_e,u=u_e} = 0 + 2u_e\sin(2x_e) = 2(\frac{\pi}{4}) \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

c) Falsch. Die Übertragungsfunktion lautet $P(s) = \frac{3s^2+4}{s^3+2s^2-5}$.

d) Falsch. Das charakteristische Polynom des Regelsystems ist $s^2 - 5s + k_P = 0$. Unabhängig von k_P ist der Realteil der Pole dieses Regelsystems immer $2.5 > 0$, so dass das Regelsystem für beliebige Einstellung des P-Reglers (k_P beliebig!) instabil bleibt.

e) Richtig. Laut Nyquistkriterium muss die Kurve $L(j\,\omega)$ für $-\infty < \omega < +\infty$ den kritischen Punkt $-1 + j\,0$ zweimal im Gegenuhrzeigersinn umkreisen, damit das geschlossene Regelsystem asymptotisch stabil ist. Da $L(j\,\omega) = C(j\,\omega) \cdot P(j,\omega)$ ist, wird ein P-Regler $C(j\,\omega) = k_p$ nur die Betragskurve von $L(j\,\omega)$ vertikal verschieben, die Phasenkurve aber unverändert belassen. Daher kann man anhand der Schnittpunkte des Phasengangs von $P(j\,\omega)$ mit der $-180°$-Linie bestimmen, ob die geforderte Anzahl Umdrehungen erreicht wird oder nicht.

f) Falsch. Eine Erhöhung der Nachstellzeit T_i bewirkt eine positive Phasendrehung und eine Verkleinerung der Gesamtverstärkung des PI-Reglers. Dies sieht man am besten aus dem Frequenzgang eines PI-Reglers, der $\Sigma(j\omega) = k_P(1 - \frac{1}{T_i \omega} j)$ lautet.

g) Falsch. Die Übertragungsfunktion des Störverhaltens des Regelsystems (für $r(t) = 0$) lautet $\frac{1}{s+(k_P-4)}$. Sie entspricht auch der Laplacetranformierten der Einheitsimpulsantwort, da die Laplacetransformierte der Einheitsimpulsfunktion $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ ist! Durch Rücktransformation erhalten wir die Impulsantwort des Regelsystems auf einer Störung als $y(t) = e^{(k_P-4)t}$, deren Maximum bei $t = 0$ liegt, d.h. $y_{max} = 1 > \frac{1}{4}$ unabhängig von k_P. Die einzige Restriktion für die Reglerverstärkung ist $k_P > 4$, damit das Regelsystem asymptotisch stabil bleibt.

h) Richtig. Durch Faktorisierung des Nenners der Übertragungsfunktion der Strecke $P(s) = \frac{s-6}{(s-1)(s+6)}$ wird ersichtlich, dass die Regelstrecke neben der instabilen Nullstelle $\xi^+ = 6$ rad/s auch einen instabilen Pol $\pi^+ = 1$ rad/s besitzt. Die spezifizierte Bandbreite von $\omega_c = 3$ rad/s ist sinnvoll, da sie mit einem Faktor 3 höher als π^+ und gleichzeitig mit einem Faktor 2 tiefer als ξ^+ liegt und somit die Voraussetzungen für eine sinnvolle Spezifikation knapp erfüllt.