0.1.3 Spektrum-Analyser

******

1 Motivation

Ein Spektralanalysator überführt die Schwingungen, welche von verschiedenen Musikinstrumenten oder von einem Funktionsgenerator erzeugt wurden, durch Fourieranalyse in ihr zugehöriges Amplitudenspektrum.

2 Experiment

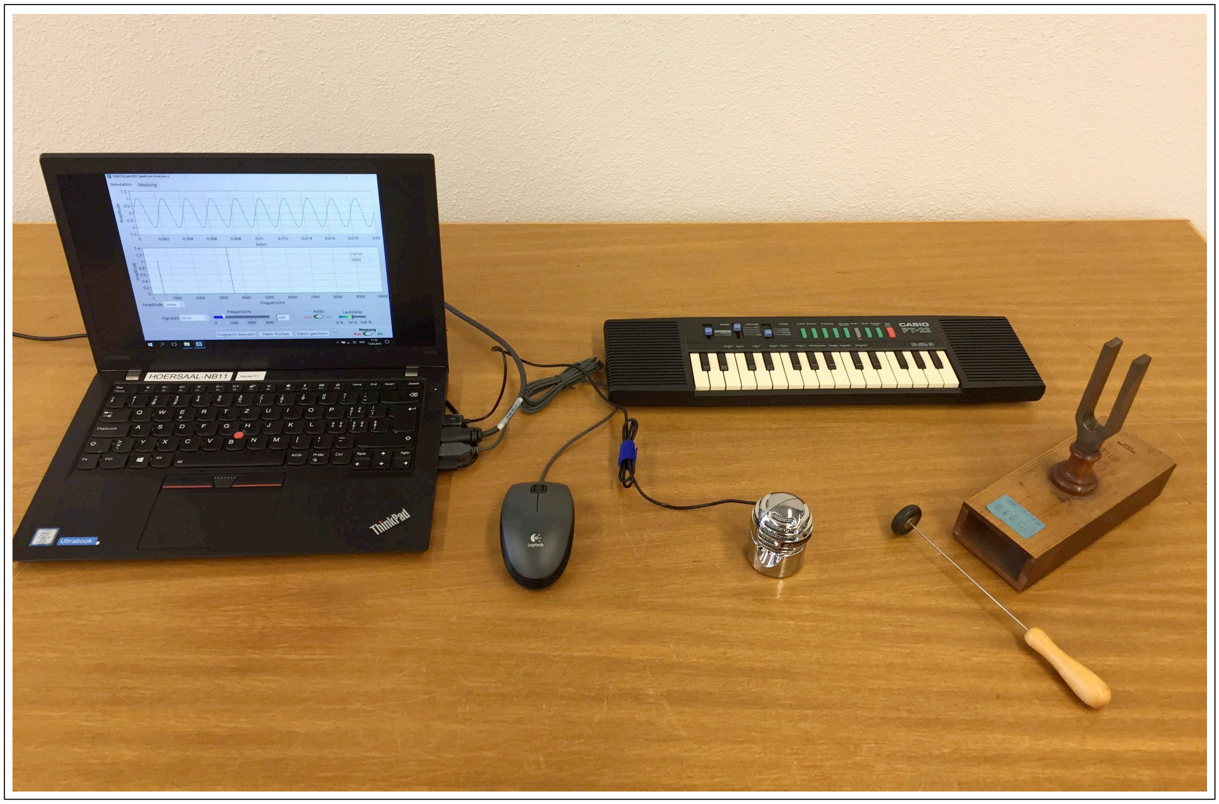


Abbildung 1: Versuchsaufbau „Spectrum-Analyser“

Abb. 1 zeigt den experimentellen Aufbau. Ein PC dient als Spektralanalysator. Er nimmt elektronische Signale an und führt eine Fouriertransformation der entsprechenden Zeitspektren durch. Die Fourieramplituden werden dann in Kanälen gleicher Breite dargestellt. Als Eingangssignale dienen ein reines Sinus-Signal, eine periodische Rechtecks- bzw. Dreiecksverteilung, welche von einem Funktionsgenerator erzeugt und auf einem Oszilloskop angezeigt werden, sowie das Grundrauschen des Oszilloskops. Ebenfalls misst man die spektrale Verteilung des Klangs verschiedener Musikinstrumente, welcher mit einem Schalldruck-Messgerät gemessen wird, das dann die elektronischen Signale an den Spektrumsanalysator weitergibt. Die Abbn. 2 - 5 zeigen die Fourierspektren einer Sinusschwingung, einer Dreiecksverteilung (Amplitude linear bzw. logarithmisch), einer Rechtecksverteilung, einer Sägezahnverteilung, des Rauschens sowie einer Messung mit Pfeifen.

Abbildung 2: Fourierspektren verschiedener Zeitverteilungen: a) Sinusschwingung, b) Dreiecksverteilung

Abbildung 3: Fourierspektren verschiedener Zeitverteilungen: c) Dreiecksverteilung (Amplitude logarihmisch), d) Rechteckverteilung

Abbildung 4: Fourierspektren verschiedener Zeitverteilungen: e) Sägezahnverteilung, f) Rauschen

Abbildung 5: Fourierspektrum: g) Messung mit Pfeifen

3 Theorie

3.1 Fourierreihen

Definition: Eine **Fourierreihe** ist eine Überlagerung von endlich vielen oder auch unendlich vielen, aber abzählbaren, Schwingungen.

Jede **periodische** Funktion $f(t)$ mit Periode T, also

$$f(t+T) = (t)\,, \tag{1}$$

kann geschrieben werden als

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \\ \text{oder}\quad f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t\} \end{aligned}} \tag{2}$$

mit

$$\omega_n = n\omega_0\,, \quad \text{Frequenzen der } \textbf{Oberschwingungen,} \tag{3}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\,, \quad \text{Frequenz der } \textbf{Grundschwingung.} \tag{4}$$

Die Funktionen $\cos\omega_n t$ und $\sin\omega_n t$ bilden die Basisvektoren eines unendlich-dimensionalen Vektorraums, in dem sich periodische Funktionen als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen lassen!

Man beachte:

- $\cos\omega_n t$ sind die Basisvektoren im Raum der **geraden** periodischen Funktionen f_g mit Periode $T = 2\pi/\omega_0$ und der Symmetrie

$$f_\mathrm{g}(t) = f_\mathrm{g}(-t) \tag{5}$$

- $\sin\omega_n t$ sind dagegen die Basisvektoren im Raum der **ungeraden** periodischen Funktionen f_u mit Periode $T = 2\pi/\omega_0$ und der Symmetrie

$$f_\mathrm{u}(t) = -f_\mathrm{u}(-t) \tag{6}$$

Es gilt also

$$f_\mathrm{g}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\omega_n t \tag{7}$$

$$f_\mathrm{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\omega_n t \tag{8}$$

Man beachte auch, dass $b_0 \equiv 0$ gilt, da der konstante Term eine gerade Symmetrie aufweist und bereits durch a_0 dargestellt ist.

Beliebige periodische Funktionen ohne Symmetrie können dann als eine Summe von geraden und ungeraden Funktionen dargestellt werden.

$$f(t) = a f_\mathrm{g}(t) + b f_\mathrm{u}(t) \tag{9}$$

Falls nun sowohl $f(t)$ als auch die Periode $T = 2\pi/\omega_0$ bekannt sind, kann man die **Fourierkoeffizienten** a_k und b_k bestimmen. Dies entspricht einer Projektion eines Vektors $\boldsymbol{r}$ im $\mathbb{R}^n$ auf die Basisachse $\hat{\boldsymbol{x}}_k$:

$$a_n = \boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_n \tag{10}$$

Beim Vektor wird diese Projektion durch das Skalarprodukt erreicht, bei der Funktion im Funktionenraum durch das Integral über das Produkt der Funktion $f(t)$ mit der Basisfunktion, berechnet für eine Periode T.

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_k t\,\mathrm{d}t \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_k t\,\mathrm{d}t \end{aligned}} \tag{11}$$

Dies ist die Grundlage der Signalverarbeitung und Informationstechnik. Auch in der Quantentheorie spielt diese Zerlegung eine grundlegende Rolle.

Beispiel 1: Mäanderkurve

Die Mäanderkurve wird auch als Rechtecksignal bezeichnet (siehe Abb. 6):

$$f(t) = \begin{cases} +A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -A, & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \tag{12}$$

Da die Kurve mit dieser Definition punktsymmetrisch ist, kann sie mit ausschliesslich Sinusfunktionen angenähert werden:

$$f(-t) = -f(t) \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \omega_k t \tag{14}$$

Die Koeffizienten b_k ergeben sich aus

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_k t \, \mathrm{d}t \tag{15}$$

$$= \frac{2A}{T} \left\{ \int_0^{T/2} \sin \omega_k t \, \mathrm{d}t - \int_{T/2}^{T} \sin \omega_k t \, \mathrm{d}t \right\} \tag{16}$$

Zwischenrechnung: Integral über die Sinusfunktion in Gl. (16)

$$\int_a^b e^{ik\omega_0 t} \, \mathrm{d}t = \int_a^b \{\cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t\} \, \mathrm{d}t \tag{17}$$

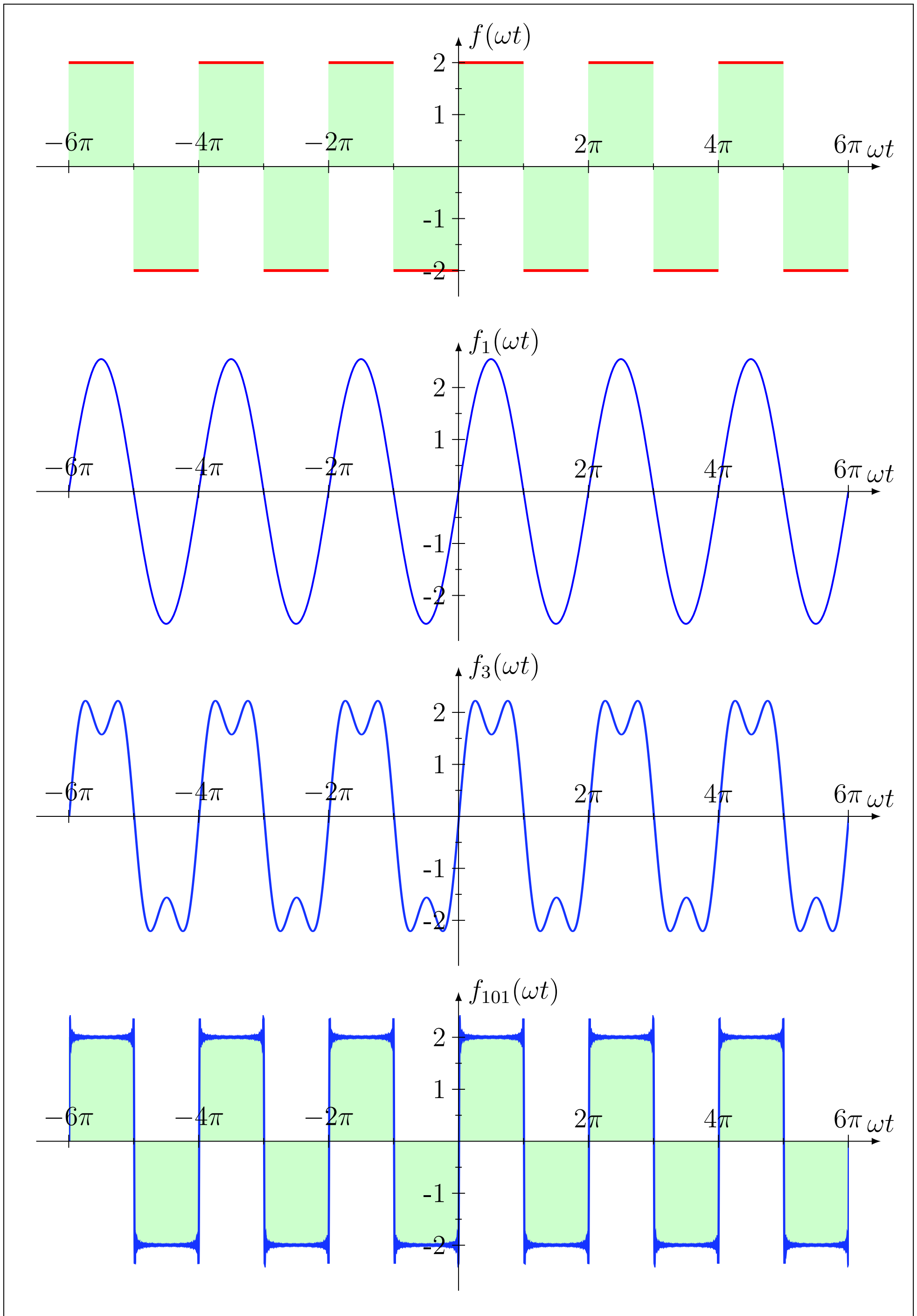
$$\left[-\frac{i}{k\omega_0} e^{ik\omega_0 t}\right]_a^b = \int_a^b \cos k\omega_0 t \, \mathrm{d}t + i \int_a^b \sin k\omega_0 t \, \mathrm{d}t \tag{18}$$

$$= \frac{1}{k\omega_0} \{\sin k\omega_0 b - \sin k\omega_0 a\} - \frac{i}{k\omega_0} \{\cos k\omega_0 b - \cos k\omega_0 a\} \tag{19}$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$\int_a^b \cos k\omega_0 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{k\omega_0} \{\sin k\omega_0 b - \sin k\omega_0 a\} \tag{20}$$

$$\int_a^b \sin k\omega_0 t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{k\omega_0} \{\cos k\omega_0 b - \cos k\omega_0 a\} \tag{21}$$



$$f_n(\omega t) = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{n} \frac{4A}{k\pi} \sin\{k\omega t\}, \quad A = 2$$

Abbildung 6: Mäanderkurve und deren Approximation durch eine Fourierreihe.

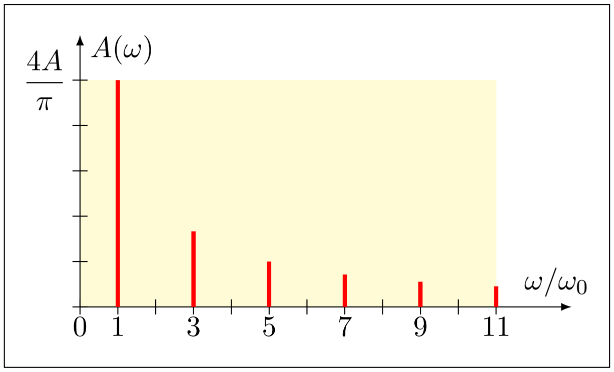


Abbildung 7: Amplitudenspektrum der Mäanderkurve.

$$\Rightarrow \quad \int_0^{T/2} \sin \omega_k t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{k\omega_0} \left\{ \cos\left(k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \right) - 1 \right\} \tag{22}$$

$$= \frac{1}{k\omega_0} \{1 - \cos k\pi\} = \frac{1}{k\omega_0} \left\{1 - (-1)^k\right\} \tag{23}$$

Entsprechend ist

$$\int_{T/2}^{T} \sin \omega_k t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{k\omega_0} \left\{(-1)^k - 1\right\} \tag{24}$$

$$\Rightarrow \quad b_k = \frac{2}{T} \frac{1}{k\omega_0} \left[1 - (-1)^k - (-1)^k + 1\right] \tag{25}$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left[1 - (-1)^k\right] = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}\,, & k \text{ ungerade} \\ 0\,, & k \text{ gerade} \end{cases} \tag{26}$$

Damit folgt für die Mäanderkurve:

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \sin k\omega_0 t} \tag{27}$$

Das entsprechende Amplitudenspektrum ist in Abb. 7 wiedergegeben.

Gibbssches Phänomen:

Das Gibbssche Phänomen bescheibt das Verhalten von Fourierreihen in der Umgebung von Sprungstellen. Bei der Approximation entstehen Überschwinger an der Sprungstelle, die sich auch mit verbesserter Approximation nicht ausmerzen lassen.

Beispiel 2: Dreiecksverteilung

Die punktsymmetrische Dreiecksverteilung mit Amplitude A und Periode T lautet:

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T}t & 0 \leq t < \frac{1}{4}T \\ 2A - \frac{4A}{T}t & \frac{1}{4}T \leq t < \frac{3}{4}T \\ -4A + \frac{4A}{T}t & \frac{3}{4}T \leq t < T \end{cases}} \tag{28}$$

Die Fourierreihe dazu lautet

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= -\frac{8A}{\pi^2}\left\{\sin\omega_0 t - \tfrac{1}{3^2}\sin 3\omega_0 t + \tfrac{1}{5^2}\sin 5\omega_0 t \mp \ldots\right\} \\ &= \frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\left\{(2k-1)\,\omega_0 t\right\}}{(2k-1)^2} \end{aligned}} \tag{29}$$

Die Funktion und einige ihrer Näherungen sind in Abb. 8, das entsprechende Amplitudenspektrum ist in Abb. 9 wiedergegeben.

Komplexe Darstellung der Fourierreihe

Statt mit Winkelfunktionen kann man die Fourierreihe auch mit der komplexen Exponentialfunktion darstellen:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}} \tag{30}$$

Man beachte, dass bei dieser Darstellung auch *negative* Frequenzen erforderlich sind!

Für

$$c_n = c_{-n}^{*} \tag{31}$$

ist $f(t) \in \mathbb{R}$ mit

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \tag{32}$$

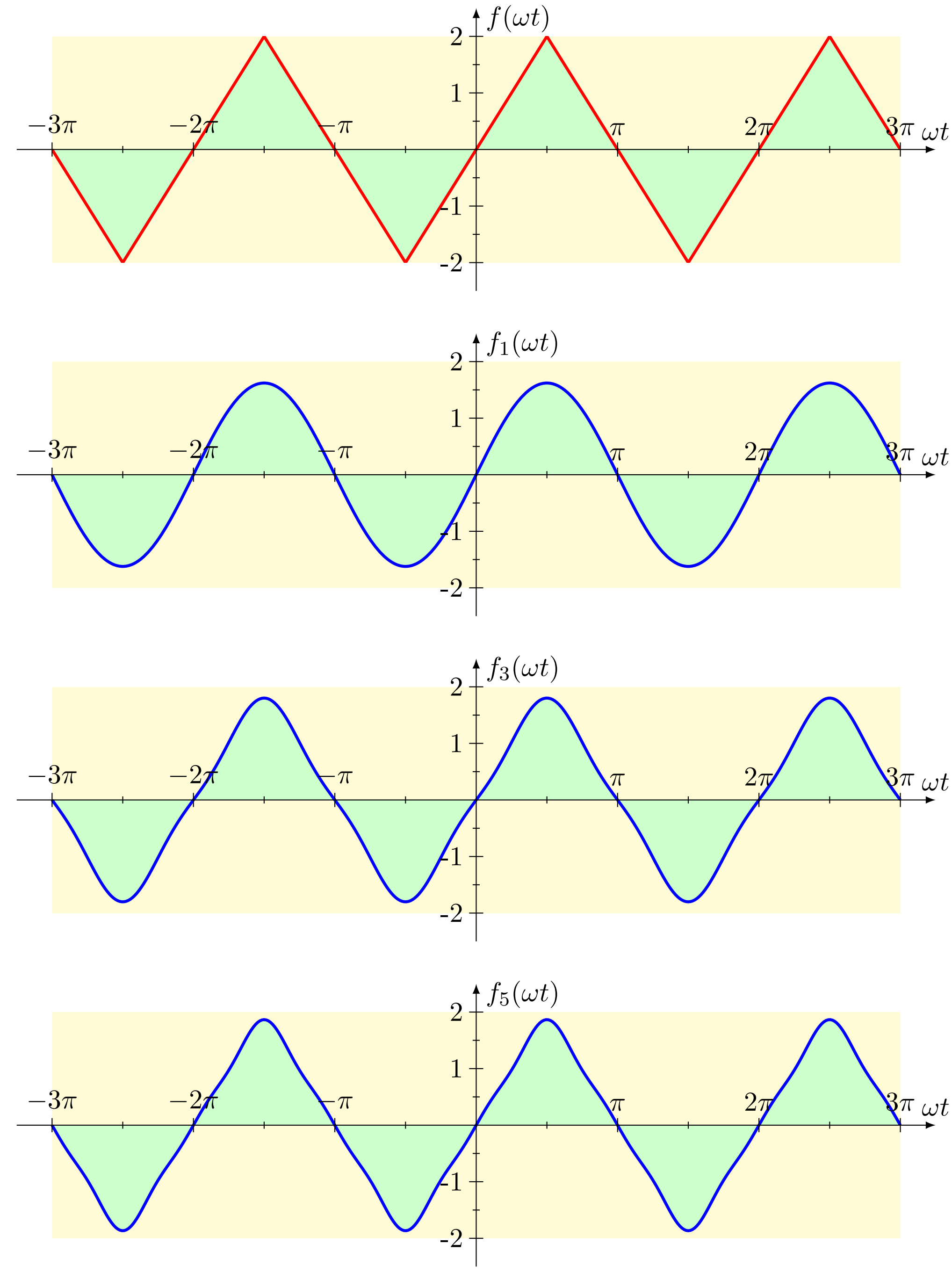
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \tag{33}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \tag{34}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\} \tag{35}$$

Die Amplituden c_n ergeben sich zu

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t} \tag{36}$$



$$f_{2n-1}(\omega t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\sin\{(2k-1)\,\omega t\}}{(2k-1)^2}, \quad A = 2$$

Abbildung 8: Dreiecksverteilung und deren Approximation durch eine Fourierreihe.

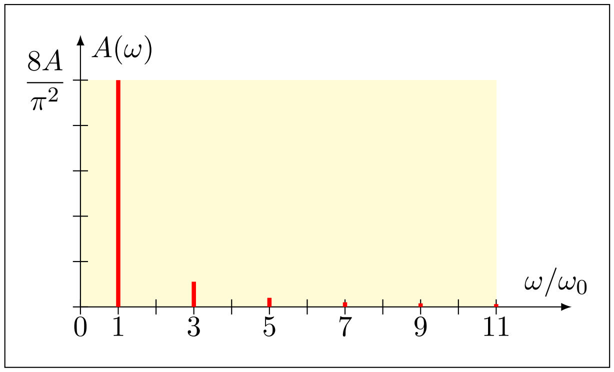


Abbildung 9: Amplitudenspektrum der Dreiecksverteilung.

Anwendungen der Fourierreihe

Bei der **Fourieranalyse** wird ermittelt, mit welcher Amplitude die Vielfachen der Grundfrequenz ω_0 auftreten.

Bei der **Fouriersynthese** versucht man dagegen, eine vorgegeben periodische Funktion durch eine geeignete Kombination von Schwingungen zu erzeugen.

3.2 Fourierintegrale

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt gelernt, dass man *periodische* Signale durch unendliche Fourierreihen ausdrücken kann. Das zugehörige Amplitudenspektrum besteht aus einzelnen, dikreten Amplituden. wenn man nun die Periode $T \to \infty$ gehen lässt, erhält man kein periodisches Signal mehr, sondern eine nichtperiodische Funktion. Dabei geht aber auch $\omega_0 = 2\pi/T \to 0$, so dass bei gleichbleibendem Massstab im Amplitudenspektrum die Linien immer dichter werden, bis sich eine kontinuierliche Verteilung ergibt.

Statt der Koeffizienten c_n in Gl. (30) erhält man dann Amplitude $A(\omega)$, und die Summe wird durch ein Integral ersetzt:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega} \tag{37}$$

Der Faktor vor dem Integral ist frei wählbar. Ist er aber einmal gewählt, dann ist damit der Vorfaktor bei der Amplitude $A(\omega)$ nicht mehr frei. Der Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ hat den Vorzug, dass sich bei der Amplitude der gleiche Faktor ergibt.

Beispiel: Knall

Ein Knall lässt sich näherungsweise durch eine konstante Schallamplitude während eines gewissen Zeitintervalls beschreiben (siehe Abb. 10):

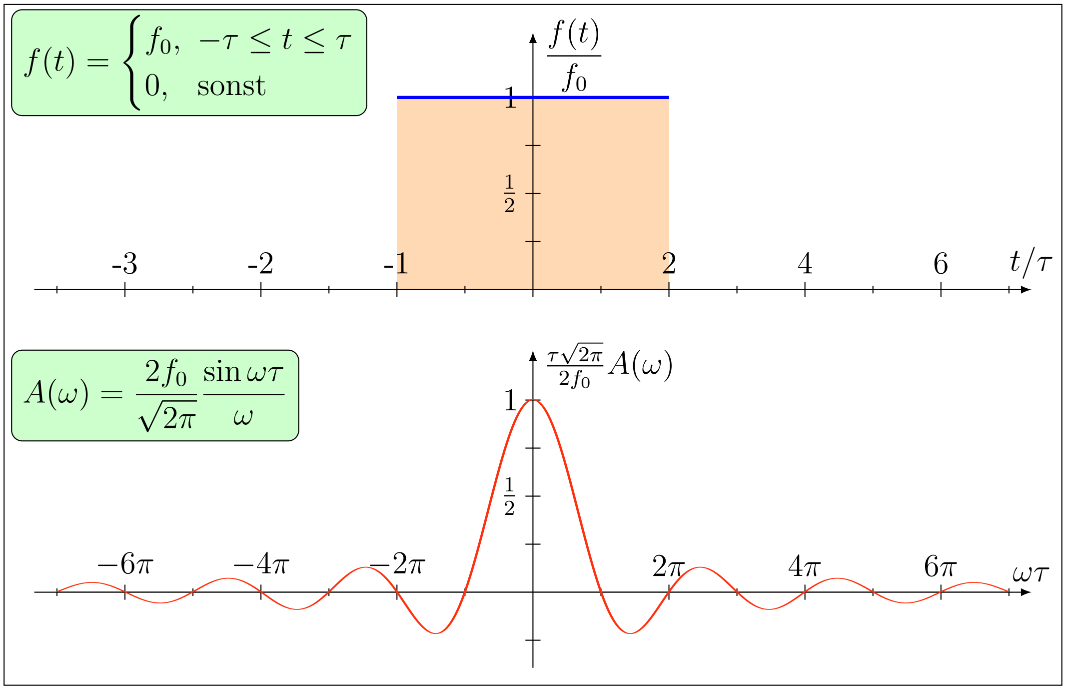


Abbildung 10: Zeitliche Verteilung und Spektrum eines Knalls.

$$\boxed{A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t} \tag{38}$$

$$f(t) = \begin{cases} f_0\,, & -\tau \le t \le \tau \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{39}$$

„Unendlich kurzer Knall“ und Deltafunktion

Offensichtlich benötigt man zur Fouriersynthese eines Knalls unendlich viele Frequenzen, wobei sich aber die Hauptbeiträge im Gebiet des 1. Maximums um $\omega = 0$ herum befinden. Je kürzer der Knall ist, desto breiter wird die Amplitudenverteilung und damit auch das Gebiet des 1. Maximums.

Wir betrachten dazu als geeignetes Mass die Breite $\Delta\omega$ zwischen $\omega = 0$ und der 1. Nullstelle herum[1]. Dort ist

$$\sin \Delta\omega\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \frac{\pi}{2\tau} \tag{40}$$

Die Breite der Amplitudenverteilung ist also umgekehrt proportional zur Zeitdauer des Knalls!

[1] Normalerweise nimmt man die volle Breite auf halber Höhe (Halbwertsbreite, FWHM), was aber hier zu einer transzendenten Gleichung führt.

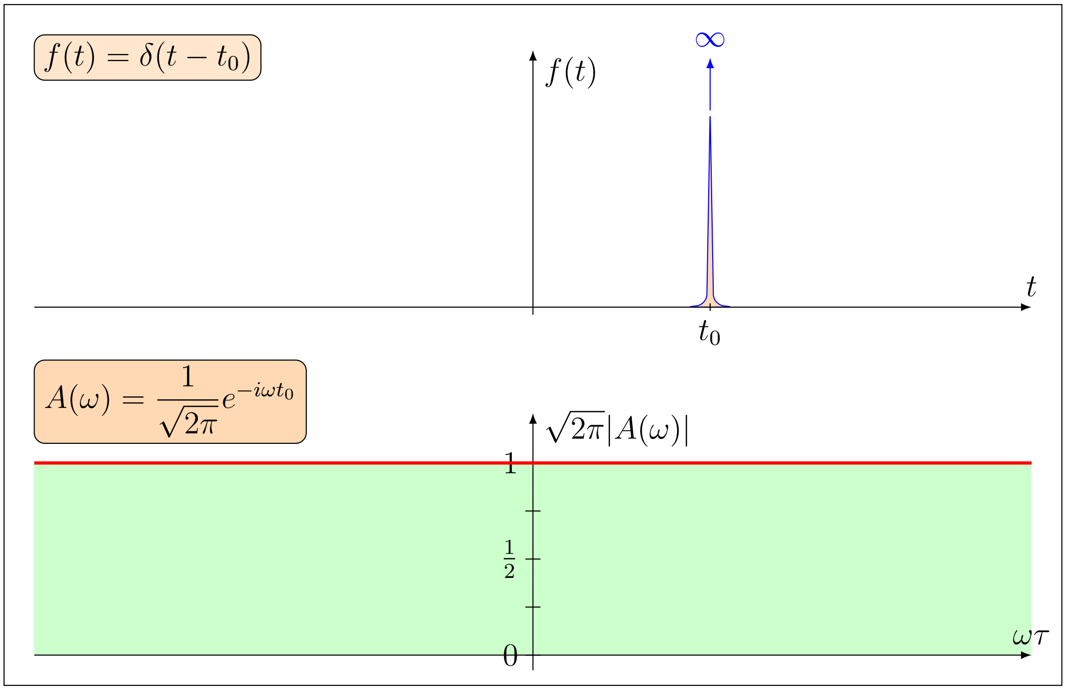


Abbildung 11: Zeitliche Verteilung und Spektrum eines unendlich kurzen Knalls.

Was geschieht nun, wenn der Knall immer kürzer gemacht wird, aber derart, dass gleichzeitig f_0 vergrössert wird, so dass die Fläche $f_0 \cdot 2\tau$ konstant bleibt (siehe Abb. 11)? Für eine Einheitsfläche erhält man die Deltafunktion:

$$\boxed{\delta(x - a) = \begin{cases} 0\,, & x \neq a \\ \infty\,, & x = a \end{cases}} \tag{41}$$

Dies ist offensichtlich keine Funktion im normalen Sinne. Man bezeichnet sie vielmehr als **Distribution**, und als solche ist sie über das folgende Integral definiert:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)\,\mathrm{d}x = 1} \tag{42}$$

Man beachte, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{b<a} \delta(x - a) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{c>a}^{\infty} \delta(x - a) = 0 \tag{43}$$

Die Deltafunktion $\delta(x - a)$ projiziert aus einer beliebigen Funktion den Funktionswert $f(a)$ heraus:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)\,\mathrm{d}x = f(a)} \tag{44}$$

Die Fouriertransformierte der δ-Funktion ist gleich:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t_0} \tag{45}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\{A(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \omega t_0 \tag{46}$$

$$\mathrm{Im}\,\{A(\omega)\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin \omega t_0 \tag{47}$$

Das Amplitudenspektrum der Deltafunktion erstreckt sich also von $-\infty$ bis ∞!

Diese Art von Zusammenhang zwischen der Breite eines Zeitsignals und der Breite der Amplitude im Frequenzspektrun spielt auch in der Quantenmechanik in Form der Heisenbergschen Unschärferelation eine Rolle.

Die Fouriertransformierte $A(\omega)$ dieser Funktion ist dann

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\tau}^{\tau} e^{-i\omega t} \,\mathrm{d}t \tag{48}$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-\tau}^{\tau} = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} \underbrace{\left[e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau} \right]}_{=2i \sin \omega\tau} \tag{49}$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{2 f_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \omega\tau}{\omega}} \tag{50}$$