DOCUMENT RESUME

ED 133 182 SE 021 739

AUTHOR Bauersfeld, H., Ed.; And Others
TITLE Universitat Bielefeld, Institut fur Didaktik der Mathematik, Schriftenreihe des IDM, 3/1974. (University of Bielefeld, Institute for the Teaching of Mathematics, Series of Publications of the IDM, 3/1974.)
INSTITUTION Bielefeld Univ. (West Germany).
PUB DATE 74
NOTE 318p.; For related documents, see SE 021 735-741; Contains occasional light type
AVAILABLE FROM Institut fur Didaktik der Mathematik, Universitat Bielefeld, Heidsieker Heide 94, D-4800 Bielefeld 15, West Germany (no price quoted)

EDRS PRICE MF-$0.83 HC-$16.73 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Curriculum; Elementary School Mathematics; Elementary Secondary Education; *Geometry; *Instruction; International Education; Mathematics Education; *Secondary School Mathematics

ABSTRACT

This document contains 13 papers presented at a conference concerned with the role of geometry in present day mathematics teaching. Of the six papers written in English, one looks at the Euclidean tradition in teaching mathematics, the algebraisation of geometry, and transformation geometry, and concludes with a discussion of twelve topics which would be covered in a comprehensive organization of the teaching of geometry. A second paper discusses visualizing in mathematics, while a third reports on a combined algebra-geometry curriculum for Japanese secondary schools. A fourth looks at the solution of problems by geometrical methods, giving 14 examples of problems, and a fifth paper discusses the solution of polynomial equations. A sixth paper advocates that topics from topology, probability, and operations research be included in geometry. Among the seven papers written in German, one discusses recent trends in teaching geometry, a second is concerned with the role of intuition, a third looks at the place of descriptive geometry, and a fourth considers geometry at the primary school level. A fifth paper exhibits a variety of approaches to geometrical thinking through organized sets of problems, a sixth is concerned with a progressive pedagogy of mathematics, and a seventh paper reports on a problem oriented approach to geometry starting from combinatorial geometry. A final paper (also written in German) reports on the discussions in the working groups at the conference. (DT)

Herausgegeben von : H. Bauersfeld
M. Otte
H.G. Steiner

Redaktion: Bernard Winkelmann

Gesamtherstellung: Robert Bechauf, Bielefeld

Proceedings of the ICMI-IDM Regional Conference on the Teaching of Geometry

Bericht über die IMUK-IDM Regionaltagung zu Fragen des Geometrie-Unterrichts

Bielefeld, 16. - 2o. September, 1974

SCHRIFTENREIHE DES IDM

3/1974

INTRODUCTION

ICMI and International Symposia on the Teaching of Geometry

The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) was founded during the International Congress of Mathematicians (ICM) at Rome in 1908. Its first president was Felix Klein. After the Second World War ICMI has been re-established in 1952. The following table gives the terms and the presidents of ICMI since 1952 as well as international congresses with ICMI activities.

ICMI	ICM	ICME
1952-54: A. Châtelet	Amsterdam 1954 Sect. VII	
1955-58: H. Behnke	Edinburgh 1958 Sect. VIII	
1959-62: M.H. Stone	Stockholm 1962 Sect. VIII	
1963-66: A. Lichnérowicz	Moscow 1966 Sect. XIII	
1967-70: H. Freudenthal	Nice 1970 Sect. F_2=(XXXII)	Lyons 1969
1971-74: J. Lighthill	Vancouver 1974 Symp.	Exeter 1972
1975-78: S. Iyanaga	Helsinki 1978	Karlsruhe 1976

The teaching of geometry was one of the main themes in the ICMI section of the ICM at Edinburgh in 1958. On the basis of reports received from national sub-committees of ICMI, H. Freudenthal gave a report on "A Comparative Study of Methods of Initiation into Geometry".[1] During the other ICMs, geometry was only implicitly discussed: in 1954 as

1) Published in Euclides, 1958, pp. 289-306
See also: a) H. Freudenthal (Ed.): Methods of Initiation into Geometry. Groningen 1958. (Report of the Dutch Subcommittee).
b) P. Sengenhorst: Die Methodik des geometrischen Anfangsunterrichts als Gegenstand einer internationalen Aussprache. Math.-Phys. Sem.Ber., Vol. 6 (1959).

part of the general theme "The Teaching of Mathematics for Students Between 16 and 21 Years of Age"; in 1962 in connection with the theme "Which Subjects in Modern Mathematics and Which Applications Can Find a Place in Programs of Secondary School Instructions?"; in 1966 as a component within the two themes "The Use of the Axiomatic Method at the Secondary School Level" and The Role of Problem Solving in the Development of Students' Mathematical Activities".

At the First International Congress on Mathematical Education (ICME) at Lyons, a panel discussion on the teaching of geometry was arranged and geometrical topics and methods were implicitly covered by several of the 20 invited papers.[2)]
At Exeter the invited papers by H. Freudenthal ("What Groups Mean in Mathematics and What They Should Mean in Mathematical Education") and R. Thom ("Modern Mathematics: Does It Exist?") had particular reference to geometry. Also a working group chaired by A.Z. Krygowska was concerned with "Contemporary Presentations of Geometry at School and University Level".[3)]
In addition to the international congresses, regional conferences were arranged by ICMI. In 196o such a conference, primarily devoted to geometry teaching was held at Aarhus, Denmark.[4)] At this conference J. Dieudonné and G. Choquet presented their well known positions which played a dominant role at the OEEC seminars at Royaumont (France) 1959 and Dubrovnik (Yugoslavia) 196o.[5)]
Among the international activities related to the teaching of geometry, the second in a series of three international conferences arranged by the Comprehensive School Mathematics

---

2) See: Proceedings of the 1st International Congress on Mathematical Education, Dordrecht 197o

3) See: A.G. Howson: Developments in Mathematical Education. Cambridge 1973.

4) See: H. Behnke and others: Lectures on Modern Teaching of Geometry and Related Topics. Aarhus (Mathematisk Institut) 196o.

5) See: OEEC: a) New Thinking in School Mathematics. Paris 1961
b) Synopses for Modern Secondary School Mathematics. Paris 1961

Program (CSMP) at Carbondale, Ill. in 1970 has attracted particular attention.[6]

The Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) at Bielefeld University

IDM was founded in 1973 as an institute of Bielefeld University to perform super-regional tasks. Its establishment was suggested and its initial phase is being funded by the Volkswagenwerk Foundation. As part of the University, IDM is linked to the Faculty of Mathematics and the Faculty of Pedagogy, Psychology, and Philosophy. Its overall goal is the furtherance of mathematical education in theory and practice through research, development and advice. This requires a working structure which allows national and international cooperation with schools and universities, research and development centers, institutions for in-service teacher training, governmental organizations, etc. According to its plan of basic structure[7], IDM is particularly concerned with the following:

- development of a theoretical frame for the didactics of mathematics by interdisciplinary cooperation with mathematics and other sciences of reference as well as intensive contact with actual practice
- furtherance of scientific collaboration with individuals, groups and institutions here and abroad by exchange of views and experiences, symposia, and common projects
- contributions to the theory and practice of mathematical curriculum development, especially by developing models
- decreasing the distance between results from research and their implementation on a practical level through cooperation, information, and consultation
- promoting the development of young scholars in the field

---

6) See: H.G. Steiner (Ed.): The Teaching of Geometry at the Pre-College Level, Dordrecht 1971

7) a) IDM: Strukturplan '75 des Instituts für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld. March 1975

b) Research Report 1974 of the IDM in: Universität Bielefeld: Forschungsbericht 1974. Schriftenreihe Wissenschaft 5. Bielefeld 1975

- selective documentation for internal and external use and building an international library in the didactics of mathematics.

The IDM professional staff is composed according to the interdisciplinary working structure and consists presently (Fall 1975) of about 2o members.

IDM International Activities

Until now IDM has held two international workshops and is planning for more in the near future. These are closely related to specific problems investigated by IDM working teams.[8)]

Also, IDM has offered its services for the professional preparation of ICME 1976 at Karlsruhe. Three IDM working teams are involved in writing and presenting survey-trend reports. In December 1975 ICMI and IDM will jointly hold an international symposium on "Present Trends, Problems and Tasks in the Didactic of Mathematics" at the Oberwolfach Mathematical Research Institute, FRG. This symposium, sponsored by the Volkswagenwerk Foundation and including the 13 reporters from various countries, will serve in part to identify the content and working procedures for all of the 13 survey-trend reports to be presented at Karlsruhe.

The ICMI-IDM Conference on the Teaching of Geometry

During the Exeter Congress, ICMI decided to arrange several regional conferences. One of them was to be devoted to the teaching of geometry. This conference was held as a joint activity of ICMI and IDM at the Center for Interdisciplinary Research (Zentrum für interdisziplinäre Forschung, ZiF) of Bielefeld University.

8) See the proceedings of the workshop held by an IDM working team and members of the IREMs of Paris, Bordeaux, and Lyons: Unterrichtsreform - Unterrichtsbeobachtung - Lehrerweiterbildung. Schriftenreihe des IDM, Vol. 2 (1974).

The announcement for this conference indicated that the major concern should be "The Role of Geometry in Present-day Mathematics Teaching". The topic was to be treated on the basis of results from previous international discussions as reflected in the reports of the Aarhus and Carbondale conferences. At Bielefeld two speakers explicitly picked up the general development. H.J. Vollrath in his introductory paper on recent trends made it clear that there is a shift from axiomatic and global approaches to new principles of organizing geometry which he calls aspects of geometry and guidelines for the construction of geometrical learning sequences. W. Servais gave a review of the lively discussion which took place during the last 15 years on finding the optimal integration between geometry and algebra by evaluating positions taken by Dieudonné, Choquet, Delessert, Artin, Papy, Bachmann, Freudenthal, and others. Taking into account R. Thom's critical position, he concludes that the problem of geometry teaching consists in initiating an active and meaningful learning of mathematics in which algebra and geometry are developed in a fruitful symbiosis.
S. Iyanaga, who also addressed the audience in his capacity as President elect of ICMI gave a report on a combined geometry-algebra curriculum in Japanese secondary schools. Other papers were concerned with the role of intuition in geometry. G. Ewald exhibited some links between intuition and axiomatics. A. Bishop emphasized an extended meaning of geometry which he calls visual mathematics. G. Pickert in his paper showed that the seemingly outmoded descriptive geometry can play a significant role in mathematics if it is removed from its isolated position by means of a modern language and applications in linear algebra, analysis, and differential geometry. Also F. Freudenthal's paper on geometry at primary school can be placed here. Originally he intended to call his paper "Ich sehe es so" ("I see it this way").
Another aspect of geometry stressed was that of problem solving. R. Stowasser exhibited a variety of approaches to geometrical thinking through organized sets of problems.

T.J. Fletcher gave examples for the solution of problems by unexpected geometrical methods. G. Glaeser was concerned with what he calls a progressive and polyconcrete pedagogy of mathematics, which he illustrated by means of problems related to finite incidence structure. Also, a paper by H. Vyšin, distributed among the participants and included in these proceedings, reported on a highly problem-oriented approach to geometry starting from problems in combinatorial geometry.

The papers were followed by discussions in working groups, reports from the groups to the full assembly, and plenary discussions. During these discussions whose main points are reported at the end of these proceedings, it became clear to all participants that the problem of teaching geometry still remains a very deep one and that there are more questions left open than answers to be given. However there was a consensus that progress was made in better understanding the depth and challenge of finding the role and place of geometry in present-day mathematics teaching.

H.G. Steiner

BEGRÜSSUNG DURCH DEN PRÄSIDENTEN DES WESTDEUTSCHEN UNTERAUSSCHUSSES DER IMUK, PROF. DR. KUNLE, KARLSRUHE

Meine Damen und Herren!

Ich freue mich, Ihnen zur Eröffnung Ihrer Regionaltagung über Geometrieunterricht die besten Wünsche und Grüße des deutschen Unterausschusses der deutschen Sektion der internationalen mathematischen Unterrichtskommission überbringen zu können. Ich habe gleichzeitig die Ehre, Ihnen die Grüße des Präsidenten der IMUK, Herrn Professor Lighthills, zu überbringen.

Die Bedeutung dieser Tagung ist ja dadurch unterstrichen worden, daß neben dem Institut für Didaktik der Mathematik in Bielefeld auch die IMUK selbst als Mitveranstalter gezeichnet hat. So sind denn auch international anerkannte Experten der Geometrie und des Geometrieunterrichts hier in Bielefeld zusammengekommen. Ich kann Sie nicht alle namentlich nennen. Stellvertretend für alle darf ich begrüßen das Mitglied des Exekutivkomitees der IMUK, Herrn Professor Freudenthal aus Holland, vor allem aber begrüße ich den soeben in Vancouver gewählten künftigen Präsidenten der IMUK, Prof. Iyanaga. Er ist zwar selbst noch nicht anwesend, gleichwohl darf ich ihn hier begrüßen, er wird etwas später eintreffen. Er hat den weiten Weg von Japan hierher nicht gescheut, dafür danke ich ihm im Namen der deutschen Mathematik-Didaktiker sehr herzlich.

Die Zusammenarbeit mit dem neuen Präsidenten Iyanaga wird sicher ebenso gut und fruchtbar sein wie mit dem bisherigen Präsidenten Lighthill. Wir freuen uns sehr auf diese Kooperation.

Welches Interesse Exekutivkomitee und Präsident der IMUK an der Entwicklung und an den Bemühungen der mathematischen Didaktik in der Bundesrepublik nehmen, läßt sich daran ermessen, daß ja der nächste große internationale Kongreß über den Mathematikunterricht 1976 nach Deutschland, und zwar nach Karlsruhe, vergeben worden ist.

Ort dieser Geometrietagung hier ist Bielefeld. Hier ist vor kurzem erst das Institut für Didaktik der Mathematik neu errichtet worden. Wir sind glücklich, daß es nach jahrelangen und oft vergeblich erscheinenden Anläufen nun endlich gelungen ist, dieses Institut als Zentrum der mathematik-didaktischen Bemühungen in der Bundesrepublik ins Leben zu rufen. Zwar kann uns das nicht die tägliche Anstrengung und die Arbeit für die Weiterentwicklung der mathematischen Didaktik und des mathematischen Unterrichts abnehmen. An diesem Institut wird aber eine Koordination und Konzentration der Kräfte möglich sein, von der man wertvolle Impulse erhoffen kann.

Dies hat sich bereits bei der Initiative und der Organisation der Tagung gezeigt. Obwohl noch im Aufbau, hat das IDM, wie ich hoffe, mit diesem Symposium einen guten Start auf dem internationalen Parkett.

Bevor Sie sich den Problemen des Geometrieunterrichts in Vorträgen und Diskussionen zuwenden, gestatten Sie mir bitte noch einige kleine allgemeine Bemerkungen zur Situation in der Geometrie.

Die Geometrie hat fast 2 Jahrtausende lang die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft wesentlich mitbestimmt, wenn nicht beherrscht. Die Namensfolge Euklid, Descartes, Pascal, Gauß,Hilbert ließe sich fast beliebig verfeinern, um das zu illustrieren. Als Geometer sieht man aber mit Sorge, daß seit einiger Zeit eine Art kollektive Abkehr der Mathematiker von der Geometrie im Gange zu sein scheint, so als ob eine gewisse Übersättigung an der Geometrie eingetreten sei. Der tiefere Grund liegt aber wohl darin, daß jüngere Disziplinen wie Topologie oder Algebra, aber auch neuerdings aktuelle Teilgebiete der Analysis, der angewandten Mathematik das Interesse vieler Mathematiker in starkem Maße fesseln. Gleichwohl ist die Geometrie weiterhin eine lebendige, produktive Wissenschaft geblieben. Sie ist es aus sich heraus, sie hat sich aber auch durch Fortschritte in anderen mathematischen Disziplinen befruchten lassen, z. B. die Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten durch die Topologie oder die Grundlagen der Geometrie durch die Algebra.

Es war René Thom, der auf die wichtige Rolle hingewiesen hat, die die Geometrie als Bindeglied zwischen dem umgangssprachlichen und dem mathematischen Bereich spielt. In der Didaktik und im Unterricht der Mathematik war daher auch die Rolle der Geometrie und ihre Bedeutung nie umstritten. Hier geht es ja darum, das didaktisch relevante geometrische Material auszuwählen und unter methodischen Gesichtspunkten im Unterricht richtig einzusetzen. Keine andere mathematische Disziplin ist, so meine ich, besser imstande, Anschauungen und Abstraktion gleichermaßen beim Schüler zu fördern und seine Kreativität zu entwickeln.

Mit diesen Fragen werden Sie sich nun in den folgenden Sitzungen fachkundiger, als ich es hier in dieser Kürze kann, beschäftigen. Ich wünsche Ihnen einen erfolgreichen Verlauf dieses Symposiums und reichen Gewinn aus den Diskussionen.

Dem veranstaltenden Institut für Didaktik der Mathematik und stellvertretend für seine Wissenschaftler und Mitarbeiter überbringe ich Herrn Kollegen Steiner den Dank und die besten Wünsche der deutschen Sektion der IMUK. Lassen

Sie mich zum Schluß noch die Hoffnung ausdrücken, daß wir die Freude haben w -den, möglichst viele von Ihnen, die Sie heute nach Bielefeld gekommen sind, in zwei Jahren auch in Karlsruhe begrüßen zu können, wenn dort Mitte August 1976 der dritte internationale Kongress über Mathematikunterricht eröffnet wird. Ich danke Ihnen.

INHALT CONTENTS

GEOMETRIE IM MATHEMATIKUNTERRICHT - EINE ANALYSE NEUERER ENTWICKLUNGEN

H.-J. Vollrath, Würzburg

Vorüberlegungen

Ich gehe von der Annahme aus, daß heutzutage fast alle Menschen gewisse geometrische Kenntnisse und Fähigkeiten benötigen, damit sie die sie umgebende Natur und ihre technisch geprägte Umwelt besser verstehen und Berufsanforderungen besser erkennen und bewältigen können. In Diskussionen über Geometrieunterricht sollten deshalb Didaktiker die große Vielfalt geometrischen Denkens und Handelns sehen, die unterschiedlich veranlagten und interessierten Schülern vermittelt werden muß. Es ist deshalb notwendig, ein differenziertes Curriculum für den Geometrieunterricht zu entwickeln, das die verschiedenen Bedürfnisse und Fähigkeiten der Schüler berücksichtigt.

These 1: Für die Entwicklung eines differenzierten Curriculums sollten die Bedürfnisse und Fähigkeiten der Schüler Vorrang haben gegenüber den Interessen und dem Geschmack der Lehrer.

Diese Feststellung sollte selbstverständlich sein. Aber wenn man didaktische Vorschläge zum Geometrieunterricht sichtet, dann erscheint es doch notwendig, sie an den Anfang dieser Überlegungen zu stellen. So wird man etwa den Vorschlag, Gymnasiasten in der Trigonometrie des Poincaré-Modells der nichteuklidischen Geometrie zu unterrichten, als ein Beispiel dominierender Interessen des Lehrers anführen können.

Es ist eine Erfahrung, daß besonders in der Geometrie Begeisterung für eine Theorie, spezielle Vorliebe für trickreiche Probleme, fanatische Strenge oder philosophische Ideen den Lehrer blind sein lassen können für die Bedürfnisse und Fähigkeiten der Schüler. Curricula sollten entwickelt werden, die für jeden Schüler ein Programm vorsehen, das mathematisch bedeutsame Inhalte liefert, dem Schüler Freude macht und möglichst seinen Fähigkeiten und Bedürfnissen angemessen ist. Als ein Beispiel für diese Bestrebungen nenne ich KAUFMANs Ausführungen auf der Carbondale Konferenz über die Zielsetzung des CSMP.

Das CSMP versucht, ein "individualisiertes" Curriculum dadurch zu organisieren, daß verschiedene geometrische Zugänge wie Topologie, Kongruenz-Geometrie, lineare Algebra, projektive Geometrie, Kombinatorische Geometrie und allgemeine Tätigkeiten wie Mathematisierung, Algebraisierung, experimentelle Zugänge und der Gebrauch der geometrischen Sprache gelehrt werden (KAUFMAN). Ähnliche Überlegungen finden sich auch in anderen Geometrielehrplänen.

Man beginnt mit einem experimentellen, intuitiv orientierten Lehrgang in den frühen Klassen (Propädeutik) und fährt in den mittleren Klassen mit einem Kurs in geometrischen Teilgebieten fort, die an einer der oben genannten Theorien als Hintergrundtheorie organisiert sind und in den allgemeinen Mathematikunterricht integriert werden.

Didaktische Diskussionen über den Geometrieunterricht zielten bisher hauptsächlich darauf hin, die am besten geeignete mathematische Hintergrundtheorie zu finden. Das ist kein sehr fruchtbarer Ansatz, um ein differenziertes Curriculum für die Schule zu entwickeln.

These 2: Ein differenziertes Curriculum, das die verschiedenen Bedürfnisse und Fähigkeiten der Schüler befriedigt, kann nicht dadurch entwickelt werden, daß man die geometrische Hintergrundtheorie als Organisationsprinzip variiert.

Ähnlich äußert sich KAUFMAN über individualisierte Curricula: "Um ein wirklich individualisiertes Curriculum zu haben, muß man die verschiedenen Gesichtspunkte verschiedener Menschen bezüglich Mathematik im Auge haben. Jeder hat Bedürfnisse, die eine bestimmte Form von Mathematik erfüllen kann. Jeder kann seinen Dienst an der Gesellschaft dadurch erfüllen, daß er einen geeigneten Hintergrund von Mathematik erhält" (KAUFMAN).

Obwohl man die Notwendigkeit einsieht, die Aspekte des kreativen Arbeitens, des Geometrisierens und des Problemlösens in den Vordergrund zu stellen, dominieren bis heute doch mehr oder weniger systemorientierte Kurse im Geometrie-Unterricht. Das ist wohl deswegen der Fall, weil bis jetzt keine überzeugenden Organisationsprinzipien entwickelt worden sind, die den verschiedenen Aspekten von Geometrie angemessen sind.

These 3: Differenzierte Curricula können dadurch gefunden werden, daß man die Leitlinien entsprechend den verschiedenen Sichtweisen von Geometrie ändert.

In diesem Vortrag sollen verschiedene Betrachtungsweisen von Geometrie hervorgehoben und für jede dieser Betrachtungsweisen adäquate Leitlinien zur Konstruktion differenzierter Curricula entwickelt werden.

These 4: Nur wenn es gelingt, für den Geometrieunterricht differenzierte Curricula zu entwickeln, wird man es rechtfertigen können, allen Schülern Geometrieunterricht im Rahmen eines allgemeinen mathematischen Unterrichts zu erteilen.

Im folgenden werden verschiedene Sichtweisen von Geometrie hervorgehoben und Leitprinzipien zur Gestaltung adäquater Lernsequenzen entwickelt.

1. *Geometrie als ein Vorrat mathematischer Theorien*

Dies ist ein Gesichtspunkt, unter dem stärker rezeptiv eingestellte Mathematiklehrer Geometrie sehen. Ohne Diskussionen wurde Geometrie unter diesem Aspekt während vieler Generationen unterrichtet. Andere Aspekte, wie Anwendung (z.B. Ballistik, Fortifikation), Problemlösen (z.B. Dreieckskonstruktionen) und die Eigenschaft des Raumes (z.B Optik und Mechanik) wurden unter diesen Gesichtspunkt subsumiert. Während der vergangenen Jahre wurden viele Vorschläge gemacht, die verschiedenen geometrischen Theorien als Prinzip für den Unterricht heranzuziehen.

Diskussionen über verschiedene Zugänge waren ausgerichtet auf

formale Ziele: Welche Theorie kann am besten mathematisches Denken darstellen?

Ziele, die sich auf den Inhalt beziehen: Welche Gegenstände sind in der Geometrie am wichtigsten?

auf Fähigkeiten der Schüler: Welche geometrische Theorie erlaubt den leichtesten Zugang zur Geometrie?

Unter den vielen konkurrierenden Angeboten möchte ich einige besonders effektive und erprobte hervorheben, die mir für zukünftiges Unterrichten wichtig zu sein scheinen. Die Ideen der Abbildungsgeometrie haben sich als sehr bedeutsam für die Klassen 7 und 8 herausgestellt. Nach Vorschlägen von WILLERS, FLADT, JEGER und FABER in Deutschland wurden *abbildungsorientierte* Kurse entwickelt und praktiziert. Die meisten Lehrgänge heben heute in diesen Klassen Kongruenzabbildungen und ihre Eigenschaften zu Beginn hervor. Subtile

Diskussionen, ob Spiegelungen (WILLERS, FABER) oder konkurrierend, affine Abbildungen (PRADE), grundlegend im Geometrieunterricht sein sollten, scheinen mir vorwiegend an den persönlichen Interessen der Geometer orientiert zu sein, denn die Schüler sind an einem axiomatischen Aufbau in dieser Altersstufe nicht interessiert (FREUDENTHAL). JEGERs konstruktive Abbildungsgeometrie und STEINERs Vorschlag auf den Carbondale Konferenz, allgemein Kongruenz-Abbildungen für die Grundlegung der Geometrie zu wählen, stellen eine gute Zusammenfassung der Ideen der Abbildungsgeometrie dar. Man wird mehr oder weniger experimentell durch Arbeiten mit Transparentpapier, Spiegeln, Schere und Papier, Zirkel und Lineal zu Kongruenzabbildungen hinführen und ihre Eigenschaften studieren. Daraus ergibt sich ein Vorrat fundamentaler Einsichten, auf den man einen Geometriekurs aufbauen kann.

Der *Gruppenbegriff* ist zu einer Leitlinie für einige fruchtbare Tätigkeiten empfohlen worden (z.B. durch die "Synopsis" der OEEC und durch die Carbondale Konferenz). Überzeugende Beispiele für eine Anwendung des Erlanger-Programms sind die Systematik der Viereckslehre mit Hilfe von Symmetrie-Gruppen (BAUERSFELD) und DIENES' Aktivitäten.

Eine breite Diskussion fand über die *lineare Algebra* statt. DIEUDONNE, SERVAIS, CHOQUET und PAPY machten teilweise mit großem Elan vertretene Vorschläge zur Betonung dieses Aspekts bereits in den mittleren Klassen. Für die Oberstufe wird in der linearen Algebra eine Möglichkeit gesehen, einen Beitrag zur Axiomatisierung zu liefern (z.B. PICKERT). *Spezielle Geometrien* wie Inversions-Geometrie (COXETER), Geometrie der Polygone (BACHMANN), Inzidenz-Geometrie (ZEITLER) und endliche Geometrie scheinen hauptsächlich dem formalen Training mathematischer Denkweisen zu dienen. Wenn man diese Zugänge bewertet, dann muß man die kostbare Zeit der Schüler im Auge haben. Es sollte diskutiert werden, ob diese Ziele nicht gleichwertig mit Übungen an wichtigeren Objekten erreicht werden können. Schließlich sind viele Vorschläge gemacht worden, *topologische* Ideen für den Geometrieunterricht fruchtbar zu machen. Ich verweise auf die Arbeiten von HILTON, KELLY, PAPY, WALLRABENSTEIN und WEIDIG. Viele von ihnen sind erfolgreich erprobt worden für eine problemorientierte Einführung in den Geometrieunterricht. Teilweise werden diese Überlegungen begründet mit PIAGETs Theorie von der Entwicklung geometrischen Denkens.

All diese Zugänge leiden darunter, entweder zentrale Begriffe dieser Theorien nur naiv zu benutzen, ohne auch nur annähernd ihre Tragweite zu erfassen, oder Geometrie als ein an einer Hintergrundtheorie orientiertes Fertigprodukt zu unterrichten, dessen Zusammenhänge von den Schülern nicht erfaßt werden.

2. *Geometrie als ein Vorrat von Begriffen und Sätzen zur Theorienbildung*

Dies ist eine Betrachtungsweise, unter der kreative Mathematiker Geometrie sehen können. Kritik gegen einen Unterricht, der Mathematik als ein Fertigprodukt unterrichtet, führte zu neuen Organisationsprinzipien. KLEIN, TOEPLITZ und WAGENSCHEIN gaben wichtige Anregungen mit der Idee des genetischen Lehrens.

Wenn man sie auf die Aufgabe der Theorienbildung bezieht, so kann man einen Unterricht erhalten, der

an der Tätigkeit des Axiomatisierens

orientiert ist. Ein frühes Beispiel ist FLADTs Parallelenlehre (1922). FREUDENTHALs Idee des lokalen Ordnens hat die didaktische Diskussion wesentlich angeregt. Auf der Oberwolfach-Tagung 1962 haben GRIESEL, KIRSCH und STEINER interessante Vorschläge für Übungen in Axiomatisierung gemacht.

Bedeutende Tätigkeiten sind:

Begriffe definieren, nach primitiven Begriffen suchen, Sätze formulieren, Beweise geben, Beweise analysieren, nach logischen Beziehungen suchen, verschiedene Definitionen eines Begriffes vergleichen, einen Vorrat von Sätzen zusammenstellen, verallgemeinern und Methoden diskutieren. Geeignet sind Sachverhalte, die ausreichend viele Varianten gestatten. Ein praktikables Beispiel ist die Charakterisierung von geometrischen Objekten mit Hilfe von Eigenschaften (z.B. der Raute, WITTMANN 1974). Man ermittelt zunächst eine Zusammenstellung von Eigenschaften, aus der man nun Teileigenschaften aussondern kann, die das Objekt charakterisieren. Sowohl in der Suche nach Eigenschaften als auch nach charakterisierenden Systemen von Eigenschaften haben die Schüler ausreichend Spielraum zu selbständiger Tätigkeit. Motivieren läßt sich diese Überlegung vom Problem des "Steckbriefes" her. Freilich ist es schwer, für die Entwicklung eines solchen Unterrichts ein Schulbuch zu schreiben, das einerseits geeignete Impulse und Informationen gibt, ohne andererseits die möglichen Lösungen vorwegzunehmen.

Es besteht deshalb die Gefahr, daß die Idee des lokalen Ordnens als eine Begründung genommen wird, eine lokal geordnete Geometrie als ein Fertigprodukt anzubieten.

3. *Geometrie als ein Vorrat von Lösungsstrategien für Probleme*

Dies ist ein weiterer Gesichtspunkt, unter dem kreative Mathematiker Geometrie sehen können. Gerade die Anregungen durch geometrische Probleme haben immer wieder auch Nicht-Mathematiker zu Freunden der Mathematik gemacht. In der pädagogischen Diskussion ist heute problemorientierter

Unterricht sehr wichtig. Probleme werden benutzt zur Motivation, Anwendung und auch als zentrale Gegenstände des Unterrichts. Wenn man verschiedene Vorschläge analysiert, Geometrie problemorientiert zu unterrichten, dann findet man hauptsächlich Kurse, die

an mathematischer Hintergrundtheorie orientiert

sind. Die Probleme werden benutzt, um zur Entdeckung von Sätzen hinzuführen, die dann selbst wieder als Lösungsstrategien für weitere Probleme dienen können. Es ist klar, daß man damit keinen substantiell neuen Zugang findet.

Im traditionellen Unterricht wurden Felder von Problemsammlungen benutzt, wie z.B. Dreieckskonstruktionen und geometrische Örter. Diese waren

orientiert an der Systematik des Gegenstandes,

indem man z.B. die verschiedenen gegebenen Stücke variierte: Konstruiere ein Dreieck aus 3 Seiten, 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, 2 Seiten und dem Winkel, der der größeren gegenüberliegt, 1 Seite und 2 anliegenden Winkeln usw.

Man weiß, daß das ein sehr wichtiges formales Prinzip ist. Denn es kann dazu dienen, sich besser zu erinnern und einen roten Faden zu finden. Aber im traditionellen Unterricht ist dieses Prinzip überstrapaziert worden. Es ist möglich, daß Probleme, die schwieriger zu lösen sind als spätere Probleme, eher behandelt werden. So kann möglicherweise diese Orientierung eher einengen.

Neuere Vorschläge für anregende Problemsequenzen, z.B. von WAGENSCHEIN, WITTENBERG und ENGEL, sind oft

orientiert an einem Themenkreis.

So behandelt ENGEL die Problemsequenzen "Optimierung" oder "Einteilungen der Ebene" nach wachsendem Schwierigkeitsgrad.

Mir scheint der Problemkreis Optimierung besonders günstig zu sein, da er sich über mehrere Stufen hinziehen kann. Man beginnt etwa mit dem Problem, einen Punkt zu finden, der minimale Abstandssumme von drei anderen hat. Eine Lösungsstrategie erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung. Über Schnitte von Halbebenen erhält man einen Zugang zur linearen Optimierung im 2-dimensionalen Fall. Bei der Behandlung von Parabeln kann man Optimierungsaufgaben behandeln, die mit der Bestimmung des Scheitels gelöst werden. Diese Betrachtungen können in der Analysis vertieft werden. Dabei besteht jedoch in jeder Phase die Gefahr, daß man die Methoden einer Stufe überstrapaziert.

Es scheint mir deshalb sehr wichtig zu sein, daß solche Themenkreise über mehrere methodische Stufen führen, um zu einer Vertiefung zu kommen.

Für die ausführliche Diskussion der Themenkreismethode verweise ich auf die Arbeit von WITTMANN (1974). Diese Idee des Themenkreises ist ein wertvoller Beitrag für einen Geometrieunterricht, der von Problemen beherrscht ist. Man sollte solche Themenkreise auch an Projekten des täglichen Lebens, des Berufes oder einer Wissenschaft orientieren.

Beispielsweise sind die möglichen Parkettierungen mit Fliesen oder das Färben von Karten mögliche Projekte. Heute werden solche Fragestellungen meist in den Lehrgang eingestreut, um "Oasen" zu schaffen. So kann man etwa das Parkettierungsproblem als Anwendung des Satzes von der Winkelsumme im Vieleck behandeln. Man beraubt sich damit jedoch der Möglichkeit, diesen Themenkreis als eine Leitidee zu verwenden, mit der die Schüler den Formenreichtum von Mustern in Eigentätigkeit erfassen könnten, und durch die sie etwas vom Reiz der Tätigkeit eines Designers erfahren könnten. Am Anfang ständen also Vielfalt, Formenreichtum und Tun, während z.B. die einengende Frage nach möglichen regulären

Parkettierungen erst am Ende zu einer mathematischen Vertiefung führte.

Nach den Erfahrungen mit Kursen, die Schüler für einen Abschlußtest trainieren, z.B. für das Zentralabitur, oder für einen Wettbewerb, z.B. Olympiade, sind Problemsequenzen entwickelt worden, die

an Lösungsstrategien orientiert

sind, bei denen der Grad der Schwierigkeit zunimmt. Dieses Prinzip hatte den traditionellen Algebra-Unterricht überwuchert (LENNÈ). Die Kompliziertheit einer Aufgabenstellung kann damit zu einem falschen Maßstab für mathematisches Niveau werden. Man weiß außerdem, daß ein solches Training sehr schnell unwirksam wird, wenn man nicht in der Übung bleibt. Außerdem besteht die Gefahr, daß mathematische Ideen in den Hintergrund treten, während Techniken, heute häufig vornehmer Strategien genannt, überbewertet werden. Dies Prinzip ist allenfalls für lokale Organisation fruchtbar.

Ein interessanter auf Probleme bezogener Unterricht ist möglich mit Kursen, die

an Spielen orientiert

sind. Ein anregendes Beispiel ist in SCHUPPs Mühle-Geometrie gegeben. Er erhält eine Sammlung von Problemen, indem er die Mühle-Konfiguration als eine endliche Geometrie betrachtet. Geometrische Einsichten führen zu Lösungsstrategien. Insbesondere sollte man nach solchen Spielen suchen, bei denen man Gewinnstrategien auf der Grundlage geometrischer Sätze erhält.

Problemorientierter Unterricht ist hauptsächlich motiviert durch das Interesse an formalen Zielen. Wichtige Aktivitäten sind: Transformation des Problems, Suche nach ähnlichen Problemen mit bekannter Lösung, Finden einer Annahme, Entwicklung von Lösungsstrategien für Typen von Problemen, Vergleich verschiedener Lösungen und Entwicklung neuer Probleme mit Hilfe des Problemlösens. Problemorientiertes Unterrichten kann kreatives Denken fördern und für Mathematik im allgemeinen motivieren. Aber man muß auch den möglichen entmutigenden Effekt auf erfolglose Schüler durch schwierige Probleme sehen oder den abstumpfenden Effekt bloßer Übungen auf begabte Studenten.

4. *Geometrie als ein Vorrat von Theorie für Handlungen*

Viele Menschen brauchen Geometrie als einen Hintergrund für Techniken, Konstruktionen, den Umgang mit Instrumenten, zum Treffen von Entscheidungen usw. Auch für Schüler mit solchen Bedürfnissen ist Geometrie bis heute in einem mehr oder weniger deduktiven, systemorientierten Weg unterrichtet worden. Praktische Probleme oder Aktivitäten werden nur zur Motivation oder als Anwendung benutzt. Es ist erschreckend, wenn z.B. ein Geometriebuch für technische Berufe heute immer noch im wesentlichen eine Sequenz von Definitionen, Sätzen und Beweisen darstellt, in der technische Probleme lediglich in den Übungsaufgaben auftreten.

Die Autoren sehen dabei offensichtlich nicht die Möglichkeiten, Geometrieunterricht von praktischen, technischen Aufgaben her zu organisieren. Es sollte unser Ziel sein, die Praxis besser zu integrieren. Man kann z.B. Lernsequenzen entwickeln, die

an dem Gebrauch von Instrumenten

orientiert sind. Das klassische Problem der möglichen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal hat dadurch einen etwas spitzfindigen Zug bekommen, daß man die erlaubten Konstruktionen nur auf diese Instrumente beschränkte. Aber es scheint doch natürlich zu sein, am Anfang eines Lehrganges zunächst die Möglichkeiten dieser Instrumente zu erforschen. Man kann auch die verschiedenen Konstruktionen mit der Zeichenmaschine eines Architekten betrachten und ihre Arbeitsweise zu ergründen suchen. Es erscheint sinnvoll, früh die Konstruktionsmöglichkeiten mit Zirkel und Geodreieck zu erfassen. Man erhält so ein praktikables Zeichengerät und eine ausreichende geometrische Basis. Versuche scheinen auch zu zeigen, daß Schüler in Klasse 8 durchaus für geometrisches Arbeiten mit eingeschränkten Mitteln zu gewinnen sind. So kann man etwa affine Geometrie mit dem Parallelenlineal erhalten (PRADE). Arbeiten mit Spiegeln (WALTER, PROKSCH) können zu einem Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff führen. Man kann Unterricht auch an speziellen Typen von Instrumenten orientieren wie z.B. Längenmessinstrumenten. Im Hinblick auf berufsorientierten Unterricht ist es zweckmäßig, Unterrichtseinheiten zu finden, die

an einem Projekt orientiert sind.

So kann z.B. in dem Projekt: Planung und Bau eines Hauses eine Fülle geometrischer Aktivitäten angesprochen werden. Bereits in der Planung werden Fragen des Maßstabs, der Ähnlichkeit, Teilungen von Strecken, Zeichnen von Winkeln, Messen von Winkeln, Bestimmen von Flächen- und Rauminhalten, Zeichnen von Grund- und Aufriß, Lesen von Plänen usw. angesprochen. Das kann bis zu tiefliegenden Fragen der projektiven Geometrie führen (z.B. FLETCHERs Architect's Geometry). Für den praktischen Teil sind Geräte wie Wasserwaage, Senkblei und Spannleine als praktische Werkzeuge für geometrische Konstruktionen zu entwickeln. Ein anderes Beispiel kann die Konstruktion von Straßen sein: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Dörfern zu finden, einen Punkt mit minimaler Abstandssumme von drei anderen Punkten zu finden, Kurven und Tangenten zu konstruieren, Kurven planen, die eine bestimmte Maximalgeschwindigkeit erlauben, usw. Diese Tätigkeiten können bald von sehr elementaren Fragen zu schwierigeren führen. Vor einiger Zeit konnte man in den

Nachrichten hören, daß alle unsere Landkarten ideologisch sind, weil unterentwickelte Teile der Erde zu klein gezeichnet werden im Vergleich zu entwickelten Teilen. Es wurde gesagt, daß jetzt eine realistische Landkarte entwickelt worden sei. Solch eine Feststellung kann eine Motivation für die Betrachtung kartographischer Fragen sein.

Es ist leicht, verschiedene Typen von Projektionen einer Kugel auf eine Ebene (z.B. über eine Tangentialebene, einen Kegel oder einen Zylinder) zu entwickeln. Sie können zuerst konstruktiv beschrieben werden. Fragen nach den Invarianten der verwendeten Abbildungen wie Länge, Flächeninhalt und Winkel können mit Hilfe elementarer Betrachtungen für wichtige Typen beantwortet werden. Man kann dann diese Probleme auf einer höheren Ebene mit Hilfe analytischer Mittel behandeln. Die notwendigen Werkzeuge erhält man leicht nach einer Einführung in die Parameterdarstellungen von Kugel, Ebene und Abbildungen. In einem Projekt kann man mit dem Problem beginnen, einen Stadtplan zu entwickeln. Hier werden Fragen der Ähnlichkeit angesprochen. Das kann dann zur Konstruktion von Erdkarten führen. Der Themenkreis der Kartenfärbungen läßt sich fruchtbar integrieren.

Ein anderes Beispiel ist das Studium von Dachkonstruktionen. Die Vielfalt der bei Dächern auf Häusern und Kirchen in Europa auftretenden Formen kann analysiert werden mit Hilfe der auftretenden Flächen und Körper. Man beginnt mit ebenen Flächen und kann später Regelflächen betrachten, die auch bei Dachkonstruktionen in der modernen Architektur gefunden werden können. Dieses Projekt läßt sich erweitern, indem man nach der Statik von Dächern fragt. Das kann ein interessanter Zugang zu Vektoren sein.

Anwendungen von Geometrie in der Wirtschaft wie z.B. lineare Optimierung oder Methode der linearen Algebra in der Theorie des Marktes sind brauchbar für Kurse, die orientiert sind

an der Suche nach Entscheidungshilfen.

Die angeführten Theorien sollten nicht als Anwendungen dargestellt werden, sondern sollten in einem Prozeß der Mathematisierung gewonnen werden. PAPYs Erfahrungen mit Einkaufsvektorräumen zeigen eine solche Möglichkeit.

Durch die Nähe der Praxis ist eine intensive Motivation für praxisorientierte Studenten möglich. Sie können für das spätere Berufsleben vorbereitet werden, und man kann einen Unterricht durch Tun praktizieren. Andererseits sollte man die Gefahr sehen, auf einer bloß technischen Stufe stehenzubleiben, ohne daß die geometrischen Ideen verstanden werden.

5. *Geometrie als ein Vorrat für Theorien des Raumes*

FREUDENTHAL und WAGENSCHEIN haben hervorgehoben, daß Studenten fundamentale Einsichten geometrischer Natur in den Raum benötigen. WAGENSCHEIN erinnert an die griechische Vorstellung von Geometrie als "Mathematik aus der Erde". FREUDENTHAL gibt viele Beispiele fundamentaler anregender Fragen wie z.B. "Warum wird ein Stück Papier längs einer Geraden gefaltet?, Warum ist die gerade Linie die kürzeste Verbindung?, Was ist die Beziehung zwischen der wirklichen und der scheinbaren Größe eines Körpers?, Was ist eine starre Bewegung auf der Kugel"? Mögliche Lernsequenzen können orientiert werden an der Mathematisierung der Umgebung der Schüler.

Es geht darum, geometrische Objekte im Klassenraum zu entdecken, Beziehungen zwischen ihnen zu suchen und Experimente mit Körpern vorzunehmen, um Erfahrungen mit Formen, Flächen und Körpern zu gewinnen. Ansätze dazu können in allen modernen Grundschullehrgängen gefunden werden. Pioniere waren TREUTLEIN und van HIELE.

Aber nicht nur die mehr oder weniger technische Umgebung der

Kinder sollte analysiert werden. Wie WAGENSCHEIN empfiehlt, sollten wir versuchen, unsere natürliche Umgebung mit Hilfe geometrischer Mittel zu verstehen. Die Schüler sollten einen Blick für die Vielfalt geometrischer Formen in der Natur gewinnen. Das Betrachten von Kristallen, Bienenwaben, Spinnenweben, oder mikroskopische Aufnahmen von Zellen und Geweben können eine Erlebnisgrundlage verschaffen, aus der geometrisches Denken und Handeln erwachsen kann. Dies kann seinen Ausdruck finden in Kursen, die orientiert sind

an physikalischen Erfahrungen.

Bedeutende physikalische Theorien, die Geometrie benutzen, sind Mechanik, Optik und die Relativitätstheorie. In Physik wird Geometrie als eine passende Theorie auf Beobachtungen angewendet. Für den Geometrieunterricht ist es wichtig, eine Theorie durch Geometrisierung der Natur zu erhalten. Darin unterscheidet sich unser Zugang von dem der Physiklehrer, und wir können vom Physiklehrer nicht verlangen, den Prozeß der Mathematisierung der Natur zu unterrichten. Man sollte aber auch die Gefahr sehen, daß bei einer Überbetonung von Experimenten durch ihre Überzeugungskraft das Entwickeln eines Beweisbedürfnisses erschwert werden kann. Solche Fragen können auf das allgemeinere Problem des Raumes führen. Damit lassen sich Schüler mit philosophischen Interessen ansprechen. Deswegen möchte ich Kurse hervorheben, die

am Problem des Raumes

orientiert sind. Das beginnt mit fundamentalen Erfahrungen, wie sie FREUDENTHAL beschreibt, und kann schließlich zu Fragen um konkurrierende Modelle der Wirklichkeit führen. In den Diskussionen über den Unterricht in nichteuklidischer Geometrie wird neben dem Aspekt des axiomatischen Arbeitens immer wieder der Gedanke hervorgehoben, daß man damit die Beziehung von Geometrie und Wirklichkeit diskutieren kann. Die Zugänge, die das Klein-Modell oder das Poincaré-Modell benutzen, sind nicht besonders fruchtbar, denn diese Modelle sind zu weit von der Realität entfernt. Dagegen erhält man einen fruchtbaren Zugang zum Problem der mathematischen Beschreibung des Raumes durch die Minkowski-Geometrie, wie es von LAUGWITZ 1968 empfohlen worden ist. PICKERTs Vorschlag, eine Metrik mit Hilfe von Kegelschnitten einzuführen, kann ebenfalls zu solchen Betrachtungen führen. Schließlich möchte ich darauf hinweisen, daß in einer Zeit, in der Raumfahrt aktuell ist, sphärische Geometrie weitgehend in Vergessenheit geraten ist. Ich möchte nicht den aufgabenorientierten Unterricht in sphärischer Trigonometrie zurückbringen, sondern die Pflege der traditionell guten Beziehungen zur Astronomie empfehlen.

Ein geometrischer Kurs unter dem Aspekt der Theorie des Raumes kann die Schüler zu einem besseren Verständnis ihrer Umgebung führen und ihnen klare Vorstellungen von der Wirklichkeit liefern.

6. *Geometrie als ein Ergebnis gelöster Probleme*

Das ist eine Betrachtungsweise eines an der Geistesgeschichte interessierten Menschen. In Diskussionen über genetisches Lehren wurde die Idee entwickelt, Kurse

an der historischen Entwicklung eines Problems und seiner Lösung

zu organisieren. TOEPLITZ empfahl das als direkte genetische Methode. Er hoffte damit in der Lage zu sein, Menschen für Mathematik zu motivieren, die durch steril dargestellte Mathematik frustriert waren. Gute Beispiele für fruchtbare Anwendungen dieser Idee sind die Entwicklung des Problems der möglichen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal oder die Bestimmung des Flächeninhaltes.

Man kann Kurse auch orientieren

an den Beiträgen einer wichtigen Epoche

der menschlichen Kultur.

Beispiele können sein die Proportionen und das Raumproblem im 19. Jahrhundert. Diese Orientierungen geben die Möglichkeit, nach soziologischen und philosophischen Beziehungen zu suchen.

Für Studenten auf einer höheren Stufe könnte ich mir Studien denken, die orientiert sind

an geometrischen Beiträgen eines bedeutenden Mathematikers

Mögliche Beispiele sind DESCARTES, RIEMANN, HILBERT, KLEIN.

Bei dieser Sichtweise von Geometrie sind sinnvolle Aktivitäten: Einen Originaltext lesen, alte Redewendungen in moderne mathematische Sprache übersetzen, Kommentare lesen, Darstellungen über Mathematiker lesen, philosophische oder soziale Bedingungen analysieren, verschiedene Lösungen betrachten, Änderungen der Problemformulierung diskutieren, das Problem von einem modernen Standpunkt aus diskutieren, nach Einflüssen auf spezielle Problemformulierungen in neuerer Forschung suchen.

Der Lehrer kann Mathematik einführen als das Ergebnis des Ringens nach einer Lösung von Problemen. So kann Mathematik als eine lebendige Wissenschaft gesehen werden.

Von einem soziologischen Standpunkt aus kann Mathematik studiert werden als ein Ergebnis von Forschungen in einer speziellen Zeit und Umgebung. Aber man muß sehen, daß es sich um eine aufwendige Methode handelt, die nicht für die ganze Geometrie und auch nicht für alle Schüler fruchtbar ist.
Bis heute ist sie trotz wiederholter Ansätze noch nicht als überzeugende Unterrichtsstrategie entwickelt worden.

7. Geometrie als ein Vorrat an Formen

Heute sind viele Künstler von geometrischen Formen fasziniert. Wir wissen über geometrische Studien von berühmten Künstlern in der Geschichte. Diese Beispiele können zeigen, daß wir die Notwendigkeit künstlerisch orientierter Kurse in Geometrie sehen sollten. Man kann sie organisieren

an Beobachtung und Analyse von Formen

in der Natur (z.B. Netze, Gewebe, Kristalle), in der Architektur (z.B. Symmetrien von Gebäuden) und Kunst (z.B. Ornamente). Ich möchte auch erinnern an die historischen Diskussionen über die Rolle des goldenen Schnitts und des perspektivischen Zeichnens.

Fragen, die sich auf

Erzeugen von Formen

beziehen, erlauben einen breit angelegten auf Tun ausgerichteten Unterricht. Forschendes, kritisches Analysieren des eigenen Tuns kann von elementaren Fragen der Beschreibung von Konstruktionen zu Analysen von durch komplizierte Techniken erzeugten Formen führen, wie sie etwa in der Kinematik behandelt werden. Die meisten Elementarkurse bemühen sich darum, schon in der Primarerziehung Kinder mit der Vielfalt geometrischer Formen und Beziehungen bekannt zu machen. Aber man sollte auch versuchen, diese Ideen für Schüler einer höheren Stufe fruchtbar zu machen.

Schlußbemerkungen

Die diskutierten Betrachtungsweisen von Geometrie sind sicher nicht alle möglichen. Aber ich halte sie für wichtig in der didaktischen Diskussion. Es wird schwer sein, eindeutig jede heute im Geometrieunterricht verwendete Aktivität einem solchen Aspekt zuzuordnen. Das war auch nicht das Ziel meiner Überlegungen. Vielmehr sollte dadurch die Suche nach neuen Aktivitäten angeregt werden.

Es wurden einige allgemeine Prinzipien, Mathematikunterricht zu organisieren, angesprochen. Soweit ich sehe, sind sie konsistent mit diesen Überlegungen.

Die Darstellung verschiedener Organisationsmöglichkeiten ist als Hilfe für Unterrichtsplanungen gedacht.

Für *globale* Planungen: Man kann eine bestimmte Sichtweise von Geometrie in einem Lehrplan für eine bestimmte Schülergruppe betonen. Gerade in integrierten Gesamtschulen erhält man damit ein Differenzierungsmodell nach verschiedenen Bedürfnissen und Fähigkeiten.

Für *lokale* Planungen: In einer Lernsequenz werden nacheinander verschiedene Sichtweisen betont, um den Unterricht genügend breit anzulegen.

LITERATUR

F. BACHMANN: n-Gons, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971, 12-33

H. BAUERSFELD: Ein Beitrag der Gruppentheorie zur Systematisierung geometrischer Figuren, MNU 14 (1961/62) 274-278

G. CHOQUET: Neue Elementargeometrie, Braunschweig 1970

H.S.M. COXETER: Inversive geometry, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971, 34-45

J. DIEUDONNE: Linear Algebra and Geometry, 1969

E.B. DYNKIN, W.A. USPENSKI: Mathematische Unterhaltungen 1, Mehrfarbenprobleme, Berlin 1955

A. ENGEL: Geometrical activities for the upper elementary school, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971, 77-118

K. FABER: Konstruktiver Aufbau der Euklidischen Geometrie aus den Grundsätzen der Spiegelung, MU 4,3 (1958) 20-56

K. FLADT: Über die Behandlung der Parallelenlehre, ZMNU 54 (1922) 78-84

T.J. FLETCHER: Der Geometrieunterricht - Aktuelle Probleme und Zielvorstellungen, MU 20,1 (1974) 19-35

H. FREUDENTHAL: Mathematik als pädagogische Aufgabe 2, Stuttgart 1974

H. FREUDENTHAL: Mathematics as an Educational Task, Dordrecht 1973

H. GRIESEL: Lokales Ordnen und Aufstellen einer Ausgangsbasis - ein Weg zur Behandlung der Geometrie der Unter- und Mittelstufe, MU 9,4 (1965) 55-65

D. van HIELE-GELDORF: De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas von het V.H.M.O. 1957

P. HILTON: Topology in the High School, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971, 160-177

W. ISHEIM: Propädeutische Einführung von Bewegungsgruppen anhand der Streifenornamente, MU 4,3 (1958) 86-95

M. JEGER: Konstruktive Abbildungsgeometrie, Luzern 1964[3]

B. KAUFMAN: Background, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971, 1-4

A. KIRSCH: Endliche Gruppen als Gegenstand für axiomatische Übungen, MU 9,4 (1963) 88-100

F. KLEIN: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd.2, Berlin 1908

D. LAUGWITZ: Die Geometrie von H. MINKOWSKI, MU 4,4 (1958) 27-42

H. LENNE: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart 1969

OEEC: Synopses for modern secondary school mathematics

G. PAPY: Der Vektorraum der Einkäufe, in Beiträge zum Mathematikunterricht 1972, Hannover 1973, 170-178

G. PAPY: A first introduction to the notion of topological space, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971, 242-254

G. PAPY: Ebene affine Geometrie und reelle Zahlen, Göttingen 1965

G. PICKERT: The introduction of Metric by the Use of Conics, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971

H. PRADE: Affine Geometrie im Mittelstufenunterricht des Gymnasiums, MU 12,5 (1966) 5-36

R. PROKSCH: Konstruktionen mit dem Spiegellineal, MU 2,2 (1956) 20-31

W. SERVAIS: Affine Geometrie als Basis für den geometrischen Anfangsunterricht, MPSB 14 (1967)

H. SCHUPP: Mühlegeometrie, Paderborn 1974

S. SCHUSTER: On the teaching of Geometry- A Potpourri, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971, 300-310

H.G. STEINER: A Foundation of Euclidean Geometry by means of Congruence Mappings, in H.G. Steiner, The teaching of geometry at the pre-college level, Dordrecht 1971, 311-314

O. TOEPLITZ: Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Berlin 1949

P. TREUTLEIN: Der geometrische Anschauungsunterricht, Leipzig 1911

M. WAGENSCHEIN: Mathematik aus der Erde (Geometrie), Die Deutsche Schule (1961) 5-8

H. WALLRABENSTEIN: Experiments in teaching intuitive topology in the 5th and 6th grades, Ed.St.5 (1971) 91-108

M. WALTER: Entdecke neue Bilder, Wesel 1974

I. WEIDIG: Topologische Fragen in der geometrischen Propädeutik, MU 16,1 (1970) 5-17

H. WILLERS: Die Spiegelung als primitiver Begriff im Unterricht, ZMNU 53 (1962)

A. WITTENBERG: Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963

E. WITTMANN: Themenkreismethode und lokales Ordnen, MU 20,1 (1974) 5-18

H. ZEITLER: (Hrsg.) Inzidenzgeometrie, MU 16,4 (1970)

A COMPREHENSIVE AND MODERN TEACHING OF GEOMETRY

W. Servais, Morlanwelz

I. *Inventary of the question*

1. *Euclidean tradition*

1.1 Geometry as a mathematical discipline has been paramount for more than two thousand years. The Elements of Euclid were looked upon as a gospel. They were regarded as a model of rational deductive organization proceeding by axioms, definitions, theorems presented in linear order that is perhaps more logical than mathematical. In the original Elements, (as we might perhaps know from numerous successive translations [1], [8]) the subject-matter is presented in a closed corpus which does not provide for exercises for the reader. The introduced problems on constructions with lines and circles are solved and lead to existence propositions based on postulates that allow for the usual way to describe segments and circles with ruler and compass. The given axioms concern equality, inequality of things, addition, subtraction, double, halves, coincidence of magnitudes. These general facts are followed by three geometric axioms: two straight lines cannot enclose a space, all right angles are equal to one another, the parallel axioms are given inthe intricate setting with interior angles made on the same side of a straight line by two lines that meet the first.

1.2 The educational value of Euclid does not seem to have been questioned up to the 18th century. In his 'Eléments de Géomêtrie' [2]written by Alexis-Claude CLAIRAUT in 1765, at a request of the Marquise du Châtelet,

the author has expressed his views:
"Although Geometry is by itself abstract we have to acknowledge that the difficulties met by the beginners can rather often be ascribed to the way in which its ordinary elements are taught. One always starts with a great number of definitions, postulates, axioms and preliminary principles that seem to promise nothing but dry facts to the reader. The propositions that follow then do not fix the mind on more interesting objects, and as these are also difficult to conceive it commonly happens that the beginners get bored and fed up before having got any distinct idea of what one is going to teach them."

Clairaut's recipe for improving understanding of geometry is well-known: One begins with problems with regard to the measurement of grounds. This gives opportunities to discover the main geometric properties, just as inventors have done. Clairaut relies on intuition and common sense. He sets more value on the meaning of geometric truths than on the rigor of the proofs. Nevertheless, he feels the need to explain the omission of some Euclidean propositons and to demonstrate some of them in the usual way since his book has not been meant for a treatise on surveying.

The "Eléments de Géométrie" of Clairaut do not seem to have influenced the teaching methods of his time.

1.3 The educational value of Euclid has been appreciated up to the first half of our century.

In his introduction to a 1932 edition of the 'Elements of Euclid' T.L. Heath says [1]:
"The only general criticism (of it) which is deserving our consideration is that it is unsuitable as a textbook

for very young boys and girls who are just beginning to learn the first things about geometry... if you must spoonfeed the very young, do so; but when they have shown a taste for the subject and attained the standard necessary for passing honours examinations, let them then be introduced to Euclid in his original form as an antidote to the more or less feeble echoes of him that are to be found in the ordinary school textbooks of "Geometry"."

1.4 There are flows in the Elements of Euclid. Numerous mathematicians have endeavoured to improve the construction for the sake of rigor. The "Grundlagen der Geometrie" by David Hilbert [3] are considered to be a great achievement in this direction.

The axiomatic construction of the 'Grundlagen' comprises more than an increased rigor. If we compare them to the "Vorlesungen über neuere Geometrie" [4] by Moritz Pasch, which constitute another attempt to be more strictly logical, we shall notice the difference. This work is still based on concepts arising from some observations of nature and they preserve a certain meaning connected with their origin.

In Hilbert's foundations the natural umbilical cord has been cut. What remains is: "We imagine three different systems of things that we name points, straight lines and planes".

As H. Freudenthal underlines [5] in axiomatizing the ontological bonds have been cut. In order to increase the rigor from a logical point of view we come to lose the semantic meaning and we give rise to possible interpretations.
At school level the work of Hilbert has been used in the

rational geometry of G.B. Hallsted [6]. Another textbook representative of the Euclidean contents is among others the publication entitled "Elementi di Geometria" [7] by F. Enriques who has edited the original Euclid with numerous comments [8].

Despite various efforts interest for the Euclidean way of presenting geometry was declining.

1.5 In Euclid we find the following axiom. Magnitudes which coincide with one another, i.e. which exactly fill the same space, are equal to one another.

Is it a mere matter of identity of the indiscernables? It clearly concerns the coincidence by congruent mapping, as it is used in the so-called case of equality of triangles.

The proofs of those cases describe, indeed, thought or mental experiments: triangles are displaced as if they were concrete, solid objects. This is intensified, if, to make things more intuitive, pupils operate with card-board triangles. From this it is not clear whether a triangle is an individual set of points fixed in the plane, or an equivalence class of congruent triangles, or a representative of such a class. This appears in problems like the following: construct a triangle, given its three sides. If you regard the triangle and the sides as sets of points there is no problem since the triangle is already given by its sides. We know it is not the meaning of the question: the date are three sements given somewhere as representatives of the classes of segments of the same length. The two points of view are distinguished when it is asked to construct a figure in position or only in magnitude. It makes a difference for the number of solutions. In traditional Euclidean geometry the rare use of displacements or of overturns is always restricted to figures, and not extended to the plane or space. There are classes of equivalence (congruent or similar figures), but no groups of transformations that need to operate on the same set of points.

2. *Algebraisation of Geometry*

2.1 Of the thirteen books of the Elements of Euclid the fifth is devoted to magnitudes and their ratios. Supplementary to sum and difference of magnitudes the equality and inequality of their ratios is introduced and the properties of proportions are proved [8]. In his 'Géométrie' [9] Descartes has explained how to construct the product and the quotient of lengths by using a proportion obtained by two parallels cutting the side of an angle. The well-known construction of a square root with line and circle can also be ascribed to him. By an example he has further demonstrated how it is possible to obtain the equation of a hyperbola the points of which are referred to a straight line chosen at will. Descartes operated with arithmetic values and his computation leans on a figure in which all the numbers are positive. By virtue of algebra the equation holds also for negative numbers.

In the further development of analytic geometry two axes were used instead of one axis and distances from it, as Descartes did. Moreover, due attention was paid to the signs of algebraic measures of oriented segments, as they occurred by the use of geometric vectors.

Although it may be a powerful tool if it is skilfully handled analytic geometry has a congenital defect: the use of coordinate axes that appear as parasite elements in geometry.

2.2 The situation was improved by the introduction of geometric vectors, either free or bound to a point. By the help of these vectors computations are simpler and more intrinsic as compared to the analytic method for which vector geometry can be a very good foundation. Moreover, the geometric scalar product constitutes an algorithmic device to demonstrate metric properties.
General vector spaces derived by abstraction from the familiar geometric vector space proves to be a means of bringing language and extended intuition of geometry into topics that refer to functional analysis.

2.3 From the very moment that geometry has made its valuable present to mathematics, and especially to algebra, it begins to be considered as a subject-matter of minor value, a mere province of linear algebra.

'A bas Euclide' was Dieudonné's cry of banishment against the old gospel of mathematics.

What is the meaning of this anathema? Does it express the repudiation of the Bourbaki of Greek mathematics? Does it mean disregard to the first axiomatic presentation or criticism of the way of presenting Euclid's ideas in schoolbooks? The abstract jump made by Hilbert in the 'Grundlagen' that gives a new and broader sense to the axiomatic method is certainly not concerned, but perhaps the mathematicians' lack of interest in an elementary topic?
Fortunately, Prof. J. Dieudonné expresses his thoughts as follows [1o]:
"The objective is not to eliminate Euclidean geometry. What should,however, be abolished is the obsolete way of teaching it which has been traditional since Euclid. Thus it is possible to clarify the significance of geometry and enhance its central position in mathematics and its universal power."

Prof. J. Dieudonné aims at placing geometry in the realm of linear algebra, which shows his book entitled: 'Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire' [11]. This mathematical piece of work is not intended for beginners, but at best for grammarschool students of the last two or three grades, as the author points out in his preface. Whatever it may be, the book is representative of a certain view that is mathematically interesting for a mature reader. For a critical comment see H. Freudenthal [12].

2.4 Another way of algebraising geometry consists in reversing the historical order that proceeds from geometry to analytic geometry, as it is done by H. Levi in his 'Foundations of Geometry and Trigonometry' [13] and in 'Topics in Geometry' [14]. In the first book, from the start, a line is defined with its real coordinate systems.

"Let L be a set and let C be a non-empty set of 1-1 correspondences between L and the set of all real numbers. We shall say that L is a line, that its members are points and that the given 1-1 correspondences are coordinate systems of L, if and only if both of the following axioms hold.

Axiom I. If A and B are distinct members of L there is one and only one member of C such that $f(A) = 0$ and $f(B) = 1$

Axiom II. If f and g are any two members of C then there is a linear expression $ax+b$ such that for each X of L, $g(X) = af(X)+b$.

Affinities are defined as follows

"Let L and L' be any lines (not necessarily distinct). Let f be a 1-1 correspondence from the points of L to the points of L'. We say that f is an affinity if and only if there is a coordinate system of L and a coordinate system of L', such that in these systems the coordinate of each point X of L is the same as the coordinate of its image $f(X)$ on L'."

After some axioms the final axiom on parallel projections and affinities is given:

"Axiom P III. If ℓ and m are lines of the plane, then any parallel projection from ℓ to m is an affinity from ℓ to m."

Subsequently a two-dimensional coordinate is introduced and affine geometry presented.
The further development includes metric and trigonometry.

A corresponding presentation of affine lines and parallel projections has been dealt with in French schools in the fourth grade (13-14 year-old pupils). Of course it has to be based on drawing exercises with graduations and parallel projections. This approach has raised controversies among mathematicians.

2.5 Another foundation of elementary geometry (affine and metric) has been proposed by G. Choquet in "L'Enseignement de la Géométrie" [15]. The construction is more geometric in character since incidence and parallel axioms are used and the real numbers are considered to be given. It leads to the vector space of translations of the plane. Perpendicular lines and orthogonal projections serve to present scalar products and metric structures. The book contains plenty of considerations of great educational interest, for example on angles that are identified with rotations with the same point as centre.

The book entitled "Géométrie plane" which was written by

André Delessert [16] and which is used at school level has been influenced by Gustave Choquet. The distance of two points is introduced very early. The isometries as transformations presenting the distances and the reflections play a leading role. The most important theorems are proved on an axiomatic basis; others are left as exercises.
There are no group considerations. The text is enriched by explanatory remarks and by dialogues between the author and Zosime, a young and critical disciple.
See also: Elementary geometry from an advanced standpoint [17].

2.6 Analytic geometry, geometry treated by means of a vector space, geometry based on distance, they all need real numbers. How can we introduce these numbers?

That problem has been formulated by Emil Artin and solved by him in his "Geometric Algebra" [18].
'Given a plane geometry whose objects are the elements of two sets, the set of points and the set of lines; assume that certain axioms of geometric nature are true. Is it possible to find a field k such that the points of our geometry can be discribed by coordinates from k and the lines by linear equations?'

We have the experience that the ideas of Artin are adaptable to an elementary level [19].
In "La Géométrie affine et ses Structures" [2o] André Deprit states: "Nobody would be allowed to teach geometry unless he has studies the work of E. Artin."

3. *Transformation Geometry*

3.1 To look upon Euclidean geometry as the geometry of the properties of figures that are preserved by the similarities has clearly been introduced by F. Klein in his epoch-making 'Erlanger Programm'. About the same time C. Méray wrote "Nouveaux Elêments de Gêométrie" in which displacements in space play a leading role [21]. The influence of transformation groups as a means of organizing geometry did not make itself felt very early at school level. Ideas take their time to push their way. It is not, however, by chance that all figures that are studies in elementary geometry have something to do with transformations and transformation groups of the plane and the space: parallel lines and planes with translations, circles with rotations, perpendicular with reflections. The main properties of a perpendicular bisector of a segment, of an angle bisector, of a rectangle, a rhombus, a square and a regular polygon are obtained by symmetries and rotations that will certainly give a deeper insight than the traditional use of triangles congruence. Even the old-fashioned cases of equality may be re-considered in a way that sets forth their meaning: since an isometry is determined by the vertices of a triangle and their respective images it is useful to look for sufficient conditions for the congruence of triangles. The property of the inscribed angles of a circle is very closely related to the fact that, when two symmetries with intersecting axes are composed the sensed angle of the thus obtained rotation is the double of each of the sensed angles of the axes of the symmetries. Given points a and b the locus of the points the distances of which to a and b have a given ratio k, positive and non-zero, is the Appolonius circle that can be regarded as the set of the centres of the direct similarities of the ratio k that map b on a . It is more clever and elegant to establish the Eulers's circle of a triangle by using homotheties and symmetries than by using traditional congruence procedures. In elementary geometry it is efficient to work with transformations and transformation groups. Textbooks with exercises on this topic have been written and may complement traditional courses. See for instance I.M. Yaglom's "Geometric Transformations" [22] and the "Konstruktive Abbildungsgeometrie" by Max Jeger [23] or "Le Problême de Géomêtrie" by R. Oriol [24].

3.2 At a higher level H.W. Guggenheimer in "Plane geometry and its groups" [25] which is based on the generation of isometries by reflections gives the main theorems of Euclidean and nôn-Euclidean geometries, as well as their axiomatics. The notation of group multiplication gives a consistent formalism and the real numbers are not used.

This work is connected with F. Bachmann's "Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff" [26]. In Euclidean geometry (and also in non-Euclidean geometry) the point a and the line L correspond one by one to the central symmetry τ_α and to the symmetry τ_L with L as an axis.

$$a \longleftrightarrow \tau_\alpha \qquad L \longleftrightarrow \tau_L \text{ for any } a \text{ and } L.$$

Geometric conditions like the incidence $a \in L$ and the perpendicularity $L \perp K$ are eqivalent to expressing involutions, namely

$$a \in L \iff \tau_\alpha \tau_L = \tau_L \tau_\alpha$$
$$L \perp K \iff \tau_K \tau_L = \tau_L \tau_K \wedge K \neq L.$$

So it is possible to consider the symmetries themselves, instead of points and lines, as objects of a geometry of symmetries. In it, by the group notations we can compute with those 'points' and 'lines'.

3.3 It is common use in introduction to groups to consider the isometries preserving geometric figures as a square, a rectangle, a regular polygon, a circle etc. In this way we

clearly get groups of transformations.
This is a general procedure to obtain groups and a reason of their role in mathematics. Prof. Hans Freudenthal has explained this wonderfully in his paper which he read at the Second International Congress on Mathematical Education in Exeter. He comes back to this question in "Mathematics as an educational Task" [5]: "Groups are important because the automorphisms of any structure whatsoever form a group, the automorphism group of that structure, and because so much can be learned from the automorphisms about the structure itself. This is the principle of groups, and it is this principle that makes groups so universally usefull in all mathematics".We may add that to consider transformation groups is not restrictive for the mere reason that a group $(G,*)$ is isomorphic to a permutations group of G, namely the permutations group obtained by multiplying (to the right or to the left) all elements of G by each element a of G, respectively

$$G \to G \quad : x \to x * a.$$

4. *The case of geometry*

4.1 Today traditional geometry is questioned as it has never been before. What will be its fate? Some mathematicians think that geometry is doomed to death. Others believe that it might survive under the uniform of linear algebra to which it gives its pictures and its vocabulary. Some loyal troops, more and more reduced in number, are still fighting for the honour of the flag of tradition. There is a case of geometry. As we have seen leading mathematicians have given evidence with regard to this case and made contributions to it [37],[38].Under this heading in [5]

H. Freudenthal has written a complete and meaningful chapter where he expresses both his educational and mathematical points of view and answers criticisms of supporters of linear algebra.
The defence of geometry has been undertaken with energy by Prof. R. Thom according to whom the general trend to bring the so-called modern maths in school is an educational error [28] , [29] . To him "The real problem which confronts mathematics teaching is not that of rigour, but the problem of the development of "meaning", of the "existence" of mathematical objects." He adds: "One has not, I believe, extracted from Hilbert's axiomatics the true lesson to be found there, it is this: one accedes to absolute rigour only by eliminating meaning; absolute rigour is only possible in, and by, such destitution of meaning. But if one must choose between rigour and meaning, I shall unhesitatingly choose the latter. It is this choice one has always made in mathematics, where one works almost always in a semiformalised situation, with a metalanguage which is ordinary speech, not formalised. And the whole profession is happy with this bastard situation and does not ask for anything better."

Making a comparison of ordinary language with those of Euclidean geometry and (formal) algebra from three points of view:

(1) 'The 'meaning' of an element: can one formalise the equivalence class (in extension) defined by an element of the language?

(2) Is this meaning intuitively clear?

(3) The richness (or poverty) of the syntax.'

R. Thom comes to the following conclusion [29]

"Euclidean geometry is a natural (and perhaps irreplaceable) intermediate stage between common language and algebraic language. Geometry allows a psychological widening of the syntax, whilst still retaining the meaning always given by spatial intuition. At the same time, the meaning of an element can already by given by a formal definition. The move - in line with modernist dogma - to eliminate elementary geometry to make room for calculus and linear algebra, has little to recommend it psychologically, because the algebraic objects (the symbols) are too poor semantically to permit themselves to be understood directly as it is the case with a spatial figure."

4.2 The graphic means of communication in mathematics is, outside the vernacular language of ordinary writing, the various drawings and diagramms and the letters and other tokens as symbols.
The historical development of mathematics shows the role of both the geometric diagrams and of the algebraic tokens. No doubt, mathematics would not have attained today's achievement without their support.

The psychological analysis of geometric figures has been undertaken by E. Fischbein [3o]. The author comes to the conclusion that: "The geometric figures represent modalities to reflect reality that can not be brought back neither to proper concepts nor to mere representations. Those entities have all the properties of a concept: they are abstractions reflecting essential and general features of a class of objects under a form that is both idealized, pure and invariant, but, at the same time, they belong to the domain of intuitive as spatial images characterized by shape and dimensions."

"The geometer having to solve a problem operates neither with the aid of pure concepts expressed by verbal or other symbols, nor with the aid of material properties of the object that is drawn . He replaces, rotates, superposes, reverses and cuts pure spatial images expressed by a material shape."

Such mental formations are called figurative concepts by E. Fischbein. He has followed the constitution of those figurative concepts in the mental development of the child. At the first stage a geometric figure is a material object. Secondly the geometry figure is a drawing as a result of the actions of the subject. Finally, the geometric entities are abstractions, the material model and the drawing are nothing but modalities of putting these abstractions in concrete form. "The different degrees of assimilation of figurative concepts depend but partially of the age of the child. The level attained is a direct function of the teaching methods of geometry."
The author proposes the teaching of geometry by successive steps, each stage corresponding to a different view-point in the way to consider the subject-matter of geometry.

4.3 The problem to be solved at primary and secondary school, not speak of infant school, consists in developing an active and meaningsful learning of mathematics in which algebra and geometry are growing in a fruitful symbiosis.
The traditional Euclidean presentation has to give way to a unified treatment in which intuition, logic, mathematics come into play for a better understanding and deeper insight that lead to a reasonable mastery of the subject-matter with regard to methods, content and organization.

II. *A comprehensive teaching*

1. *Dialectic of geometry*

1.1 Geometry originates in constructions and measurements of practical use. It has still an experimental department in the physical sense and can be viewed as a conquest of space [31]. As a rational adventure geometry simulates first some aspects of reality by mental images and by concepts among which figurative concepts have a sui generis role that is irreplaceable. The action on concrete geometric objects and models, among which drawing has a priority, leads to thought experiments that mime our geometrical manoeuvres in a schematic and idealized way.

The object and relations thus obtained by geometrization are able to live their own lives in the abstract mathematical world and to give birth to pure theoretical problems and properties. Those intuitive, experimental and theoretical aspects of geometry have to be present in teaching practice. This dialectical conception has been developed by Ferdinand Gonseth in "Les Mathématiques et la Réalité" and "La Géométrie et le Problème de l'Espace" [32], [33]. The explanations given in those works enlighten how the geometrical is abstracted from the intuitive views and how the geometrical loses its meaning when we pass to the logical. This is clear when we consider axiomatization in the Euclidean sense as a first stage that gives a basis for a second one in the logical sense of Hilbert, where the "ontological bonds have been cut" as H. Freudenthal says. Those bonds root the meaning of Geometry. The growth and the change of geometry through its history display also a dialectical interaction between the figurative aspects, the algebraization and the transformations of geometric entities and structures. To grasp the connections between the multiple faces of geometry gives a better understanding of and deepens the insight into geometry as a privileged part of the ever growing mathematical patrimony of mankind.

2. *Sets, relations and geometry*

2.1 Geometry is a discipline in which, at an early age, sets and relations can be used and exercised as basic organizing notions. Diagrams of set and graphs of relations are figurative media proper to represent the variety of sets and relations in a uniform way. Thus they show very early the unifying power of those notions. The support by diagrams and graphs in order to generate a more vivid and schematic understanding can be increased by colours as they are succesfully used by G. Papy in his books [34]. Although the approach of diagrams and graphs can be made natural, their valuable use needs to see clearly the graphical conventions involved. See, for instance, their introduction in 'Servais Mathématique 1' [19].

2.2 The intensive propaganda for Venn's diagrams brings the layman to consider them as the top of modern maths and leads to educational misuses that have been criticized by H. Freudenthal [5]. Some mathematicians speak of the introduction of the set theory in school. The truth is more modest: pupils learn how to make a meaningful use of sets notions, vocabulary and symbolism at a naive level.

3. *Logic and axiomatic*

3.1 For a long time traditional geometry has been considered to be the best discipline for logical practice. The results of school training in geometry do not seem to have improved the logical competence of the pupils very much, as it has been observed by Mrs. A. Krygowska. This may be due to the fact that in geometry logical reasoning is mixed with some graphical concrete evidence and expressed in the vernacular language. The introduction of basic logical connectives and quantifiers may be regarded as an attempt to improve the situation. This elementary formalism might be helpful in a way, the practice of logical inferences with the implications, the equivalences and the quantifiers being useful above all. Nevertheless, the expression of the quantifiers in ordinary language has to be made familiar. For instance, in the expression of the common incidence axioms of geometry the quantifiers involved have to be underlined and explained in a simple way.

3.2. Do we have to present geometry in an axiomatic setting in the lower classes of secondary schools? It is a most controversial question.

Generally, Mathematicians will answer in the negative. Here, as it has been the case with regard to sets, where only main notions are used and not set theory, the point of view has to be clarified and things have to be kept at their modest and realistic level. If the axiomatic presentation at the threshold of an important theory is to express an impressive array of axioms, as Euclid did in his "Elements" and J. Dieudonné does in [11], the answer is: by no means at a low level. But it will do no harm if, starting from drawings with a ruler and other physical observations and experiments including paper folding for instance, a teacher makes his pupils formulate the incidence axioms with a reasonable understanding of the free choice of two points and the fact that there is one and only one line that contains them both. Here one may note that the language of sets is to be prefered to the approach where lines are not regarded as sets of points but as a sort of entities or supports on which points may be situated. At the start it is neither helpful nor needed to say that a plane and a line are infinite sets.

3.3 Some teachers insist on the importance of local organization [5]. Of course for a beginner who progresses step by step in geometry the organization is always local! It cannot be otherwise. It is the teacher who knows that what is done is far-reaching. Even if a study of geometry starts with other topics the person who plans this study knows that his way brings knowledge that belongs to a domain of geometry. The originality of the approach does not change the directive intention.

3.4 There are authors who say they do not base their work on a fully elaborated axiomatic foundation [23]. But they start with an introduction like this:
"The reflection possesses the following evident properties upon which we may build further investigations." Then a list is given with four fundamental properties.
In this context those are axioms because they are taken as granted with not other demonstration. When in order to prove some statement we deduce it from propositions we agree upon and that have not been demonstrated those propositions are axioms of this system.

3.5 A useful procedure to show to beginners the logical nature of elementary demonstrations in incidence geometry consists in representing a line not only by the drawing of the figure but also concurrently by a Venn's diagram [33], [19]. It then appears that the proof is also valid if we interpret a line as a pair of points. Such a discovery is strange at the first glance and it shows that a "line" can be interpreted otherwise than the ordinary mental image. It is the first example of cutting the ontological bonds and thus opening the range for interpretations. For instance, on a sheet of paper, a line may be realised as a segment drawn from one edge to another.
The new definition of parallel lines considers both equal

lines and disjunct ones (in the plane). From this it is clear that when considering lines as tranverse segments on a sheet of paper, through a point outside a given line there are numerous lines that do not cut the first [19,1].

To obtain only one parallel pupils imagine simply that the sheet and the lines have been extended as far as it is needed.

3.6 The finite plane with only three, four, five, six points gives a great variety of situations when we ask for parallel lines in the case when a line is merely a pair of points. With four points we have a parallelogram with diagonals that are parallel. The example of two parallels to a given line through an exterior point in the five points plane is also strange. The uniqueness of the parallel can therefore not be derived from the incidence properties. A tiny touch of finite geometry can be rewarding. For information on finite geometrys see the recent book of G. Pickert [34].

4. *Parallel projections*

4.1 From the parallel axiom we may prove that the set of lines parallel to a given line is a partition of the plane called direction of the line. The axiom of the parallel is equivalent to:
Any direction of a line is a partition of the plane.

Also, the directions of lines in a plane is a partition of the set $\mathcal{D}$ of lines because parallelism is an equivalence. Parallel projection of a plane onto a line is a mapping. By restriction we obtain a mapping of a line onto a line. So all lines are equipotent because the mapping is bijective. Parallel projection of a line onto a line preserves linear order.

4.2 To introduce the linear order on a line, some authors first speak about orders in general, then about strict order (that is not an order) and of total order. At last they come to the special order on a line that is preserved by parallel projection. To distinguish them from other orders that may be given on a line they call them natural order [33,2].
To avoid all those general statements we prefer to simply speak of senses on a line. Starting from a drawing in which some points a,b,c,d are marked on a line pupils are asked to indicate with arrows the ordered pairs of points that are in the some sense as (a,b) then as (b,a). Each sense is represented by arrows of a same colour respectively. The analysis of the picture leads to the following axiom:
The couples of distinct points of any line are partitioned into two opposite senses that are reciprocal relations. Both senses are transitive. By use of the senses as sets of couples of distinct points it is easy to find simple definitions of a half line (ray), of a segment as intersection of half lines, of a sensed line as the couple $(A,<)$ of a line A and a sense $<$ on it.

From the observation of parallel projection in drawing we come to:
Axiom: In all parallel projections of a line A onto a line B, a sense of A is mapped onto a sense of B.
It may be rephrased in:
Any parallel projection of a sensed line onto a sensed line is increasing or decreasing.

The preservation of senses in parallel projections of a line onto a line entails preservation of half lines, segments and intervals.

Given two parallel lines A and B, let us map A onto B by several parallel projections and notice how a given sense on A is mapped on B. Our discovery leads to

Axiom: All the parallel projections of a sensed line onto a parallel sensed line are increasing or all those projections are decreasing. With this property we can prove:

Any line contains an infinite part.
On all sensed lines, each point is preceded (followed) by others. All segments with distinct end points are equipotent and infinite. So we see that it is not necessary to speak before of lines as infinite sets. From simple properties of senses on lines and parallel projections it is possible to proveprecise propositions.
Parallel projections give also a very convenient means to speak of half planes and of those of angular sectors, convex or non convex.

5. *Translations*

Parallel projections may be used to define translations of the plane. Given points a and b. Let us project them in any direction on c,d of a line parallel to $a\,b$. Let us project c,d in any direction on e,f of a line parallel to cd. Proceeding in that way we obtain couples of points

$$(a,b),\ (c,d),\ (e,f),\ldots$$

that are constructed by parallel projection of a line onto a parallel line or by composition of such projections. By definition, these couples are said to be equipollent.

$$(a,b) \uparrow (e,d),\ (a,b) \uparrow (e,f),\ (c,d) \uparrow (e,f) \ldots$$

It is evident that equipollence is an equivalence.

The way we introduce equipollence by parallel projections of lines onto parallel lines is more flexible than to say equipollent couples are linked with parallelograms [34,1].

The use of a mapping instead of a figure makes the whole difference because with parallel projections we can treat all the cases that need "degenerated" parallelograms: $a = b$, $c = d$; $a = c$, $b = d$; $a = b = c = d$.

When $(a,b) \uparrow (c,d)$ is obtained by one parallel projection from $a\ b$ onto $c\ d$, it is clear that we have also

$$(a,c) \uparrow (b,d)$$

We postulate this crossing of equipollence in all cases as the only axiom. It enables to note that the evident solution of the problem

'Given points a,b,c construct d such as

$$(a,b) \uparrow (c,d)$$

is unique.

The theorem: Parallel projections preserve equipollence, does not require any other means than the definition of equipollence and crossing.

A translation is the set of all the couples of points equipollent to a given couple. It is a permutation of the plane.

Images of figures in a translation are recognized and the group of translations of the plane is presented in vector

notation.
In classical geometry vectors come so late and translations only operate on figures instead of the whole plane. So you have no group.
The part of geometry we have seen so far is presented in the first class (12 - 13) together with integers. At this level it is not spoken of groups, and the drawing with the traslator is very familiar.

6. *Dilatations*

6.1 Translations of the plane map a line onto a parallel line. In the second class we broaden the subject by the study of dilatations that are the permutations of the plane mapping any line on a parallel line.
As the composed of permutations is a permutation, and as parallelism is an equivalence the set of dilatations of the plane is a group for composition. The translation constitutes an invariant subgroup of it.
If in a given dilatation we know a pair of points and their images we can construct the image of any given point in this dilatation.
Drawings bring to admit the existence axiom:
Given two points a,b and two points a', b' such as $ab||a'b'$, there is a dilatation of the plane mapping a on a' and b on b'. This dilatation is unique by construction. If a dilatation has two fixed points it is the identity mapping.

6.2 In a dilatation a line is invariant if and only if it passes through a point and its image. Such lines are called traces of the dilatations. In the identity mapping of the plane all lines are traces. When a dilatation is not identity all traces of it are either parallel or concurrent and the dilatation is a translation or a homothety respectively. Central symmetry is an involutive dilatation different from the identity.

7. *Groups*

7.1 Dilatations having a given trace or a given centre constitute subgroups of the group of dilatations.
Given a point o in the plane Π we may introduce the bijection of the set of vectors V onto Π

$$V \to \Pi : \vec{v} \to a \text{ such as } \vec{v} = \vec{oa}$$

Transferring the addition of vectors we obtained the addition of points, and the group $(\Pi,+)$ is isomorphic to $(V,+)$.

By restriction of the addition of points to a line $\mathcal{D}_o$ through o, we have an additive group that can be ordered $(\mathcal{D}_o, +, \leq)$. From that we obtain by bijection of $\mathcal{D}_o$ on the set $\mathbb{R}$ of real numbers the group $(\mathbb{R},+,\leq)$, as we shall see later.
Of course we also have the symmetric group of permutations of finite sets, for instance $(S_3, \circ)$ (for which we need not to consider a triangle). The additive and multiplication groups of $\mathbb{N}_o$ mod n, the group of $\perp$ and $||$ with composition of relations are also at our disposal.

7.2 At present we may give some general notions on groups (neutral element, symmetrical of an element, idempotent) and consider the most elementary computations [19,2].
For all $a,b \in G$, we have in group $(G,*)$

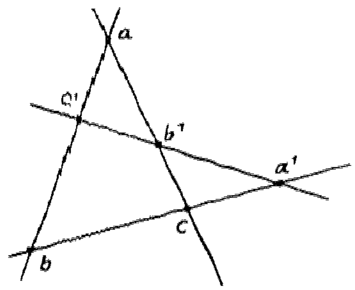
$$a * x = b \Leftrightarrow x = a^{-1} * b, \quad (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

In geometry, instead of considering a group in itself it is more convenient to work with the group in proofs. For instance, given a triangle abc cut by a transversal line in c_1, a_1, b_1. Let us consider the following homotheties:

h_1 such as $h_1(a)=b$, $h_1(c_1)= c_1$

h_2 such as $h_2(b)=c$, $h_2(a_1)= a_1$

h_3 such as $h_3(c)=a$, $h_3(b_1)= bb_1$

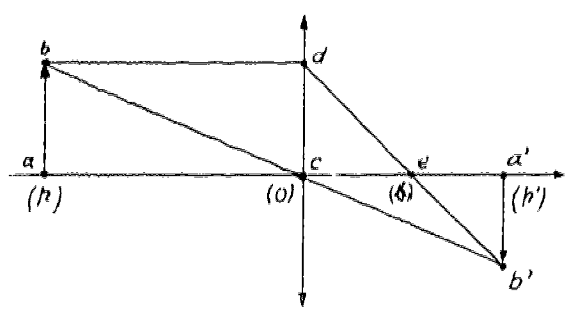


The product $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ is a dilatation with a as a fixed point and the transversal as a trace. As $a \notin c_1 b_1$, this dilatation is the identity.

Hence the product of the ratios of homotheties is equal to 1 (Menelaos).

To use geometry in applications outside mathematics is very important [19,3].

If we consider the geometrical demonstration of the formula of thin lenses, that is given in physics courses, we shall state that it is not sufficient. The formula is algebraic and the proof using similar triangles is only valid for the arithmetic values. The classical figure shows that the homothety with centre c (optic centre) mapping a, b, on a', b' is the composed of the translation $\overrightarrow{bd}$ by the homothety with centre e (image focus) mapping c, d on a', b'. Therefore



$$\frac{\overrightarrow{ca'}}{\overrightarrow{ca}} = \frac{\overrightarrow{ea'}}{\overrightarrow{ec}} \iff \frac{p'}{p} = \frac{p'-f}{o-f}$$

$$\iff -pf' = pp' - pf$$

Hence $$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

8. *Numbers and geometry*

8.1 The real numbers that we used above as abscissas of points are presented as such. The natural numbers are considered both from the cardinal and the ordinal points of view.
With the use of parallel projections we construct successively the points c, d, e,...
such as

$$(ab) \uparrow (bc) \uparrow (cd) \uparrow (de)\ldots$$

To points a,b,c,d,e... we give as images natural numbers o,1,2,3,4,...

The points b',e',d' such as

... $(c'b') \uparrow (b'a) \uparrow (ab)$ have no numbers as images. We give them new numbers noted $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$... and obtain a graduation with integers.
To add the integers we glide a second graduation as a slide along the first. That is we translate the graduation.
Multiplication is connected with a change of scale leaving the origin as a fixed point and bringing the unit point on the point corresponding to the multiplicator.
In each case children of the first class (12 years) notice the results of the operation and find out the rules.

8.2 With subgraduations that we can construct considering fractions as operators on points and on vectors, we define the equality of fractions representing the rational numbers. Translation of the division points gives addition of numbers, homotheties with the origin as centre and rational ratios are composed to define the product of those numbers both positive and negative.
All that can be brought on the basis of dilatations, with

no other axiom.
For the real numbers we use decimal (binary) expressions to note them. Two new axioms, i.e. the Archimedes axiom and the axiom of decimal (binary) imbedded segments are required. Their introduction can be made as natural as possible.

Equality of real numbers is brought back to the equality of the points that have them as abscissas.
This accounts for the mysterious equality

$$\underbrace{\bar{5},3\,9\,9\,9\,9\ldots}_{\text{all } 9} = \underbrace{\bar{5},4\,0\,0\,0\,0\ldots}_{\text{all } 0}$$

8.3 With the Thales theorem a parallel projection of a line onto a line transforms a graduation of the first into a graduation of the second corresponding points having the same abscissa. Translations and homotheties serve to define addition and multiplication of real numbers. By using two succesive parallel projections of lines onto lines any graduation can be transformed in another while the abscissas of the corresponding points are preserved. Thus the definition of the equality, addition and multiplication of real numbers are independent of the graduation that is used to define them. Moreover, as homotheties map a graduation on a graduation with preservation of the abscissas the multiplication of real numbers can be proved to be commutative. Consideration of senses on the lines and corresponding order of the numbers serve to prove the order properties of addition and multiplication of real numbers.

8.5 Referring to the role of numbers in geometry in the preface of his book entitled "L'Enseignement de la Géomêtrie" [15] G. Choquet says: "For a long time the Greeks have only known the rational numbers and even after their memorable discovery of the irrationality of $\sqrt{2}$ they have not been able to disengage the general notion of the number. The continuators of the Euclidean work have tried to perfect his work by a "segment-calculation" that allows to find not without some pains the field structure of the set of numbers from plane geometry. We must by no means fall into this error."

What has been done above along these lines due to E. Artin [18] is not a calculation of segments, but, indeed, a calculation of numbers and vectors by means of the geometrical group of dilatations that are the permutations of the plane mapping a line on a parallel line.

This geometrical approach is based on simple axioms the meaning of which is directly grasped from the experience of drawing with parallel lines.

8.6 The geometrical setting of the field of real numbers is not restrictive. (See Bachman [26], p. 137)

Given a field K with zero element 0
For any a of K

$$x' = x + a \qquad (1)$$

defines a permutation of K
The mappings (1) constitute on K a simply transitive, commutative group T_K (group of translations of K).
For each $a \neq 0$ of K

$$x' = x\,a \qquad (2)$$

defines a permutation of K. Each transformation (2) has 0 as fixed element. The transformations (2) constitute on $K \setminus \{0\}$ a simply transitive, commutative group D_K (group of dilatations of K).

By virtue of the distributive law

$$(a + b)c = a\,c + b\,c \quad (3)$$

the transformations of all elements of T_K by an element of D_K is an automorphism of T_K.'
The reciprocal of this can also be proved [26].
When K is the field of complex numbers, T_K is the simply transitive, commutative group of translations of the complex plane, and D_K is the group of the direct similitudes of the complex plane with centre o that is a fixed element of all these similitudes. This group is simply transitive on $K\setminus\{o\}$ and commutative.
If we go the other way round, from a pedagogical point of view it is not easy to present the field of real numbers separately at an elementary level if we use decimal representations alone. Moreover, when numbers are dropped into geometry, it is artificial for beginners [13].

9. *Perpendicularity and isometries*

9.1 The consideration of perpendicular lines and directions is introduced on the basis of paper folding and drawing with set squares, not to speak of vertical and horizontal lines and of reflection in a plane mirror. Observations and experiments lead, by mathematization, to the following axioms:

P_1 In the set of directions of the plane exists one symmetrical relation called perpendicularity.

P_2 Each direction has a unique perpendicular direction (Perpendicularity is thus a permutation of the set of directions).

P_3 Each direction is distinct from its perpendicular direction (Perpendicularity is thus antireflexive)

They may be rephrased in a compact proposition:
In the set of directions there exists a permutation, perpendicularity, that is symmetrical and antireflexive.

Properties of perpendicular lines are simple consequences.

9.2 Paper folding, images in a mirror lead to a definition of a reflection that is a symmetrical transformation of the plane, also named axial symmetry.
Images of figures in a reflection with preservation of parallelism and senses of lines, axial symmetry of figures and of pictures and photos, perpendicular bisector of a segment, bisector of an angle, are easy topics. So is the axiom of the bisector of an angle:
Given an angle, there is one reflection that maps its sides on each other. The axis of this symmetry is named angle bisector. This leads to a study of the symmetry of figures: isosceles triangle, rectangle, rhombus and square, circle and disk.

9.3 By composition of axial symmetries appears the group of isometries in which we recognize translations and central symmetries as isometries obtained by composition of two reflections the axes of which are parallel or perpendicular respectively.

The precending subject-matter can be treated early in the second class (13 years). At this age the further study of other transformations of the group may seem too abstract. What is prior is the congruence of figures as the equivalence relation given by the group of isometries. The congruence of segments and angles with the transport of them as intuitive notion require the uniqueness properties:

1. Given a segment $[ab]$ and a half-line $[cd$ on it, there is a unique point e such as $[ab] \approx [ce]$.

2. Given an angle $\widehat{aob}$ and a half-line $[pc$, in each closed half-plane with edge pc is contained a unique half-line $[pd$ such as

$$\widehat{aob} \approx \widehat{cpd}$$

Those propositions may be taken as simple axioms or derived from a group axiom expressing so to speak the rigidity of the plane.

Axiom of rigidity
Given a half-line $[ab$, there are only two isometries that map $[ab$ onto itself: the identity mapping and the reflection with line ab as axis.
From this point the basic theorems of triangle congruence can be correctly proved.

9.4 The measure of segments by transport on a graduate half-line offers no difficulty. On the contrary, the measure of angles (as the introduction of the real numbers into geometry) appears to be a true stumbling-block of elementary mathematics.

Starting from familiar behaviour of protractors it is possible to introduce a measure for elementary angles in the Euclidean meaning as union of half-lines with the same origin [17]. For reasons of simplicity we prefer to consider the measure of angular sectors.

Starting from the use of a full-protractor we define [19,2]

A measure of angular sectors is a mapping m of the set A of angular sectors onto the interval of real numbers $[op]$ with $o<p$:

$$A \xrightarrow{m} [op] : x \to m(x)$$

having the following properties:

1. Angular sectors are congruent if and only if they have the same measure.
2. All zero angular sectors have 0 as measure and all full angular sectors have p as measure.
3. If the angular sectors A, B are adjacent the angular sector C equal to their union has a measure equal to the sum of the measures of A and B

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

We admit the following axiom for degree measure.
There is one and only one measure of angular sectors that maps the set $\mathbf{A}$ of angular sectors onto the interval $[0, 360]$ of real numbers.

9.5 This suffices for elementary purposes. In the third class [19,3] (age 14-15) we come back to isometries in order to distinguish displacements and overturns that are composed of an even or an odd number of reflections, respectively. To prove that no displacement is an overturn we merely admit that a reflection is not a displacement. Indeed, given a displacement d let us admit it is also an overturn. It is thus the composed of a displacement d' and a reflection S_A. So

$$\tau_A \circ d' = d \text{ and } \tau_A = d \circ d'^{-1}$$

As $d \circ d'^{-1}$ is a displacement this is absurd.

This example shows how very simple computations with group

notations may be helpful.
It is proved that each displacement is the composed of two reflections and is thus a translation or a rotation. Overturns are either simple reflections or the composed of three reflections. In this case they are obtained by compositions of a reflection and a transation parallel to the axis of reflection. This line is thus invariant by the overturn which is named glide reflection.

9.6 We use isometries to come back again to the measures of segments, angular sectors, angles, areas of polygons. Measures of arcs of a circle and of circular sectors of a disk are obtained by transfer from the measure of angular sectors.

10. *Scalar product*

Just as parallel projections have a constructure building role in affine geometry the orthogonal projections are a working tool in metric geometry. The cosine is introduced as a coefficient of orthogonal projection of an axis on an axis, the two axes have congruent segments for length units. The cosine appears to be determined by the angle of the axis, thus its is called cosine of this angle. Congruent angles have the same cosine.
The scalar product of vectors is close at hand. It presents the means of proving the metric properties of triangles (Pythagoras and others). The metric relations in rectangular triangles are demonstrated by equivalent statements and are therefore necessary and sufficient conditions for a triangle to be rectangular. Perpendicular and oblique segments, intersection of line and circle and of circles are treated with scalar products.

11. *Sensed angles*

11.1 So far we have only considered angles and angular sectors that are sets of points, having delayed the study of sensed angles and not having mentioned them in connection with the scalar product.
Sensed angles are defined as equivalence classes of couples of half-lines with the same origin, towards the displacements. So they are not sets of points. We do not identify them with rotations, but show that in a rotation the sensed angle of a half-line and its image is the same for all half-lines; this is the sensed angle of the rotations. The rotations with a given centre constitute a commutative group. We transform this group structure to define the addition of sensed angles. So the sets of sensed angles is a commutative group for addition. Sensed angles of a couple of lines are also defined. [19,3]

11.2 The pupils are familiar with the right priority imposed in traffic. This priority is preserved if a car moves from a place to another (with no overturn!). So it is invariant by displacement. Such an experimental situation leads to define the orientation in a plane by considering for each sensed line $(A, <)$ one of the half-planes with edge A; two half-planes with a sensed edge have the same orientation if and only if they are equivalent towards the group of displacements. [19,3]
We bring this definition of the orientation of a plane in connection with other ways, such as triplets of non-collinear points, sensed angles etc. The arc capable of a sensed angle is seen together with the angles and angular sectors inscribed in a circle, and the sensed angles of lines.

11.3 Finally, by the aid of a graduated circle in the oriented plane it is explained how real numbers given mod 360 can determine a sensed angle and how the addition of sensed angles corresponds to the addition of their determinations taken mod 360. As you see, we do not speak of measure but of determinations of sensed angles.

12. *The group of similitudes*

12.1 The fundamental group of Euclidean geometry is generated by composition of isometries and homotheties of the plane. The main properties are proved for angles, segments, triangles, areas. Direct and indirect similitudes are distinguished, and their compositions are found to be a homothety with a rotation having the same centre or with a reflection the axis of which is passing through the centre of homothety. The similarity of all convex regular polygons with n vertices is proved and also the similarity of all circles and all disks. That explains why the lengths of circles are proportional to their radii and the areas of disks are proportional to the square of their radii.
The area of a disk, the length of a circle are considered respectively as the least upper bound of the areas of the convex circonscribed polygons and of the lengths of the perimeters of those polygons.
This leads simply to the formulas.

Elementary trigonometry of sine, cosine, tangent is studied in the oriented plane.
All that is covered in three years (12-15)
In the following classes, space geometry is also presented in an unified setting together with vector space, scalar product, transformations, coordinates and matrices. The real numbers field is revised.

III. *Conclusions*

At the end of the preceding sketch of a comprehensive organization of the teaching of geometry, as it may be offered to the (activity of) pupils we would like to make some general remarks.

1. Geometry is ever present with its meaningful concepts loaded with their figurative power.

2. All geometrical properties taken as granted are in such a close connection, both with physical reality and with mental images that simulated it in idealized schemata, that the pupils can grasp them by their immediate observation and experience. Simple axioms are presented step by step in a genetic way.

3. Geometry is not subordinate to vector-spaces theory, but contains a natural approach to these notions. The order of presentation tries to be more mathematical than logical.

4. Sets, relations, mappings, groups, transfers of structures by isomorphisms are the working tools that are always in action in a progressive geometrization.

5. The symbiosis of the real numbers field and its geometrical correspondent is rewarding. Especially the group of dilatations has a constructive role. It is an invariant subgroup of the group of affinities of the plane, but also an invariant subgroup of the group of similarities.
The group of dilatation has the privilege to be so simple that it can be looked at with our bare eyes.

6. If we propose to begin with distance and measurements be-

cause they are the child's foremost experience we should not forget that the experience of light is even more obvious. We live under the rays of the sun and these rays give forever the physical example of parallel projections with the shades.

7. Perpendicularity, too, is deeply rooted in our brain for the sake of our balance and the role of horizontal and vertical lines in the equilibrium of our constructions. The reflection at the surface of quiet water must have been a bewildering experience for our ancestors and a provoking situation that had to be understood in order to conjure its mysterious magic. Measurements came surely later, except for the arithmetic of small numbers. They are embodied in the given unified construction. Geometry is alive! It has provoked reflections, controversies and contributions of leading mathematicians. Among his colleagues R. Thom takes over the defence of geometry. His more convincing arguments, however, are not, perhaps, to be found in his passionate papers, but in his creative work. In "Stabilité structurelle et Morphogénèse, Essai d'une théorie générale de modèles" [36] the reader finds such a deep understanding of the problem of the succession of forms and a wealth of examples. Most of them are taken from biology and from disciplines that, so far, have rebelled against all mathematization.

The work offers "the first systematical attempt to think in geometrical and topological terms, the problem of biological regulation as well as those set by structural stability of any form". The reading requires a broad and multiple knowledge in the domain of mathematics in its modern setting as well as outside mathematics in the fields of contemporary sciences. The effort that is needed to penetrate into this work of quasi-encyclopaedic character will be rewarded by mathematical and philosophical enrichment and joy.

Bibliography

(1) The Elements of Euclid, Edited by Isaac Todhunter, Introduction by Sir Thomas L. Heath (Everyman's Library 891, London, New York 1948, Dent Dutton)

(2) Clairaut A-C., Elèments de Gèomètrie (2 vol., éd Gauthier-Villars, Paris 1920)

(3) Hilbert D., Grundlage der Geometrie (Verlag Teubner, Leipzig und Berlin, 1922)

(4) Pasch M., Vorlesungen über neuere Geometrie (Verlag Teubner, Leipzig, 1882)

(5) Freudenthal H., Mathematics as an Educational Task (Ed. D. Reidel Publishing company, Dordrecht, 1973)

(6) Halsted G.B., Geometrie rationnelle (Trad. française, éd Gauthier-Villars, Paris 1920)

(7) Enriques F.and Amadi O., Elementi di Geoemtrica, Vol 1 and 2 (Ed. Zanichelli, Bologna, 1952)

(8) Enriques F and al., Gli Elementi d'Euclide e la Critica antica e moderna, (4 vol. Ed. Zanichelli, Bologna, 1932)

(9) Descartes R., La Gèomêtrie, (Nouvelle ed. T. Hermann, Paris 1927)

(10) Dieudonné T., Devons-nous enseigner les "mathématiques mondernes" (in Bulletin de l'Association des Professeurs de mathêmatiques de l'Enseignement public, n° 292 Fevrier 1974, p76)

(11) Dieudonné T., Algêbre linéarie et géomêtrie élêmentarie (Ed. Hermann, Paris 1964)

(12) Freudenthal H., Algêbre linéaire et gêomêtrie èlêmentaire by Jean Dieudonné (in American Mathematical Monthly Vol 74, n° 8, June-July, 1967)

(13) Levi Howard, Foundations of Geometry and Trigonometry, Prentice-Hall Inc. New-Jersey 1960

(14) Levi Howard, Topics in Geometry, Prindle Weber and Schmidt Inc. London 1968

(15) Choquet G., L'enseignement de la Géomêtrie (Ed. Hermann, Paris, 1964)

(16) Delessert A., Géométrie plane, (Ed. Spes, Lausanne, 1960)

(17) Moise E., Elemen'ary Geometry from an advanced Standpoint, (Add. ion-Wesley Publ. Comp. London 1964)

(18) Artin E., Geometric algebra Interscience publisher , New-York, London 1961

(19) Servais W. and al., Mathematique 1, 2 and 3 (Ed. Labor Brussels, Nathan Paris 1. 1969; 2. 1971; 3. under publication)

(20) Deprit A.,La Géométrie affine et les structures (Ed. La Procure Bruxelles Namur 1962

(21) Méray C., Nouveaux éléments de Géométrie Ed. P. Jobard, Dijon, 1903

(22) Yaglom I.M., Geometric transformations Ed. Random House and L.W. Senger Company 1962

(23) Jeger M., Konstruktive Abbildungsgeometrie Ed. Räber Verlag, Luzern und Stuttgart 1964

(24) Oriol R., Le problème de géométrie Ed. Dunod, Paris, 1951

(25) Guggenheimer H.W., Plane Geometry and its groups (Holden-Day Inc. London Amsterdam 1967)

(26) Bachmann F., Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer Verlag, Berlin 1959

(27) Freudenthal, H., What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education in Developments in mathematical Education (Ed. Cambridge University Press, 1973)

(28) Thom R., Les mathématiques "modernes": une erreur pédagogique et philosophique? in L'Age de la Science 3, 1970 225-36 (Translated into English: Modern mathematics: an educational and philosophical error? The American Scientist 59, 6, 1971, 695-9)

(29) Thom R., Modern mathematics: does it exist? (In Developments in mathematical Education, Proceeding of the second international congress on mathematical Education, Cambridge university Press 1973)

(30) Fischbein E., Conceptale figurale (Editura Academici Republicii Populare Romine 1963) French Summary on the end of the book

(31) Vessio, P., Zandou-Naisky G., A la econquête de l'Espace, les structures algébriques de la géométrie Euclidienne
(Ed. Office central de Librairie, Paris 1963)

(32) Gonseth G., Les mathématiques et la Réalité Essai sur la méthode axiomatique
(Ed. Felix Alcan, Paris, 1936)

(33) Gonseth F., La géomêtrie et la Probleme de L'Espace
(Ed. du gruffon, Neuchatel, 1945, vol I ... VI)

(34) Papy G. and F., Mathématique moderne [illegible] 1, 2, 3
Ed. Marcel Didier, Bruxelles, Paris 1963, 1965, 1967)

(35) Pickert G.,Einführung in die endliche Geometrie
(Klett Verlag, Stuttgart 1974)

(36) Thom R., Stabilité Structurelle et morphogénèse
(Ed. W.A. Benjamin , Inc Reading, Massachusetts 1970)

(37) Coxeter H.S.M., Introduction to geometry
(John Wiley and Sons, Inc. Publ. 1961.)

(38) Frenkel, J., Geometrie pour l'élève-professeur
(Ed. Hermann, Paris 1973)

PROBLEMORIENTIERTE ZUGÄNGE ZUR GEOMETRIE

R. Stowasser, Bielefeld

"The construction of problem sequences is one of the largest and most urgent task in curriculum development" (Cambridge Conference on School Mathematics 1963)

Der Stoff der Elementargeometrie wird nahezu ausschließlich unter logisch-systematischen Gesichtspunkten für den Unterricht organisiert. Die Folgen sind bekannt: Axiomatisches Ragout, Deduktion von Evidenzen in einem vorfabrizierten undurchschaubaren System, Definition von Trivialitäten, mehr Sprache als zentrale Inhalte, Bereitstellung von Vielerlei ohne erkennbaren Grund.

Die Köpfe werden vollgestopft mit Plunder, wobei die der Geometrie zugrundeliegenden Ideen eher zugeschüttet, denn ans Licht gebracht werden.

Das alles hat trotz Anreicherung der Inhalte und anderer Ausrichtung der Systematik (Abbildungsgeometrie) seine Wurzeln im "euklidischen Geist", jenem methodologischen Selbstverständnis der Mathematik, das sich in Platons Akademie aussprach und in Euklids Werk mustergültigen Ausdruck fand.

Fatal, daß die in Euklids "Elementen" kodifizierte euklidische Geometrie bis ins 19. Jhd. Muster ohnegleichen für Wissenschaftsbereiche blieb. Gewisse grundlegende (möglichst einfache) Sätze, die Erfahrungstatsachen des uns umgebenden Raumes aussprechen, waren darin als Axiome ausgezeichnet. Alle übrigen geometrischen Sätze sollten erst dann als gültig anerkannt werden, wenn für sie ein *Beweis* aus den Axiomen (und bereits bewiesenen) Sätzen vorgebracht werden konnte.

Der Faszination jenes Musterbeispiels hat sich auch der Geometrieunterricht nicht entziehen können. Bis weit ins 19. Jhd. hinein waren Euklids "Elemente" Grundlage eines sterilen Unterrichts.

Bis dahin blieb auch verborgen, daß Euklids Axiomensystem zur Deduktion nicht ausreicht. Nach Vorarbeiten vornehmlich italienischer und deutscher Mathematiker hat dann David Hilbert 1899 eine vollständige Deduktionsbasis für die euklidische Geometrie vorgelegt.

Es gibt mittlerweile sehr verschiedenartige axiomatische Fassungen der euklidischen Geometrie. Wenigstens eines dieser Axiomensysteme sollte der Mathematiklehrer kennen und *zur Abschreckung* gesehen haben, wie daraus in mühevoller Kleinarbeit die einfachsten - zumeist evidenten - geometrischen Sätze deduziert werden.*) Bleibt zumindest als Lernziel für den Lehrer: wissen, daß der Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I nach ganz anderen Gesichtspunkten organisiert werden muß.

Ein solches kompliziertes Axiomensystem als Fertigfabrikat in die Köpfe der Schüler einzupflanzen und darauf ein eigenartiges, für Schüler nicht durchschaubares Rankenwerk von [illegible]ren Sätzen, aber Sätzen ärmlichen geometrischen [illegible] mit Hilfe der Logik aufzurichten, das wagt kein Didaktiker oder Lehrbuchschreiber zu empfehlen. Aber in den gängigen Schulbüchern (z.B. im Schröder-Uchtmann**) ist doch eine starke Orientierung an einer logisch-systematischen Entwicklung der Geometrie immer noch unverkennbar. Vom euklidischen Geist hat man sich noch viel zu wenig emanzipiert. Dort wird beispielsweise die Achsenspiegelung durch eine Liste von 14

---

*) Z.B. K. Borsuk und W. Szmielev: Foundations of Geometrie, Amsterdam 1960

) Schröder-Uchtmann: Einführung in die Mathematik, Geometrie I, Frankfurt 1972 starken Axiomen beschrieben, ein Rattenschwanz von trivialen Sätzen formuliert und unvollständig aus den A iomen deduziert. Nimmt man noch die dort aufgeführten Axiome hinzu, die die Inzidenz-, Ordnungs- und Orthogonalitätsrelation betreffen, so wird klar, daß trotz des großen Aufwands nur axiomatisches Ragout serviert wird, das nicht einmal eine ausreichende axiomatische Basis für das Messen von Winkeln und Flächen hergibt*). (Das Urteil über andere gängige Schulbücher fällt im Grundsatz nicht anders aus. Der Zaubergarten der Geometrie nimmt sich in ihnen wie ein staubumwölkter Exerzierplatz aus (Wagenschein)).)

Kein Wunder, wenn die Schüler lustlos darauf reagieren und dabei eine negative Einstellung zur Mathematik erwerben.

Gegen Antriebsschwäche helfen nur starke Reize.

Im Falle der Geometrie sind zumindest Zugänge von reizvollen Problemen her zu den zentralen Inhalten hilfreich. Besser wäre freilich, die alte Gewohnheit - logisch-systematische Stofforganisation - ganz aufzugeben und das Feld der Geometrie mit Problemkreisen abzudecken. (Einige solche geometrische Problemkreise - extremale Rechtecke, Billard, heronische Meßkunst, Küstenschiffahrt-, Werkzeugprobleme etc. werden in diesem Heft vorgestellt).

Wir plädieren für muntere Einstiege in die Geometrie von reizvollen Problemen her, die möglichst rasch zu hinreichend interessanten (nichtevidenten) Entdeckungen führen. Wir sollten dabei versuchen, Haarspaltereien aus dem Weg zu

*) Analyse des oben genannten Lehrbuches im: Zentralblatt der Didaktik der Mathematik Heft 1/70 von R. Stowasser und K. Breinlinger

**) Uns scheint schon bloßes Schielen der Lehrbuchverfasser auf ein "Hintergrundaxiomensystem" bedenklich, sei es auch nur dazu gedacht, dem Lehrer einen sicheren Leitfaden an die Hand zu geben, der ihm die Orientierung im Irrgarten der Geometrie erleichtert.

gehen, gegen alle Definier- und Formulierwut und gegen jeden Beweisfanatismus die besondere Rolle der Intuition gegenüber der Logik betonen, Wert legen auf die Entwicklung der Phantasie, auf Originalität und *wirkliches Verstehen*. Wir meinen nicht, daß Schüler evidente geometrische Sachverhalte (z. B. den Scheitelwinkelsatz) nach einem Beweis besser verstehen als vorher, halten vom plausiblen Begründen nichtevidenter Sätze mehr als von fragwürdig strengen Beweisen (aus einer unzureichenden axiomatischen Basis), betonten das Auffinden von Argumenten mehr als das Nachvollziehen von Mausefallenbeweisen (Schopenhauer).

Wir sollten uns mit unserem Vorgehen vor allem auch gegen die übliche Bereitstellungsmethode wenden. Konkrete Probleme sollten nicht erst dann behandelt werden, wenn die dazu nötigen Begriffe und Sätze zur Lösung der Probleme schon bereitstehen (Praxis als Anwendung vorrätiger Theorie). Vielmehr soll Theorie rudimentär und ungehobelt aus der Beobachtung und Analyse der zur Lösung anstehenden konkreten Probleme entstehen.

Die Einstiegsprobleme sollten so geartet sein, daß die Schüler möglichst selbst verwandte Probleme formulieren - im einfachsten Falle durch Variation gewisser Elemente -, die zu ihrer Lösung neuer Überlegungen bedürfen. So kann ein nach allen Seiten hin *offener Problemkreis* entstehen. Die geometrischen Sachverhalte erscheinen in einer Ordnung, die der Ausweitung des Problemkreises angepaßt ist. Mit einer logisch-systematischen Ordnung der Geometrie hat das Unternehmen wenig Berührungspunkte.

Seit Euklid nehmen Konstruktionsprobleme im Geometrieunterricht einen ausgezeichneten Platz ein. Euklids axiomatische Fassung der Geometrie kann verstanden werden als großartiger Versuch, die Geometrie zu entwickeln aus den grundlegenden Konstruktionen bei Festschreibung der Werkzeuge: Zirkel und Lineal. Solche Fixierung war Hemmschuh für die Entwicklung der Mathematik noch im späten Mittelalter. Der Geometrieunterricht hat diese euklidische Fessel noch immer nicht abgestreift. Emanzipation von euklidischem Geist muß nicht nur das Korsett der logischen Systematik aufbrechen, sondern auch den *freien* Werkzeuggebrauch proklamieren. Sie erfolgt nahezu zwangsläufig, wenn sich der Geometrieunterricht vornehmlich an Problemen orientiert, für die Lösungsmethoden und Werkzeuge nicht vorher schon bereitgestellt werden, sondern ad hoc erfunden werden müssen. Der Problemlöser will mit seinen Problemen zunächst *irgendwie* fertig werden. Seiner Findigkeit *muß* die Wahl geeigneter Hilfsmittel (Werkzeuge)*) überlassen bleiben. Ihn von vornherein auf klassische Zirkel- Lineal-Konstruktionen zu fixieren, nur solche Lösungen anzuerkennen und die Auswahl der Konstruktionsaufgaben ausschließlich unter dem Gesichtspunkt der Realisierbarkeit mit Zirkel und Lineal zu treffen, erscheint didaktisch geradezu widersinnig. Was das Werkzeug anlangt - hat es einen angebbaren Sinn, ein Küchenmesser für chirurgische Eingriffe vorzuschreiben oder auch nur zu empfehlen?

Nehmen wir als Beispiel die alte Aufgabe der Winkeldreiteilung. Mit dem Winkelmesser als Hilfsmittel ist die Aufgabe trivial lösbar. Mit dem Zirkel und Lineal ist die Aufgabe in endlich vielen Schritten nachweisbar - mit algebraischen Methoden - nicht zu lösen, sofern

*) Parallel-, Spiegel-, Einschiebe-Lineal; Winkelhaken; Koordinaten-, Pergament-Papier etc. Zur Ortung (terrestrische Navigation) beispielsweise ist Pergament als Werkzeug vorzüglich geeignet (s. S.86 ff in diesem Heft).

Zirkel und Lineal im klassischen Sinne benutzt werden *) (mit dem Zirkel kann um einen vorgegebenen (oder gewählten) Punkt ein Kreis mit vorgegebenem (oder gewähltem) Radius gezogen werden; mit dem Lineal kann eine Gerade durch zwei vorgegebene (oder gewählte) Punkte gezeichnet werden). Die Winkeldreiteilung ließe sich freilich in unendlich vielen Schritten mit Zirkel und Lineal durchführen (Eingabelung durch iterierte Winkelhalbierung - Intervallschachtelung des Bruches $\frac{1}{3}$ durch Dualbrüche: $\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots$) oder mit Zirkel und Lineal, sofern das letztere nichtklassisch verwendet werden darf (nämlich als Einschiebelineal, auf dem zwei Punkte eine Strecke markieren, die zwischen zwei schon gezeichneten Linien "eingepaßt" werden darf).

Archimedes' Einschiebelineal-Lösung findet man gewiß nicht auf Anhieb, aber die zugrundeliegende Lösungsidee ist sehr einfach. Sie entspringt einer unüblichen Konstruktion zur Vervielfachung eines vorgegebenen Winkels (Ver-

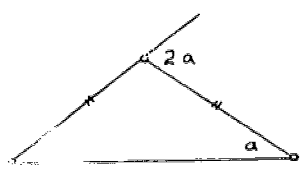


Bild 1

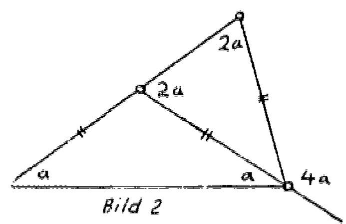


Bild 2

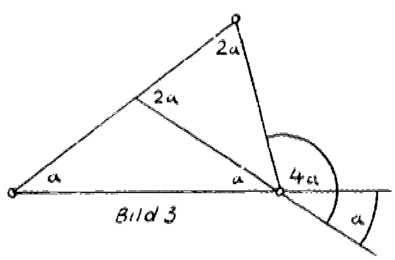


Bild 3

*) Auf höherem Niveau (in Sekundarstufe II) kann die Winkeldreiteilung durchaus als reizvolles Einstiegsproblem verwendet werden zur Motivation grundlegender algebraischer Begriffe und Methoden, mit denen auch gewisse Fragen nach der Möglichkeit klassischer Zirkel-Lineal-Konstruktionen erledigt werden können: Winkeldreiteilung, delisches Problem der Würfeldoppelung, Dreieck aus den Winkelhalbierenden - das sind Konstruktionsprobleme, die auf kubische Gleichungen führen. Solche Gleichungen mit rationalen Koeffizienten haben aber genau dann durch Quadratwurzelausdrücke darstellbare Lösungen, wenn sie eine rationale Lösung besitzen.

wendung gleichschenkliger Dreiecke).*)

Die "Umkehrung" dieser mit Zirkel und Lineal realisierbaren Winkelverdreifachung liefert nun die gesuchte Winkeldreiteilung.

Wir achten auf die Gleichheit der Streckenlängen in Bild 4 : l(ab) = l(bd) = l(cd) und versuchen diese Eigenschaft zur Konstruktion auszunützen.

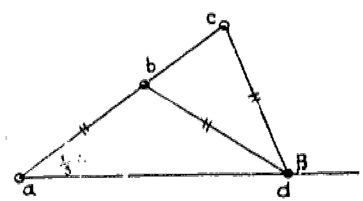


Bild 4

Es liegt nahe die Zeichnung zu ergänzen.

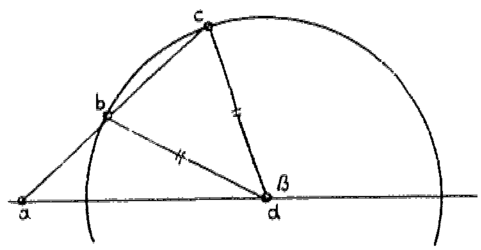


Bild 5

Die Konstruktion für $\frac{1}{3}\beta$ wird demnach von folgender Zeichnung ausgehen können.

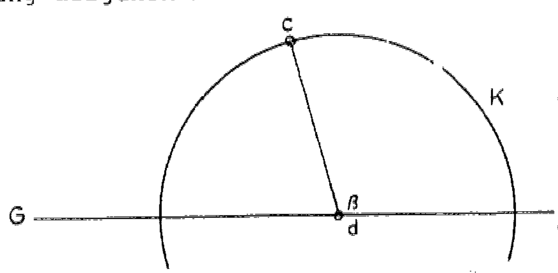


Bild 6

Gelingt es uns, eine Gerade H so zu legen, daß auf ihr vom Kreis K und von der Geraden G eine Strecke der Länge

*) Vorweg wäre demnach im Unterricht das Problem "Winkelvervielfachung" zu erledigen (verschiedene Realisierungen mit verschiedenen Werkzeugen; wenn nötig Hinweis darauf, daß gleichschenklige Dreiecke eine hübsche Lösung ermöglichen)

l(cd) abgeschnitten wird? Sofern man nicht auf Zirkel und Lineal fixiert ist, wird man ein geeignetes Werkzeug herzustellen suchen*), das die Einpassung einer gegebenen Strecke zwischen zwei gegebene Linien ermöglicht. Ein gespannter Schnürsenkel, auf dem die Länge l(cd) durch zwei Knoten markiert ist, erfüllt unseren Wunsch. Wir spannen ihn so durch C, daß die beiden Knoten k_1 und k_2 auf K bzw. G liegen (s.Bild 7)

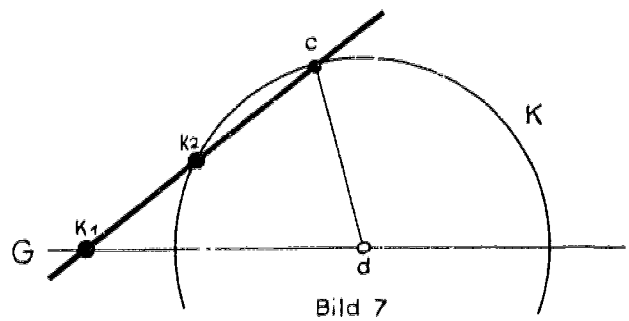


Bild 7

Im folgenden Beispiel, einem Problem aus einem chinesischen Rechenbuch (2000 Jahre alt) möchten wir noch eine andere Seite der Emanzipation vom euklidischen Geist herausstellen. Nicht nur das Werkzeug selbst, sondern auch sein Gebrauch sollte nicht von vornherein vorgeschrieben werden.

Aus einem Teich ragt ein Bambusrohr 6 Fuß heraus. Zieht man die Spitze zum Ufer, so ist sie 8 Fuß von der Stelle entfernt, an der das Rohr aus dem Wasser kommt. Wie tief ist der Teich?

Für Elfjährige ohne systematische Unterweisung in Geometrie ist das ein hinreichend nichttriviales Problem. Naheliegend ist eine Eingabelungslösung für den "Wurzel-

*) Es dürfte nicht schwerfallen nachzuweisen, daß der Mathematikunterricht auf allen Stufen die Entwicklung einer entsprechenden Attitüde verhindert, statt sie zu fördern, und wir sehen darin einen seiner größten Mängel.

punkt" des Rohrs (Probierverfahren mit systematischer Halbierung).

p_1 wird auf der Geraden ac als Drehpunkt gewählt. Die Spitze des Rohrs käme dann aber nach a_1 (Schnürsenkel, Zirkel, Einschiebelineal als Hilsmittel). a_1 liegt links von b. Drehung um p_2 (=c) legt die Spitze rechts von b nieder. Der gesuchte Drehpunkt liegt folglich*) zwischen p_1 und p_2. Mit dem Mittelpunkt p_3 der Strecke p_1p_2 wird genauso weitergemacht. Das liefert eine Intervallschatelung für den gesuchten Drehpunkt p. Die Aufgabe ist in wenigen Schritten der Zeichenungenauigkeit wegen praktisch (aber umständlich) gelöst.

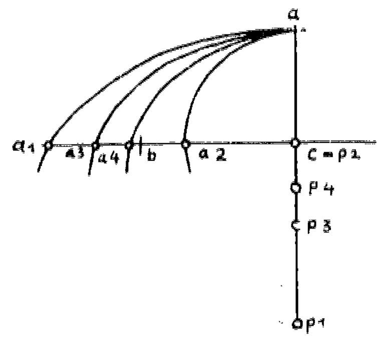


Bild 8

Hat man die Lösung p, so sollte an der Zeichnung die Symmetrie des Kreissektors auffallen. Das führt zu Überlegungen, die Symmetrieachse zu finden, zu verschiedenen Mittelsenkrechtenkonstruktionen; darunter wohl auch zur klassischen Zirkel-Lineal-Konstruktion.
(Eine besonders einfache Lösung gelingt durch Papierfalten. Man zeichnet dazu die Ausgangsdaten auf Pergamentpapier, faltet es dann so, daß a auf b zu liegen kommt.)

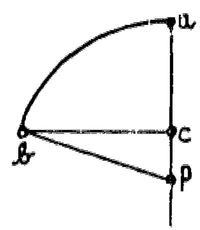


Bild 9

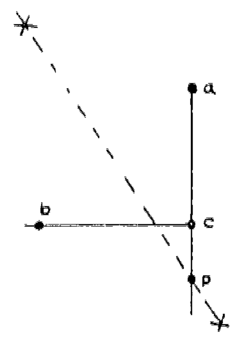


Bild 10

*) Die Eingabelungskonstruktion läßt sich streng begründen mit Hilfe des Zwischenwertsatzes.

Man beachte: Das Ausgangsproblem ist ohne vorangehenden systematischen Geometrieunterricht lösbar. Die (mit Elfjährigen nicht weiter analysierbare) Eingabelungskonstruktion ist ein erstes Beispiel einer vielseitig anwendbaren praktischen Methode, der später (in der Analysis) grundlegende Bedeutung zukommt*). Das Ausgangsproblem motiviert schließlich auch den für die Geometrie wichtigen Begriff der Mittelsenkrechten und führt zwanglos zu ersten Symmetriebetrachtungen. Von Bereitstellung kann keine Rede sein. Die hübsche Aufgabe wird keineswegs bloß zur Anwendung schon bekannter Methoden "mißbraucht".

Weitere Aufgaben zur Anwendung des Begriffs "Mittelsenkrechte" findet man in den älteren Lehrbüchern im Zusammenhang mit dem Pythagoras-Satz; d.h. viel später als Rechenaufgaben.

a) Ein Bambusrohr ist 10 Fuß lang. Der Wind knickt es. Seine Spitze berührt 3 Fuß von der Wurzel entfernt den Boden. Wie hoch liegt die Bruchstelle?

b) Man hat eine geöffnete Doppeltür. Ihr Abstand von der Schwelle beträgt 10 Zoll (= 1 Fuß). Die beiden Türen klaffen 2 Zoll auseinander. Wie breit ist die Doppeltür?

c) Eine Lanze ragt senkrecht stehend 1 Fuß über eine

---

*) Komplettierung des Zahlkörpers; Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungen - Stetigkeit - Zwischenwertsatz - Fixpunktsätze (s. R. Stowasser, Eindimensionale Existenzsätze, in: Der Mathematikunterricht, Heft 1/70). Vorerst werden stetige Abbildungen und ihre Eigenschaften (Zwischenwertsatz) naiv verwendet, erfahren keine begriffliche Fassung, werden in solchen Beispielfällen bloß anschaulich verwendet und auch i.w. nicht verbalisiert. Natürlich werden auch die mit der maßstäblichen Zeichnung verbundenen Ähnlichkeitsbeziehungen an dieser Stelle nicht analysiert.

> Mauer. Schräggestellt, mit einem Ende 3 Fuß von der Mauer entfernt, erreicht ihre Spitze gerade die Mauerhöhe. Wie lang ist die Lanze?

Nicht nur die Elfjährigen haben Schwierigkeiten mit den veränderten Lagebeziehungen . Daß dieselbe Lösungsidee wirksam ist, das ist nicht von vornherein erkennbar. Man zeichne und lerne *sehen*. Dazu ist Geometrie offenbar in besonderer Weise geeignet.

(In den Aufgabenplantagen älterer Lehrbücher findet der Lehrer genug Material, das er in ähnlicher Weise "zweckentfremdet" verwenden kann mit der Absicht, neue Reize an ihm zu entfalten. Solche Lockerungsübungen sind insbesondere systemorientierten Lehrbuchschreibern zu empfehlen.

Wir geben im folgenden zwei Beispiele für den Unterricht sequentierter Problemkreise (Extremale Rechtecke; Billardprobleme und extremale Wege). Weitere Problemfelder können aus Platzgründen nur sehr skizzenhaft vorgestellt werden mit Hinweisen und Anmerkungen verschiedenster Provenienz.

1. *Extremale Rechtecke - eine Problemsequenz mit Kurzfilmen*

In der Klasse 5 werden üblicherweise Umfang und Inhalt von Rechtecken behandelt nach dem höchst fragwürdigen didaktischen Prinzip der kleinsten Happen - Ausgliederung eines scharf zugeschnittenen Teilstücks aus dem Komplex des Messens - bei kurzatmiger und wenig kurzweiliger Motivation. Mit 2a+2b und ab werden dann etliche "altbabylonische Ackeraufgaben" gerechnet.

Wir wählen mit Absicht diesen in den Schulbüchern recht langweilig abgehandelten Unterrichtsgegenstand und stellen unseren Unterrichtsvorschlag dagegen: eine kleine Medieneinheit mit Kurzfilmen zum Einstieg, Foliensätzen, Lesebögen, Arbeitskarten.

Statt *einzelner Rechtecke* behandeln wir im Unterricht gewisse *Rechteckssorten* und halten darin Ausschau nach Rechtecken mit gewissen Extremaleigenschaften. Wir nutzen den Reiz elementarer Extremalprobleme, zu deren Lösung *diverse* Verfahren des Strecken- und Flächenvergleichs zu *erfinden* sind. 2a + 2b und ab allein genügen für elementare Lösungen unserer Extremalprobleme nicht. Der Komplex des Messens muß vielfältiger erschlossen werden.

Zu den psychologischen Mitteln der Anreizung gehört die passende Einkleidung der mathematischen Sachverhalte. Sie ermöglicht Mathematik in der Form von "Geschichten" zu präsentieren, die uns in das Fabelreich der Phantasie entrücken können.*)

In den § 1 - 4 werden die wichtigsten Stationen unserer Problemsequenz beschrieben.Vier Rechteckssorten werden behandelt:

a) die teilumfangsgleichen TEIUFANER **)
b) die umfangsgleichen UFANIER
c) die inhaltsgleichen AREANER
d) die quermassgleichen DIAGONER

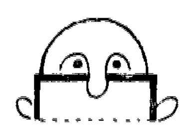


Bild 11

Zu jeder Sorte finden wir verschiedene Herstellungs- und Sortierverfahren (Spionsuche), dabei auch die zentrale

---

*) Im Unterschied zu Jonathan SWIFT verfolgen wir keine gesellschaftskritischen Zwecke, wenngleich wir uns ebenfalls gewisser ironischer Stilelemente bedienen - z.B. im Kurzfilm II: "Soldat muß jeder werden, dessen Bauch kleiner ist als der Generalsbauch". Die Schelte aufgeklärter Pädagogen, die die gesellschaftliche Irrelevanz unserer Farbeln monierten, sogar Perpetuierung hierarchischer Strukturen als Absicht unterstellten, lassen wir ohne Rechtfertigung über uns ergehen.

**) Im Bild ist der "Teilumfang" dick gezeichnet.

Kennlinienmethode (kartesische Graphen). Gesucht sind der quermaßkleinste, der inhaltsgrößte, der umfangsgrößte TEIUFANER und analoge extremale Rechtecke der anderen Sorten. Sie werden in der Regel mittels kartesischer Graphen *gefunden* und mit allen anderen Rechtecken ihrer Sorte verglichen in Hinsicht auf jene Eigenschaft, die sie angeblich extremal besitzen. Wir argumentieren ähnlich wie schon Euklid, nur daß er ausschließlich den langweiligeren Fall der umfangsgleichen Rechtecke behandelt hat.

Für unsere Problemsequenz ist die kartesische Darstellung von Zuordnungen zwischen Größenbereichen zentral. Der Lehrer lasse sich nicht abschrecken durch amtliche Vorurteile (Lehrpläne, die so etwas älteren Schülern vorbehalten wollen).

Die Lösung der Probleme gelingt ohne vorherige systematische Unterweisung in Geometrie. Einige geometrische Sätze präparieren wir bei unserer Arbeit an den Problemen heraus - z. B. Satz vom Lot als kürzester Verbindung, Satz von der Treppe, Satz von der Kreistangente, u.a..Die Problemsequenz diktiert ihre Selektion und läßt sie beziehungslos nebeneinander stehen. Wir werden ein paar bunte Schmetterlinge fangen und konservieren. "Lokales Ordnen" (FREUDENTHAL) hat noch keinen Sinn bei so kleiner Beute. Aber wir werden auf unseren Wegen durch weitere Problemsequenzen - Papierfalten,Parkette, heronische Meßkunst, Küstenschiffahrt, Billard, etc. - noch viele bunte Schmetterlinge sammeln können, soviele, daß sich logisch-systematische Aufarbeitung und Ansätze zur Theoriebildung im Hinblick auf eine Grundlegung der Geometrie möglicherweise lohnen, wenn auch nur für wenige unter den mittlerweile herangereiften Schülern.

Vielleicht darf noch vermerkt werden, daß wir nicht die

Absicht haben, sachkundige Leser mit einem Lernzielkatalog zu langweilen. Eher neigen wir dazu herauszustellen, was nicht zu den Lernzielen gehört, etwa: Der Schüler sollte *nicht* wissen, daß Zuordnungen rechtseindeutige Teilmengen des kartesischen Produkts zweier Mengen sind.

1.1 *Teiufaner*

a) Den Einstieg machen wir mit dem Kurzfilm [illegible] "SPION IN TEIUFAN". Der Film schildert zunächst die Herstellung der Rechtecksmännchen. Aus *gleichl*[illegible]ahtstücken werden rechteckige Haken gebogen (s. [illegible]. Die Haken holen sich nacheinander ihren Bau[illegible], das genau darunter passende Rechteck. Ein Mondg[illegible]t schiebt sich dahinter. Einige TEIUFANER werden so gefertigt. Danach sieht man eine TEIUFANERversammlung. Ein Königsbote meldet, daß sich ein Spion eingeschlichen hat. Er hat nicht denselben Teilumfang (= Hakenlänge). In der Zimmerecke ist ein Maßstab aufgestellt (Vorbereitung des Koordinatensystems). Die Männchen drängeln sich zur Messung in die Zimmerecke und machen dort einen "Fußstand" auf dem rechten Fuß (s. Bild 12)

Mit diesem etwas umständlichen Verfahren wird natürlich der "zu lange" Spion gefunden.

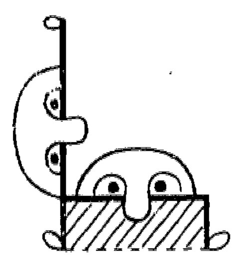


Bild 12

Die Männchen stehen noch alle in der Ecke. Der unverdächtige Königsbote entdeckt ein raffiniertes Verfahren zur Spionsuche. Er bemerkt nämlich, daß die rechten Schultern der recht Gemessenen auf einer geraden Linie liegen (teiufane Kennlinie - s. Bild 13)

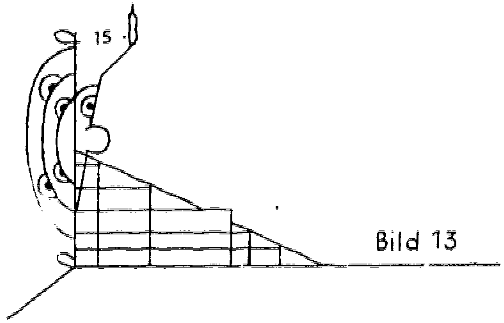


Bild 13

Der Film hinterläßt ein Problem. Warum ist die teiufane Kennlinie eine Strecke? Wir verwandeln einen schmalen TEIUFANER in einen breiteren und wiederholen das Verfahren. Die Seitenansicht einer Treppe entsteht mit Stufen doppelt so breit wie hoch. Die Kinder wissen längst, daß man auf eine so gleichmäßig gebaute Treppe ein Brett fest auflegen kann.*)

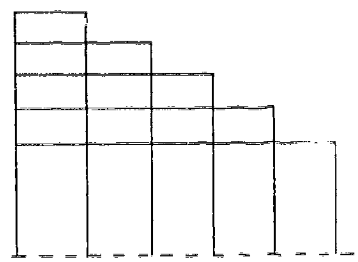


Bild 14

Ein Foliensatz gestattet etliche solche 1:2 Treppen aufeinander zu legen. Die Kinder begreifen: Die teiufane Kennlinie ist notwendig gerade.

b) Dann folgt der Kurzfilm TJ "MUSTERUNG IN TEJUFAN" Der diagonalenkürzeste TEIUFANER wir gesucht. Ihm kommt das Generalsamt zu.

In Verbindung mit der teiufanen Kennlinie hilft der Satz vom Lot als kürzester Strecke den General finden.**)

Soldat wird, wer einen kleineren Bauch als der General hat. Die Musterung macht keine Schwierigkeiten. Wir nutzen unsere Kenntnis von der 1:2 Treppe. Die Musterung eines

---

*) Dahinter verbirgt sich natürlich ein Ähnlichkeitssatz, wir sehen aber keine Veranlassung an dieser Stelle tiefer zu bohren und womöglich das ganze Fundament der Ählichkeitslehre freizulegen. Den ausgesprochen ungeometrisch formulierten Satz von der Treppe nehmen wir in unsere Argumentationsbasis auf. [illegible] den der Geometer begegnen wir notfalls mit psychologi[illegible] mit logischen Argumenten.

**) Messung zeigt: Er ist (nahezu) doppelt so ho[illegible] ie breit. Zur Begründung müßten wir aber an der oben genannten Stelle ein ganzes Stück tiefer bohren.

TEIUFANERS zeigen die Bilder 15 und 16.

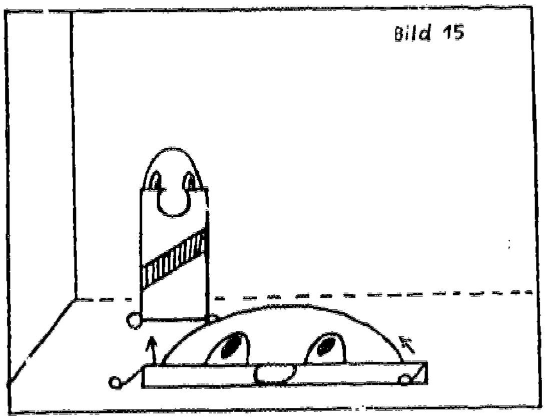


Bild 15

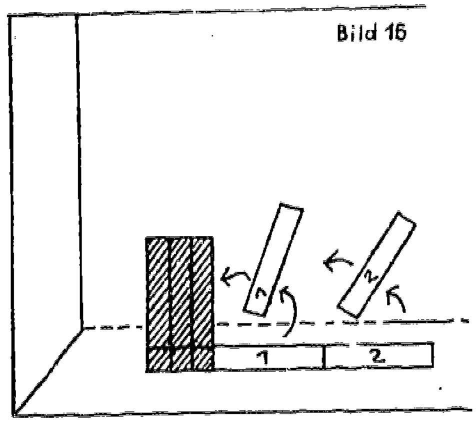


Bild 16

c) Zwei Lesebögen - einer davon für den eiligen Lehrer

c1) Der König muß nach geschriebenem Gesetz den aller größten Bauch haben (flächengrößter TEIUFANER). Welche Maße hat er?

Der eilige Lehrer läßt den Mathematikus von TEIUFAN behaupten: Der König ist doppelt so breit wie hoch.

Stimmt diese Behauptung?

Wir verfahren ähnlich wie bei der Musterung in b). Wir vergleichen den angeblichen König mit irgendeinem "niedrigeren" TEIUFANER. Unser Treppengesetz hat sogleich zur Folge, daß das oben herausragende Teilrechteck I größeren Inhalt hat als das seitlich überstehende Teilrechteck II. Eine analoge Überlegung zeigt, daß auch die "höheren" TEIUFANER inhaltskleiner sind.

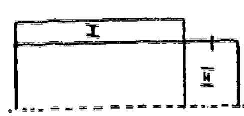


Bild 17

c2) Der weniger eilige Lehrer wird den zweiten Lesebogen vorziehen. In diesem wird die vorher mit der Kennlinie der TAIUFANER angerissene Methode der kartesischen Darstellung einer Funktion thematisiert.

Wir haben bisher "ab" nicht gebraucht. Eine durchaus reizvolle Variation der Unterrichtsarbeit motiviert zunächst "ab" durch eine Plattenlegeraufgabe: Ein Rechteck soll mit möglichst großen kongruenten Quadraten gepflastert werden.

Mit "ab" kann dann der Flächeninhalt der TEIUFANER berechnet werden. Die Zuordnung: Breite → Inhalt wird durch ein Parabelstück im kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Ergebnis der Zeichnung: Vermutlich hat das Rechteck, das doppelt so breit wie hoch ist, von allen teilumfangsgleichen Rechtecken den größten Inhalt. (Argumentation wie in c1)

d) Der teiufane Kanzler soll extremalen Umfang haben.

Wir suchen ihn mittels des kartesischen Graphen der Zuordnung: Breite → halber Umfang. Wir brauchen nur die obere Seite der Rechtecke umzuklappen (s. Bild 18)

Wir sehen: Zu jedem TEIUFANER gibt es umfangsgrößere und -kleinere. Die umfangsgrößeren sind "niedriger", die umfangskleineren "höher". (Die extremen Randfiguren lassen wir in Teiufan nicht existieren.) Grund dafür ist wieder die 1:2 Treppe.

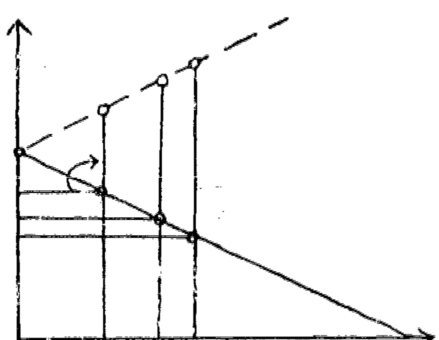


Bild 18

Ergebnis: In Teiufan muß der König die Regierungsgeschäfte selbst führen.

Wir können sogar begründen, daß der kartesische Graph der Zuordnung: Breite → halber Umfang eine aufsteigende Str ist. Die 1:? Treppeneigenschaft ist leicht erkennbar.

1.2 *Ufanier*

Genau nach den in 1.1beschriebenen Methoden ergibt sich schnell die 1:1 Treppeneigenschaft und daraus sogleich das Quadrat als quermaßkleinstes und inhaltsgrößtes Rechteck dieser Sorte. Teilumfangsextremale UFANIER existieren nicht (der kartesische Graph der Zuordnung: Breite → Teilumfang ist eine fallende Strecke; 1:1 Treppeneigenschaft).

1.3 *Areaner*

a) Im Nachbarland leben die AREANER. Ihre Erzeugung schildert die beigefügte kommentierte Bilderfolge. Im Unterricht wird ein vorbereiteter Foliensatz verwendet.

In der Wandecke steht ein Quadrat, der Stammvater der AREANER. Eine Meßlatte wird an seine rechte Schulter gelegt - in irgendeiner Richtung.
Die beiden schraffierten Dreiecke werden umgelegt und grenzen einen neuen AREANER ab.

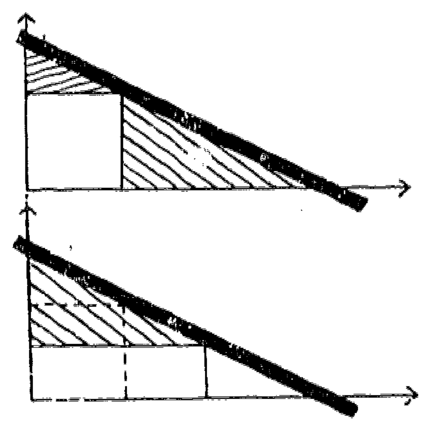


Bild 19

Viele AREANER werden so erzeugt. Sie werden, weil ergänzungsgleich, als inhaltsgleich erkannt.[::)]

::) Die AREANER werden mittels einer Variante des grundlegenden Gnomonsatzes (Satz vom Ergänzungsparallelogramm) erzeugt.

b) Zur Spionsuche wird das in TEIUFAN ausspionierte Kennlinienverfahren ausprobiert (hier: gleichseitige Hyperbel als Kennlinie).

c) Gesucht ist der umfangskleinste AREANER (der König von AREANIEN).

Mit einem vorbereiteten Foliensatz wird rasch der kartesische Graph der Zuordnung: Breite → halber Umfang gewonnen. Ihm ist zu entnehmen: Vermutlich ist der quadratische AREANER König.

Zur Begründung vergleichen wir einen "niedrigeren" AREANER mit dem quadratischen.
Die Rechtecke I und II sind inhaltsgleich. Folgt:
$4u < 2(u+b+u-a)$.*)
Für "höhere" AREANER wird analog argumentiert.

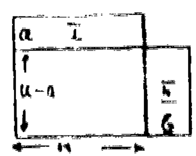


Bild 20

d) Wer ist areanischer General (= quermaßkleinster)?

Die kürzeste Verbindung vom Ursprung des Koordinatensystems zur Hyperbel wird verlangt. Die Symmetrie und Monotonie springt ins Auge. Klar, der König hat auch General zu spielen.
Die Kinder sehen kaum ein, daß das noch zu begründen wäre.***)

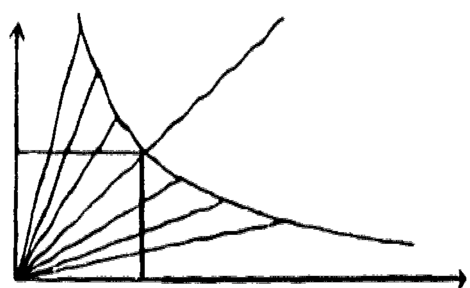


Bild 21

---

*) Die Kinder transportieren natürlich die entsprechenden Teilstrecken, in die sie das Quadrat zerschneiden. Rechnung ist ganz unnötig.

***) Nur für den Leser!
Er kann die Umfangsgleichen zum Quermaßvergleich heranziehen.
Zur Begründung verwende er aus (c) a·b für einen "niedrigeren" AREANER; entsprechend kann für "höhere" AREANER argumentiert werden.

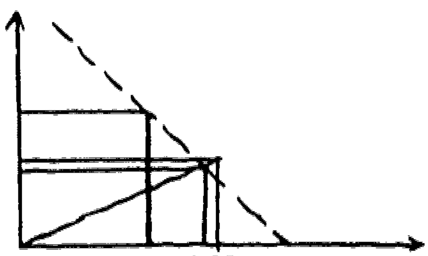


Bild 22

e) Areanischer Kanzler ist nach Gesetz der teilumfangs-kleinste im ganzen Lande.

Die graphische Methode bringt die Vermutung: Der Kanzler ist doppelt so breit wie hoch.

Eine genügend einfache korrekte Begründung haben wir nicht. Aber die Schüler fanden in diesem Zusammenhang, daß mit Ausnahme des Kanzlers je zwei AREANER teilumfangsgleich sind (s. Bild 23), daß fernerhin der Kanzler durch Parallelverschieben der teilufanen Kennlinie ermittelt werden kann (Tangente an die Hyperbel).

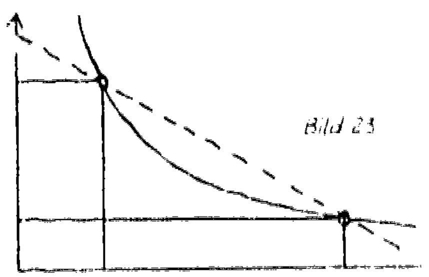


Bild 23

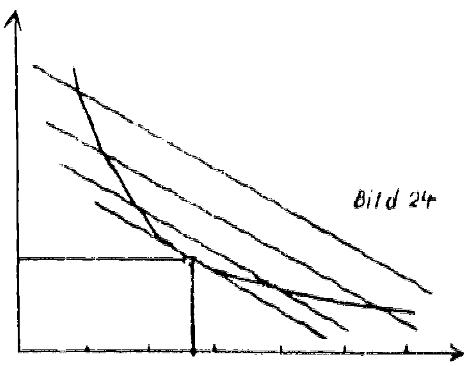


Bild 24

1.4 *Daganer*

a) Ihre Erzeugung geschieht mittels einer Strecke fester Länge, die in die Wandecke eingepaßt wird (Leiteranstellen!)

Der kartesische Graph der Zuordnung: Breite · Höhe sieht aus wie ein Viertelkreis. Ist er ein Viertelkreis? Es dauert eine Weile. Schließlich wird gesehen, daß die Rechtecke nur "umgedreht" werden müssen.*)

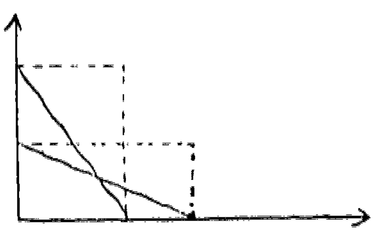


Bild 25

*) Diese Rechteckssymmetrie bezüglich einer Mittelparallelen nehmen wir ohne Begründungsversuch hin.

Ganz einfach ist die Spionsuche.

b) Anhand der kartesischen Graphen für die Zuordnung: Breite → Höhe, Breite → Inhalt wird das Quadrat als umfangs- und zugleich inhaltsgrößter DIAGONER vermutet.

Die Begründung stützt sich auf den Satz: Die Kennlinien der Quermaß-, Umfangs- und Inhaltsgleichen liegen symmetrisch zur Winkelhalbierenden.*)

In der Zeichnung wird das Quadrat mit einem "niedrigeren" DIAGONER dem Umfang und dem Inhalt nach verglichen. Wir ziehen ein zum Quadrat umfangsgleiches und ein inhaltsgleiches Rechteck zum Vergleich heran und benutzen die Kennlinien aus TEIUFAN und AREAMIEN.

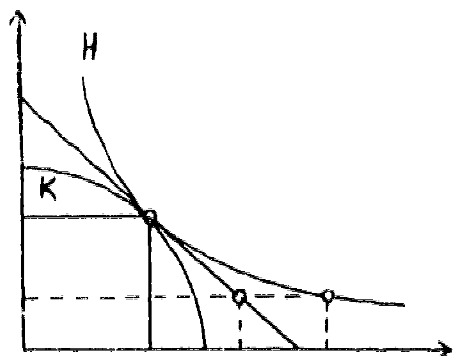


Bild 26

Zur Argumentation brauchen wir die Trenneigenschaft der Geraden g bezüglich der Kurven K und H. Bezüglich K nennen wir den Satz vom Lot als kürzester Verbindung. Hinsichtlich H kann auf 1.3c) verwiesen werden.

c) Wir suchen den teilumfangsgrößten DIAGONER (Kanzler).

Wir lassen die DIAGONER Fußstände auf dem rechten Fuß machen:

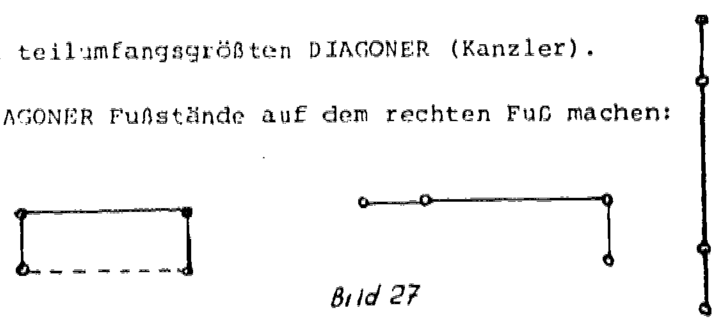


Bild 27

Ohne Rechnung läßt sich damit wieder der kartesische Graph der Zuordnung: Breite → Teilumfang zeichnen.

---

*) Durch Vertauschen von Breite und Höhe kommt man aus keiner dieser drei Sorten heraus. Bei den TEIUFANERN ist das freilich anders.

Vermutlich ist der diagonische Kanzler doppelt so breit wie hoch.

Aber wir finden schon wieder keine genügend einfache elementargeometrische Begründung.

2. *Schiffahrtsprobleme* (1. Teil)

Soweit sich euklidische Parallelität ausdrückt in der Satzgruppe "Winkel an geschnittenen Parallelen und Winkelsummen", kann man geeignete Peil- und Kursaufgaben der *Küsten*schiffahrt - kleine Distanzen - auswählen, um die in den konstruktiven Lösungen enthaltenen geometrischen Tatsachen entdecken und formulieren*) zu lassen.

2.1 *Eine Ortsbestimmung zum Einstieg*

Von einem Schiff s aus werden die Leuchttürme roter (r) und gelber (g) Sand in den Richtungen N35,5°W bzw. N51,2°O gesehen. Zeichne die Position des Schiffes in die Seekarte ein (Bild 28).

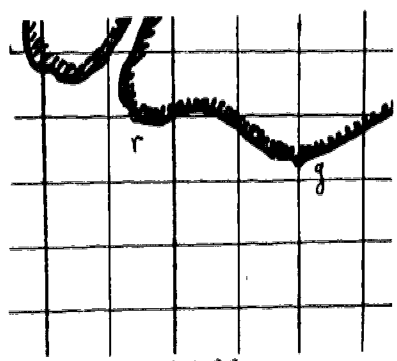


Bild 28

1. Lösung: Halten wir Ausschau nach geeigneten Werkzeugen zur Lösung! Auf Pergament werden mit dem Winkelmesser von

---

*) Wir neigen dazu, die sprachliche Formulierung von geometrischen Sachverhalten nach hinreichend genauer Kenntnis der Details für weniger wichtig zu halten, als das gewöhnlich geschieht, und ziehen das Gedächtnis entlastende grobe, aber für die Anwendung ausreichende sprachliche Fassungen vor. Die ganze Satzgruppe "Winkel an geschnittenen Parallelen" kann im Gedächtnis so gespeichert werden: Winkel an Parallelen, die gleich groß ausschauen, sind gleich groß. Mnemotechnisch noch besser ist die Aufbewahrung der Inhalte im Gedächtnis durch Bilder: X (Scheitelwinkelsatz); Y (Nebenwinkelsatz); Z (Wechselwinkelsatz; der auf den Buchstaben gesetzte Punkt erinnert an die Zentralsymmetrie der Figur).

s aus drei Strahlen gezeichnet, die die gegebenen Winkel einschließen (Bild 29). Das Pergament wird so auf die Seekarte gelegt, daß r auf A, g auf C zu liegen kommt und B genau nach Norden zeigt.

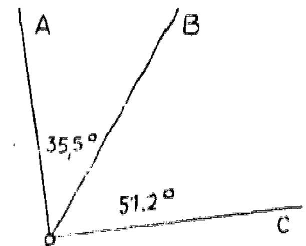


Bild 29

2. Lösung: Ohne Pergament lokalisieren wir sogleich eine Schwierigkeit auf dem Wege der Problemlösung. Die gegebenen Winkel müssen im *unbekannten* Punkt s der Seekarte angetragen werden. Das geht gewiß nicht. Aber vielleicht kann man sie in den *bekannten* Punkten r bzw. g geeignet antragen? Nützt die Frage, in welchen Richtungen s von r bzw. g aus gesehen wird?

Die alsbald vermutete Betragsgleichheit der Richtungswinkel in g und s liefert die Idee zu einer einfachen Lösung der Aufgabe mit dem Winkelmesser als Werkzeug.

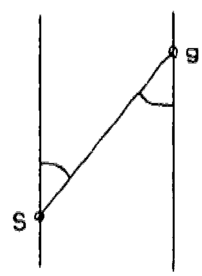


Bild 30

Für den Fall "roter Sand" freilich ist noch ein Teilproblem zu lösen: Parallele zu einer Nordsüdlinie durch r.

Mit dem Winkelmesser als Werkzeug gerät man so an den Sachverhalt, den der Kehrsatz des Wechselwinkelsatzes ausdrückt, und nutzt diesen zur Konstruktion.

Unsere 2. Lösung hat Wechselwinkelsatz und Kehrsatz motiviert*). Sie werden formuliert, um wieder vergessen zu

*) a) Der "komplexe Einstieg" ist aus psychologischen Gründen gewählt (Reiz als Motiv; Entwicklung der Fähigkeit, komplexe Sachverhalte zu analysieren). Lehrbuchschreiber befolgen aus Bequemlichkeit viel lieber das Prinzip der Isolierung der Schwierigkeiten und fertigen dementsprechend langweilige Sequenzen.
b) Der Wechselwinkelsatz kann selbst bei logisch-systematischer

werden (s. Anmerkung über sprachliche Formulierungen!).

2.2 Ändert sich der Kurs eines auf einer Geraden fahrenden Küstenschiffs? Die Kurswinkel sind Stufenwinkel! Mehr noch - die Gitterlinien der Seekarte helfen, den Sachverhalt des Winkelsummensatzes ins Blickfeld zu rücken und auch schon seine Begründung zu verraten. Man lasse dazu zwei Schiffe unter verschiedenen Kurswinkeln Nα^0 O und Nβ^0 O fahren. Wie kann der Schnittwinkel γ^0 der Fahrspuren *berechnet* werden?

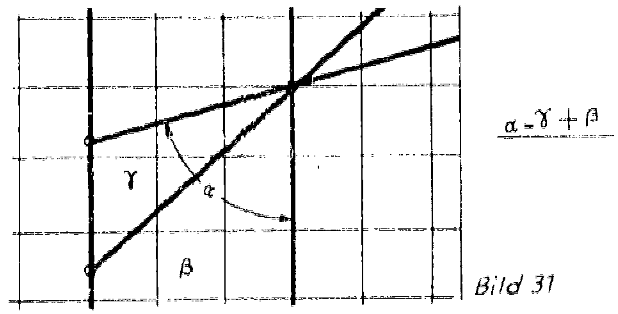


Bild 31

(Die Seekarte enthält schon die parallele Hilfsgerade, die der Lehrer sonst vom Himmel fallen läßt).

Anmerkung: Eine hübsche Anwendung des Winkelsummensatzes haben wir schon ausgeführt (archimedische Winkeldreiteilung), eine weitere nennen wir: archimedische Parkette (s.S.115ff).

2.3 Bislang sind die Eintragungen in die Seekarte allein aufgrund von Winkelmessungen erfolgt. Das dafür am besten geeignete Werkzeug ist der Winkelmesser. Der Problemkreis sollte nicht abgeschlossen werden, ohne daß auch noch einige konkrete Probleme gelöst werden, die Entferungsmessungen benötigen und im Zusammenhang mit der

---

Fortsetzung der Fußnote von S. 87

Orientierung als grundlegender Satz (Axiom) ohne Begründung hingenommen werden (Äquivalenz mit dem üblichen Playfairschen Parallelenaxiom; Unabhängigkeit von den Axiomen der absoluten Geometrie). Der Kehrsatz hingegen ist ein Satz der absoluten Geometrie, d.h. ohne ein Parallelenaxiom beweisbar. In der Schule wird man solche Grundlagenprobleme ausklammern müssen. Für den unwahrscheinlichen Fall, daß ein Beweisbedürfnis besteht, weil man etwa über gewisse Halbdrehungen betreffende Kenntnisse verfügt, kann der Zusammenhang leicht hergestellt werden, denn die Zentralsymmetrie der Z-Form in Bild 30ist auffällig.

Parallelität Eigenschaften von Parallelogrammen *entdecken* und zur Lösung nutzen lassen. Wir führen hier nur ein Beispiel aus und verweisen im übrigen auf den Problemkreis "Schiffahrtsprobleme (2. Teil)".

Ein Schiff fährt 6,5 $\frac{sm}{h}$ mit Kurs N55^{O}O, Anfangs wird der Leuchtturm roter Sand in Richtung N35^{O}O, nach einer Stunde in Richtung N12^{O}W gesehen. Zeichne die Fahrspur des Schiffes in die Seekarte ein.

1. Lösung: ähnlich wie in der 1. Peilaufgabe mit Pergament durch "Einpassen". Die Zeichnung auf dem Pergament zeigt Bild 32.

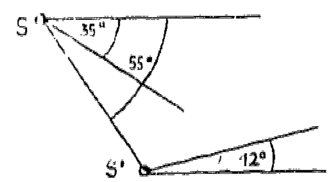


Bild 32

2. Lösung: Parallelogrammkonstruktion (gleiche Länge der Parallelseiten) s. Bild 33.

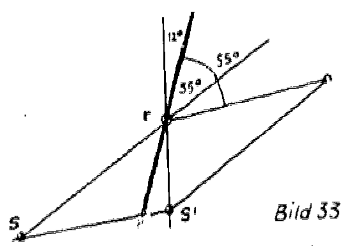


Bild 33

(Alten Gewohnheiten folgend, wird dem Leser wahrscheinlich zuerst eine 3. Lösung einfallen: Konstruktion eines zum Dreieck rss' kongruenten Hilfsdreiecks aus 2 Winkeln und der eingeschlossenen Seite; dann Längenübertragung. Konstruktionen dieser Art werden im nächsten Problemkreis behandelt.)

2.3 In einer weiteren Peilaufgabe geht es darum, den Schiffsort in die Seekarte einzutragen für den Fall, daß zwei bekannte Punkte (r und g) angepeilt werden können, aber die Nordsüdlinie nicht feststellbar ist (Kompaß kaputt, keine Himmelskörper sichtbar). Natürlich hat man einen Geschwindigkeitsmesser an Bord, fährt eine gemessene Zeit mit konstanter Geschwindigkeit mit Kurs auf r, mißt bzw. berechnet die in Bild 33a gekennzeichneten Größen.

1. Lösung: mit Pergament als Werkzeug. Die Schiffsorte s bzw. s' sind schnell zu finden.

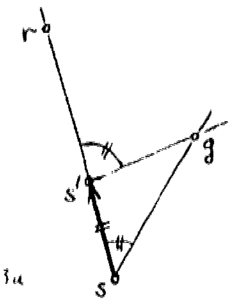


Bild 33a

2. Lösung: mit Zirkel und einem "Einpaßlineal", auf dem die Strecke [ss'] vermerkt ist (s. Bild 33b). Weitergehende Kenntnisse aus der Geometrie sind hier erforderlich (aus der Satzgruppe der Kreiswinkelsätze).

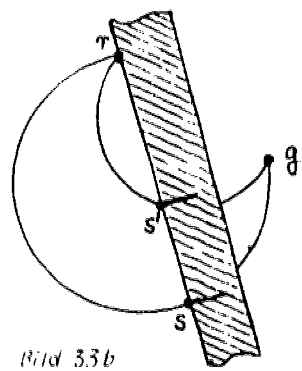


Bild 33b

3. Lösung: mit Zirkel und Lineal. Der Leser findet eine Lösung nach dem üblichen Rezept: erst ein passendes Teildreieck *irgendwo* auf der Seekarte zu konstruieren. Zum Schluß muß die Figur aber an den richtigen Platz in der Seekarte gebracht werden.

Ein Vergleich der 3 Lösungen ist instruktiv. Insbesondere zeigt sich, daß man die Aufgabe nahezu ohne Kenntnisse aus der Geometrie lösen kann, falls Pergament zur Lösung verwendet wird.

3. *Landmeßprobleme und Kongruenzsätze*

Vor dem Problemkreis "Schiffahrtsprobleme (2. Teil)" sollte ein Stück "heronischer Meßkunst" behandelt werden, weil die vornehmlich Dreieckskongruenzen nutzenden Verfahren dort und im weiteren oft mit Vorteil Verwendung finden, auch weil die Kongruenzsätze eine häufig *bequeme* und *durchsichtige* Beweisprozedur ermöglichen.

Wir beginnen mit Problemen der Messung unzugänglicher Strecken und Winkel (Hindernisaufgaben). Unsere Lösungen zeigen die besondere Rolle kongruenter und bei maßstäblicher Zeichnung ähnlicher::)Dreiecke. Zur Lösung gewisser Feldmeßprobleme muß ein neues Verfahren zur Herstellung kongruenter Dreiecke erfunden werden. Ein zu einem Dreieck kongruentes wird jetzt aus drei geeigneten Stücken (Strecken, Winkel) direkt zusammengebaut ohne explizite Angabe einer K-Abbildung. Herauspräpariert wird ein Stück Theorie mit den Kongruenzsätzen für Dreiecke als Kern.

3.1 *Schornsteinhöhe*

Lösung im Gelände:
Drehung des vertikalen Dreiecks um ab in die Horizontalebene. (Der Schornstein [bc] wird umgelegt gedacht). Der Winkel cab und der rechte Winkel sind zu übertragen. Die "Standstrecke" [ab] bleibt.

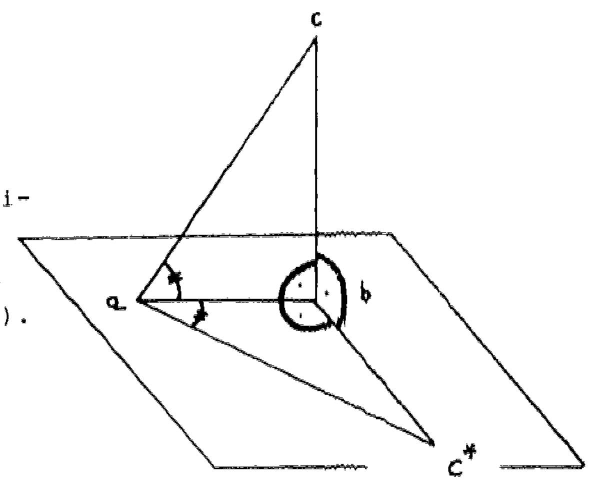


Bild 34

[bc::] kann nun leicht mit dem Meßband vermessen werden. Wegen l[bc::] = l[bc] hat man die gesuchte Schornsteinhöhe gefunden.

::) Die dabei verwendeten Ähnlichkeitsabbildungen müssen an dieser Stelle nicht analysiert werden. Die Schüler sind daran gewöhnt, Zeichnungen von der Tafel mit verändertem Maßstab ins Heft zu übertragen.

3.2 *Flußbreite (mit der Hutkrempe vermessen)*

Am Ufer stehend zieht man den Hut soweit ins Gesicht, bis sein Krempenrand mit dem gegenüberliegenden Ufer zur Deckung kommt. Danach macht man eine Schwenkung um 90°, merkt sich die Stelle am Ufer, die der Krempenrand jetzt anzeigt, und schreitet die Entfernung zu dieser Stelle ab. Soviel Schritte ist auch der Fluß breit.

3.3 *Teich als Hindernis*

Wie lang ist [bc]?
Lösung: a) durch Spiegelung an der Achse ab (= Drehung im Raum um 180° um die Drehachse ab): $l[bc] = l[bc^{*}]$
b) durch Halbdrehung (in der Ebene) um a: $l[bc] = l[b^{**}c^{**}]$

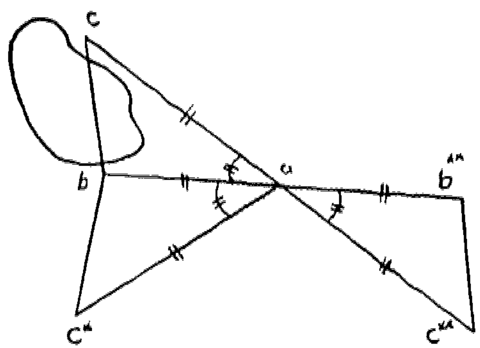


Bild 35

Natürlich gibt es weitere sehr einfache Lösungen. Mit dem Winkelspiegel lassen sich leicht rechte Winkel im Gelände abstecken. Die nebenstehende Rechteckslösung liegt nahe: $l[bc] = l[ad]$ (Verschiebung)

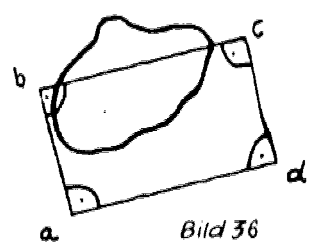


Bild 36

3.4 Die Beispiele 3.1 werden zweckmäßig durch Messungen im Gelände erledigt. Dabei hat man unzugängliche Strecken durch explizit angegebene K-Abbildungen in für Messungen bequeme Lagen gebracht. Die K-Abbildungen werden jedoch nicht nach ihrer Definition durchgeführt wegen der Hindernisse. Stattdessen nutzt man ein neues Herstellungsverfahren für kongruente Dreiecke (Zusammenbau aus geeigneten drei Stücken an gewünschter Stelle; wegen des Winkelsummensatzes für Dreiecke gibt es nur vier Möglichkeiten: sss; sww; sws; sSw).

Noch deutlicher zeigen die folgenden Beispiele die Festlegung von Ähnlichkeitsabbildungen durch Dreiecke. Wir provozieren jetzt (maßstäbliches) Zeichnen im Heft. Dann wird meist keine rechte Möglichkeit gesehen, die Abbildung des Raumes auf die recht willkürlich gewählte Zeichenebene explizit anzugeben. Man verspürt auch kein Bedürfnis, diesbezügliche Überlegungen anzustellen, weil die Festlegung der Ähnlichkeitsabbildung durch ein Dreieck geschehen kann, das in der Zeichenebene zusammengebaut wird. An die Kongruenzsätze für Dreiecke gerät man so zwangsläufig durch Lösen gewisser Feldmessprobleme. Deutlich erkannt wird auch ihr Charakter als (wichtige) Existenzsätze. Sie sagen nämlich aus: Hat man zu einem Dreieck ein anderes aus drei entsprechend gleichgroßen Stücken zusammengebaut, dann *existiert* mindestens eine K-Abbildung, die das eine Dreieck auf das andere abbildet. Für den Fall nichtgleichschenkliger Dreiecke folgt noch, die vermittelnde K-Abbildung ist durch die Dreiecke sogar *eindeutig* festgelegt.

3.5 *Hansensche Aufgabe*

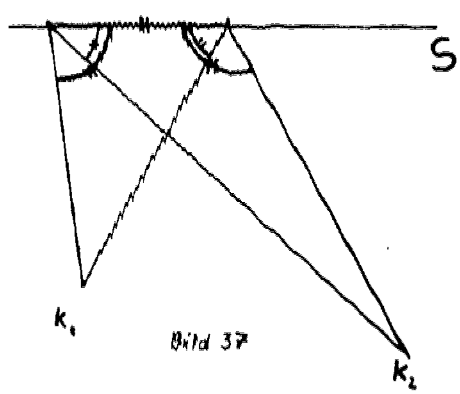


Bild 37

Wie kann man beispielsweise die Entfernung zweier Kirchtürme k_1, k_2 bestimmen, ohne die Straße S zu verlassen?
(Vermessen werden die Stand-

strecke auf S und die markierten Winkel)

3.6 *Tiefenmessung (mit Hindernissen)*

Wie tief liegt die Spitze d der Insel unter dem Festland?
Zeichne mit den Maßen:

$\alpha = 28^\circ$
$\beta = 35^\circ$
$\gamma = 110^\circ$
$l[ab] = 100$ m

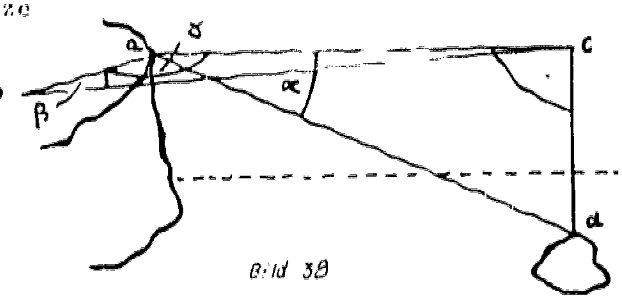


Bild 38

3.7 *Raumdiagonale eines Quaders*

$l[cb] = l[bc^*]$

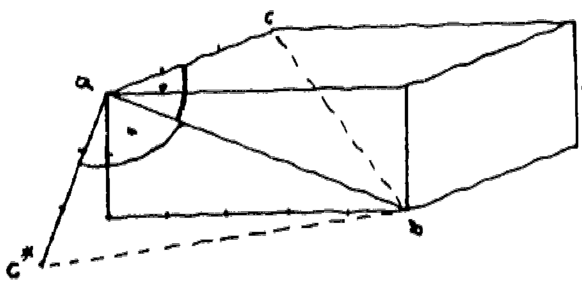


Bild 39

(eventuell ohne Maßstabsänderung)

3.8 Weitere Vermessungsaufgaben (vor allem Peilaufgaben) findet man in den Lehrbüchern unter der Kapitelüberschrift "Trigonometrie". Land- und Seekarten sollten genutzt werden. Ein Ausflug in die Geometrie auf der Kugeloberfläche bringt viel Einsicht in die besonderen Verhältnisse der euklidischen Ebene durch vergleichende Betrachtung (Längenmessung, Richtungsangaben, permanente Kursänderung bei Flügen auf kürzestem Weg, neue Kongruenzsätze, Ähnlichkeit ≡ Kongruenz.

3.9 Auch Ausflüge in die Geschichte der Mathematik haben ihre Reize. Wir wählen als Beispiel den um 530 v.d. Zeitrechnung unter Polykrates durchgeführten *Tunnelbau auf Samos*.

Der Tunnel ist von beiden Enden c und b her voranzutreiben. In welchen Richtungen von c und b aus?[*])
Die Zeichnung zeigt die historische "Ingenieurlösung". Der Berg wird von einem rechtwinkligen Streckenzug von b nach c umfaßt. Aus diesem Streckenzug werden die Kathetenlängen des Dreiecks abc ermittelt. Maßstäbliche Zeichnung liefert die Lösung der Aufgabe.

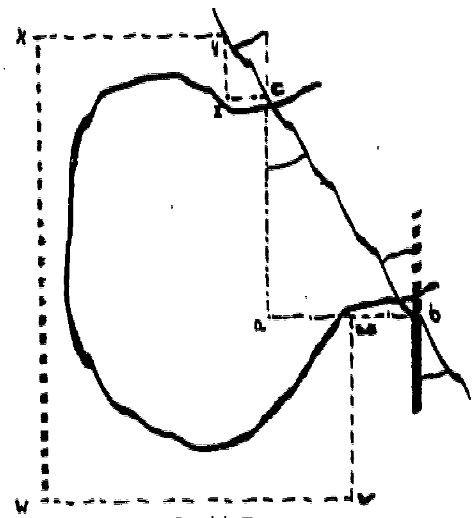


Bild 40

4. *Schiffahrtsprobleme* (2. Teil)

Bootsfahrt auf einem Strom, Spaziergang auf einem Schiff etc. - das sind die originären physikalischen Probleme, deren Lösung in den einfachsten Fällen (konstante Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung) Parallelogrammgitter und Schiebungen des Gitters ausnützen und die grundlegenden Ähnlichkeitsphänomene ins Blickfeld rücken. Wir bringen einige Aufgaben mit ihren Lösungen, in denen das physikalische Unabhängigkeits- und Relativitätsprinzip für Bewegungen Verwendung findet.

4.1 *Eine Fährenfahrt*

Wie steuert man eine Fähre zur Anlegestelle am gegenüber-

---

*) Zunächst wird man alle Punkte c, b, u, v, w, x, y, z auf gleicher Höhe annehmen. Die dreidimensionale Verallgemeinerung liegt auf der Hand.

liegenden Flußufer?

Das ist eine ganz offene Problemstellung. Die Schüler müssen Schwierigkeiten sehen, das Problem durch "vernünftige" Bedingungen allmählich eingrenzen, bevor überhaupt eine hinreichend einfache Lösung erwartet werden kann. Diese Arbeitsphase sollte der Lehrer den Schülern nicht vorenthalten.

Hier hat man viele Schwierigkeiten: den ortsabhängigen Abtrieb, die mögliche Variation der Fährengeschwindigkeit nach Betrag und Richtung, das tatsächliche Manövrieren in der Nähe der Anlagestelle etc.

Schließlich hat man sich eine Aufgabe mit einiger Aussicht auf Lösung zurechtgemacht.

Flußbreite b = 500 m
Abtrieb v_A = 100 $\frac{m}{min}$ (überall auf dem Fluß)
Fahrt in vorgegebener Richtung (Kurswinkel α) mit konstanter Eigengeschwindigkeit v_E = 250 $\frac{m}{min}$
(wenn auch die Fähre so tatsächlich nicht fährt!*)

Wo erreicht die Fähre das gegenüberliegende Ufer?

Zur Lösung muß die kontinuierliche Bewegung zerhackt werden. Nur "äquidistante" Zeitpunkte werden herausgegriffen. Der Fährenweg auf dem Fluß resultiert aus zwei nacheinander ausgeführten Bewegungen: Fahrt bei ruhendem Wasser; danach Korrektur: Abtrieb bei ruhendem Schiff.

Die Kongruenz der Dreiecke ist Grund dafür, daß die resultierende Bahn geradlinig ist (Verfeinerungen des Gitters

*) "Bessere" (praxisnähere) Aufgaben werden später in einem der Analysis zugeordneten Problemkreis präzisiert und gelöst werden müssen. Freilich, Näherungslösungen - z. B. für den Fall ortsabhängigen Abtriebs - sind auch schon an dieser Stelle leicht zu finden mit der oben explizierten Methode.

beachten!)*)

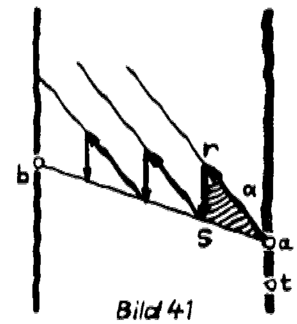


Bild 41

Deshalb braucht man nur das Dreieck ars (oder das Parallelogramm arst) zu zeichnen und findet damit die Fahrspur der Fähre.

Nunmehr sind Parallelogrammkonstruktionen auch für Variationen der Aufgabe leicht zu finden; z. B. gegeben a, b, v_A , α; gesucht v_E)

4.2 *Einfangen in kürzester Zeit*

Ein Motorboot M soll ein im Fluß treibendes Ruderboot R abfangen.

Wir grenzen hier sogleich ein.

M soll auf gerader Bahn mit Vollgas fahren (200 $\frac{m}{min}$).
Der Abtrieb beträgt 80 $\frac{m}{min}$.

Weitere Daten bringt das Bild
(a Ort von M vor Abfahrt;
b Ort von R bei Abfahrt von M)

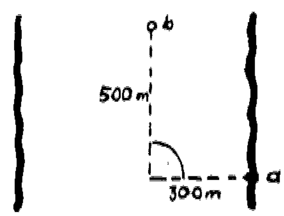


Bild 42

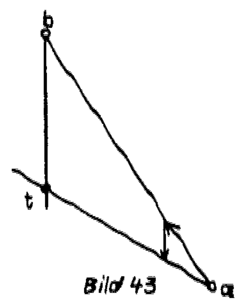


Bild 43

Zur Lösung: Ohne Strömung führe M geradewegs von a nach b. Diese Bahn ist wegen des Abtriebs zu korrigieren (s. Bild 43). (Kollision der beiden Boote in t).

---

*) Unsere Fährenfahrt hat uns damit auf eine Idee gebracht, die bekannten Beweisen von Ähnlichkeitssätzen für Dreiecke im kommensurablen Fall zugrundeliegt. Im übrigen erinnern wir uns an den Satz von der Treppe im Problemkreis "extremale Rechtecke".

Fragen hinterher - die Schüler sollten sie stellen!

a) M will mit Schneckentempo fahren. Kann dann R eingefangen werden?

b) Offenbar hätte M R auf kürzerem Weg einfangen können, wenn es nach u gefahren wäre und dort gewartet hätte (Einfangen in *längerer* Zeit; Bild 44). Wie muß die Eigengeschwindigkeit von M gewählt werden, um R in kürzester Zeit auf kürzestem Weg einzufangen?
Die Lösung benutzt wieder die Zusammensetzung zweier Bewegungen (Parallelogrammregel - Bild 44)

c) Man schreibt M die Fahrspur vor, nicht aber den Betrag der Eigengeschwindigkeit. Welche Fragen ergeben sich?

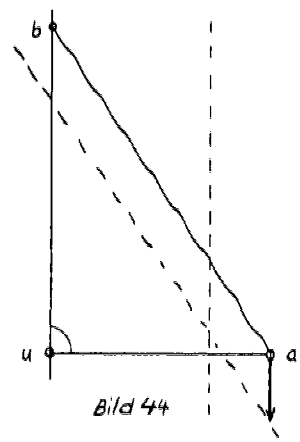


Bild 44

Wir merken wenigstens noch an, daß die Veränderung der Ausgangsdaten zu Fragen der Existenz von Lösungen führt.

4.3 *Schiffe auf Kollisionskurs*

Wir wechseln die Szenerie, begeben uns aufs offene Meer und beginnen mit einer besonders einfachen Aufgabe.

a) In Bild 45 sind die Fahrspuren zweier Schiffe, ihre Anfangspositionen a_1, a_2 und die Geschwindigkeit $v_1 = \overrightarrow{a_1b_1}$ des 1. Schiffes eingetragen. Gesucht ist $|v_2|$ so, daß

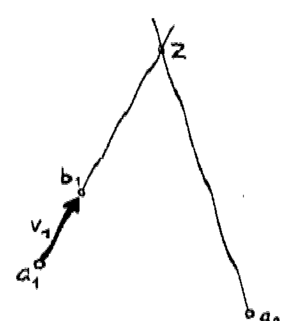


Bild 45

die beiden Schiffe in Z zusammenstoßen. Lösung: Nach vorheriger (hilfreicher) Eingabelungslösung (s. S. 72) wird eine "exakte" Lösung gesehen. (Bild 46).

Wiederum ist ein Ähnlichkeitssachverhalt (Strahlensatz) erfaßt und zugleich die Idee zu einer möglichen Begründung mit Hilfe kongruenter Dreiecke (im kommensurablen Fall).

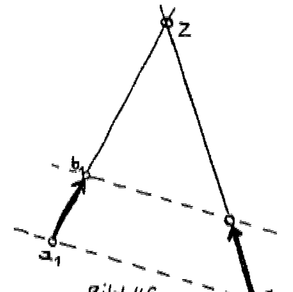


Bild 46

b) Wir variieren die Aufgabe (s. Bild 47). Gegeben sind jetzt die Anfangspositionen und die Geschwindigkeit v_1 und $|v_2|$. Gesucht ist der Kollisonskurs des 2. Schiffes, das auf einer Geraden fahren soll.

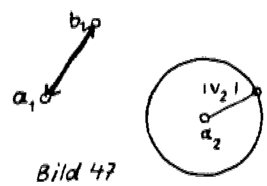


Bild 47

Eine einfache Parallelogrammkonstruktion löst die gegebene Aufgabe. Wir dürfen das dem Leser überlassen nach Hinweis auf 4.2 und 4.4.

Viel schwieriger ist die elementargeometrische Lösung des folgenden Problems, das wir dem Leser zu Lösungsversuchen offerieren: Ein Schiff S_1 fährt mit dem Betrag nach konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreis um ein nicht in seinem Mittelpunkt ruhendes Schiff S_2. S_2 will S_1 torpedieren. Der Betrag der Torpedogeschwindigkeit $|v_T|$ ist bekannt. In welche Richtung muß geschossen werden?

4.4 *Eine Extremalaufgabe*

Zwei Schiffe fahren mit den konstanten Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2. Bekannt sind auch ihre Anfangspositionen (s. Bild 48)

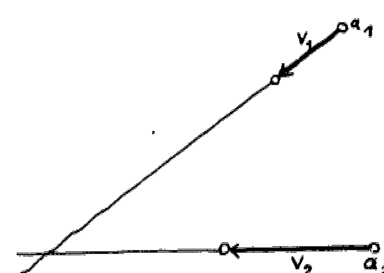


Bild 48

Wann haben die Schiffe kleinsten Abstand voneinander?

Eine elegante Lösung nützt die Relativität der Bewegung entscheidend aus.

Das Problem wird zunächst spezialisiert*): S_1 ruht, nur S_2 fährt. Die Lösung ist in diesem Fall trivial. Im Punkte b (Lotkonstruktion) ist die Distanz der beiden Schiffe minimal (Bild 49).

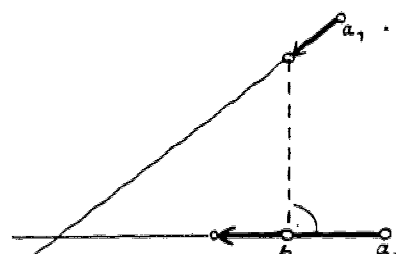


Bild 49

Allgemeine Lösung:
Die von der Zeit abhängige Distanz der beiden ändert sich nicht, wenn die ganze Ebene einer Translation unterworfen wird. Diese Translation wird so eingerichtet, daß S_1 seinen Ort a_1 nicht verändert. Die resultierende Bahn für S_2 ergibt sich dann aus dem Geschwindigkeitsparallelogramm (Bild 50). Die Lotkonstruktion aus dem Spezialfall wird jetzt anwendbar und liefert den Punkt b. Dann wird das im Bild schraffierte Parallelogramm gezeichnet. In seinen Eckpunkten c und d haben die beiden Schiffe minimale Distanz. Das ist der Fall nach $\frac{l(ca_2)}{|v_2|}$ Zeiteinheiten.

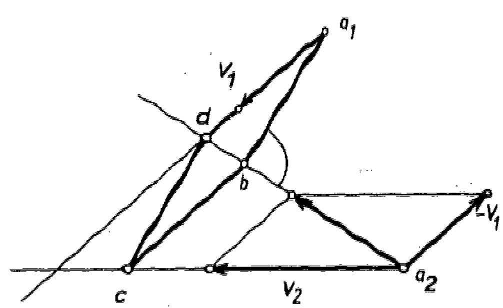


Bild 50

*) Beim Problemlösen häufig anzuwendende Methode: erst Lösung einiger Spezialfälle, dann Versuch, die speziellen Lösungsverfahren auszunutzen zu einer allgemeinen Lösung.

5. *Billardprobleme und extremale Wege*
Erzeugung der Kongruenzabbildungen durch Verketten von Spiegelungen

5.1 *Ein Maßproblem*

Das folgende Einstiegsproblem ist zwar wenig praktisch, aber überaus reizvoll. Die Arbeit an ihm kommt den späteren Treffproblemen beim Billardspiel sehr zugute. Ihre Lösungen brauchen dann nicht mehr vom Himmel zu fallen.

Bild 51 zeigt einen rechteckigen Billardtisch mit den Maßen 5 und 7 Längeneinheiten. In den Ecken II, III und IV befinden sich Löcher. Die aus der Ecke I eingeschossene Kugel verläßt den Tisch nach 9 Reflexionen an den Banden in der Ecke II.

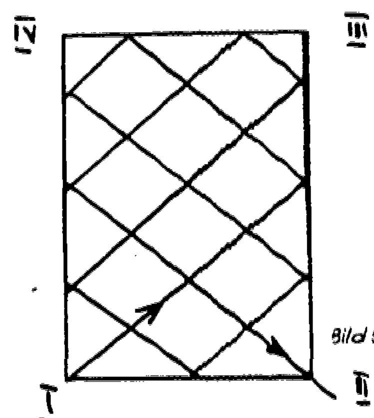


Bild 51

Aufgabe: Zeichne die Bahn der Kugel auf einem Tisch mit m und n Längeneinheiten und der Einschußhöhe h Längeneinheiten ($m, n, h \in \mathbb{N}$; $n \leq m$; $h \leq n$). Verschwindet die Kugel wieder in einem Loch? Anzahl der Reflexionen an den Banden?

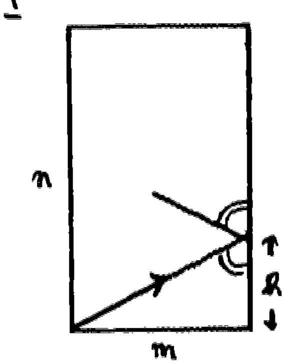


Bild 52

Die Aufgabe wird mit bestimmten natürlichen Zahlen in Gruppenarbeit gelöst. Die einzelnen Gruppen erhalten Arbeitskarten mit Arbeitsanweisungen.*)

Danach werden die Ergebnisse der Gruppen gesammelt. In

*) Wir zeichnen auf kariertes Papier, ersparen uns Winkelmessungen und machen damit auch einen ersten Schritt auf die Lösung zu.

allen Fällen wird beobachtet:

a) die Bahn der Kugel erzeugt stets ein Rautenmuster auf dem Tisch (am Rande Halbrauten),

b) die Kugel verschwindet stets in einer von der Ecke I verschiedenen Ecke.

(Warum nie in Ecke I?)

Ferner erhalten wir eine Zuordnungstafel für drei Funktionen L, B, A der drei Variablen m, n, h.

Tischlänge n Einheiten	Tischbreite m Einheiten	Einschußhöhe h Einheiten	Anzahl der Reflexionen an Längsseiten L(n,m,h)	Anzahl der Reflexionen an Breitseiten B(n,m,h)	Austrittsecke A(n,m,h)
5	3	2	4	1	II
12	9	5	11	4	IV
12	9	8	2	1	II
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

(Der Leser mag sich selbst eine genügend umfangreiche zu Vermutungen provozierende Tafel herstellen!)

Vermutungen aufgrund der tabellierten Ergebnisse:

c) Keine der drei Funktionen hängt von der Tischbreite ab.

Für teilerfremde Zahlen n und h gilt:

d) $L(n,h) = n-1$

$B(n,h) = h-1$

e) L(n,h) und B(n,h) sind nie zugleich ungerade Zahlen.

f) A wird durch die Wertetafel beschrieben

L(n,h) \ B(n,h)	gerade	ungerade
gerade	III	II
ungerade	IV	-

g) Allgemein gilt auch für nichtnotwendig teilerfremde Zahlen n und h:

$$L(n,h) = \frac{n}{ggT(n,h)} - 1; \quad B(n,h) = \frac{h}{ggT(n,h)} - 1$$

Anmerkungen zum Nachweis der Vermutungen:

zu a) Eine abbildungsgeometrische Argumentation verwendet folgende Sätze: Die Verkettung zweier Spiegelungen an parallelen (senkrechten) Geraden erzeugt eine Verschiebung (Halbdrehung). Verschiebungen und Halbdrehungen überführen Geraden in parallele Bildgeraden. Die entsprechende euklidische Argumentation stützt sich auf Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen.

zu b) In der Ecke I könnte der Ball nur verschwinden, wenn er nach irgendeiner Reflexion seine Bahn rückwärts durchliefe. (Warum tritt das aber nie ein?)

zu c) Man überlege sich die Wirkung einer Dehnung des Tisches in Richtung der Breitseite!

zu d) bis g) Bild 53 zeigt (in jedem Falle): ein Maßvergleich zwischen der Einschußhöhe und der Tischlänge ist Schlüssel zum Verständnis. Gesucht ist das kgV(n,h). Damit ist nebenbei noch ein origineller Algorithmus zur Bestimmung des kgV zweier Zahlen gefunden:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{-\ \ 9} \\ 3 \\ \underline{+\ 12} \\ 15 \\ \underline{-\ \ 9} \\ 6 \\ \underline{+\ 12} \\ 18 \\ -\ \ 9 \\ \underline{-\ \ 9} \\ 0 \end{array}$$

Aus der Rechnung folgt:
$4 \cdot 9 = 3 \cdot 12 = \text{kgV}(9,12)$
(Der bei der Rechnung auftretende kleinste von Null verschiedene Rest ist der ggT der beiden Zahlen; hier $\text{ggT}(9,12) = 3$)

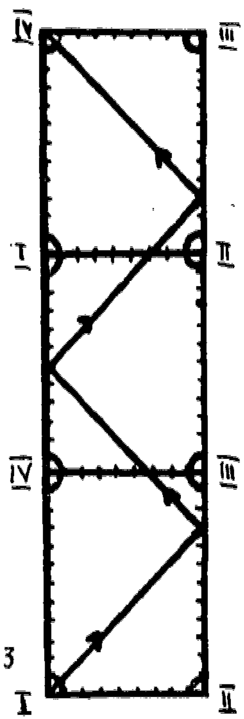


Bild 53

Wir sehen jetzt unmittelbar:

(1) $(L(n,h)+1) \cdot h = \text{kgV}(n,h)$

Aber – die Auswertung der Wertetafel brachte die Vermutung:

(2) $L(n,h) = \dfrac{n}{\text{ggT}(n,h)} - 1$

So geraten wir an den hübschen (und wichtigen) zahlentheoretischen Satz:

(3) $\text{kgV}(n,h) \cdot \text{ggT}(n,h) = n \cdot h$ (für alle $n, h \in N$)

Stimmt dieser Satz, dann ist unsere Vermutung bezüglich der Funktion L abgesichert. Aber welche Gründe können wir für das Gelten dieses zahlentheoretischen Satzes vorbringen?

Anmerkung:

a) Der kundige Leser wird wissen, daß er damit dem Teufel den kleinen Finger reicht - oder er wird sich mit einer "Billardbegründung" begnügen. Weil bei vorgegebener Tischlänge und Einschußhöhe die Anzahl der Reflexionen an den Banden nicht von der Längeneinheit abhängt, mit der die Tischlänge und Einschußhöhe ganzzahlig anzugeben sind, gilt:

(4) $L(Z \cdot n, Z \cdot h) = L(n,h)$ für alle $Z, n, h \in N$

Der Leser überlege selbst, wie diese offensichtliche Invarianzeigenschaft von L zur Begründung von (3) verwendet werden kann!

b) Die Billardaufgabe ist vorzüglich zum Einstieg in einen den Maßvergleichen gewidmeten Problemkreis verwendbar. Ein Maßprobleme betreffender Aufsatz des Verfassers erscheint demnächst in dem MU-Heft: Problemorientierter Unterricht I (Klett-Verlag)

5.2 *Stoßprobleme (auf rechteckigen Tischen)*

Die Kugel im Punkte p soll die Kugel in q nach Reflexion an gewissen vorgeschriebenen Banden (zentral) treffen.
Die Lösung des einfachsten Stoßproblems hat schon 5.1 vorbereitet

Der Zielpunkt ist qS_A (der Bildpunkt von q bei Spiegelung an der Geraden A).

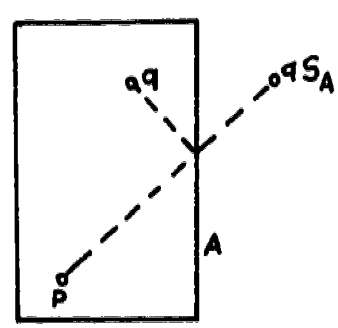


Bild 54

Die stoßende Kugel soll erst an der Bande A, dann an der parallelen Bande B reflektiert werden und danach treffen. Die Lösung ist aus der folgenden Zeichnung zu entnehmen.

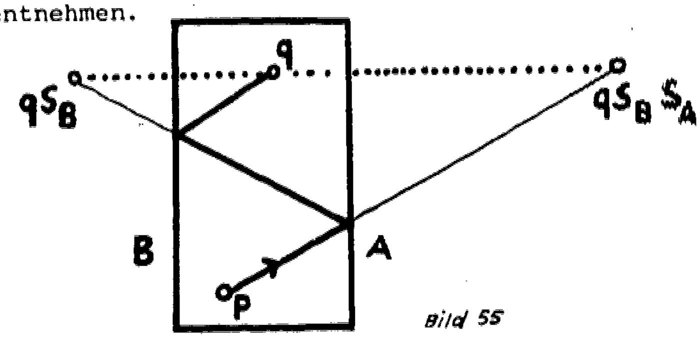


Bild 55

S_BS_A bezeichnet die Verkettung (das Nacheinanderausführen) der Spiegelungen S_B und danach S_A. Zielpunkt ist jetzt qS_BS_A.[*)]

Variation der Lage der zu stoßenden Kugel (q) läßt die Schüler vermuten: Der Zielpunkt kann erheblich einfacher gefunden werden. Von q aus ist ein Pfeil zu zeichnen: senkrecht zu A, doppelt so lang wie die Tischbreite mit Richtung auf A hin. Die Spitze des Pfeils weist auf den Zielpunkt. Das sind aber die eine Verschiebung kennzeichnenden Eigenschaften.

Auch im Falle, daß die Kugel in p nacheinander an zwei benachbarten Banden reflektiert werden soll, bevor sie auf die Kugel in q trifft, läßt sich der Zielpunkt schneller finden.

Es gilt nämlich: $qS_CS_A = qH_e$ (Zielpunkt ist der Bildpunkt von q nach Halbdrehung um die Ecke e; H_e bezeichnet die Halbdrehung)

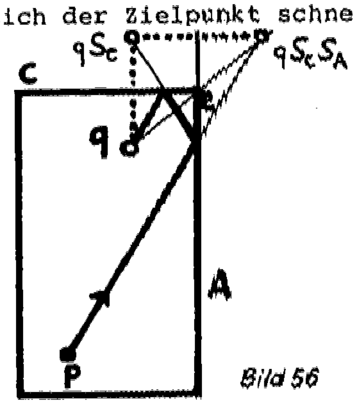


Bild 56

*) Wer lieber mit der Verkettung S_AS_B arbeiten möchte, weil zuerst an der Bande A reflektiert werden soll, kann die "Umkehrbarkeit des Lichtweges" ausnutzen.

(Beim Billardspiel auf einem Dreieckstisch gerät man so an die Verkettung zweier Spiegelungen an zwei sich schneidenden Achsen zu einer Drehung um den Schnittpunkt der Achsen.)

Gleitspiegelungen*) ergeben sich auf natürliche Weise, wenn Reflexionen an zwei parallelen Banden und danach an einer dazu senkrechten Bande vorgeschrieben werden.

5.3 *Treffbereiche*

Verkettete Spiegelungen wenden wir an zur Ermittlung der Treffbereiche bei Reflexion an vorgeschriebenen Banden und fester Lage der stoßenden Kugel

Beispiel: Die Kugel in p soll nacheinander an A, B und C reflektiert werden und danach die zweite Kugel treffen. In der folgenden Zeichnung ist der Treffbereich schraffiert gezeichnet. In ihm muß sich die zu treffende Kugel aufhalten.

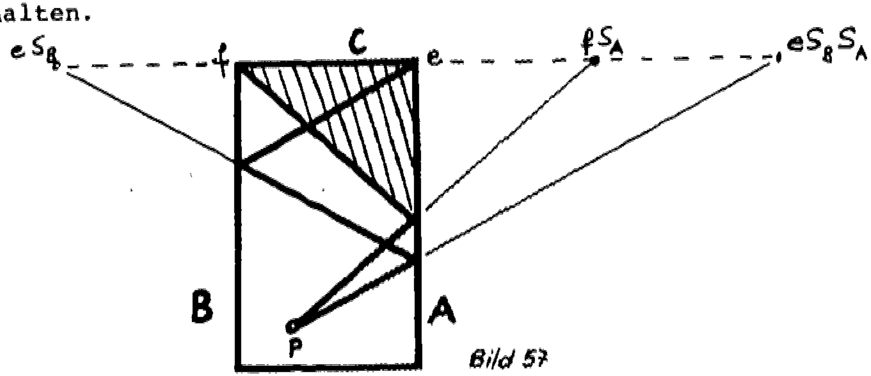


Bild 57

5.4 *Anmerkung zur Theorie der K-Abbildungen*

Die reizvolleren Aufgaben aus dem Problemkreis Billard fehlen noch. Wir können aber hier einen Einschnitt machen und ein erstes Stück "Theorie der K-Abbildungen" aus unseren Billard- und Feldmeßproblemen

*) Die Verkettung einer Schiebung mit einer Spiegelung an einer zum Schiebungspfeil parallelen Achse ist per Definition eine Gleitspiegelung.

und ihren Lösungen herauspräparieren. Wir suchen Überblick über unsere bisherigen Kenntnisse aus dem Themenkreis "Kongruenz" zu gewinnen, verallgemeinern, systematisieren, definieren, lenken unseren Blick auf Begründungszusammenhänge. Einstweilen interessieren uns aber Ausweitungen des Problemkreises "Billard" mehr.

5.5 *Periodische Bahnen (auf rechteckigem Tisch)*

Wir unterscheiden rücklaufende und rundlaufende periodische Bahnen. (In den Ecken des Tisches wird die dort ankommende Kugel verschluckt.) Rücklaufende Bahnen sind beim Rechteckstisch Trivialfälle (s. Bild 58).
Die einfachste rundlaufende Bahn ergibt sich bei Einschuß parallel zu einer Tischdiagonalen (s. Bild 59).
(Warum?)

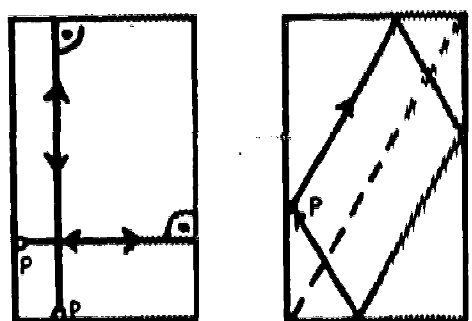


Bild 58 *Bild 59*

Wir geben eine weitere rundlaufende Bahn (samt Konstruktion) an.

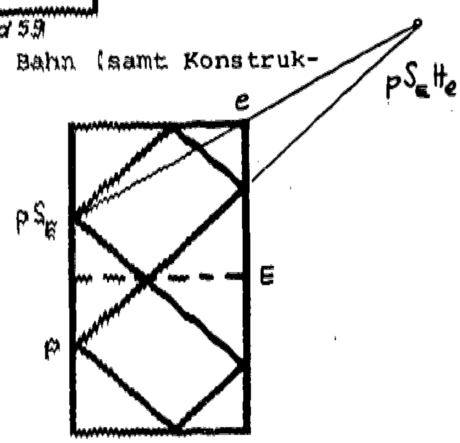


Bild 60

Wie findet man weitere rundlaufende Bahnen mit p als Anfangspunkt?

5.6 *Periodische Bahnen (auf nichtrechteckigen Tischen)*

Wir weisen auf einige Möglichkeiten hin.

5.6.1 *Dreieckstische*

(Nun werden nicht nur Halbdrehungen und Schiebungen durch Verketten zweier Spiegelungen erzeugt, sondern auch andere Drehungen.) Rücklaufende Bahnen bei gleichschenkligen Dreiecken geben insbesondere zu den folgenden Fragen Anlaß:

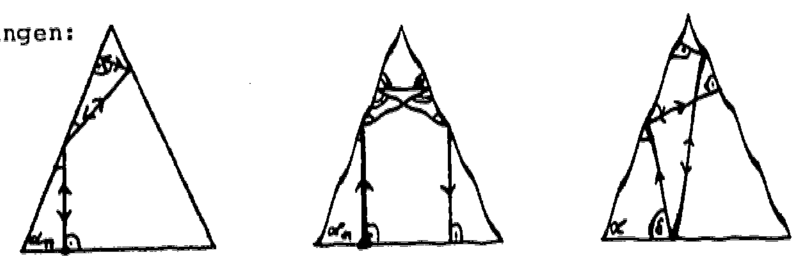
a) Wie groß muß der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sein, damit eine senkrechte von der Basis abgeschossene Kugel nach n-maliger Bandenspiegelung senkrecht auf einen Schenkel trifft?

b) Wie groß muß der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sein, damit eine senkrecht von der Basis abgeschossene Kugel nach n-maliger Bandenspiegelung parallel zur Basis verläuft?

c) In welcher Beziehung müssen Basiswinkel und Abschußwinkel stehen, damit nach n-maliger Bandenspiegelung an den Schenkeln, die Kugel senkrecht auf einen Schenkel trifft?

Bild 61

Lösungen:



$\alpha^\circ_n = \frac{n-1}{2n-1} \cdot 180^\circ$ $\alpha^\circ_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot 90^\circ$ $\delta^\circ = (2n-1)\ (90^\circ - \alpha^\circ)$

Schießt man beim gleichseitigen Dreieck parallel zu einer

Bande ein, so entsteht ein rundlaufender Weg. Eine Scherung (parallele Geraden gehen dabei in parallele über) bringt daraus einen eigentümlichen (affinen) Sachverhalt - den *Schließungssatz von Thomsen* - ans Licht: Bewegt man sich in einem (beliebigen) Dreieck parallel zu den Dreiecksseiten, so entsteht ein geschlossener Weg.

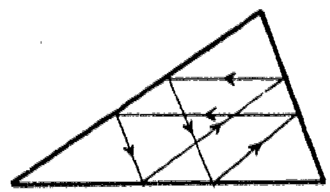


Bild 62

5.6.2 *(Nichtrechteckige) Viereckstische*

Die Frage nach Viereckstischen, in denen einfache rundlaufende Wege existieren, führt uns überraschend zu den Vierecken mit Umkreis und damit in das Feld der Kreiswinkelsätze.*)

5.6.3 *Kreistische***)

Die rundlaufenden Bahnen liefern die Sternvielecke. Die

---

*) Problemorientierter Unterricht ist immer in der Gefahr auszuufern. Dem muß der Lehrer durch Ausgrenzungen begegnen. Das fällt ihm nicht schwer, wenn er andersartige Probleme auf Lager hat, die einen neuen Problemkreis konstituieren. Im schon erwähnten MU-Heft: problemorientierter Unterricht II (Klett-Verlag) wird auch ein Aufsatz über Kreiswinkelsätze erscheinen.

**) Schon das einfachste Treffproblem - nach einmaliger Reflexion - soll eine Kugel in p die Kugel in q treffen - ist für Kreistische nicht so leicht zu lösen, sofern man von Eingabelungen als Lösung absieht. (Billardproblem des Arabers Alhazen um 1000 n.d.Zeitrechnung). Eine nichttriviale Lösung für gleichweit vom Mittelpunkt des Kreistisches entfernte Kugeln zeigt Bild 63

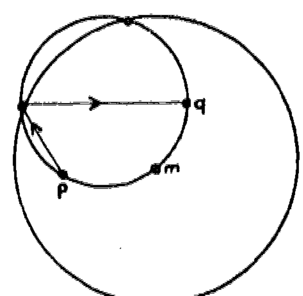


Bild 63

regelmäßigen Vielecke sind davon Sonderfälle. Das ist wieder ein Problem des Maßvergleichs. (Vergleiche 5.11 Inkommensurabilitäts-, Rektifizierungs- und Zirkel-Lineal-Kreisteilungsfragen sind später in eigenen Problemkreisen zu erledigen.)

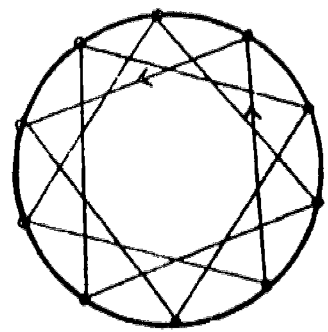


Bild 64

5.7 *Extremale Wege (auf den Spuren Fermats)*

Beim Billardspiel hatten wir bislang die Winkelbedingung für die Reflexion an einer Bande im Auge. Jetzt werden extremale Wege gesucht und der Zusammenhang mit Spiegelungen hergestellt (Fermat). Das gibt eine schöne Problemkette.

5.7.1 Wir beginnen mit dem *Flugplatzproblem.*

Ein Flugplatz f soll zwischen den vier Städten a, b, c, d so plaziert werden, daß die vier zum Flugplatz führenden Straßen zusammen möglichst kurz werden. Im gezeichneten Fall*) ist f offenbar schlecht gewählt. Der Schnittpunkt der Geraden ac und bd liefert das kürzeste Straßennetz. Man holt aus diesem Problem die wichtige Dreiecksungleichung heraus: $l[xy] + l[yz] \geq l[xz]$.

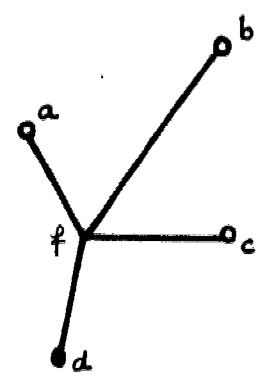


Bild 65

5.7.2 Danach stellen wir das *Feuerwehrproblem.*

*) Welche anderen Fälle und Lösungen gibt es?

In der Mühle m brennt es. Die Feuerwehr muß vom Spritzenhaus h querfeldein zum Bach B fahren, dann zur Mühle. Kannst Du den eingezeichneten Fahrweg verkleinern?

Die Idee, daß hier ein "halbes" Flugplatzproblem vorliegt, liefert für einen geraden Bach (für einen krummlinigen Bach sind neue Überlegungen nötig) - sogleich die bekannte Spiegelungslösung.

Zugleich ist damit eine Spiegelungskonstruktion für die Ellipsentangente in einem vorgegebenen Ellipsenpunkt gegeben.*)

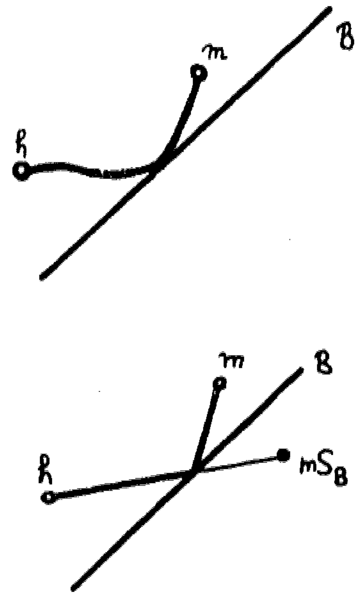


Bild 66

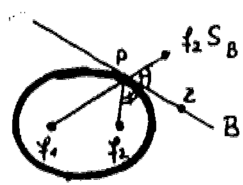


Bild 67

Die Tangente B durch den Berührungspunkt p - sie entspricht dem Bach in der vorigen Aufgabe - ist die nicht durch die Strecke $[f_1f_2]$ gehende Winkelhalbierende der Geraden f_1p und f_2p. Für alle von p verschiedenen Punkte z auf B gilt:
$l[f_1z] + l[zf_2] > l[f_1p] + l[pf_2]$.
z ist demnach kein Ellipsenpunkt.**)

---

*) Die Ellipse ist wie üblich nach Gärtnerart definiert: Zwei Pflöcke sind in f_1 und f_2 eingerammt. An ihnen ist ein Faden der Länge s ($s > l[f_1f_2]$) angebunden; er wird strammgezogen. der Knickpunkt beschreibt eine Ellipse. (Das läßt sich natürlich auch bequem in der Sprache des Billardspiels formulieren).

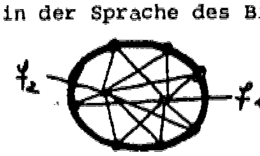


Bild 68

**) Eine analoge Argumentation wird im Falle des Kreises für die Kreistangente geführt.

5.7.3 Danach wird das *Indianerproblem* angepackt.
Der Indianer will Holz und Wasser holen und auf kürzestem Weg zum Zelt bringen. (Doppeltes Feuerwehrproblem! Warum geht er erst zum Waldrand, dann zum Seeufer?)

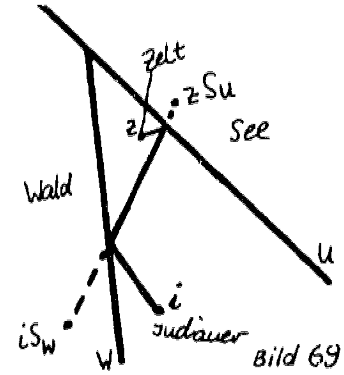


Bild 69

5.7.4 Schließlich präsentieren wir das berühmte *Fagnano-Problem* (1775 gestellt): Einem (spitzwinkligen) Dreieck ein Dreieck kleinsten Umfangs einzubeschreiben, und schildern einen Entwicklungsgang (Unterrichtsverlauf) der Lösung.

a) Wir fangen mit irgendeinem einbeschriebenen Dreieck uvw an. Wir haben noch die Lösung der Feuerwehraufgabe im Kopf. Sie liefert uns ein Verfahren, ein umfangkleineres einbeschriebenes Dreieck uvw_1 zu finden (das umfangkleinste unter allen einbeschriebenen Dreiecken mit den festgehaltenen Ecken u und v - siehe Bild 7o).

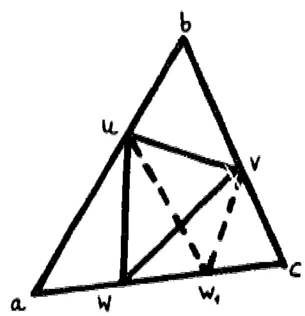


Bild 70

b) Dieses Verkleinerungsverfahren versagt nur bei einem Dreieck xyz, das als rundlaufende Dreiecksbahn auf dem Billardtisch abc aufgefaßt werden kann (Winkelbedingung). Gibt es überhaupt so ein Dreieck xyz; gibt es verschiedene solche Dreiecke? Die Charakterisierung als rundlaufende Dreiecksbahn gibt höchstens Anlaß zur Konstruktion fortgesetzter umfangskleinerer Dreiecke (Kette von Näherungslösungen). Das befriedigt uns nicht.

Wir versuchen umgekehrt zu einer vorgegebenen rundlaufenden Dreiecksbahn den passenden Dreieckstisch zu zeichnen. Wir benutzen dabei die Einfallslote und bemerken, daß sie ziemlich genau durch die Ecken des Dreieckstisches gehen (s. Bild 71).

Wir vermuten: Unser Verkleinerungsverfahren versagt beim Höhenfußpunktsdreieck und nur bei diesem.

c) Das Höhenfußpunktsdreieck ist das einzige einbeschriebene Dreieck, zu dem das obige Verfahren kein umfangkleineres herzustellen gestattet. Also ist das Höhenfußpunktsdreieck die Lösung des Fagnano-Problems. (Schade, daß die Logik nicht stimmt. Der Lehrer bietet seinen Schülern einen analogen Schluß an: Alle Stammbrüche ($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ...) außer $\frac{1}{1}$ lassen sich durch Quadrieren verkleinern. Also ist $\frac{1}{1}$ der kleinste Stammbruch)

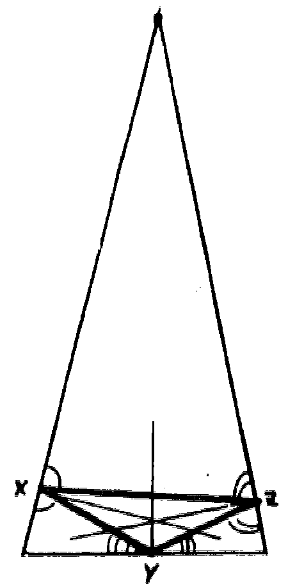


Bild 71

d) Leider ist nicht leicht einzusehen, daß das Höhenfußpunktsdreieck die Winkelbedingung erfüllt. (Vor allem dann nicht, wenn die Kreiswinkelsätze noch nicht behandelt sind.) Außerdem sind wir durch die Überlegung in c) irritiert. Wir sind zwar nicht mehr so ahnungslos wie zu Anfang, sind aber in eine Sackgasse geraten. Vielleicht sollten wir das Problem von einer anderen Seite her anpacken? Kann vielleicht die Lösung des Indianerproblems einen neuen Zugang eröffnen?

e) Mit z = i im Indianerproblem hat man schon an zwei Ecken des einbeschriebenen Dreiecks die Winkelbedingung für einen rundlaufenden Weg erfüllt (s. Bild 72). Aus 5.7.3 wissen wir, daß unter allen einbeschriebenen Dreiecken mit dem festen Eckpunkt i das nebenstehend gezeichnete ikl kleinsten Umfang hat.

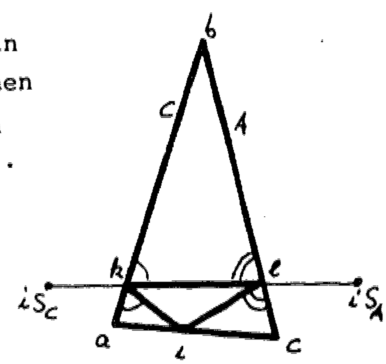


Bild 72

Überdies hat man den Umfang "ausgestreckt". Die Strecke $[iS_C iS_A]$ hat gerade die Länge des Umfangs. Variation von i auf der Seite [ac] liefert verschieden lange Strecken $[iS_C iS_A]$. Wir suchen die kürzeste unter ihnen. Wir bemerken anhand einer Zeichnung, daß $l[iS_C iS_A]$ gleichsinnig mit l[bi] wächst und erkennen den Grund dafür (wegen der Spiegelungen sind die Dreiecke $iS_C biS_A$ stets gleichschenklig und haben gleiche Winkel an ihrer Spitze b). Der Rest der Lösung liegt auf der Hand. Das Höhenfußpunktsdreieck ist tatsächlich die (einzige) Lösung des Fagnanoproblems.

6. *Archimedische und pythagoräische Fliesenlegerprobleme*

Vom Fliesenleger ist die Rede, weil alle hier behandelten Probleme mit Pflasterungen der ganzen Ebene oder Kugelfläche oder gewisser Teile davon mit kongruenten regulären Vielecken zu tun haben. In allen Fällen gibt die geometrische Problemstellung Anlaß, zahlentheoretische Methoden zur Lösung zu entwickeln. Die archimedischen Parkette führen auf ganzzahlig zu lösende Gleichungen und Ungleichungen (diophantische); pythagoräische Maßprobleme (in neuem Gewande; Din-Papier, reguläres Zehneck) sind Motiv, mittels rekursiver Folgen quadratische Irrationalitäten rational zu approximieren. Für die rekursiv definierten Folgen lassen sich mit den einfachsten Mitteln der linearen Algebra dann auch explizite Darstellungen finden.*)

In den Umkreis der pythagoräischen Maßprobleme gehören auch die elementaren euklidischen Maßprobleme "Billard" und "Bradwardinsche Sternvierecke" (s. Problemkreis 5), aber auch "Bachets Wäge- und Geldwechselprobleme", "Huygens Zahnradprobleme".

---

*) Solche reizvollen Anwendungen der linearen Algebra - einfache Lösungsidee, keine verwickelte Rechnung, nichttriviales Ergebnis (Binet 1843) - sucht man meist vergeblich.

6.1 *Archimedische Parkette*

Die platonischen Parkette der Ebene übergehen wir. Sie sind zu langweilig. Drei-, Vier- und Sechsecksparkettierungen sind möglich (und existent), andere sind unmöglich. Interessanter ist schon der Versuch, regelmäßige *ebene* Vielecke verschiedener Sorten längs ihrer Kanten (Seiten) passend zu verheften, wie z. B. in der Bild 73.

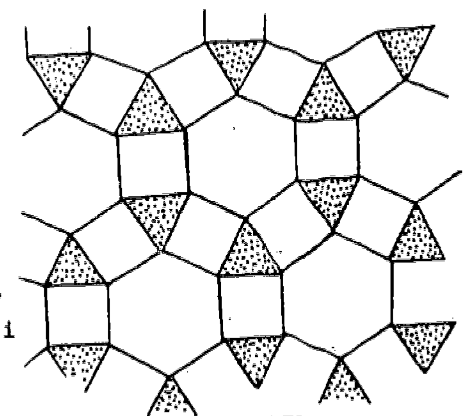


Bild 73

Wir beschreiben diese Parkette und fassen damit den Begriff "archimedisches Parkett der Ebene (Kugel)":

a) 2 (oder mehr) Sorten regelmäßiger Vielecke sind zur lückenlosen, überlappungsfreien Überdeckung der Ebene verwendet.

b) jede Vieleckskante gehört zwei Vielecken an.

(Das hat natürlich Folgen: *Alle* Kanten sind gleichlang; auch die von Vielecken aus verschiedenen Sorten unterscheiden sich nicht in der Länge; Vielecksecken können nur mit anderen Vielecksecken inzidieren, nicht mit inneren Punkten einer Kante, etc.)

c) Alle Ecken des Parketts sind 'gleich' im folgenden präzisen Sinne: jede Kongruenzabbildung (der Ebene oder Kugel), die bloß die an einer Ecke hängenden Kanten auf die an einer anderen Ecke hängenden wirft,

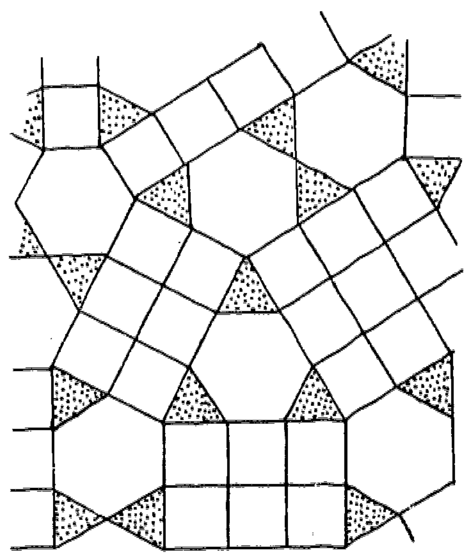


Bild 74

ist eine Deckabbildung des ganzen Netzes.*)

Die Schüler machen Legeübungen mit ausgeschnittenen regulären Vielecken, finden einige archimedische Parkette, vielleicht *alle*. Wahrscheinlich gibt es nur wenige Klassen, wenn man ähnliche archimedische Parkette nicht unterscheidet.

Das Problem ist schon formuliert!

In seiner Lösung muß man gewiß die Winkelgrößen der regulären Vielecke benutzen. Das sind Bruchteile des vollen Winkels, dem wir die Maßzahl 1 zuordnen.**)

Mit dem Winkelsummensatz hat man sofort (s. Bild 75) für den Eckenwinkel eines regulären n-Ecks die Maßzahl:

$$W = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \qquad (1)$$

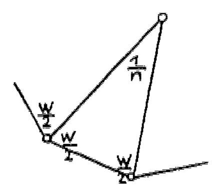


Bild 75

Alle in einer Ecke zusammenstoßenden Vielecke geben einen vollen Winkel:

$$1 = \sum_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right) \cdot f_i \qquad (2),$$

wobei f_i die Anzahl der n_i-Ecke angibt, die am gleichen Eckpunkt im Parkett hängen.

In unserem Parkett (Bild 74) hat man: $n_1 = 3;\ f_1 = 1$
$n_2 = 4;\ f_2 = 2$
$n_3 = 6;\ f_3 = 1$

*) Im Unterricht kann man mit Evidenz noch lockerer formulieren. Man hat den Gesprächspartner bei sich und kann fortlaufend korrigieren, sobald sich Missverständnis zeigt.

**) Von der willkürlich babylonischen Einteilung (360°) hängt unser Problem natürlich nicht ab. Unsere Gleichungen enthalten den Faktor 360 nicht mehr.

Die dazugehörige Gleichung lautet:

$$1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \cdot 1$$

Das Zahlenschema verkürzen wir gleich zum sogenannten Schläfli-Symbol: $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{array}\right]$.

Zu jedem archimedischen Parkett gehört eine Lösung der Gleichung (2)*): $\left[\begin{array}{c|c} n_1 & f_1 \\ n_2 & f_2 \\ n_3 & f_3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}\right]$, wobei n_i und f_i natürliche Zahlen sind und $n_i \geq 3$.

Weil der n_i-Eckswinkel jedenfalls nicht kleiner ist als der Dreieckswinkel (s. Gleichung (1)) gilt: $w_i \geq \frac{1}{6}$. Weil wir wenigstens 2 verschiedene Sorten von Vielecken verwenden, hat das zur Folge:

$$3 \leq \sum_i f_i \leq 5 \qquad (3)$$

Nun wird klar, daß unsere Aufgabe, die Lösungen der Gleichung (2) zu finden, in endlich vielen Schritten erledigt werden kann.

Wir unterscheiden 3 Hauptfälle nach (3), führen hier aber nur den Hauptfall 1 ($\sum f_i = 3$) aus. Das vorgeführte Lösungsverfahren ist auch in den beiden anderen Hauptfällen ohne Modifikation verwendbar.**)

Im Hauptfall 1 ($\sum f_i = 3$) geht es um die additive Zerlegung der Zahl 3. Sie liefert die Unterfälle, die wir gleich mit unvollständigen Schläflisymbolen notieren:

$$\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ & 1 \\ & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} & 2 \\ & 1 \end{array}\right]$$

---

*) Die Frage, ob auch umgekehrt zu jeder Lösung (im eingeschränkten Zahlbereich) ein archimedisches Parkett existiert, interessiert uns nicht, weil wir alle diese Parkette mit unseren ausgeschnittenen Vielecken realisieren werden.

**) a) Vielleicht von einem Computer, dem wir ein raffiniertes Programm dabei haben wir gesetzt:

$$n_i < n_k \text{ für } i < k \quad (4)$$

a) Im Falle $\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ & 1 \\ & 1 \end{array}\right]$ wird aus (2):

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \quad (2^+)$$

Wegen (4) folgt daraus

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{n_1} \;; \quad n_1 < 6$$

Das Verheftungsschema (Bild 76) – 1 n_1-Eck, 1 n_2-Eck und 1 n_3-Eck stoßen in jedem Eckpunkt des Parketts zusammen – zeigt: n_1 ist gerade.

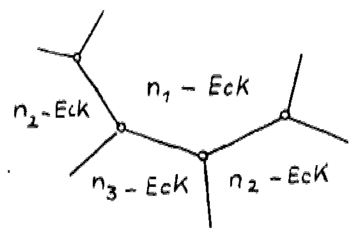


Bild 76

Also ist $n_1 = 4$.

Damit wird aus (2^+) :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \quad (2^{++})$$

Wie oben folgt

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{n_2} \;; \quad n_2 < 8$$

Unser Verheftungsschema zeigt auch: n_2 ist gerade.

Also ist $n_2 = 6$

Aus (2^{++}) wird damit schließlich:

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{n_3}$$

Fortsetzung der Fußnote von S.117
schreiben. Aber wir bemerken alsbald, daß wir genug Schüler haben, um jeden einen "Fall" bearbeiten zu lassen. Die Klasse ist schneller als der Computer.
b) Vernünftige Arbeitsorganisation (Gruppenarbeit) ist notwendige Voraussetzung zur Bewältigung so umfangreicher Arbeit im Unterricht, wie sie hier anfällt.

Also ist $n_3 = 12$

Ergebnis: $\left[\begin{array}{r|l} 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{array}\right]$ ist eine Lösung von (2)

Wenn es also überhaupt ein archimedisches Parkett der Art $\left[\begin{array}{r|l} & 1 \\ & 1 \\ & 1 \end{array}\right]$ geben sollte, so ist es aus 4-, 6- und 12-Ecken gebildet.

Wir realisieren diese Lösung im Bild 77

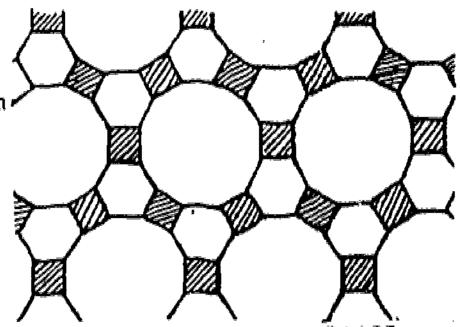


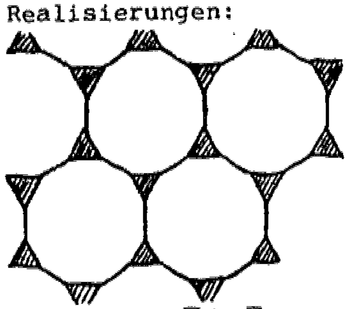
Bild 77

b) Im Fall $\left[\begin{array}{r|l} & 1 \\ & 2 \end{array}\right]$ verläuft die Rechnung analog. Weil aber sowohl $n_1 = 3$ wie auch $n_1 = 4$ möglich sind, spaltet sich dieser Fall noch auf.

Ergebnis: mögliche archimedische Parkette der Art $\left[\begin{array}{r|l} & 1 \\ & 2 \end{array}\right]$:

$\left[\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ 12 & 2 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{r|l} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{array}\right]$

Realisierungen:



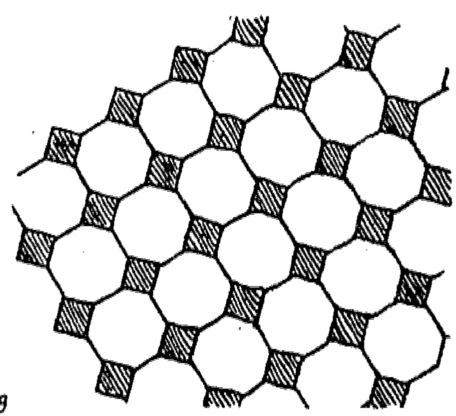


Bild 78

c) Im Falle $\left[\begin{array}{r|l} & 2 \\ & 1 \end{array}\right]$ wird aus (2):

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} \qquad (2^{+++})$$

Das Verheftungsschema (Bild 79) zeigt: n_1 ist gerade. Analoge Rechnung wie oben liefert $n_1 = 4$. Damit folgt aus (2^{+++}) $n_2 = \infty$.

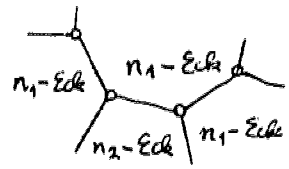


Bild 79

Ergebnis: kein mögliches a. Parkett der Art $\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ & 2 \end{array}\right]$.

Wir vermerken noch eine Besonderheit, die im Hauptfall $\sum f_i = 5$ auftritt. Zum Schläflisymbol $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{array}\right]$ gehören 2 nichtähnliche Realisierungen (s. Bild 80und 81)

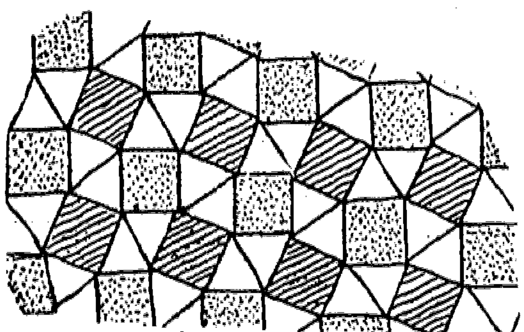


Bild 80

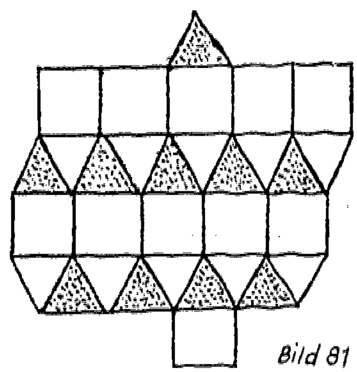


Bild 81

Damit haben wir schließlich:

Die Menge der ebenen archimedischen Parkette zerfällt in die 7 durch die Schläfli-Symbole beschriebenen Klassen:

$$\left[\begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ 12 & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{array}\right]$$

Unsere Zeichenversuche haben uns faktisch davon überzeugt, daß keine der 7 Klassen leer ist, daß abgesehen von der Klasse $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{array}\right]$ die Klasseneinteilung mit der durch die Ähnlichkeitsrelation erzeugten Übereinstimmt.

Anmerkung: Die Rechnung für die Kugel ist nicht viel anders. Der positive Exzess der Kugeldreiecke bewirkt, daß aus den Gleichungen (2) Ungleichungen werden:

$$1 > \sum_{i=1}^{s} f_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right)$$

Die Ungleichungen haben mehr Lösungen als die Gleichungen, aus denen sie entstehen.

Ergebnis: Die Menge der archimedischen Kugelparkette (auf einer festen Kugel) zerfällt in die durch die Schläfli-Symbole beschriebenen Klassen:

$$\left[\begin{array}{r|l} 4 & 1\\ 6 & 1\\ n_3 & 1\end{array}\right]_K \quad \left[\begin{array}{r|l} 3 & 1\\ n_2 & 2\end{array}\right]_K \quad \left[\begin{array}{r|l} n_1 & 1\\ 6 & 2\end{array}\right]_K \quad \left[\begin{array}{r|l} 4 & 2\\ n_2 & 1\end{array}\right]_K \quad \left[\begin{array}{r|l} 3 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{array}\right]_K$$

$n_3 = 8,10$ $n_2 = 4,6,8,10$ $n_1 = 4,5$ $n_2 > 4$
(s. Bild 82)

$$\left[\begin{array}{r|l} 3 & 2\\ n_2 & 2\end{array}\right]_K \quad \left[\begin{array}{r|l} 3 & 1\\ 4 & 3\end{array}\right]_K \quad \left[\begin{array}{r|l} 3 & 3\\ n_2 & 1\end{array}\right]_K \quad \left[\begin{array}{r|l} 3 & 4\\ n_2 & 1\end{array}\right]_K$$

$n_2 = 4,5$ $n_2 > 3$ $n_2 = 4,5$

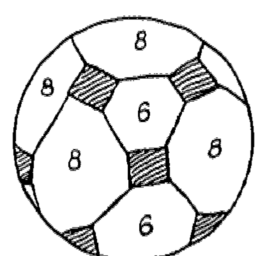


Bild 82

Alle aufgeführten Möglichkeiten lassen sich realisieren - besser nicht durch Zeichnen auf der Kugel! Mit Karton und Schere erfährt man die besonderen Reize dieser hochgradig symmetrischen Formen. Dabei zeigt sich, daß die durch die Kongruenzrelation erzeugte Klasseneinteilung der archimedischen Parkette einer festen Kugel bei Ausnahme der Klassen $\left[\begin{array}{r|l} 4 & 2\\ n_2 & 1\end{array}\right]_K$ $\left[\begin{array}{r|l} 3 & 3\\ n_2 & 1\end{array}\right]_K$ $\left[\begin{array}{r|l} 3 & 1\\ 4 & 3\end{array}\right]_K$ mit der durch die

Schläfli-Symbole beschriebenen Klasseneinteilung identisch ist.*)

6.2 *DIN-Format - ein pythagoräisches Maßproblem*

Jedes DIN-Blatt weist eine auffallende Eigenschaft auf:
Die Hälfte, die Hälfte der Hälfte usw. bildet eine Folge ähnlicher Rechtecke.

Diese Eigenschaft kann man mit einem Blick feststellen.

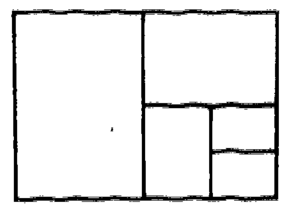


Bild 83

Die Frage nach dem Flächeninhalt eines DIN-Papiers führt uns schließlich zu einem bemerkenswerten pythagoräischen Ergebnis: DIN-Rechtecke lassen sich auf keinen Fall mit kongruenten Quadraten pflastern.

Ein vorgegebenes Rechteck mit kongruenten Quadraten zu pflastern - das ist ein hübsches Maßproblem, das uns den *euklidischen Algorithmus* entdecken läßt.

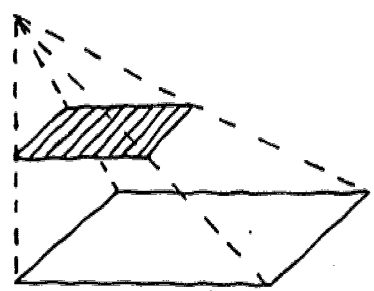


Bild 84

*) Der Verfasser hat vor Jahren mit seinen Primanern für eine Lampenfabrik "in Lohnarbeit" Kantenwinkel von gewissen roh gefertigten archimedischen Körpern berechnet. Die Frage nach weiteren schmucken Lampenkörpern (dieser Art) hat uns so schnell nicht wieder losgelassen. Soviel wie Archimedes, dann Kepler - der 2. Bearbeiter dieses Formenproblems - wollten wir in dieser Sache auch wissen.

Stellen wir uns eine solche Pflasterung schon als gelungen vor, so erkennen wir, daß es nur darauf ankommt, die nach Abschneiden möglichst großer Quadrate verbleibenden Rechtecke zu pflastern (Bild 86).

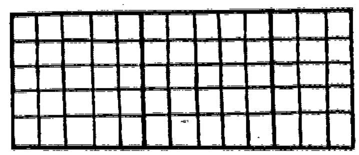


Bild 85

Diese Abschneidetechnik (euklidischer Algorithmus) wenden wir auf ein DIN-Papier an, um eine Pflasterung mit kongruenten Quadraten herzustellen.

Wir erleben dabei eine Überraschung!

Das zweite Restrechteck ist dem ersten ähnlich, wie wir wiederum mit einem Blick feststellen.*)

Aber das hat zur Folge, daß der Abschneideprozeß zu keinem Ende führt. Ein richtiger Skandal für die Flächenmessung!

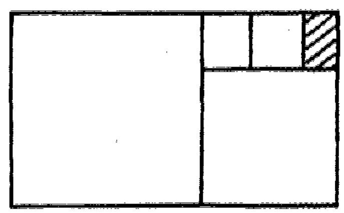


Bild 86

Motiviert durch das DIN-Papier, definieren wir als "silberne Rechtecke" solche Rechtecke, von denen nach Abschneiden zweier möglichst großer Quadrate ein zum ursprünglichen Rechteck ähnliches übrig bleibt.

Versuchen wir nun ein solches Rechteck direkt nach Definition herzustellen!
Kehren wir den Abschneideprozeß um! Beginnen wir mit einem kleinen, "ungefähr silbernen" Rechteck und lagern wir fort-

*) "Beweis" durch einfache Rechnung mit $\sqrt{2}$.

gesetzt zwei Quadrate an.

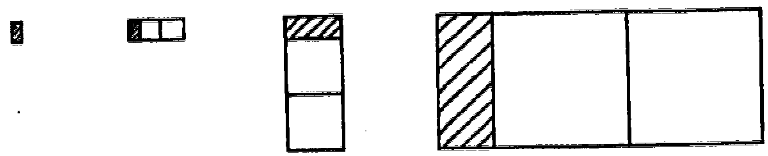


BILD 87

Wir erhalten eine Folge von (rasch wachsenden) Rechtecken, die der silbernen Gestalt immer näher kommen, selbst dann, wenn wir den Anlagerungsprozeß mit einem Quadrat beginnen.

Wir schreiben L(n) für die längere Seite des n-ten Rechtecks und erhalten die rekursiv definierte Funktion L:

$$L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

(1) $L(1) = 1; \quad L(2) = 3$

(2) $L(n+2) = L(n) + 2 \cdot L(n+1)$

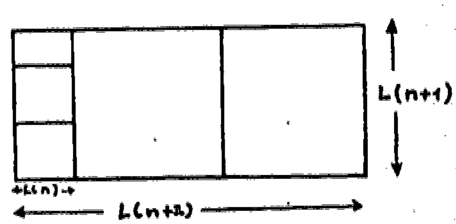


Bild 88

Wir erwarten: das Seitenverhältnis des n-ten Rechtecks approximiert das Seitenverhältnis der silbernen Rechtecke.

Aus (2) folgt nämlich unmittelbar

(3) $\frac{L(n+1)}{L(n)} - \frac{L(n-1)}{L(n)} = 2$

Konvergiert $\frac{L(n+1)}{L(n)}$ ∗) , so folgt aus (3) sofort

(4) $\lim \frac{L(n+1)}{L(n)} = 1+\sqrt{2}$

∗) Die Wertetafel läßt vermuten, daß $\frac{L(n+1)}{L(n)}$ beschränkt ist und in zwei monotone Teilfolgen zerlegt werden kann. Wegen der rekursiven Definition der Folge wird man induktiv beweisen - zumindest solange keine explizite Darstellung der Folge gefunden ist.

n	L(n)	Q(n)
1	1	- -
2	3	3
3	7	7/3 = 2,3...
4	17	17/7 = 2,42...
5	41	41/17= 2,411...
6	99	99/41= 2,417...

Wir könnten mit unseren bisherigen Ergebnissen zufrieden sein. Unser Irrationalitätsbeweis ist gewiß reizvoller und verschafft mehr Einsicht als der übliche.
Wir haben einen Algorithmus zur rationalen Approximation einer quadratischen Irrationalität gefunden. Aber dieses rekursive Verfahren ist ohne Computer zeitaufwendig für großes n.

Vielleicht wäre eine explizite Darstellung der Folge L besser zu gebrauchen? Ein neues Problem!*)

Eine elegante Lösung wird angeregt durch den Hinweis, daß die Approximation der silbernen Rechtecksform durch Anlagern von Quadraten am Ende wenig abhängt von der Ausgangsfigur. Das bringt neue Zahlenfolgen in den Blick mit anderen Anfangswerten, aber derselben Differenzengleichung (2) genügend. 2 Anfangswerte reichen zur Erzeugung einer solchen Folge mittels (2) aus. Es ist zu vermuten, daß die (2) genügenden Folgen einen zweidimensionalen Unterraum bilden. Mit zwei Basisvektoren könnte man jede dieser Folgen, also auch die spezielle Folge L, darstellen. Wir suchen also zwei linear unabhängige Folgen, die zu unserem Unterraum gehören - möglichst "einfache".

*) Wir setzen hier voraus, daß die Schüler über die einfachsten Begriffe der linearen Algebra - Vektorraum, lineare Unabhängigkeit, Basis - verfügen und die Menge aller Zahlenfolgen mit den üblichen Verknüpfungen als Vektorraum über $\underline{R}$ kennengelernt haben.

Die Schüler kennen nicht viele einfache Folgen(arithmetische, geometrische). Die arithmetischen - von der Nullfolge abgesehen - genügen (2) nicht, wohl aber glücklicherweise gewisse geometrische.

Mit dem Ansatz $F(n) = a \cdot q^{n-1}$ (5) erhält man durch Einsetzen in

$$F(n+2) = F(n) + 2F(n+1)$$

die (charakteristische) Gleichung

$$q^2 = 1+2q \qquad (6)$$

mit den Lösungen

$$q_1 = 1+\sqrt{2} \;;\; q_2 = 1-\sqrt{2}$$

Mit $F_1(n) = (1+\sqrt{2})^{n-1}$ und $F_2(n) = (1-\sqrt{2})^{n-1}$ hat man zwei Basisvektoren zum Aufspannen des durch (2) ausgezeichneten Unterraums.
Unsere spezielle Folge L ist damit linear darstellbar

$$L(n) = c_1(1+\sqrt{2})^{n-1} + c_2(1-\sqrt{2})^{n-1} \quad (7)$$

Für die Koeffizienten c_1, c_2 erhält man aus den Anfangswerten 1(=F(1)) und 3 (=F(2)) ein lineares Gleichungssystem mit den Lösungen

$$c_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}); \quad c_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$$

Einsetzen in (7) liefert die gewünschte explizite Darstellung von L:

$$L(n) = \frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2} \qquad (8)$$

(Mit dieser Formel kann man *nur* natürliche Zahlen ausrechnen(?))

Anmerkungen: 1) Der Kenner wird wissen, daß die Pythagoräer im Zusammenhang mit der Frage nach dem gemeinsamen Maß von Seite und Diagonale eines Quadrates ganz ähnliche Überlegungen anstellten. Für das Quadrat definierten die Pythagoräer simultan durch Rekursion die Seiten- und Diagonalzahlen:

(9) $D(1) = S(1) = 1$

(Diagonale und Seite im "kleinen" Ausgangsquadrat sind gleich lang angesetzt)

(10) $S(n+1) = D(n) + S(n)$

(11) $D(n+1) = S(n+1) + S(n)$

Die Pythagoräer wußten außerdem

(12) $D^2(n) - 2 \cdot S^2(n) = (-1)^n$

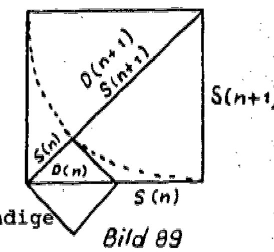


Bild 89

Wie sollten die Pythagoräer (12) anders als durch vollständige Induktion bewiesen haben? (VAN DER WAERDEN).

Aus (12) folgt unmittelbar

(13) $\lim \frac{D(n)}{S(n)} = \sqrt{2}$

Mit der Folge $\frac{D}{S}$ hatten die Pythagoräer einen Algorithmus gefunden, mit dem sie die skandalöse Zahl $\sqrt{2}$ rational approximieren konnten.

2) Eine schnell ausgerechnete Tafel für die Folgen S und D läßt vermuten:

(14) $D(n) = L(n)$

(15) $S: N \to N$ ist aus demselben "Stall", d.h. auch für S gilt:

$S(n+2) = S(n) + 2 \cdot S(n+1)$

n	S(n)	D(n)
1	1	1
2	2	3
3	5	7
4	12	17
5	29	41
6	70	99

6.3 *Goldene Rechtecke - ein zweites pythagoräisches Maßproblem*

Sie werden ganz analog behandelt wie die silbernen. Im

Unterschied zu diesen bleibt beim Abschneiden nur *eines* (möglichst großen) Quadrats jetzt ein zum ursprünglichen Rechteck ähnliches übrig.

Der von einem Quadrat ausgehende Anlagerungsprozeß wird beschrieben durch die rekursiv definierte Folge $I : N \to N$

$$I(1) = I(2) = 1 \qquad (1)$$
$$I(n+2) = I(n+1) + I(n) \qquad (2)$$

Leornardo von Pisa (mit Beinamen Fibonacci) hat mit dieser Folge im Liber abbaci (1202) die Vermehrung der Kaninchen beschrieben.*)

Bis Binet (1843) hat man auf eine explizite Darstellung warten müssen:

$$I(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

Wir gewinnen sie nach dem in 6.2 angegebenen Verfahren. Moderne Begriffsbildung verhilft uns zu dieser bemerkenswert einfachen Lösung.

Der Quotient $\frac{I(n+1)}{I(n)}$ approximiert wieder eine quadratische Irrationalität $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (erst 1753 von dem Schotten Robert Simson bewiesen).

Diese Zahl drückt aber das Längenverhältnis von Seite und Umkreisradius der regulären Zehnecke aus. Die Figur, aus der der Rechenansatz für diese Behauptung entnommen werden kann, gibt auch Anlaß zu einer rekursiven Fassung:

---

*) I hat auffallend viele interessante Eigenschaften. Amateure haben einen Club gegründet, der die Zeitschrift Fibonacci- Quarterly herausgibt.

(16) $R(1) = S_z(1) = 1$

(Radius und Seite im "kleinen" Ausgangsdreieck sind gleich lang *angesetzt*)

(17) $S_z(n+1) = R(n)$

(18) $R(n+1) = S_z(n) + S_z(n+1)$

Daraus folgt

(19) $S_z(n+2) = S_z(n) + S_z(n+1)$

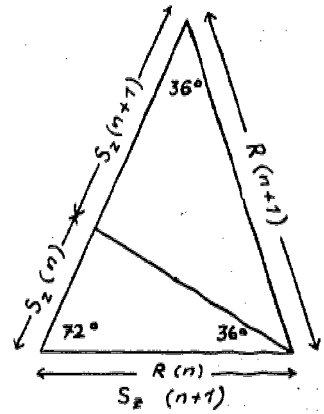


Bild 90

Es ist leider doch kein Wunder, wenn die Vermehrung der Kaninchen Aufschluß gibt über reguläre Zehnecke.

DIE BEDEUTUNG DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE FÜR DIE MATHEMATIK-AUSBILDUNG

G. Pickert, Gießen

In der Mathematikausbildung scheint die Darstellende Geometrie mehr und mehr in die Isolierung und damit an den Rand gedrängt zu werden. Die Lernenden und manchmal auch wohl der Unterrichtende erkennen keinen Zusammenhang mit anderen, mehr im Zentrum des Interesses stehenden Gebieten der Mathematik und halten die Darstellende Geometrie daher wohl oft lediglich für eine Methodik zeichnerischer Fertigkeiten, die mit der eigentlichen Mathematikausbildung nichts zu tun hat. Das führt dazu, daß in immer geringerem Maße die räumliche Anschauung zeichnerisch in der Mathematikausbildung zu Hilfe genommen wird und so wertvolle didaktische Möglichkeiten verschenkt werden. Die Darstellende Geometrie muß sich daher aus ihrer Isolierung befreien und zwar einerseits dadurch, daß auch sie sich neuerer mathematischer Begriffsbildungen bedient [1], und zum anderen dadurch, daß sie für andere Gebiete der Mathematik Hilfen zur Veranschaulichung anbietet. In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Möglichkeiten dafür aufgezeigt, womit natürlich nur ein sehr bescheidener Anfang in dieser Richtung getan ist; insbesondere wird das umfangreiche Gebiet des perspektivischen Zeichnens [2] absichtlich beiseite gelassen, um zuerst einmal Fragen der affinen und metrischen Geometrie in den Vordergrund zu stellen. Die Abschnitte 5 und 6 passen zwei altbekannte Sätze der Darstellenden Geometrie dadurch der heutigen mathematischen Sprache an, daß sie sie als Aussagen über Mengen von Abbildungen formulieren und beweisen. Die Abschnitte 2 - 4 zei-

1) Siehe hierzu auch A. KIRSCH, Ist die Grund-Aufriß-Abbildung injektiv? Math. Phys. Semesterberichte 19, 146-158, 1972.

2) Siehe hierzu T.J. FLETCHER, The teaching of geometry. Present problems and future aims. Ed. Studies in Mathematics 3, 395-412, 1970/71.

gen einfache Verwendungen von Projektionsverfahren in der Geometrie, wobei (abgesehen von 2 a,b) die räumliche Betrachtung auch bessere Einsicht in ebene geometrische Zusammenhänge liefert. In Abschnitt 1 beweist das allereinfachste Verfahren der Darstellenden Geometrie seine Nützlichkeit für Lineare Algebra, Analysis und Differentialgeometrie.

1. *Kotierte Projektion*

Jeder Punkt des Raumes wird durch seine senkrechte Projektion auf die Zeichenebene und seine Höhe über dieser ("Kotierung") dargestellt, Flächen dann durch ihre Niveaulinien (in der Kartographie: Gelände durch Höhenschichtlinien). Fragen der Sichtbarkeit im Gelände motivieren das Herstellen von Profilen (Schnitten senkrecht zur Zeichenebene; siehe Fig. 1), die Frage nach Geländeansichten führt zur Herstellung der Umrißlinien (Menge der Berührungspunkte der Niveaulinientangenten in Blickrichtung; siehe Fig. 2). Beide Verfahren sind nützlich, um sich das Verhalten einer reellen Funktion zweier Variabler (Abbildung einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$) zu verdeutlichen. Die (zur Zeichenebene weder parallelen noch senkrechten) Ebenen stellen die (von der Nullform verschiedenen) *Linearformen* dar, wobei die Punkte der Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes (auf der darstellenden Ebene) durch ihre Ortsvektoren gegeben werden. Die Niveaulinien ermöglichen eine gute Veranschaulichung dieses in der Linearen Algebra vom Anfänger meistens als schwierig empfundenen Begriffs. Bei einer Linearform L $(\neq 0)$ wird der Vektor $L(\vec{e})\vec{e}$ mit $\vec{e}$ als Einheitsvektor senkrecht zu den Niveaulinien als ihr *Gradient* $\vec{g}_L$ bezeichnet; im Falle $L = 0$ nimmt man den Nullvektor als $\vec{g}_L$. Bei beliebigem Einheitsvektor $\vec{e}_1$ ist dann $L(\vec{e}_1)\vec{e}_1$ die senkrechte Projektion von $\vec{g}_L$ auf $\mathbb{R}\vec{e}_1$, sodaß L durch $\vec{g}_L$ bestimmt wird (siehe Fig. 3 mit AA_1, BD als 0- bzw. 1-Niveaulinie, AD als dem "herausgeklappten" Profil der Ebene, $AD \perp DC$, $\overrightarrow{AB} = L(\vec{e})^{-1}\vec{e}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{g}_L$, $\overrightarrow{A_1B} = L(\vec{e}_1)^{-1}\vec{e}_1$, $\overrightarrow{BC_1} = L(\vec{e}_1)\vec{e}_1$: $CC_1 \perp BC_1$, da

A, A_1, C, C_1 auf einem Kreis liegen, räumlich herleitbar daraus, daß die Kreise durch A, C bzw. A_1, C_1 und den über B liegenden Ebenenpunkt auf einer Kugel liegen). Das *Skalarprodukt* kann durch $\vec{x} \cdot \vec{g}_L = L(\vec{x})$ definiert werden, und das Kommutativgesetz läßt sich einfach aus dem beschriebenen Zusammenhang zwischen Gradient und Niveaulinien erkennen.

Approximation einer reellen differenzierbaren Funktion f (Definitionsbereich ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$) in der Nähe eines Punktes P durch eine Linearform L, veranschaulicht durch Niveaulinien (falls $L \neq 0$) und Profile, führt einerseits zum Begriff der *Tangentialebene* der durch f gegebenen Fläche und andererseits zum *Gradienten* $grad\ f$ als einem Vektorfeld (Abbildung des Definitionsbereichs von f in den reellen zweidimensionalen Vektorraum, mit $\vec{g}_L$ als Bild von P). Mittels der Niveaulinien läßt sich gut veranschaulichen, daß das Linienintegral über $grad\ f$ gleich der Funktionswertdifferenz ("Niveauunterschied") zwischen Endpunkt und Anfangspunkt des Integrationsweges ist. Bei waagerechter Tangentialebene, also dem Nullvektor als Wert von $grad\ f$, stellt sich die Frage nach quadratischer Näherung, und man wird so auf den Begriff der *quadratischen Form* geführt: Die Niveaulinien sind bei definiter Form Ellipsen, bei semidefiniter Form Parallelenpaare und bei indefiniter Form Hyperbeln[3]; die Hauptachsen (bzw. bei den Parallelenpaaren deren Richtung und die dazu senkrechte) geben die Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche in dem betrachteten Flächenpunkt an, und die Gaußsche Krümmung ist in den drei Fällen bzw. positiv, null, negativ.[4]

---

3) Näher ausgeführt z.B. in ANDELFINGER, Mathematik S-2, Fachwissenschaftliche Grundlagen (Lehrerbegleitheft, Wissensch. Teil), Kap. 8, Herder 1975.

4) Siehe hierzu und für weitere Anregungen zu anschaulicher Differentialgeometrie Kap. IV von HILBERT,COHN-VOSSEN, Anschauliche Geometrie, Springer 1932.

2. *Beispiele zur Eintafelprojektion*

In manchen Fällen genügt ein einziger Normalriß bereits auch zur Ausführung von Konstruktionen, da die Höhe der Punkte über der Rißebene wegen der besonderen Eigenschaft der dargestellten räumlichen Figur aus ihren Projektionen entnommen werden kann.

a) Ein Quadrat mit seinen Diagonalen kann als senkrechte Projektion eines regulären Tetraeders $ABCD$ (siehe Fig.4) aufgefaßt werden. Diese etwas ungewöhnliche Tetraederdarstellung erweist sich als vorteilhaft bei der Bestimmung derjenigen Decktransformationen des Tetraeders, die Drehungen oder Drehspiegelungen mit der durch die Mitten der Seiten $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ gehenden Achse sind: die Spiegelungsebene (der Drehspiegelung) schneidet das Tetraeder in dem Quadrat $A'B'C'D'$ und zerlegt das Tetraeder in zwei kongruente Teile, die durch die 180°-Drehung um die Achse $A'C'$ (oder $B'D'$) ineinander übergeführt werden.

b) Ein regelmäßiges Sechseck mit seinen drei (längsten) Diagonalen kann aufgefaßt werden als senkrechte Projektion eines Würfels in Richtung einer Raumdiagonalen d, deren Endpunkte dabei den Mittelpunkt M des Sechsecks als Projektion haben (siehe Fig.5). Hieraus lassen sich wieder sehr einfach die Drehungen und Drehspiegelungen mit Achse d unter den Decktransformationen auffinden. Das von den Mittelpunkten der 6 Würfelseiten gebildete regelmäßige Oktaeder wird in der Projektion ebenfalls durch ein regelmäßiges Sechseck und seine 6 Verbindungsgeraden benachbarter, nichtdiametraler Ecken dargestellt: die Drehungen und Drehspiegelungen mit Achse d (die durch die Mitten zweier diametraler Oktaederseiten geht) sind natürlich dieselben wie beim Würfel.

Den Würfel kann man zur Darstellung des dreidimensionalen Vektorraumes über dem Körper mit den zwei Elementen 0 und 1 verwenden. In Fig.5 sind dementsprechend die Ecken durch

Koordinatentripel bezeichnet, wobei der "hintere" Endpunkt von d als Nullpunkt (000) genommen und der andere demgemäß mit 111 zu bezeichnen ist. Die projektive 7-Punkte-Ebene erhält man nun durch Weglassen des Nullpunktes, wobei die Geraden aus den zweidimensionalen Unterräumen entstehen, also in Fig.5 durch {100,110,010}, {010,011,001}, {001,101,100}, {110,011,101} und die drei (längsten) Sechseckdiagonalen gegeben werden. Eine naheliegende Deformation ergibt dann die bekannte Darstellung der 7-Punkte-Ebene durch ein gleichseitiges Dreieck, seine drei Symmetrielinien und den Inkreis (Fig.6).

c) Ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinen Höhen AF, BF, CF (siehe Fig.7) kann als senkrechte Projektion eines nicht-regulären Tetraeders $ABCD$ mit rechtwinkliger Ecke bei D aufgefaßt werden, wobei D die Projektion F hat. Aus $CD \perp AD$, BD und $DF \perp ABC$ ergibt sich nämlich $CDF \perp ABD$, ABC (Ebenen stehen senkrecht aufeinander, wenn die eine durch eine Normale der anderen geht) und damit $CF \perp AB$ $(= ABD \cap ABC)$. Hiermit haben wir einerseits die konstruktive Grundlage der senkrechten Axonometrie und werden andererseits zum Höhenschnittpunktsatz geführt: dabei ergibt sich unmittelbar (nach dem Höhensatz für die rechtwinkligen Dreiecke ADA', BDB', CDC'):
$|\overline{AF}| \cdot |\overline{FA'}| = |\overline{BF}| \cdot |\overline{FB'}| = |\overline{CF}| \cdot |\overline{FC'}|$.

d) Bei der senkrechten Projektion einer Kugel(oberfläche) auf eine Ebene durch ihren Mittelpunkt M kann der Schnitt k der Kugel mit der Projektionsebene zugleich als das "herausgeklappte" Profil durch M und einen Kugelpunkt P genommen werden: zur Projektion P' von P entsteht dadurch der Punkt $P'' \in k$ (siehe Fig.8), aus dem sich die Höhe von P über der Projektionsebene (falls P auf der "oberen" Halbkugel liegt) als $|\overline{P'P''}|$ ergibt. Die durch P gehenden, zu k senkrechten Kugelkreise haben als Risse gerade die Strecken $\overline{QR}$ durch P mit $Q,R \in k$. Auf diese Weise überträgt sich das Cayley-Klein-Modell der hyperbolischen Geometrie (im Inneren von k) auf die obere Halbkugel und wird von dort durch stereographische Projektion von einem Punkt $\in k$ aus gerade in das Poincaré-Modell (in einer Halbebene senkrecht und oberhalb der Rißebene) übergeführt.[5) Aus dem Höhensatz für das rechtwinklige Dreieck PQR ergibt sich übrigens unmittelbar der Sehnensatz (für die Sehnen durch einen Punkt P' innhalb k) in der Form

$$|\overline{P'Q}|\cdot|\overline{P'R}| = |\overline{P'P''}|^2.$$

Fig.9 zeigt die Konstruktion der Risse von Kugelkreisen p,r,b, die nicht auf k senkrecht stehen: Großkreis r durch zwei Kugelpunkte P,Q mittels des Pols R von r, "Äquator" p zum Pol P, "Breitenkreis" b durch Q (in Fig.9 werden P,Q,R, p,r,b auch zur Bezeichnung der Risse verwandt; die punktierten Strecken sind kongruent und ebenso die strichpunktierten). Lediglich der Übersichtlichkeit wegen wurde dabei das herausgeklappte Profil durch M,P als neue Zeichnung daneben gestellt. Die Konstruktionen sind so einfach, daß sie bei einiger Übung nach Vorgabe von k sogar ohne Zirkel und Lineal durchgeführt werden können. Es gibt daher keine Entschuldigung für die leider sogar in mathematischen Lehrbüchern anzutreffende "Primitivprojektion", bei welcher der Pol auf dem Umrißkreis k liegt, der zugehörige Äquator p aber dennoch als Ellipse gezeichnet ist (oder noch schlimmer als Kreisbogenzweieck!). Das in Fig.9 geschilderte Verfahren der Darstellenden Geometrie bietet wohl den einfachsten Zugang zum Verständnis der Kugelgeometrie, deren große Bedeutung sowohl in der Mathematik wie in ihren Anwendungen hier nicht mehr begründet zu werden braucht.

3. *Hauptachsenkonstruktion bei einer Ellipse*

Führt man Ellipsen und Hyperbeln in der affinen Geometrie

5) Siehe hierzu §36 des in Fußnote 4 genannten Buches.

als Niveaulinien quadratischer Formen ein, so bietet sich als Achsenpaar für eine besonders einfache Koordinatendarstellung bei einer Hyperbel das Asymptotenpaar und bei einer Ellipse ein Paar konjugierter Durchmesser an[6]. Geht man dann zur metrischen Geometrie über und beweist die Existenz von *Hauptachsen*, also von zueinander senkrechten konjugierten Durchmessern, einheitlich (und auf beliebige Dimension verallgemeinerungsfähig) mittels Eigenwerten und Eigenvektoren, so erscheint es zum besseren Verständnis des Sachverhalts wünschenswert, die Hauptachsen auch einfach geometrisch zu konstruieren. Bei einer Hyperbel findet man sie als Winkelhalbierende der Asymptoten. Bei einer Ellipse bietet sich nun an, diese als Bild eines Kreises bei einer affinen Abbildung aufzufassen, da ja dann konjugierte, also zueinander senkrechte Kreisdurchmesser in Ellipsendurchmesser übergehen. Eine solche Abbildung läßt sich sehr anschaulich dadurch gewinnen, daß man die Ellipse als Schrägbild des Inkreises der oberen Seite eines Würfels auffaßt, dessen vordere Seite dabei punktweise festbleibt. Der Inkreis der vorderen Würfelseite mit Mittelpunkt N wird dann durch Parallelprojektion kongruent auf den Inkreis der oberen Würfelseite und weiter durch die Schrägbilddarstellung (ebenfalls eine Parallelprojektion) in die Ellipse mit Mittelpunkt M' abgebildet (siehe Fig.10); die auf diese Weise als Verkettung zweier Parallelprojektionen entstehende affine Abbildung der Zeichenebene auf sich, bei welcher der Kreis in die Ellipse übergeht, läßt sich in der Zeichenebene gemäß folgender Eigenschaften ausführen: 1) M hat den Bildpunkt M'; 2) der Bildpunkt eines Punktes liegt auf der Parallelen durch ihn zu MM'; 3) jeder Punkt der Achse a bleibt fest; 4) jede Gerade wird auf eine Gerade abgebildet. Demgemäß konstruiert man zu den konjugierten Durchmessern AB, CD (A,B,C,D Ellipsenpunkte) mit dem Schnittpunkt M' ein Parallelogramm, dessen Seitenmitten die A,B,C,D sind,

6) Siehe hierzu z.B. die in Fußnote 3 genannte Schrift.

und ergänzt dieses zum Schrägbild eines Würfels; für die Konstruktion der Hauptachsen wird davon nur der Punkt M (mit $|\overline{AM}| = \frac{1}{2}|\overline{CD}|$, $AM \perp a$) benötigt, während die übrige Zeichnung lediglich der räumlichen Veranschaulichung dient. Der Kreis durch M, M' mit Mittelpunkt auf a schneidet dann a gerade in den Punkten, die mit M' verbunden die Hauptachsen geben. Die Scheitel erhält man (ebenso wie erforderlichenfalls weitere Ellipsenpunkte) mittels der oben angegebenen Eigenschaften 1-4) der affinen Abbildung.

4. *Räumliche Erzeugung ebener Streckungen*

Streckungen in einer (affinen) Ebene E lassen sich rein inzidenzgeometrisch kennzeichnen als diejenigen Permutationen von E mit einem Fixpunkt, bei denen jede Gerade in eine zu ihr parallele übergeht. Man zeigt dann bekanntlich leicht, daß eine Streckung durch ihren Fixpunkt Z und den Bildpunkt P' eines einzigen Punktes $P \neq Z$ eindeutig bestimmt ist. Aber der Existenzbeweis läßt sich inzidenzgeometrisch nur unter Voraussetzung des (affinen) *Satzes von Desargues* (oder einer äquivalenten Bedingung) führen und ist nicht einfach. Dagegen kann man unter Zuhilfenahme einer zweiten, zu E parallelen Ebene E' im Raum eine Streckung (von E) mit den verlangten Eigenschaften (dabei natürlich $Z \neq P' \in ZP$) leicht herstellen: Von einem beliebigen Punkt $S_1 \notin E, E'$ aus wird E auf E' projiziert (Abbildung π_1 von E auf E' mit P'' als Bildpunkt von P) und dann vom Schnittpunkt S_2 der Geraden S_1Z, $P'P''$ aus E' auf E zurück (Abbildung π_2 von E' auf E mit P als Bildpunkt von P''); die Verkettung $\pi_1 \circ \pi_2$ ist dann die gewünschte Streckung. In Fig. 11 wurde $S_1Z \perp E$ gewählt und dann E als Grundriß- sowie S_1Z als Aufrißebene (die Bezeichnungen E, E' stehen an den Aufrißspuren dieser Ebenen). Für die Konstruktion des Bildpunktes Q' von Q ($\in E \setminus ZP$) verwendet man bei dieser räumlichen Interpretation neben $Q' \in ZQ$ die Aufrißpunkte R, R' von Q, Q', wobei R' der Bildpunkt von R ist; daß nun auch $PQ \parallel P'Q'$ sein muß (was natürlich eine einfachere Konstruktion von Q' ermöglicht), besagt nun gerade eine (affine) Spezialisierung des *Viereckschnitt-Satzes*[7)] (Ecken der vollständigen Vierecke: S_1, S_2, P'', R'' bzw. Q, Q' und die uneigentlichen Punkte von PQ, RQ). Offenbar kann man entweder π_1 oder aber π_2 willkürlich wählen und zwar statt als Zentral- auch als Parallelprojektion (S_1 bzw. S_2 ist dann als uneigentlicher Punkt zu wählen). Durch diese räumliche Betrachtung kommt man auch zu einer einfachen Konstruktion des Ähnlichkeitszentrums Z von kollinearen Punktepaaren (P, R), (P', R') mit untereinander und vom Nullvektor verschiedenen $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{P'R'}$ (in Fig.11 hat man S_1 als uneigentlichen Punkt zu wählen): Man bildet ein Parallelogramm $PRR''P''$ sowie den Schnittpunkt S_2 von $P'P''$, $R'R''$ und erhält dann Z als Schnittpunkt von PR mit der Parallelen zu PP'' durch S_2. Im Falle $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$ (und damit $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{RR'}$) gibt es natürlich kein Ähnlichkeitszentrum, da dann (P,R) durch die Translation $\overrightarrow{PP'}$ in (P',R') übergeht; in Fig.11 hat man dann auch S_2 als uneigentlichen Punkt zu nehmen und erkennt, daß jede Translation von E als Verkettung zweier Parallelprojektionen von E auf E' bzw. umgekehrt dargestellt werden kann.

Für beliebige Zentral- oder Parallelprojektionen π_1, π_2 von E auf E' bzw. umgekehrt ist $\pi_1 \circ \pi_2$ eine Streckung oder eine Translation (von E) und zwar letzteres genau dann, wenn entweder π_1, π_2 Parallelprojektionen sind oder aber beide Zentralprojektionen, bei denen die Verbindungsgerade der Zentren zu E parallel ist. Daraus ergibt sich nun sofort, daß die Menge aller Translationen und Streckungen (von E) bez. des Verkettens abgeschlossen ist (und somit bez. dieser Verknüpfung eine Gruppe bildet).

---

7) Siehe hierzu Abschn. 4.4 des Buches PICKERT, Projektive Ebenen, Springer 1955.

Nach dem oben Festgestellten kann man zwei solche Abbildungen mittels Projektionen π_i (von E auf E' bzw. umgekehrt) als $\pi_1 \circ \pi_2$, $\overset{-1}{\pi}_2 \circ \pi_3$ schreiben und erhält dann als Verkettung

$$(\pi_1 \circ \pi_2) \circ (\overset{-1}{\pi}_2 \circ \pi_3) = \pi_1 \circ \pi_3,$$

also wieder eine Streckung oder Translation. In Fig.12 ist dies für den Fall von Zentralprojektionen π_i mit nichtkollinearen Zentren S_i und Streckungen $\pi_1 \circ \pi_2$, $\overset{-1}{\pi}_2 \circ \pi_3$, $\pi_1 \circ \pi_3$ mit den Zentren Z_1, Z_2, Z_3 dargestellt nach Parallelprojektion des Raumes (in einer nicht zu $S_1S_2S_3$ gehörigen Richtung) auf E; dabei bezeichnen P'', S_i der Einfachheit halber die Bilder dieser Punkte bei der Parallelprojektion, das schraffierte Dreieck stellt die Ebene E' dar und gegenüber Fig.11 wird $P = P_1$, $P' = P_2$ gesetzt sowie P_3 als Bild von P'' bei π_3 eingeführt. Da die Streckungszentren Z_i kollinear sein müssen, erhält man damit den Satz von Desargues (für die Dreiecke $P_1P_2P_3$, $S_1S_2S_3$, das Perspektivitätszentrum P'' und die Perspektivitätsachse Z_1Z_2).

5. *Das Einschneideverfahren von Eckhart (1938)*

Zu nichtparallelen Geraden g, h in der Ebene E bildet man dadurch eine Verknüpfung $*$ in E, daß man $P * Q$ für $P, Q \in E$ als den Schnittpunkt der Parallelen zu g durch P mit der Parallelen zu h durch Q erklärt. Diese Verknüpfung ist *assoziativ* und *idempotent* (d.h. $P * P = P$ für alle $P \in E$), aber nicht kommutativ, macht also E zu einer nichtkommutativen idempotenten *Halbgruppe* (ohne links- oder rechtsneutrales Element). Nimmt man h, g (in dieser Reihenfolge) als Koordinatenachsen eines affinen Koordinatensystems mit dem Koordinatenbereich K und ersetzt die Punkte durch ihre Koordinatenpaare $(x, y) \in K^2$, so wird $*$ zu der aus Untersuchungen über Halbgruppen bekannten Verknüpfung[8)]

8) Siehe z.B. T. Evans, Product of points - some simple algebras and their identities, Am.Math. Monthly 74, 362-372 (1967).

mit

$$(x,y) * (u,v) = (x,v) \quad \text{für alle } x,y,u,v \in K.$$

Nach dem üblichen "Superpositionsverfahren" wird nun zu $*$ eine der Einfachheit halber ebenso bezeichnete, ebenfalls assoziative und idempotente Verknüpfung in der Menge aller Abbildungen des Raumes in die Ebene E erklärt durch

$$(\alpha * \beta)(P) = \alpha(P) * \beta(P) \quad \text{für alle Raumpunkte } P.$$

$\alpha * \beta$ entsteht somit durch "Einschneiden" aus den Abbildungen α, β; ungenauer formuliert: Aus den Bildern αF, βF einer räumlichen Figur F entsteht durch Einschneiden das Bild $(\alpha * \beta)F$.

Es taucht nun sofort die Frage auf, welche Mengen von Abbildungen des Raumes abgeschlossen bez. einer solchen *Einschneideverknüpfung* sind. Das trifft jedenfalls zu für die Menge aller Parallelprojektionen des Raumes auf E; denn für zwei solche Parallelprojektionen π, π' und zwei Raumpunkte P, $Q \notin E$ (wegen der Idempotenz der Verknüpfung und der Fixpunkteigenschaft der Punkte von E bei allen Parallelprojektionen auf E dürfen wir uns auf Punkte $\notin E$ beschränken) gibt es im Falle $PQ \parallel E$ eine Translation und andernfalls eine Streckung (mit dem Schnittpunkt von PQ, E als Zentrum) des Raumes, die P, $\pi(P)$, $\pi'(P)$ bzw. in Q, $\pi(Q)$, $\pi'(Q)$ und daher auch $(\pi * \pi')(P)$ in $(\pi * \pi')(Q)$ überführt, so daß also auch für $\pi * \pi'$ die Verbindungsgeraden der Punkte P,Q mit ihren Bildpunkten parallel sind, also eine Parallelprojektion vorliegt. Aus zwei Parallelprojektionen derselben räumlichen Figur erhält man also durch Einschneiden (nach zwei beliebig gewählten Richtungen) stets wieder eine Parallelprojektion der Figur.

Für die zeichnerische Anwendung wichtiger ist aber die *Abgeschlossenheit* auch *der Menge aller affiner Abbildungen des Raumes in* E *gegenüber jeder Einschneideverknüpfung*. Diese Abgeschlossenheit ergibt sich unmittelbar aus der Kennzeichnung der affinen

Abbildungen durch die Eigenschaft, drei kollineare Punkte stets entweder in denselben Punkt oder aber in drei kollineare Punkte vom gleichen Teilverhältnis (wie die Urbildpunkte) überzuführen, und dem leicht zu beweisenden Satz: *Haben die Tripel kollinearer Punkte* (A,B,C), (A',B',C') *dasselbe Teilverhältnis* t, *so gilt entweder* $A * A' = B * B' = C * C'$ *oder das Tripel* $(A * A', B * B', C * C')$ *hat das Teilverhältnis* t.

Von einer anschaulichen Darstellung einer räumlichen Figur durch ein affines Bild in E wird man nun aber verlangen, daß es nicht in einer Geraden liegt[9], daß also eine affine Abbildung auf E vorliegt: dann handelt es sich nach dem Satz von Pohlke um die Parallelprojektion eines ähnlichen Bildes der Figur. Die Menge der affinen Abbildungen auf E ist aber nun gegenüber keiner Einschneideverknüpfung abgeschlossen; denn wählt man ein Koordinatensystem in E wie oben zu den Einschneiderichtungen passend und im Raum dann ebenfalls ein (beliebiges affines) Koordinatensystem, so ergeben die affinen Abbildungen α, β, bei denen der Punkt mit dem Koordinatentripel (x,y,z) als Bilder die Punkte mit den Koordinatenpaaren (y,z), (x,y) hat, wegen $(y,z) * (x,y) = (y,y)$ eine Abbildung $\alpha * \beta$ auf eine Gerade.

6. *Der Satz von Pohlke (1853)*

In seiner ursprünglichen und in der Darstellenden Geometrie meistens benutzten Gestalt besagt dieser Satz: *Jedes nichtkollineare Punktequadrupel* (O, A, B, C) *in einer Ebene ist bei einer geeigneten Parallelprojektion des Raumes auf die Ebene das Bild eines Quadrupels* (O', A', B', C') *im Raum, das ein Tripel gleichlanger, zueinander orthogonaler Vektoren* $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'})$ *bildet.* Da nun

9) Man wird in der Praxis darüber hinaus natürlich fordern, daß das affine Bild auch nicht "angenähert" in einer Geraden liegt.

nach dem aus der linearen Algebra über lineare Abbildungen Bekannten zu Quadrupeln der genannten Eigenschaften stets eine (sogar genau eine) affine Abbildung des Raumes auf die Ebene existiert, die (O', A', B', C') in (O, A, B, C) überführt, kann man den Satz von Pohlke auch in der folgenden Form aussprechen und beweisen: *Jede affine Abbildung des Raumes auf eine Ebene ist Verkettung einer Ähnlichkeitsabbildung mit einer Parallelprojektion.*

Zum Beweis stellen wir für eine affine Abbildung α des Raumes auf die Ebene E zuerst einmal fest, daß der Kern der zu α gehörigen linearen Abbildung (des dreidimensionalen auf den zweidimensionalen Vektorraum) die Dimension 1 (= 3 - 2) hat und daher die Urbilder der einelementigen Teilmengen von E die Geraden eines Parallelenbündels sind. Legt man nun senkrecht zu diesen Geraden eine Ebene E', so ruft α auf dieser eine umkehrbare affine Abbildung von E' auf E hervor. Ein Kreis in E' wird also durch α in eine Ellipse (in E) übergeführt. Daher gibt es in E' Punkte O', A', B' mit $O'A' \perp O'B'$, $|\overline{O'A'}| = |\overline{O'B'}|$ derart, daß für ihre Bildpunkte $\alpha(O') = O$, $\alpha(A') = A$, $\alpha(B') = B$ gilt: $OA \perp OB$, $|\overline{OB}| \leqq |\overline{OA}|$. Für einen Punkt $C' \neq O'$ mit $O'C' \perp E'$ haben wir dann $\alpha(C') = O$. Wir nehmen nun einen Punkt A'' (siehe die Zweitafelprojektion in Fig.13 mit E als Grund- und OAA'' als Aufrißebene) mit $|\overline{OA''}| = |\overline{OB}|$, $OA'' \perp OB$, AA'' (damit also auch $AA'' \perp OA''B$) und dazu weiter eine Ähnlichkeitsabbildung β mit $\beta(O') = O$, $\beta(A') = A''$, $\beta(B') = B$. Für $C'' = \beta(C')$ ergibt sich dann $OC'' \perp OA''B$, also $OC'' \parallel AA''$. Die affine Abbildung $\beta^{-1} \circ \alpha$ läßt nun O, B fest und führt A'', C'' bzw. in A, C über. Dasselbe gilt aber von der Parallelprojektion π auf E in Richtung AA'', so daß $\beta^{-1} \circ \alpha = \pi$ und daher $\alpha = \beta \circ \pi$ folgt.

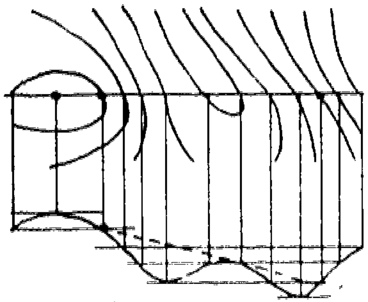


Fig. 1

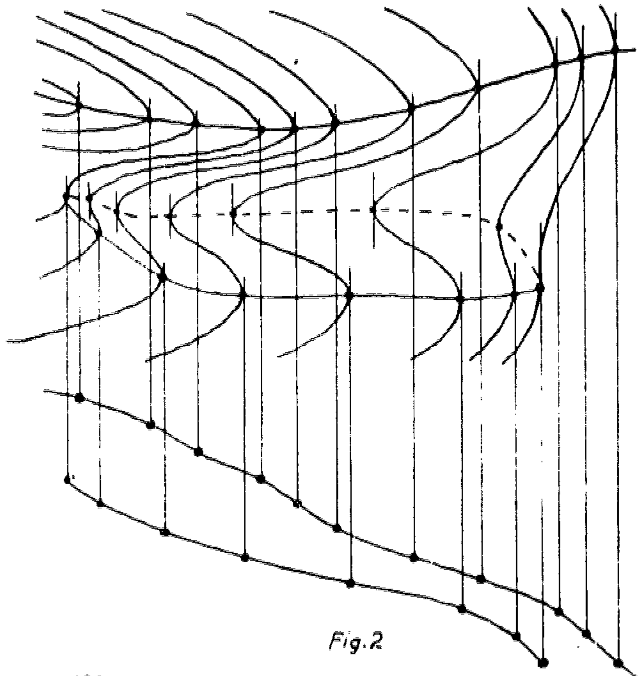


Fig. 2

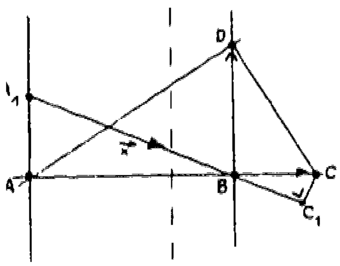


Fig. 3

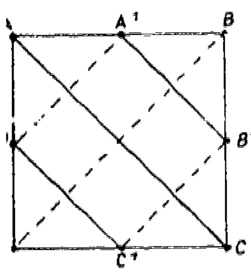


Fig. 4

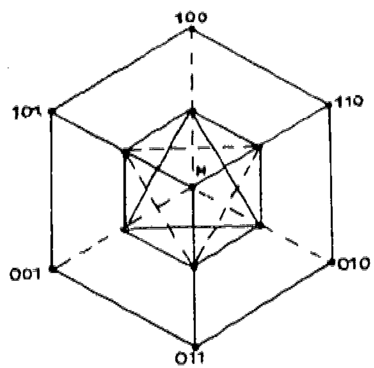


Fig. 5

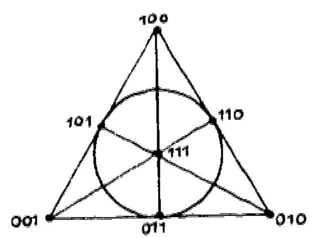


Fig. 6

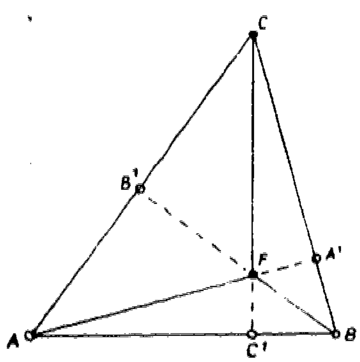


Fig. 7

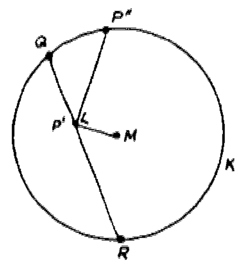


Fig. 8

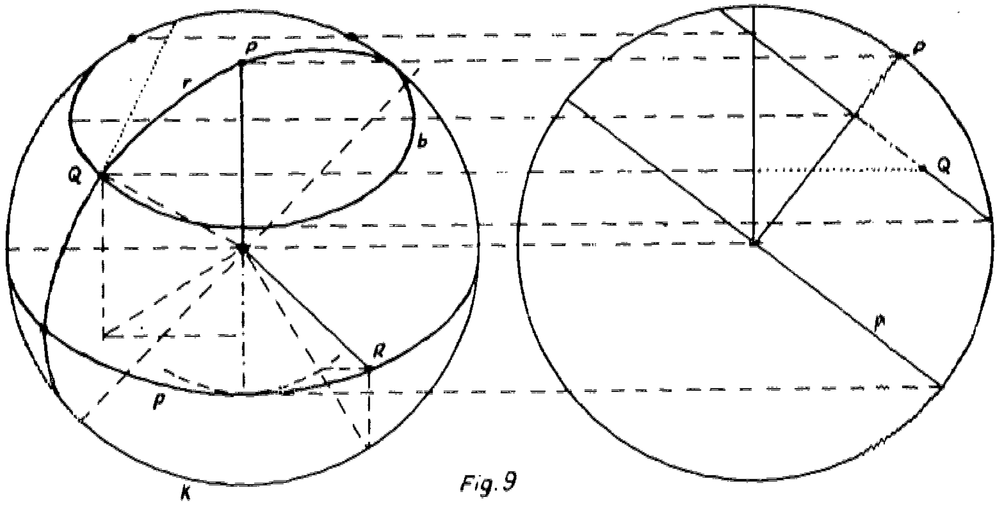


Fig. 9

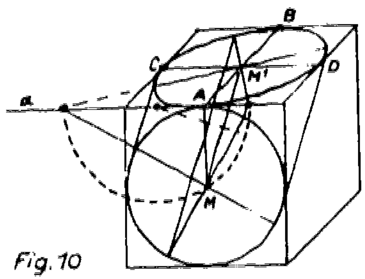


Fig. 10

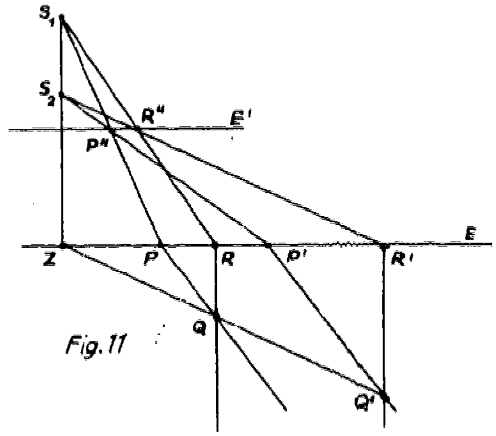


Fig. 11

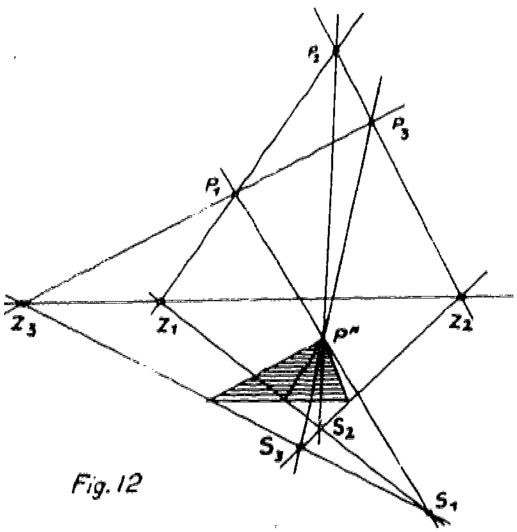


Fig. 12

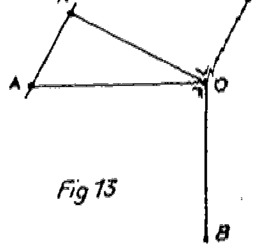


Fig 13

GEOMETRIE IN DER GRUNDSCHULE

H. Freudenthal, Utrecht

Für uns kommt diese Konferenz einerseits zu früh, andererseits gerade zur rechten Zeit. Zu früh, als daß wir Ihnen viel von unseren Erfahrungen erzählen könnten, gerade zur rechten Zeit für uns, um im Interesse unserer Entwürfe recht viel von Ihnen zu lernen.

Mit dem traditionellen Geometrieunterricht und seiner jüngsten Weiterentwicklung habe ich mich vor einigen Jahren auf einer Konferenz in Carbondale und danach in einem Buche auseinandergesetzt. Zwei Strömungen hatten sich damals abgezeichnet, eine, der die Geometrie gelegen kam, um zu zeigen, daß lineare Algebra zu etwas nutze war, die andere, die meinte, die Geometrie "retten" zu müssen und zu können, indem sie Geometrie-Unterricht durch Unterricht in den Grundlagen der Geometrie ersetzte. Dem stellte ich meine Philosophie gegenüber: Geometrie als Erfahrung und Deutung des Raumes, in dem wir leben, atmen und uns bewegen. Und das paßte dann gut zu meiner Philosophie vom Mathematikunterricht schlechthin: *Mathematisierung von Raumerfahrungen und -experimenten als Beispiel* von *Mathematisierung schlechthin.*

Als ich mein Buch schrieb, war von dieser Basis aus mein Blick nach oben gerichtet. Konkreter gesagt: ich stellte mir einen Geometrieunterricht vor, der im 7. Schuljahr (als erstem nach unserer Grundschule) anfängt, der sich je nach der Anlage des Schülers kürzer oder länger oder gar ausschließlich auf nullter Stufe bewegt, der zum lokalen und vielleicht auch globalen Ordnen fortschreiten und der bei manchen mit dem Einbau der Geometrie in ein System der Mathematik enden möge.

Von dem habe ich nichts zurückzunehmen. Wohl habe ich ihm nun Wesentliches hinzuzufügen, und zwar allererst und prinzipiell eine Wendung der Blickrichtung. Nicht, daß ich Neuland entdeckt hätte. Was ich entdeckt habe, ist vielmehr seine Bedeutung, seine Relevanz, die größer ist als ich es damals ahnte, ja die vielleicht entscheidend ist. Ich habe die Bedeutung der Geometrie für das Grundschulalter erkannt, und es möchte mir scheinen, daß es ohne Geometrie auf der Grundschule für viele auch keine auf der höheren Schule gibt. Daß ich das entdeckt habe, verdanke ich den Kindern im Grundschul- und Vorschulalter, mit denen ich gearbeitet habe. Es waren nur wenige, aber dann entscheidende Beobachtungen, die mir den Weg wiesen, und da wurde mir klar, daß wir etwas versäumen, unwiderruflich verpassen, wenn wir Kinder im Grundschulalter nicht der Geometrie zuführen.

Bei unserer Curriculumentwicklung habe ich daher auf Geometrie gedrungen. Man hat gezögert, begreiflicherweise, denn sich zur schlechthin unvermeidlichen Bürde noch die der Geometrie aufzuhalsen, könnte einem schließlich den Hals kosten; Vorschläge, wie gut auch gemeint, sind leichter getan als ausgeführt. Man schob die Geometrie auf, nicht auf die lange Bank, sondern ins "gerade" Jahr (1973/74 waren wir mit der 1., 3., 5. Klasse beschäftigt und nun wird es die 2., 4., 6. sein). Da soll sich die Geometrie recht entfalten. Darum können wir Ihnen noch wenig von Erfahrungen erzählen; ein Jahr später wäre das etwas anderes. Doch haben wir auch schon im Augenblick Ansätze erprobt, ausgesprochene Geometrie im Gedankenexperiment, mit kleinen Schülergruppen und mit Einzelgängern, und davon werden Ihnen noch Beispiele gezeigt werden.

Doch ist das nicht alles. Es tut sich auch schon im 1., 3., 5. Jahr unseres Entwurfs dem Betrachter allerlei auf, das er, je unbefangener er sich ihm nähert, und je mehr er sich darin vertieft, mit immer kräftigerer Überzeugung Geometrie nennen möge, und dem wende ich mich schnellstens zu.

Ja, was ist Geometrie? Daß die Geometrie nicht erst mit dem

Formulieren von Definitionen und Sätzen anfängt, habe ich genügend auseinandergesetzt; auch das Ordnen von Raumerfahrungen, das zu diesen Definitionen und Sätzen führt, ist schon Geometrie. Ich gehe nun aber weiter zurück, ich steige hinab in die Entwicklungsphase, wo das geometrische Erfassen und Deuten der Wirklichkeit noch nicht von einem verbalen Begriffsapparat und seiner technischen Hantierung gestützt wird, wo das Geometrische noch gleichberechtigt neben dem Verbalen steht oder ihm gar an Wirkungskraft überlegen ist.

Seit ich junge Kinder beobachte - und das hat mit der Beobachtung meiner eigenen Kinder angefangen - wurde ich immer wieder von der Kraft der Überzeugung getroffen, mit der sie intuitive Lösungen mathematischer Aufgaben - gerade auch von reinen Rechenaufgaben - verteidigten. Fragte man sie, wenn sie eine Aufgabe gelöst hatten, nach dem "warum?", so zuckten sie mit den Achseln und sagten "Ich sehe es so". [1]

Ich hatte eigentlich als Überschrift meines Vortrages dies *Ich sehe es so* wählen wollen; mit denselben Worten habe ich in einem neuen Buch auch einen Abschnitt über Geometrie überschrieben. "Ja, was ist Geometrie?" fragt ich vorhin. Geometrie im Grundschulalter ist das, was von der Verhaltensseite des Grundschülers gekennzeichnet ist durch die Reaktion "ich sehe es so" auf die Frage "warum?". In meinem vorhin erwähnten Buche habe ich die Geometrie da anfangen lassen, wo man sich bemüht, sich bemühen sollte, vom Lernenden eine andere Antwort als das Sichberufen auf eine innere Gesichtserfahrung zu erhalten. Nicht, daß ich diese Antwort damals nicht ernst genommen hätte. Wenn das

1) Das ist eine Übersetzung aus dem Holländischen; wie deutschsprachige Kinder es ausdrücken würden, wüßte ich nicht; als meine Enkelinnen in den Vereinigten Staaten waren, beantworteten sie die Frage "Why?" mit "'cause", aber die Frage "waarom" mit "ik zie het zo".

Kind erklärt, daß es etwas *so* sieht, so soll man es unbesehen glauben. Ich habe es viele Male erlebt: das Kind im Grundschulalter sieht vieles, das Erwachsene nicht sehen, mit einer Unmittelbarkeit, die uns ganz fremd ist. Ich meine, daß diese Gabe - eine Gabe ist es sicher - unter dem Einfluß der Entwicklung verbaler Fähigkeiten etwa im 11. bis 12. Lebensjahr verloren geht oder abgeschwächt oder verdrängt wird.

Nun ist es keineswegs so, daß man sich als Lehrer durchaus mit der Antwort "ich sehe es so" der Kinder im Grund- und Vorschulalter zu begnügen brauchte. Ich habe in den letzten Jahren Mittel gefunden, wie man diese inneren Visionen sich sozusagen äußerlich sichtbar kondensieren lassen kann. Einer dieser Kondensationskerne ist es, wenn man mehrere Kinder unterrichtet, dem Kinde, das "es so sieht", aufzutragen, es denen zu erklären, die es noch nicht sehen; in der Wendung vom Prüfling zum Unterrichtenden können dem Kinde adäquate Ausdrucksmittel erwachsen. Ein anderer Kondensationskern ist es, dem Kinde aufzutragen: "zeichne (oder modelliere, oder zeige), was du siehst". Kinder, mit denen man dies treibt, gewöhnen sich schnell daran, ihre Antworten, ja schon ihre Lösungsversuche, mit solchen sichtbaren Argumenten zu illustrieren.

Doch bleibt es oft bei dem globalen, nicht kondensierten "ich sehe es so", das eben die Geometrie im Grundschulalter kennzeichnet. Der Geometrieunterricht in diesem Alter möge dem "ich sehe es so" Kondensationskerne anbieten, soll aber nicht durch die Möglichkeit von Kondensationen bestimmt sein. Alles, was sich im Geometrieunterricht an verbaler Ausdrucksfähigkeit erreichen läßt, ist mitgenommen, aber der verbale Ausdruck sei nicht das Ziel. Ich habe das übrigens schon früher hinsichtlich des Anfangsunterrichts in der Geometrie auf der höheren Schule betont. Zu lange hat man versucht, im Geometrieunterricht statt Geometrie ihren *verbalen Ausdruck* zu vermitteln, und zwar Kindern, von denen viele noch nicht dieses Ausdrucks fähig waren. Leitziel für den Geometrieunterricht auf der Grundschule sei es dagegen, daß *Geometrie* unterrichtet werde. Dem Feingefühl des Lehrers, der gerne die Gedankengänge der Kinder sich in sauberen Formulierungen niederschlagen sieht, muß es überlassen bleiben, zu schätzen, wie weit er dabei gehen kann. Wird das "ich sehe es so" durch Stammeln des Schülers oder auferlegte Erklärungen des Lehrers ersetzt, so ist man didaktisch keinen Schritt weiter. Jeder, der zu unterrichten hat, prüfe bei sich selber, wie schwer es sein kann, das was man klar und deutlich sieht, auch noch zu begründen. Daß es sehr nützlich sein kann, ist ein Zweites, das erst durch systematisches Üben von Zweifeln an der Intuition motiviert werden kann.

Soweit meine Philosophie vom Grund- und Vorschulunterricht in der Geometrie; von ihr aus will ich Lehrstoff und Lernprozesse analysieren, so wie ich ihnen im Laufe der Zeit begegne. Es wird Ihnen dabei auffallen, wie viel davon man kaum als Geometrie, ja sogar kaum als einen eines Lernprozesses werten Lehrstoff ansprechen würde. Ich glaube in der Tat, daß wir uns zunächst einmal von traditionellen Bewertungen freimachen und unsere Sinne allen Anregungen öffnen müssen, wie geringfügig sie auch scheinen mögen.

Ich fange mit einer ganz rezenten Erfahrung an. Wir sitzen bei Tisch, Bastiaan gegenüber seiner kleinen Schwester, der Vater gegenüber der Mutter, die Großmutter gegenüber dem Großvater; beim Nachtisch sagt Bastiaan (4;3) plötzlich, mit sechs Johannisbeeren auf dem Löffelchen: "Es ist soviel, wie wir hier sind". Ich frage "warum?", und er antwortet "ich sehe es so", um aber gleich fortzufahren "zwei Kinder, zwei Erwachsene (sic), zwei Opa und Oma". Vermutlich lagen die Johannisbeeren auch in der Würfel-Konfiguration der Sechs, in der wir am Tisch saßen, auf dem Löffel, aber das konnte ich nicht sehen. Die Geschichte war kein Zufall; am nächsten Tag im Park sagte er mit vier Schneebeeren auf der Hand "das ist soviel, wie wir zuhause wohnen". Bastiaan ist noch ganz unsicher mit den Zahlen, und zu zählen weigert er sich hartnäckig. Was den Zahlbegriff vertritt, so ist dieser, wie die Beobachtung zeigt, geometrischer Art, und das mag in dem Alter normal sein. Unsere mengentheoretischen Vorurteile schreiben uns vor, die Relation, die Bastiaan zwischen den Johannisbeeren und den Personen herzustellen scheint, als eineindeutige Abbildung zu interpretieren; sie ist aber globaler, nicht zu Elementen atomisiert, sondern zu Gruppierungen strukturiert. Habe ich recht, so etwas Geometrie zu nennen?

Bastiaan spielt mit Bauersfelds Würfelspiel; er packt die Würfel ein, indem er lauter rote Flächen an die Oberfläche bringt. Es gibt da 31 Würfel mit roten Seiten; 3 Reihen zu 8 plus eine zu 7 in der Schachtel entlocken ihm den Ausruf "da fehlt einer". Ist das Geometrie? Aus Zaunstükken baut er den Zaun eines Bauernhofs auf, "das muß so lang werden wie das" sagt er und meint Gegenseiten eines (etwas krummen) Rechtecks. Ist das Geometrie?

Wir werden etwas sicherer in der Beantwortung dieser Fragen, wenn wir zu höheren Altersstufen fortschreiten. Das erste Jahr unserer Arnheimer Entwurfschule ist von dem *Projekt "Wasserland"* erfüllt. Es ist eine Märcheninsel, deren Bild stets vor der Klasse hängt, und auf der die Kinder schnell in allen Einzelheiten zuhause sind. Es gibt auf der Insel Türme, Mühlen, Brücken, komplizierte Gebäude, Anlegestellen, Wege und Wegweiser. Was steht wohl auf den Schildern dieses Wegweisers, oder wenn ein Wegweiser mit Aufschriften gegeben ist, wo könnte der stehen? Beschreibe einem, der es wissen will, wie man von der Anlegestelle zur Mühle kommt: Wie weit ist es von hier bis da, und wo zwischen Mühle und Turm könnte ein Wegweiser mit gewissen Zahlenangaben stehen? Was siehst du um dich herum, wenn du an dieser oder jener Wegkreuzung stehst? Wie kannst du von einer Seite des Flusses auf die andere kommen?

Wo kommt der Fluß her? Wie kletterst du auf das merkwürdige Gebäude in der rechten Ecke? Und weiter eine große Zahl von Legeaufgaben, wo die in Stücken geschnittene Insel (aber in anderem Maßstab) zusammengesetzt werden soll und umgekehrt Aufgaben, sie nach Muster zu zerschneiden.

Ein wichtiges Prinzip ist es hierbei, Aufgaben umzukehren - ich nenne es den *Sichtwechsel*: "was steht auf diesem Wegweiser?" - "stelle diesen Wegweiser auf"; "was siehst du, wenn du hier stehst", "wo stehst du, wenn du dies siehst?" Ein Beispiel dessen sind die Bilder, die ich Ihnen jetzt zeige; sie erwiesen sich als nicht leicht, aber doch auch nicht als zu schwer für die Kinder, die die Insel ja von A bis Z kannten. Und als Variation hierauf, auch aus einem Milieu, das die Kinder gut kennen, Photos des Schulgebäudes und seines Vor- und Hintergrundes. "Wo stand der Photograph?" lautet die Frage, "wie weit von der Schule entfernt?" Gucken Sie selber einmal genau; wie stellt man das fest? Natürlich bei diesem Bild stand die Kamera ganz nahe, bei jenen etwas weiter weg, aber wie steht es mit den und mit dem dort? Ja natürlich, wie weit das Hochhaus über den Dachfirst der Schule herausragt, das entspricht monoton der Entfernung der Kamera von der Schulfassade. Hätte man rechtzeitig daran gedacht, so wäre dem Photographen gesagt worden, er solle sich zu allen vier (oder noch mehr) Aufnahmen auf eine und dieselbe Gerade (etwa senkrecht zur Schulfassade) stellen. Oder umgekehrt, man hätte ihn gerade unter verschiedenen Winkeln, aber im gleichen Abstand photographieren lassen. Oder man hätte ihn an fester Stelle den Apparat senkrecht schwenken lassen, so daß mehr oder weniger Vordergrund und Hintergrund auf die Platte käme. Soviel Systematik lag dem Entwerfer beim ersten Ansatz fern. Soll man sich ihr bei der Revision verschreiben? Soll man solch ein Material schon für 6-7 jährige so strukturieren und stilisieren, daß man da drei Parameter säuberlich trennt, oder soll man gerade die Trennung dieser drei Parameter von den Kindern selber herausarbeiten lassen? Eine prinzipielle Frage, wie weit anzubietendes Material schon vorstrukturiert sein soll - ich neige dazu, gerade jungen Kindern das phänomenologisch reichere, in Strukturiertheit ärmere Material anzubieten und auch bei älteren jedenfalls mit dieser Art von Material anzufangen; darum liebe ich auch logische Blöcke nicht. Je weiter man fortschreitet, desto schärfer möge dann die geometrische Struktur hervortreten. Und zum Fortschreiten bietet dies Motiv weite Perspektiven. Es ist ein Motiv, das man vertikal, vom Kindergarten bis in die höchste Klasse des Mathematikunterrichts entwickeln könnte. Von der qualitativen Trennung der drei Parameter zur Behandlung des reinen Falls, wo nur einer variabel ist, vom rein qualitativen Abschätzen des Abstandes oder Blickwinkels zur Erkenntnis und Formulierung der Monotonie der Beziehung, vom Ablesen der quantitativen Beziehungen aus der Zeichnung oder dem Modell zur Umkehrung dieser Beziehungen und zu Rückschlüssen, von der zeichnerisch experimentellen zur echt geometrischen Behandlung, bis hinauf zur Verwendung trigonometrischer Funktionen und Methoden echter Feldmessung - eine Fülle von Aufgaben, in deren Folge man eine Stufung des Lernprozesses klar erkennt. Ein vielversprechendes Motiv vertikaler Lehrstoffplanung, wovon aber nichts bis jetzt erprobt oder auch nur im Entwurf vorhanden ist. Wir haben uns noch nicht einmal überlegt, was die entscheidenden Schritte in diesem Lernprozeß und welchem Alter sie gemäß sein könnten. Ich meine so etwas wie die Idee, daß das Licht sich geradlinig fortpflanzt, oder konkreter: die Technik, das Verhältnis des Betrachters zum Betrachteten in einer Zeichnung zu objektivieren, wo das Auge des Betrachters mit den betrachteten Gegenständen geradlinig verbunden ist und die gegenseitige Lage dieser Verbindungsgeraden Gegenstand der Analyse wird - wann könnte das im Lernprozeß operativ, wann bewußt, wann formulierbar werden?

Von diesem Gegenstande wende ich micht einem zu, der von uns einigermaßen im 3. Schuljahr erprobt worden ist, aber auch schon ins 2. Schuljahr paßte: *Geometrie im Gitter*, kürzeste Gitterwege, Abstände im Gitter, und zwar nicht nur in direkter Form (welchen Abstand haben A und B?), sondern auch das Umgekehrte: suche die Punkte in gegebenem Abstand von A! Man beobachte die Schüler bei diesen Aufgaben, wie der eine früher, der andere später die Symmetrie der Lösung erfaßt und auf die Symmetrie des Gitters gründet; mit welcher Selbstverständlichkeit akzeptiert wird, daß die Lösung sich aus geradlinigen "Strecken" zusammensetzt, und daß die den verschiedenen Abständen entsprechenden Figuren ähnlich sind.

Auch dieses Motiv kann man vertikal planen. Wann und wie kann der Schüler begründen, daß die Lösung so aussehen muß ("wenn senkrecht eins wegfällt, kommt waagerecht eins hinzu"), daß die Lösungen zu wachsendem Abstand induktiv aus den vorigen abgeleitet werden können?

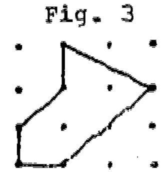
Meine ersten Erfahrungen mit Geometrie im Grundschulalter beziehen sich auf *Inhaltsberechnungen ebener Figuren*. In meinem Buch erzählte ich die Geschichte von einem meiner Söhne, der sich selber die berühmte Aufgabe der Quadratverdopplung aus dem "Menon" stellte und in seiner Weise löste. Mit einer Enkelin (und danach mit anderen Kindern) malte ich es ganz anders. Ich stellte ihr die Aufgabe, das gezeichnete Quadrat durch eines doppelten Inhalts zu ersetzen; als es ihr nach halbstündiger Anstrengung nicht gelang, vertröstete ich sie auf später - "es ist noch zu schwer für dich, aber später zeige ich es dir einmal". Vierzehn Tage danach kam ich mit dem Nagelbrett, ließ sie von Gummiringen begrenzte, schön achsenparallele Rechtecke berechnen, ließ sie auch Figuren mit gegebenem Inhalt umgrenzen (für 10 nahm sie ein 3 mal 3-Quadrat mit einem "Balkon"). Dann umgrenzte ich ein "schräges" Quadrat (mit der Diagonale des Einheitsquadrates als Seite), und sie sprang auf und sagte: "Das ist zwei, und die Lösung der Aufgabe vom vorigen Mal". An diese Entdeckung schloß sich eine Reihe ähnlicher Aufgaben an, die sie sich teilweise selbst stellte. Eine Erwachsene, die uns beobachtet hatte, rief entsetzt aus: "Was treibst du da mit dem Mädchen, sie kennt doch noch nicht einmal den Pythagoras!" Ich fürchte leider, daß sie, wenn sie den Pythagoras lernen muß, die Freude an der Geometrie verloren haben wird.

Inhaltsberechnungen waren auch der Gegenstand eines Themas für 8-jährige: *Flurbereinigung*. Ein mit einem quadratischen Gitter überzogenes Rechteck war durch Verbindungsstrecken der Gitterpunkte in schnurrige, unzusammenhängende Stücke verteilt und sollte nun parzelliert werden, in anständige Stücke, wobei jeder Bauer dieselbe Fläche bekam, wie er sie gehabt hatte. Bei den Kindern konnte man drei Niveaus der Behandlung beobachten, erstens das des "Zerlegens und Anklebens" (Fig. 1, das schraffierte Dreieck wird oben recht angesetzt), und zweitens das des lokalen Ergänzens (Fig. 2, das zu berechnende Dreieck wird mittels des schraffierten zu einem doppelt so großen Rechteck ergänzt). Bei diesen zwei wird ein gegebenes Vieleck (Fig. 3) in Dreiecke und Trapeze zerschnitten, die zerlegend-anklebend oder ergänzend behandelt werden; das dritte Niveau ist Ergänzung im Großen, d.h. Einschließung der gegebenen Figur in ein Rechteck, von dem der Überschuß abgezogen wird - in einer 3. Klasse kam nur ein Schüler spontan auf dieses Niveau der Behandlung.

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3



Ich komme zurück zu den geometrischen Leistungen des Mädchens, das auf dem Nagelbrett die Verdopplung des Quadrats erkannte. Ich stellte ihm einmal die (wohl vielen unter Ihnen bekannte) Aufgabe, die L-förmige Figur in vier kongruente Teile zu zerlegen, die entsteht, wenn man aus einem Quadrat eine Viertelquadratecke ausschneidet. Sie zeichnete augenblicklich die Lösung, zu der ihre Mutter eine halbe Stunde brauchte, und die ihrer Großmutter nicht gelang.

Ein anderes Mal brachte ich ein Schachbrett und einen Würfel mit, dessen Seite auf die Fächer des Schachbretts paßte. Der Würfel sollte wiederholt auf dem Schachbrett gekantelt werden, und die Frage lautete, ob er auf jedem Feld jede Position annehmen konnte. Das Mädchen sagte zu jeden Kantelweg, den der Würfel zurücklegte, schneller die Endposition voraus, als ich es experimentell nachprüfen konnte. Dadurch, daß sie alles sah, war es unmöglich, das Mädchen auf Fährten des Raisonnements zu setzen, mit dem ein erwachsener Mathematiker das Problem behandeln würde.

Ich habe mit dem Mädchen, das auf der Schule schlecht im Rechnen ist, viel Geometrie getrieben; was mich aber am meisten überraschte, war die folgende Geschichte. Ich besuchte meine Kinder, und wie üblich verlangte sie eine Aufgabe von mir. Ich war müde, und da mir nichts Gescheites einfiel, gab ich ihr eine auf von einer Art, die ich nicht liebe: Zwei Freunde sitzen in einer Kneipe, wo man alles, was man vor Mitternacht bestellt und erhalten hat, verzehren darf, aber nach Mitternacht nichts erhält. Sie sitzen da, A mit 5 Flaschen Bier, B mit 3 Flachen Bier. Kurz nach Mitternacht kommt ein Dritter, C, herein, dem nichts mehr verkauft wird. Er schlägt den anderen vor, den Vorrat gleich zu verteilen, und sie gehen darauf ein. Als sie alles ausgetrunken haben, rechnen sie ab, d.h.

C legt 80 ct. auf den Tisch, die die anderen verteilen. Wie taten sie das?

Das Mädchen schrieb 8 : 3 auf, fing nach dem Verfahren der schriftlichen Division an, um dann empört auszurufen: "Das geht ja nicht, warum gibst du mir Aufgaben auf, die nicht gehen?" Ich: "Aber sie haben das Bier doch ehrlich verteilt, und es ging." Einen Augenblick war sie ganz überrascht, und dann zeichnete sie acht Rechtecke, die sie Bierflaschen nannte, aufs Papier, teilte jede durch zwei waagerechte Striche in drei Teile, die sie Viertel [1] nannte. Sie schrieb in jede dieser "kleinen Flaschen" hinein, was A, was B, was C getrunken hatte, und das waren, was C betrifft, 7 "kleine Flaschen" von A und eine von B. Sie zeichnete noch die 8 "dubbeltjes" auf, um 7 dem A und 1 dem B zu geben.

Nach diesem "Erfolg" hatte ich den traurigen Mut, ihr noch eine Wasserhahnaufgabe zu stellen: der eine, der die Badewanne in 10 Minuten, der andere, der sie in 5 Minuten füllt, und nun laufen beide zusammen. Sie zeichnete die Wanne, einen großen und einen kleinen Hahn, teilte die Wanne in ein Zweidrittel, das vom großen gefüllt wird, und ein Drittel, das vom kleinen gefüllt wird, aber verirrte sich schließlich in den Brüchen, die sie nicht kannte.

"Ist das Geometrie?" frage ich wieder. Sicher ist es Mathematik, und denen, die behaupten, Mathematik bestünde im Abstrahieren, halte ich dies Beispiel entgegen: Gerade das Konkretisieren kann Mathematik sein - *Mathematisieren ist häufig Konkretisieren, nicht Abstrahieren.* Es ist hier ein geometrisierendes Konkretisieren. Soll man nach einer solchen Lösung noch fragen "warum?". Sie hat es ja gesehen und mir in der Zeichnung klar gezeigt, was sie ge-

---

1) Holländisch "kwart", das sie offenbar mit "part" (Teil) verwechselte; sie wußte noch nichts von Brüchen.

sehen hat - das ist ihr übrigens schon zur Gewohnheit geworden.

"Eine Geburtstagsfeier mit zehn Kindern, Jungen und Mädchen; als die Hälfte der Jungen nach hause gegangen war, blieben noch sechs Kinder übrig. Wieviele Knaben und wieviele Mädchen waren es?" Sie "sah" die Antwort, und die Erklärung, die sie ihrer jüngeren Schwester gab, bestätigte die Behauptung. "Eine volle Milchkanne wiegt 10 kg; wenn die Hälfte der Milch ausgegossen ist, wiegt sie noch 6 kg; wieviel wog die Milch und wieviel die Kanne?" Sie hatte große Schwierigkeiten mit der Aufgabe (es war Monate vor der Bieraufgabe). Ihr Vetter - etwas jünger - hatte gerade Schwierigkeiten mit der ersten und bewältigte mühelos danach die zweite. Dabei muß ich sagen, daß ich mit dem Enkel über ein halbes Jahr früher das "Gewicht" behandelt hatte, während ich von der Enkelin nicht einmal nachgeprüft hatte, ob sie wußte, was Gewicht ist.

Größen, wie Gewicht, geometrisch zu interpretieren, ist eine Notwendigkeit, die aber den (mit Längenmessungen schon vertrauten) Schülern des 3. Schuljahres noch nahegelegt werden muß, die aber dann auch schnell akzeptiert wird: man läßt Gegenstände auf der Waage (ohne Gewichte) vergleichen und aufgrund dessen linear anordnen. Die bei den Längen offensichtliche Linearität wird ohne weiteres auf die Gewichte übernommen, während Fragen, die auf die Transitivität der Größerbeziehung abzielen, gar nicht verstanden werden. Man denke einmal selber gut darüber nach: die lineare Anordnung ist etwas geometrisch global Gegebenes, das auf weite Strecken durchaus genügt und keiner Analyse - etwa mittels des Transitivitätsgesetes - bedarf; sie ist auch gegenüber der Transitivität das Primäre. Wenn wir als Mathematiker die lineare Ordnung vom Transitivgesetz her verstehen wollen, so haben wir, wie es sich für den Mathematiker gehört, wieder einmal die Dinge auf den Kopf gestellt. Wenn wir das Ergebnis dieser Wendung Kindern auferlegen, so begehen wir eine (anti)-didaktische Inversion. Ich habe mich mit zahlreichen sehr konkreten Übungen davon überzeugt, daß 8-jährige das begriffliche Schema der Transitivität überhaupt nicht verstehen ("wenn du schneller läufst als der, und du schneller als der, was ist dann mit dir und dir der Fall", wobei ich die Knaben jeweils mit dem Finger anzeige). Dagegen lösten alle 8-jährigen, nachdem das Gewicht (als lineare Ordnung) erfahren und konstituiert war, ohne Schwierigkeit Aufgaben mit zwei gezeichneten Wippen, wo A oben und B unten, B oben und C unten saß, und gar solche mit A und B zusammen oben gegen C und D zusammen unten, neben A unten gegen C oben.

Es ist natürlich keine Frage, ob man Schüler dieses Alters - wie heute sehr gebräuchlich - in der Arbeit mit der Transitivität, etwa durch Pfeildiagramme explizierter Relationen trainieren kann; wohl ist es die Frage, ob das irgendwelchen Sinn hat. Denn worauf es ankommt, ist das Mathematisieren realer Situationen mittels linearer Ordnung.

Wie schon betont, ist so etwas durchaus nicht selbstverständlich. Beim Gewicht verlangt es von 8-jährigen noch einen Lernprozeß, und das gilt sogar - man sollte es gar nicht glauben - bei der Zeit. Die Differenzierung der Vergangenheit ist ihnen noch nicht recht bewußt. Unser Thema *"Zeit - Länge - Graphik"* fing mit der in der Generationenfolge (Urgroßmutter, Urgroßvater, Großmutter, Mutter) bildlich konkretisierten Differenzierung der Vergangenheit an; es führte dann zur Technik der Zeitachse, auf der Makro- und Mikroabläufe abgebildet wurden. Dann kam als erste Graphik die Längenentwicklung eines Säuglings - ein recht natürliches Beispiel, da der Säugling in seinen Entwicklungsstadien der Länge nach sozusagen auf der Tafel auf die Zeitachse gestellt werden kann. An der Steilheit der

Graphik wird spontan die Wachstumgeschwindigkeit - qualitativ - abgelesen. Ein Zeichenfehler des Lehrers (ein zu kleines Intervall) auf ᵈer Zeitachse), der da ein schnelleres Wachstum vortäuscht, wird als solcher erkannt. Es folgen Zeit-Weg-Graphiken, die eine komplizierte Reisegeschichte illustrierten, und aus denen umgekehrt charakteristische Züge der Reise abgelesen werden.

Ist das Geometrie? Ja, wenn auch in einer anderen Funktion als bisher, wo es auf das Erfassen des Raumes ankam. Es ist hier mehr Deutung des Raumes, nicht um ihn zu verstehen, sondern um mittels des Räumlichen anderes der direkten Auffassung nicht zugängliche Begriffliche zu verstehen. Es ist das Geometrische nicht um seiner selbst willen, sondern - wie man heute auch sagt - als Modell, die Kurve als Modell der Funktion, die Gerade als Modell der linearen Funktion.

Verhältnis und Proportion - sagte man früher statt linearer Funktion und diese Ausdrücke sind immer noch zeitgemäß, wenn auch der globalere Ansatz, von der linearen Funktion her, der entwicklungsgemäße ist. Ich habe den Verhältnisbegriff didaktischphänomenologisch näher untersucht - darauf will ich hier nicht eingehen. Es ist wieder ein Gegenstand, der zu vertikaler Lehrplanentwicklung herausfordert; wir haben uns seiner noch nicht genügend gewidmet. Wie stark mit Geometrischem verbunden er eingeführt werden kann, zeige ich Ihnen mit einem Trick, der auf jedem Niveau - auch auf dem Ihrigen - wieder überrascht. Ich lege etwas auf die Projektionsfläche. "Was ist das?" "Ein Kreis!" "Es ist eine Münze. Welche? ... Keine Antwort? ... Ich lege etwas hinzu und sage Ihnen, daß es ein Fünfmarkstück ist. Was war die erste Münze? ... Und dieses ist ein Zweimarkstück ... Und dieses ein Fünfer ... Ja, das erste war ein Zehner."

Um wieviel vergrößert die Projektion? Betrachten Sie den stift auf der Platte. Hier habe ich genauso einen in meiner Hand. Wie kann ich sie vergleichen? Sie nebeneinander halten? Nein, dann sind sie gleich groß. Ja, wieviel vergrößert die Projektion?

Sie verstehen wohl, daß dieser geometrische Einstieg wirkungsvoller als der der numerischen Verhältnisaufgaben ist. Ist es Geometrie? Wer möchte es leugnen? Doch fehlt diesem Gegenstand noch der Reichtum wahrer Geometrie, wie wir Mathematiker ihn in klassischeren Ansätzen schätzen.

Ich hatte bei uns natürlich wiederholt *Abbildungsgeometrie*, von den Spiegelungen herkommend, propagiert; vor etwa einem Jahr hatten wir schon damit - auch in der Grundschule - experimentiert, aber es paßte schlecht in den Rahmen, in dem wir damals arbeiteten, und so blieb es schließlich unerledigt liegen. Sicher müssen wir darauf zurückkommen. Meine Mitarbeiter fürchteten damals - und fürchten wohl auch jetzt noch -, daß der Begriff der Abbildung bei Lehrern und Schülern nicht recht einschlägt. Ich teile diese Furcht nicht, aber verstehe es, daß man vorsichtig ist.

Was wir nun für die 5. Klasse entwickelt haben, ist ein *Thema "Zeit, Abstand, Geschwindigkeit"*. Die Versuche fingen mit der Geometrie des Würfels an, und das funktionierte, wie mir von vornherein klar war, ausgezeichnet. Es gab uns Mut. Zur Kugel, unserer Erdkugel, mit ihren Kreisen, Großkreisen, Breitenkreisen, Meridianen - und immer übermütiger wurden wir. Antipoden auf der Kugel suchen und auf der Merkatorkarte! Das Ziel war die Reise um die Erde, bei der man einen Tag gewinnt oder verliert. Um das zu erreichen, war allerlei nötig. Wie geht die Sonne auf und unter? Wie mißt man ihre Höhe? Wie entnimmt man einer Graphik, wann großer und kleiner Zeiger der Uhr einander einholen, wann entgegengesetzt die Rennbahn Umkreisende einander treffen, und wie wendet man die Graphik auf den

Weltreisenden an?

Ich denke, daß es ein gelungenes Stück ist, noch nach allen Seiten offen zum Einbau in Größeres, zur Integration mit anderen Fachgebieten, zum Experiment und zur Analyse. Es soll Ihnen heute nachmittag in Einzelheiten gezeigt werden.

Die Nachmittags-Demonstration, die ich in meinem Vortrag erwähne, wurde von Herrn L.Streefland ausgeführt. Von dem Unterrichtsheft "Zeit, Abstand, Geschwindigkeit auf unserer Erde" wurde eine englische Übersetzung verteilt. Der Inhalt sei hier skizziert.

Das Heft gipfelt in der Erklärung des Zeit"gewinns" oder -"verlustes" bei einer Rundreise um die Welt. Es fängt mit Kreisen auf der Kugel und Antipoden an; es stehen auch Karten da, und auf einer Merkatorkarte sollen von Punkten Antipoden ermittelt werden. Die Höhe der Sonne soll bestimmt werden; das führt zur praktischen Winkelmessung. Wie bestimmt man aus der Länge des Schattens eines senkrechten Stabes die Sonnenhöhe? Wie verlaufen Sonnenhöhe und Schatten im Laufe des Tages? Ortszeit, Zeitzonen und Datumgrenze kommen an die Reihe. Graphische Darstellungen der Zugbewegungen nach einer Kursbuchseite, das Begegnen und Einholen, auch auf der Rennbahn. Wie schnell dreht sich die Erde auf verschiedenen Breiten? Tageslänge in Abhängigkeit von Breite und Jahreszeit. Das Wettrennen der Zeiger auf dem Zifferblatt, die Zeigerstellung graphisch dargestellt als Funktion der Zeit. Und schließlich analog das Wettrennen von Sonne und Rundreisendem auf der Erdkugel, mit der Sonne und gegen sie, zur Beantwortung der im Anfang gestellten Frage.

[illegible] MATHEMATICS

[illegible] J. Bishop, Cambridge

There are three concerns which have motivated me to give this paper. They are:

(1) the fact that Geometry appears to be an irrelevant pursuit to many children.

(2) the fact that just as many children, if not more, have a lot of difficulty learning Geometry, and

(3) the fact that the recent reforms in Geometry teaching have had some good effects, but lack a binding force, a unifying idea, which would help to make Geometrical ideas relevant and accessible to a majority of schoolchildren.

The difficulty is always that those involved with reform are often Mathematicians who (a) do not have difficulty understanding Geometry and (b) do not see Geometry as irrelevant. It is extremely difficult for such people to appreciate the difficulties and conceptual barriers faced by "normal" children. (I use the word "normal" not because I think that there is something strange with people such as ourselves but merely because we are not in the majority.)

But the most important problem is that Geometry is thought of by such people as ourselves as a branch of mathematics. The truth is that Geometry is much more than just a branch of mathematics. The reforms in geometry teaching have emphasized the *mathematicalness* of geometry - that is, they have sought "Unification" by emphasizing those aspects of geometry which make it similar to algebra and other branches of mathematics. Now, I could label everyone here as "Mathematicians" which would emphasize certain similarities which we might share, but it would undoubtedly ignore o. different interests, motivations and personalities. In just the same way, labelling geometry as "Mathematics" ignores its particular interests.

I suggest to you today that what is wrong with geometry teaching is that it has lost sight of its essentially visual and spatial roots.

I did want to call my lecture "Visual Geometry" but that sounded so strange that I decided not to use it in case nobody would come to listen to me. Also it would have suggested that I could recognise another part of Geometry called "Non-visual Geometry" and that I cannot do. So I have called my lecture "Visual Mathematics" as *that* is what I think Geometry should be. Therefore, in this lecture, I would like to discuss two key components of Visual Mathematics that I feel are both important and misunderstood by teachers, and also to look at some of the wider implications of trying to teach Visual Mathematics.

1. *Visualizing*

This is a known and accepted part of a Mathematician's methodology. It has been clear for a long time that Mathematics is a subject which depends on two very different, yet complementary, modes of thought. The first has a creative, "hunch" playing, almost aesthetically-appealing nature whilst the second is much more cold-blooded, analytical and objective. The first is characterized by "intuition" and the second by "logic", and the history of mathematical development is the story of the interplay between these two aspects of the subject.

But what is the essential difference between these two aspects? Hadamard, in his book on invention in mathematics [1], obtained accounts from leading mathematicians about how they think in mathematics. His book includes a letter from Einstein which is most illuminating. Amongst other things Einstein says: "The words of the language, as they are written or spoken, do not seem to play any role in my mechanism of thought. The psychical entities which seem to serve as elements in thought are certain signs and more or less clear images which can be "voluntarily" reproduced and combined ... There is, of course, a certain connection between those elements and relevant logical concepts. It is also clear that the desire to arrive finally at logically connected concepts is the emotional basis of this rather vague play with the above-mentioned elements. But taken from the psychological viewpoint, this combinatory play seems to be the essential feature in productive thought - before there is any connection with logical construction in words or other kinds of signs which can be communicated to others."

Newman [2] also refers to this duality of mathematical thinking: "How can mathematicians work and make discoveries if they are to abstain from any geometrical intuition? Of course, they don't abstain. The double life of mathematicians is a familiar fact to all who have been exposed to ε - analysis. They know that diagrams and graphs are the lifeline by which we survive amid the rough seas of hard inequalities. ... One of our purposes is to use some of our geometrical notions.... as a guide, as we grope our way towards the proof of a new theorem. When it is found, we shall carefully remove all trace of geometry or mechanics from our strictly axiomatic proof; and the man who reads it will probably put them in again as he grapples with the arguments."

Both Einstein and Newman seem to make a distinction between the *verbal* nature of logic and the *visual* nature of intuition, since clearly words are a one dimensional mode of communication and thought, whereas visual imagery is 2 or more dimensional. Einstein again points to this when he says, concerning the entities referred to before, that they are "in my case, of visual and some of muscular type. Convential words or other signs have to be sought for laboriously only in a secondary stage".

Of course, these two are not the only mathematicians who talk of visual ideas in mathematics:

Hardy [3] says "A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns". Hermann Weyl [4] says "I return to relativity as an illustration of this first important step preparatory to mathematical analysis, the step guided by the maxim,'Think concretely!'", and there are many other mathematicians who say similar things.

This paralleling of intuition with visual imagery is not only interesting, it is extremely productive, since it provides us with concepts and tools which are likely to be of much more use to the teacher. You see we can now talk about visual abilities and explore their relationship with mathematical abilities.

Visual abilities can be tested and, to a certain extent, measured and this enables us to judge quantitatively the extent of the relationship between visual abilities and mathematical abilities. (Furthermore, the use of such tests can help us to see if we can cause any changes in a child's abilities, by teaching in particular ways).

Is there any evidence then, from using tests of visual abilities, that any relationship exists? Indeed there is, and perhaps McFarlane Smith's book [5] contains the most thorough account. Whilst not perhaps totally verifying his hypothesis that spatial ability is *the* greatest determinant of mathematical ability, the data from the many studies reported in that book leave one in absolutely no doubt. Ability in mathematics, particularly geometry, is correlated very highly with ability on spatial, and visually oriented, tests.

But are these visual abilities innate or can they be developed by certain types of teaching? Evidence from various research studies is beginning to emerge which suggests that teaching methods *can* affect visual abilities.

Varley and others [6] have just published an article called "Training imagery production in young children through motor involvement", Fogelman [7] has written on similar lines in an article called "Modern mathematics and intelligence tests". Our own research [8] has also shown a relationship between certain teaching and spatial ability. In all these experiments the teaching involved the manipulation and experimentation with apparatus of the sort with which British Primary Schools are full. Certainly the abundance of apparatus and equipment of all sorts in a Primary school makes it a much more stimulating visual environment than it used to be for the young pupil. What is interesting however is that the apparatus is not usually regarded as a prime source of visual stimulus, neither is it bought primarily for that purpose.

In our research, time-pressure made it impossible to study in a controlled way the long term effects of using apparatus so we decided to compare the visual abilities of children who had been to different Primary schools, those which used a great deal of apparatus in their mathematics teaching and those which did not. In order to reduce the effects of locality, background, etc. 4 situations were studied where children from the different Primary schools entered the same Secondary schools, and in all but one of the situations the children were tested in the Secondary school.

The pattern of results overall was impressive - children from schools where apparatus was used extensively scored much higher on visual tests than children from schools where minimal use was made of structural apparatus and the like. This was also the case when children from the two types of schools were matched by intelligence quotient, and the results were supported by the analyses of answers to an attitude questionnaire. This questionnaire was designed to show up differences in attitude towards Arithmetic, Algebra and Geometry, and in general the "apparatus" children showed a distinct preference for Geometry - a preference which was not shared by the other children. This is particularly instructive since, in the main, the structural apparatus was designed to improve the learning of Arithmetic and Algebra, and was purchased for that purpose.

Clearly then we have here some justification for welcoming the increasing use made of structural apparatus in Primary Schools. Not only does such apparatus enable better understanding of number relationships to be developed, as has been widely recognised, but through involvement and interaction with this apparatus the pupils come to develop that visual imagery which is so essential for later diagram and geometric work.

But is this apparatus work only to be carried out in Primary school? Surely if people are deficient in visual ability at any age, they ought to benefit, almost in a remedial way, from work with apparatus. We investigated this aspect with some 12 year old girls. The activities were chosen to be motivating to girls of that age and involved tangrams, spirographs, tesselations and paper folding. Various relationships were explored by the girls and "free play" was encouraged also. The teaching was in four half-hour sessions spread over four weeks with Spatial tests given before and after the teaching. As one would expect, using the same tests twice, there was an increase in the scores, but in this case the increase was much larger than usual. On one test in particular the mean percentage gain was 25 % and there was no doubt, on closer inspection of the tests of girls whose individual scores had greatly increased, that there was a marked difference between their abilities before-and-after the teaching which could not be attributed to the test-retest effect.

Results of this type are well supported by other research, and theorizing, which shows the necessary relationship between "action" and "imagery". One could quote many psychologists here but let me mention a sentence or two from Piaget [9]: "Geometrical intuition is essentially active in character. It consists primarily of virtual actions, abridgements, or schemata of past, or anticipatory schemata of future actions, and if the action itself is inadequate, intuition breaks down".

We must remember here that Piaget was referring to young children and it may be the case that older children or adults can train themselves to form images without the need to perform the actions, perhaps by recombining previously learnt memory images. Nevertheless, lacking such information, one must say that it is extremely encouraging to see the extensive use made by the sensitive teachers of apparatus-manipulating activities of all types. It is also good to see these activities going on in the Secondary as well as in the Primary schools. In fact there seems to me to be no reason why practical activities should not play a part in all levels of teaching - I have seen such methods used to good effect with undergraduates and with teachers on in-service courses.

Here is a list of such activities and materials which I feel are particularly useful as image-provokers:

Tesselations, pattern-blocks
Tiling patterns, tangrams
Paper folding and cutting, Origami, nets of 3-D objects
String exercises, knots, patterns, loop-cutting
Geoboards -> dot paper -> graph paper
Altair design paper
Mirror cards. The Mira.
Shaping plasticene, cutting it in different ways
Rubber sheet drawings
Containers of various shapes and sizes
Games such as 3D noughts and crosses (tic-tac-toe)

I expect however, that what I have said in the last five minutes was not "news" to most of you, it probably only confirmed what you either knew or believed. So let me extend now into an area which may be novel to you. Even if we know about actions giving us our imagery, this does not help us to understand why, for example, people differ so markedly in their performance on tests of spatial ability.

Leaving aside the skills of drawing, which I will refer to later, the other important skill appears to be the ability to look at one's images, if I can describe it that way.

Let us take Hebb's definition of imagery [10]. "The occurence of mental activity corresponding to the perception of an object, but when the object is not presented to the sense organ". In other words to look at your image you must recreate for yourself your perception. But how do you create your perception in the first place - you look at first one part of the object then at another, taking in various details, in exactly the same way as you feel your way around an object (Piaget calls this "centration" and he says that the only difference between visual centration and tactile centration in that the first can take in more elements simultaneously than the second).

So if you close your eyes and try to imagine a sports car, you will find it is not possible to have a complete image of the car - rather that you will notice first one part and then another and your eyes will move as you look at the different parts. By this means you gradually build up the picture for yourself but you can never see the whole picture at one instant. The image is not like a photograph.

Some people claim to have photographic memories, they would be more correct if they said they had cinematographic memories because they are not always aware of the movement which is part of the image. Such people say that they can remember, like a photograph, the page of a book, but if you ask them to read the words backwards, starting from the bottom of the page they can only do it with extreme difficulty and sometimes they fail altogether. (You can see the same effect if I ask you to spell the word "Mathematics" backwards).

This then is part of the process of seeing one's images and it does seem that people differ markedly in their ability to do this. I would speculate that one of the reasons is that because we can see we don't need to use our imagery very much. In short, we have become lazy. But if you can't see, your ability to use imagery is vital. Have you heard the old saying "if you are lost, ask a blind man the way". I believe it is possible to train people to use their images more, firstly by making them look at their images more. Here are two exercises one can give children from the age of 9 onwards (I've not tried them with younger children, but I'm sure some could do them successfully).

Close your eyes. Imagine a triangle. Label the vertices A, B, C,. Now answer these questions (to yourselves of course).

Is one of the lines horizontal?
Is one of the lines vertical?
Which point is the highest?
Which point is the lowest?
Which point is furthest to the left?
Which point is furthest to the right?
Is angle ABC acute?
Which is the largest angle?
Which is the smallest angle?
Which is the smallest side?
Which ist the largest side?

Open your eyes.

There are of course many variations on that theme.

(I wonder incidentally how many of you imagined an equilateral triangle?) This next exercise uses numbers but it still concerns visualizing. Imagine the number 2597

Which digit is on the left?
Which digit is on the right?
Which digit is the largest?
Which digit is the smallest?
Which 2 digits are in the middle?
What number do you get when you read it backwards?

Perhaps you find these too easy - remember we are talking about children and this is not meant to be a test but an exercise to improve their skill at looking at their images. (If you are like me the difficulty is one of memory - holding as much of the image present as possible). I would suggest that exercises like this must be of benefit to children, and of course they can use all types of objects as the image to work on. Here are some other examples which might test *your* imagery (only one question for each image).

1. How many edges has a tetrahedron? (6)
2. If *PQ* is an edge of a cube, how many faces contain neither *P* nor *Q*? (2)
3. In a regular hexagon *ABCDEF* do the following 3 lines intersect at the same point? *AD*, *CE*, *BF* (No)
4. A clockface is rotated so that 3 is at the top. The hands, which don't change, originally showed half-past four. What time do they show now? (Quarter to eight)
5. How many small parallelograms will be formed if 3 parallel lines intersect at 45^{o} another 3 parallel lines? (4)

We have used many other exercises and I can assure you that it is not difficult to invent such tasks. We have not however compared any of these exercises with each other so I cannot say which ones are more effective for training. Another idea here is that if you had difficulty with those exercises you probably wished you could have drawn the diagrams on paper. You might consider drawing the diagram "in the air" as a help to producing an image to operate on. I have tried this with younger children and it does help them, but of course they must not use this all the time. Incidentally this can be a problem, too, with apparatus. Some children will not try to operate without it and I have seen teachers encouraging pupils to leave the apparatus by saying such things as, for example: "Now close your eyes and imagine what will happen to the blocks when you do that", "Then do it and see if you were right", and "Put the coloured rods behind your back. Now give me the blue one".

I was surprised when I began on this research some years ago that I could not find any references to the use of activities such as these in schools and it made me realize that it was a very misunderstood and neglected area.

(If *you* still find it difficult to evaluate, think about the uses and value of Mental Arithmetic and call what I have just been talking about "Mental Geometry".)

In fact the only detailed reference I have found on this is in a book called "Mathematical Education" written by a man called Branford [11] published in 1924. He gives excerpts from a mental geometry lesson with blind children. Remember as I read this that the teacher is also blind. You might also care to close your eyes and join in the lesson.

"I began the lesson by asking them to imagine an equilateral triangle, which I named *A B C*, reading from the apex, anti clockwise. (The base line *BC* is horizontal) Then I asked what direction the line *BA* would take if I produced it. The answer was to the right. What direction will CA take if produced? Answer, to the left. Now, let BA be produced as far as B is from A, and do likewise with CA. Now, write D and E at the extremities of the produced lines. Suppose now that we join DE, what do you observe? At once a boy answered, the line will be as long as BC. (Note the rapidity and comparative complexity of this intuitive conclusion). Anything else? Yes, we have made another triangle. Well, what else do you notice? Two of its sides are equal. To what? To two of the sides of the bottom triangle. How many sides of the one are equal to -?

Before I got further a boy answered three. Well, is there anything else? The angle at the apex of the top triangle is equal to the angle at the apex of the bottom one. Let us take these triangles from the wall, and lay them on the floor. One or two at once said we might lay one on top of the other. If we do, what shall we discover? The one on top will fit on the one on the floor".

You may open your eves again now.

Remember what I said about being lazy visualizers because we can see!

2. *Representing*

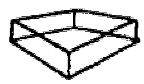
If "imagining" as I have just described it may be a controversial area, there can be no doubt that the ability to draw and represent objects and ideas in a non-verbal or non-symbolic way is an important ability. This is true whether one is talking about a mathematician or a biologist, a geographer or a physicist.

But just because a person has an image of something does not of course mean that he will be able to draw that image. That, more than anything else, is a learnt and practised skill. But drawing, particularly in a geometrical context, rarely seems to be taught specifically. For some people of course, drawing comes easily, but for the majority of us it is a far from easy skill. First of all must distinguish between two types of drawing - copying and abstract representation. In the first, the aim is to put down on paper some shape which one can see before one. This type of drawing is especially important in 3D work and in Britain a great deal of this is done under the heading of "Technical Drawing" (Technical Design in other countries), so-called because of its engineering connotations. Words like Plan View, Side Elevation, Front Elevation will probably strike a chord with some of you but for the other people I will mention an exercise which will illustrate the general idea. Try to think of a shape which, when viewed in the x-dimension is a square, in the y-dimension is a triangle, and in the z-dimension is a circle. The idea, then, is to represent any shape by means of its 3 projections onto the x, y and z planes.

This is, of course, not the only way to represent 3D objects - indeed one can find books entitled "3D scale drawing" with many techniques illustrated and described [12]. Perhaps we would hear fewer complaints about students not being able to "think in 3D" if teachers took the trouble to learn how to teach drawing skills.

Another book [13] I have come across [illegible] called "Exercises in Graphical Communicatio[illegible] is many exercises for drawing freehand, (i.e. with[illegible] aids). That these drawing skills can be learnt is in absolutely no doubt.

Of course we are helped these days by such aids as isometric graph paper, but it must be remembered that isometric projection is only one form of projection, others may produce a far more realistic representation:



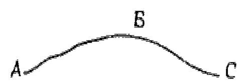
Far greater realism is produced by steroscopic pictures and Gregory in his book "The Intelligent Eye" [14] makes reference to a drawing instrument he has invented which can draw steroscopic pictures on a white wall-board.

Drawing maps and plan-view constructions of the class-room or a toy or the school-building are also very useful activities and need not be accurate in terms of numerical scaling, to have the desirable effects. Primary school children are certainly capable of this type of activity and one book I was reading recently on Geography teaching [15] has the following sentence in it: "The generalization that school-entering six-year-olds can read and make maps is treated now as the base-line datum for our developmental studies."

Important though these copying skills are however, in geometry and indeed in mathematics generally we use many abstract representations - that is, representations of ideas, of relationships and of operations. There is a very complicated and sophisticated visual vocabulary and grammar to be learnt by the pupil, with many conventions and rules to be followed. Make no mistake about it this is a most difficult area for our pupils to understand and it is my belief that they need much more help and structured teaching than they seem to receive at present.

For a start there are so many types of visual representations which we use in mathematics, yet nowhere have I seen any attempt to analyse these and organise them into a coherent structure. I have made an attempt to do this, but I must emphasize that this is only a beginning. (See Fig. 1) I have omitted 3D representations from this chart and I am sure certain other representations are also omitted. But the chart does help to show some order and coherence in the vocabulary of our representations. You will see that there are three columns and three rows. The three rows are firstly one dimensional line and area drawings.

The three columns are called Topological, Non-topological non metric, and metric. Thus in the column classed as topological, the only property which remains invariant is that of connectedness. The method of representations is unimportant and there is no metric involved. Thus with



the order of A B C must remain unchanged but the distance from A to B, A to C and B to C and the representation used to connect the letters are arbitrary.

With the next column that of non-topological non-metric, connectedness is again preserved and the nature of the components of the diagrams also remains invariant. Thus a straight line must be represented as a straight line, on obtuse angle as obtuse, a circle as a circle etc., but the length of lines and sizes (in degrees) of the angles is unimportant.

For the metric column the two properties mentioned above

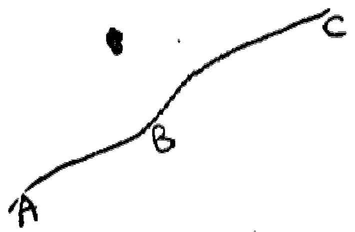
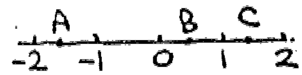
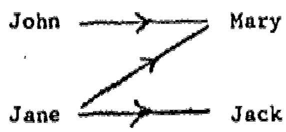
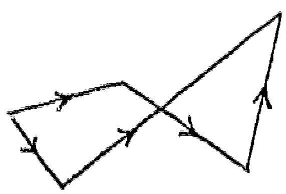
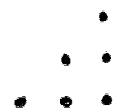
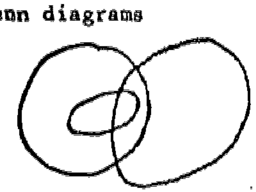
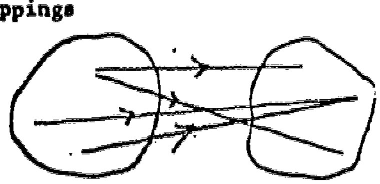
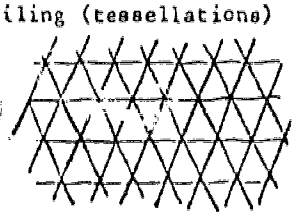
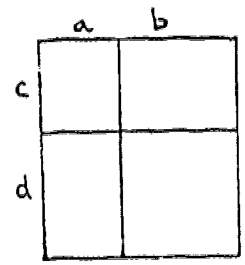
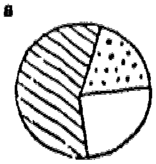
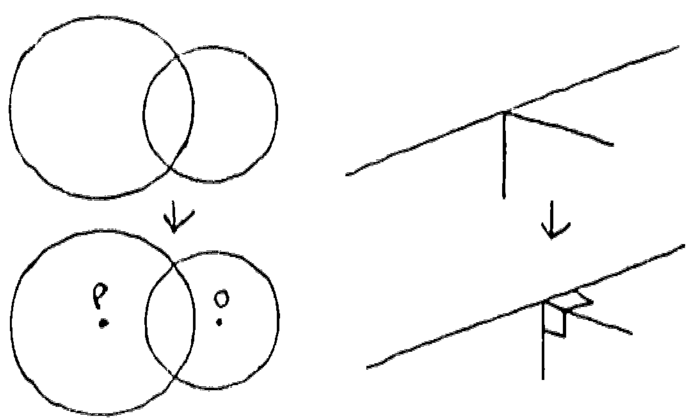
Topological	Non-Topological Non-Metric	Metric
		Number line  bar chart
arrowgraphs  flow diagrams networks 	dot diagrams  Pascal's △ 1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1	co-ordinate axes (cartesian and polar) continuous graphs vectors
Venn diagrams  Carroll diagrams mappings 	Euclidean geometry diagrams tiling (tessellations)  transformations reflections	area diagrams  pie charts 

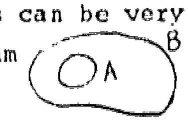
Figure 1

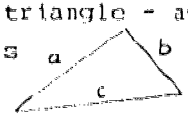
remain invariant and a third invariant is added to them - that of a number or a metric. Thus a length of 2cm is always represented as a length of 2cm, (using a suitable scale) and angles are represented accurately.

Here, then, I present a first list of different sorts of spatial representations classified in terms of their invariants. The language and the headings used are extremely tentative and this classification is of course open to discussion.

Whether this chart represents the visual syllabus for the teacher to work through, or a store of possible representations for the pupil to draw from, we must be aware of the conventions which each representation employs. Strangely it is often claimed that words are ambiguous whereas a diagram is not. This ambiguity is only one of degree however as these two diagrams illustrate: -



Some conventions can be very confusing. For example, in this Venn diagram  the letters A, B are meant to refer to the sets inside the two curves, not to the sets outside, which is where the letters are placed.

I often wonder whether teachers in fact are aware of the conventions they are using. For example, they will say "Let us draw any triangle" and then they draw one. A pupil may feel, quite rightly, that you can only draw one, not any. It doesn't help of course for the teacher to talk about drawing a "general" triangle - again, you can't. It does no good to draw this 

and to say it doesn't matter what a, b and c are. You might think, and say, that at least the triangle is non-specific. This is implying that it isn't equilateral and it isn't isosceles, it isn't right angled, etc. But as soon as it is drawn, it is a specific, particular triangle.

Other problems are caused by the fact that the teacher's blackboard is vertical whereas the pupils' books are usually flat on a horizontal desk. Consider these phrases: - "The y-axis is vertical and the x-axis horizontal", "What's the height of that triangle?", "North is up", "Drop a perpendicular". Consider the transformations which the child must learn to cope with those.

One tactic which teachers do adopt to overcome this problem is to verbally describe the diagram, indeed it is very rare to see a teacher present a diagram and say nothing about it! This does seem to be a potentially dangerous tactic in that the teacher converts the two-dimensional representation into a one-dimensional sequence of words, and this implies to the child that he must look at that diagram in that one way. Diagrams, however, are not to be looked at in one way by their very nature, just as one would be dis-satisfied by somebody else's description of a beautiful painting, but there could be a value for the untutored eye, just as one can learn a great deal from an expert artist describing what he can see in a particular painting. The difference is that the expert is really explaining about the hidden conventions which are present in his diagram, and which an expert alone can understand. Another value for verbally describing a diagram is that it can provide a focus that is not necessarily obvious. In other words, the teacher could explain what the diagram is trying to represent, but as with any form of communication, he must not expect that the diagram will always succeed.

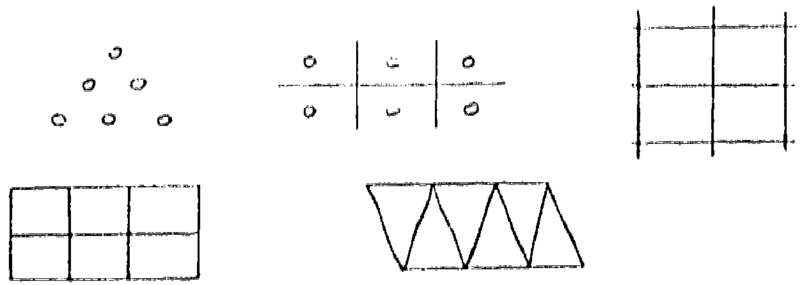
I feel that there is another technique which has even more merit. This is actually building up each diagram in front of the pupils and it is surprising that it seems to have a slightly unprofessional connotation. One suspects that the pressures of mass media have undoubtedly helped to create this feeling; for example, with the increased use of overhead projectors has come the increased pressure for beautifully prepared diagrams.

Of course, as well as helping pupils to learn the visual conventions this diagram drawing enables them to learn how to draw diagrams themselves - a copying or imitative technique.

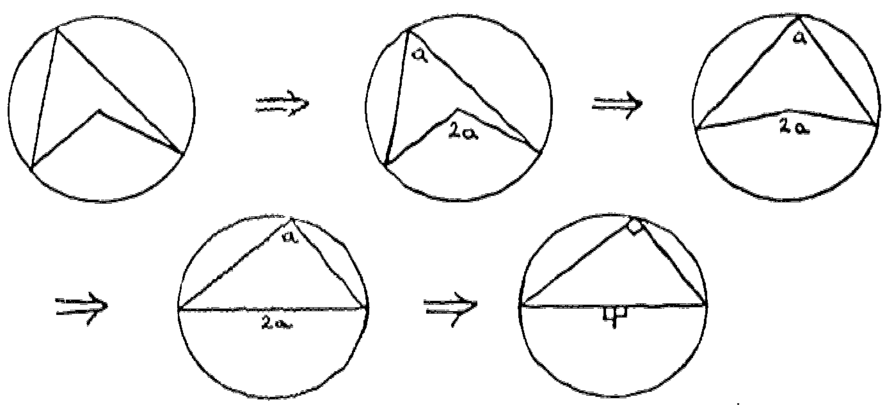
There are many more things one could say about representational techniques here but let me mention just two more. Consider giving the pupils, as an exercise, the following:

> Draw as many diagrammatic representations of 2 x 3 = 6 as you can. Consider what each has to offer as a possible starting-point for further generalizations.

Some examples might be the following:



Also what about a visual proof. The nicest one I have seen is given by Richard Skemp in his book [16] "The Psychology of learning Mathematics":



The use of diagrams and other visual representation for communication purposes is now very sophisticated but I feel that we in mathematical education are not exploiting this mean of communication to the fullest. As a modest example of what can be done, can I say that I have taught a lesson lasting $1\frac{1}{2}$ hours, to a class of 9years old children, introducing them to algebra, without saying a single word. Communication was solely by means of diagrams, symbols and the occasional gesture.

Originally I had planned to complete my lecture by discussing the use of visual imagery and diagramming in the solution of problems. However when I received my copy of the Conference programme I discovered that my good friend Trevor Fletcher has as the title for his lecture "Geometrical insight and solution of problems".

I am very happy to leave that topic therefore in his most capable hands.

Let me therefore finish this way.

Perhaps I can permit myself a little speculation as to what might be some of the implications of introducing this "diet" into schools. I think first of all that it is likely that this type of work would be extremely valuable for future scientists, for future engineers, for future draughtsmen, for future architects, for future teachers, for future artists, for future advertising experts, for future designers of all objects from town planners to shoe designers and of course I feel it would be valuable for future mathematicians. These I know are far from modest claims, but I feel that they are justified particularly when one looks at today's geometry which so many children feel is irrelevant to their lives and futures.

Another implication is that if this type of geometry is to be taught well then other teachers as well as the mathematics teachers should be involved. Certainly science, geography, technical design, art, and workshop teachers could contribute a great deal to help make children more visually developed. We might even see a new word or two coming into the curriculum to describe this interdisciplinary visual work - I saw it described in an article as "Graphicacy", with the aim being to make children more "Graphicate". I don't think much of the word but I agree with the sentiment that lies behind it.

If what I have said seems to have little to do with geometry *as* mathematics then I have been successful, because what I set out to do was to focus on two visual aspects of geometry - the mathematical aspects will, I am certain, be emphasized by other speakers.

BIBLIOGRAPHY

1. J. Hadamard, "The psychology of invention in the Mathematical field", Dover Publications, 1945

2. M.H.A. Newman, "What is Mathematics? New answers to an old question", , Mathematical Gazette, 43, 345

3. G.H. Hardy, "A Mathematician's apology", Cambridge University Press

4. H. Weyl, "The Mathematical way of thinking" in The World of Mathematics, J.R. Newman (Ed.), Simon & Schuster, New York, 1956

5. I. MacFarlane Smith, "Spatial Ability", University of London Press, 1964

6. W.H. Varley, J.R. Levin, R.A. Severson, P. Wolff, "Training imagery production in young children through motor involvement", Journal of Educational Psychology, 1974, Vol. 66, No. 2

7. K.R. Fogelman, "Modern Mathematics and intelligence tests", Educational Research, 1968, Vol. 11

8. A.J. Bishop, "Use of structural apparatus and spatial ability: a possible relationship", Research in Education, No. 9, May 1973

9. J. Piaget & B. Inhelder, "The child's conception of space", (translated), Routledge & Kegan Paul, 1956

10. D.O. Hebb, "Textbook of Psychology", Saunders, 1972

11. B. Branford, "Mathematical education", Oxford University Press, 1924

12. J. Clutterbuck, "Three dimensional scale drawing", English Universities Press, 1966

13. R. Thomson, "Exercises in Graphical Communication", Thomas Nelson, 1971

14. R.L. Gregory, "The Intelligent Eye", Weidenfeld & Nicolson, London 1970

15. J. Bale, N. Graves & R. Walford, "Perspectives in Geographical education", Oliver & Boyd, 1973

16. R.R. Skemp, "The Psychology of learning Mathematics", Penguin, 1971

Two other books which are relevant to the ideas expressed here are:

H.M. Cundy & A.P. Rollett, "Mathematical Models", Oxford University Press, 1961

K. Critchlow, "Order in space", Thames & Hudson, 1969

A COMBINED ALGEBRA-GEOMETRY CURRICULUM FOR JAPANESE SECONDARY SCHOOLS.

S. Iyanaga (Japan)

Let me begin by giving first some general explanations of the educational system in our country.

Our present school system is as follows:

Age:	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18 - 21
Grade:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
School:	Primary						Junior High			Senior High			University

Compulsory education (Primary and Junior High)

Our system is strongly controlled by the Ministry of Education. Up to the secondary level, the curriculum is made by a Government Committee, consisting of members named by the Ministry. The text-books must coincide with the curriculum and be approved by the same Ministry. This makes the education homogeneous throughtout the country, but it rather slows down the speed of reform. The curriculum is remade every ten years approximately, while the researches for the reform are continuously performed by study groups, some of which are subsidized by the Ministry. I should like to explain in the following our present curriculum and a plan of reform concerning algebra and geometry for the secondary level, put forward by a group, to which I am belonging, with exphasis on the Junior part.

Before doing this, I should give a brief description of our primary school curriculum. It contains the four arithmetical operations on non-negative rational numbers with applications to daily life questions; measurements of lengths, angles, areas, volumes, weight and time; geometrical observations on triangles, quadrilaterals, especially parallelograms, rectangles, squares; circles, cylinders, pyramids, cubes and spheres; the notion of sets is introduced in the 4th Grade; in the 5th and 6th Grades, some elementary notions on statistics and probability.

We have an almost unique curriculum for the Junior part, but several curriculums for different courses in the Senior part, but to make the matter short, I shall talk here only on one of these courses in the following.

Here is our present curriculum (roughly described):

7th Grade

- Some elementary number-theoretic facts such as divisibility criteria by 2, 4, 5, 3, 9 with applications for finding *G.C.D.* and *L.C.M.* of two integers (assuming without proof the fundamental theorem of elementary number theory).

- Introduction of negative numbers and four arithmetic operations in $\mathbb{Z}$. (The words like group, ring, field are not mentioned, but attention is drawn on the facts that $\mathbb{Z}$ is closed under addition and subtraction, and that commutative and associative laws are valid for addition and multiplication in $\mathbb{Z}$, etc.)

- Number line. Introduction of coordinates on a line and on a plane.

- Use of letters to represent number. (First introduction to algebra.)

- Notion of functions and their graphs, especially of linear funktions kx and of the function k/x (with reference to "direct and inverse proportions".)

- Displacement of figures. Symmetry with respect to a point, a line or a plane.

- Conditions for congruence of triangles, and properties of parallel lines with some applications to parallelograms, etc.

- Use of such symbols in set theory like $\in$, $\{a, b, c\}$, $\subset$, $\supset$, $\cap$, $\cup$, $\emptyset$.

- Introduction to logical reasoning using such words as "and", "or", "not", "If... then...".

- Elementary stat ics (Histogram, mean value.)

8th Grade.

- Addition and subtraction of simple polynomials.

- Linear equations and inequalities. Solution of simultaneous linear equations with two unknowns.

- Use of the symbols like f to represent functions.

- Linear functions $ax + b$.

- Meaning of neutral and inverse elements with respect to an algebraic operation.

- Some examples of simple (finite) algebraic system (like $\mathbf{Z}$ mod m).

- Conditions for triangles to be similar with applications. Homothetic transformation.

- Numbers of permutations and combinations with applications to some problems on probability.

9th Grade.

- Quadratic roots of positive numbers. Solution of quadratic equations and inequalities.

- Multiplication of simple polynomials. Formulas like $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ with their use to factorization of polynomials.

- Graph of functions like ax^2, ax^3.

- Pythagorean theorem.

- Properties of circles, concerning especially angles at the circumference.

- Polyhedra and Euler's theorem as an example of topological properties of figures.

- Statistics: meaning of variance and of correlation coefficient.

10th Grade.

- Real numbers as coordinates on a straight line.

- Operations with polynomials (Including division).

- Equations and inequalities (prinzipally quadratic.) Solution of some numerical equations of degrees ≥ 3 by factorization.

- Plane coordinate geometry dealing with straight lines and circles.

- Vectors on a plane.

- Graphs of functions like ax^2+bx+c, $(ax+b)/(cx+d)$.

- Exponential, logarithmic and trigonometric functions.

- Some more probability.

11th Grade.

- Vectors in space.

- Matrices (mostly 2×2 matrices).

- Sequences of numbers.

- Introduction to calculus.

- Axiomatic structure of plane geometry.

12th Grade.

- Differential and integral calculus.

- Probability and statistics.

This curriculum includes "modern" materials concerning logic and set theory, algebraic structures, topological ideas, linear algebra, probability. (In other courses for Senior High which I have not explained, much materials concerning computer science are also included.) On the other hand, it contains the "technical part" of Euclidean geometry in rather old fashion. E.g. in the 7th Grade, conditions for congruence of triangles are stated as results of observations, from which some theorems are deduced in classical way. It is, to be sure, one of the most important features of present-day mathematics that it be developed logically from an explicitly stated system of axioms, and it is a remarkable event in the history of science that the first model of this idea was given by the Greek geometry. But the author of our present curriculum thought it too difficult for Junior High students to grasp this idea and avoided to introduce the word "axiom" in Junior High course. Instead, an item "Axiomatic structure of plane geometry" is placed in the course of the 11th Grade, but its developments in most text-books are rather perfunctory. We thought that this point should be amended.

I shall now explain our reform plan.

7th Grade.

Concerning the algebraic part, we have found no need for great change except for the following:

We could introduce intuitively real numbers as coordinates on a straight line at this stage already. Even if we postponed this introduction to the 10th Grade as in our present curriculum, it seems difficult to deal, with perfect rigor, real numbers in secondary schools. One could speak of an approximate value (e.g. in decimal fractions) of a real number at this Grade, and operate intuitively with real numbers.

On the geometric side, the students are already sufficiently accustomed to such figures as triangles, quadrilaterals, circles, cubes and spheres in primary schools, and they possess now also the notion of sets. It will be time for them to learn to express clearly what they mean by these terms, to *define* the figures from the known, basic figures. To do so, they will be aware of the necessity of knowing first the fundamental properties of these basic figures. When we state all these essential properties, we obtain axioms. We have not to mention however this word of "axiom" in this Grade; we could postpone it to the next Grade, but it will be possible, and interesting for the students to learn the clear formulation of these fundamental properties together with some of their easy concequences.

As it is often said, Euclid was, in fact, lacking in rigor and it would be too cumbersome for educational purposes to develop the whole system of Euclidean geometry as rigorously as Hilbert has done it. But combined with algebra, notions of sets and mappings, there will be some way of developing geometry fairly rigorously on ground of axioms, which will appear natural, and not so conventional, to the students. - This ist our basic idea.

At the beginning of the 7th Grade, explanations will be given about such fundamental ideas as points, (straight) lines, planes and spaces. The students possess surely these ideas from the primary schools, but e.g. the difference between the line and the segment will not be always clear. As the line is coordinatized, the definitons of half-line or ray and of segment will be easily introduced. It will be stressed that the line is a set of points (a subset of the space), bijectively corresponding to $\mathbb{R}$. The notations used by Moise: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, $\overline{AB}$ etc. will be useful and it will be good anyway to introduce the notions represented by them.

The incidence axioms such as: two different points determine a line; three non-collinear points determine a plane and the parallel axiom, will also be stated and explained at this Grade as results of observations.

It will be also observed that a line on a plane divides it in two halfplanes. If A, B, C are non-collinear points, the half-plane containing C with the boundary AB, could be denoted by $\overset{C}{\overleftrightarrow{AB}}$, and the other half-plane with the same boundary $\overset{C}{\overleftrightarrow{AB}}$. (The boundary will be considered as not belonging to the half-plane. The "closed half-plane" containing the boundary will be denoted by $\overset{C}{\overleftrightarrow{AB}}$ with thicker line.) Likewise, the notion of half-space will be introduced.

We think it will be interesting to introduce here also the notion of convexity. A set of points S is *convex*, if $S \ni A, B \Rightarrow S \supset \overline{AB}$. It will be observed that segments, half-lines, half-planes and half-spaces are convex, and it will be *proved* that the intersection of two convex sets is convex.

A, B, C being three non-collinear points, the angle $\angle\ ABC$ ($< 180^\circ$) will be defined as the union of its interior $\overset{C}{\overleftrightarrow{AB}}\ \overset{A}{\overleftrightarrow{BC}}$, sides $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ and vertex B; it will be shown that an angle and its interior are convex. A triangle $\triangle\ ABC$ will be also determined by three non-collinear points A, B, C. The sides of this triangle are three segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$; its vertices are three points A, B, C, its interior is the intersection of three half-planes like $\overset{C}{\overleftrightarrow{AB}}$, $\triangle\ ABC$ means the union of all these sets. $\triangle\ ABC$ and ist interior are also convex. Again, three non-collinear points A, B, C determine also a *flag* $\overset{C}{\underset{A\ \ B}{\rightarrow}}$, with means the triple $(A, \overrightarrow{AB}, \overset{C}{\underset{A\ \ B}{\rightarrow}})$.

The students know from primary schools about translations, symmetry with respect to a point, a line or a plane. It will be mentioned now that all of these are mappings of the space (or a plane or a line, according to circumstances) to itself (or to another plane or line) which do not change the distances between corresponding points, nor the angles between corresponding rays. The notion of motions (mappings which keep the distance invariant) will be introduced and it will be observed that there is exactly one motion sending a given flag to another given flag.

These will be the essential "reform" concerning the 7th Grade.

Thus our new curriculum for the 7th Grade will look like this:

Natural numbers (including factorization, *G.C.D.*, Euclidean algorithm, *L.C.M.*)

Computations with non-negative rational numbers (with applications of *G.C.D.* and *L.C.M.*)

Mensuration of quantities and computations with approximate values (intuitive introduction of real numbers).

Negative numbers, number line (i.e. coordinatized straight line).

Use of letters to represent numbers (first introduction to algebra).

Functions (as in the present curriculum).

Linear equations and inequalities.

Notions of logic, set theory and statistics as in the present curriculum plus notion of mappings.

Fundamental figures (point, line, plane, space; half-line, half-plane, half-space, segment), and their properties (including convexity).

Angle, triangle, circle, cylinder, pyramid, sphere.

Transformation of figures (translation, rotation, symmetric transformation with respect to a point, a line or a plane, motion, congruence).

Area of plane figures. (Mention that two congruent figures have the same area and the volume of a figure which is the "sum" of two figures equals the sum of the volumes of these figures, and deduce thereof known formulas).

Volume of cylinders and of pyramids.

8th Grade.

No spectacular change will be necessary in the algebraic part, but it will be interesting to deal with some simple problems of linear programming as application of linear inequalities.

On the geometric side, an easy part of the incidence geometry in 3-dim. space (up to the point to show the transitivity of parallel relation of lines) will be treated in the first part. Then an axiomatic construction of plane geometry will come using in particular the axiom that there is a unique motion sending a flag to another. Our curriculum will be as follows:

Algebraic and probabilistic parts as in the present curriculum plus some applications to linear programming and quadratic root of positive numbers (in connection with Pythagorean theorem) minus finite algebraic systems (which have no further developments).

Incidence geometry in space.

Aciomatic construction of plane geometry (up to Pythagorean theorem.)

9th Grade

The essential "reform" being done in the 7th and 8th Grades, we will only have to continue.Our new curriculum will be:

Quadratic functions, equations and inequalities. (Formula for solving quadratic equations, discriminant, complex numbers, some arithmetic properties of quadratic roots, such as the irrationality of $\sqrt{2}$.)

Computation with polynomials (including factorization).

Functions like ax^3, $(ax+b)/(cx+d)$. Inverse functions.

Continuation of plane geometry (including theory of similar figures.)

Trigonometric functions and Gaussian plane.

Statistics as in the present curriculum.

+++

In our present curriculum, the treatment of trigonometric functions is postponed to the 10th Grade which hinders the introduction of Gaussian plane in the secondary mathematics, which is a great disadvantage.

I shall not go into the details in the "Senior" part. This "reform" would remove the "modern" materials like finite algebraic structures and Euler's theorem from the Junior part, but the whole course would be far more systematized.

At present this reform plan is only at the stage of being presented as a proposal; obviously it has to be more elaborated and experimented. I am not quite sure if any part of it could be adopted officially in the future Japanese curriculum. I hope however that this report could be of some interest to you.

ANSCHAUUNG UND AXIOMATIK - DARGESTELLT AN EINER BEGRÜNDUNG DER EBENEN ABSOLUTEN GEOMETRIE

Günter Ewald, Bochum

I. *Zum Begriff der Anschauung*

Seit langem ist man sich darüber einig, wie das Verhältnis von Anschauung und Axiomatik in der Geometrie zu sehen ist: Axiome der Geometrie werden zwar durch die Anschauung motiviert, aber die Geometrie als mathematische Disziplin besteht nur in Folgerungen aus den Axiomen. Die Axiome sollen widerspruchsfrei und genügend einfach sein, möglicherweise auch vollständig. Sind sie einmal festgelegt, dann kann zwar die Anschauung noch für die Vermutung von Sätzen hilfreich sein; die Beweise solcher Sätze erfolgen aber jenseits anschaulicher Argumentation durch streng logische Deduktion aus den Axiomen.

Dies hört sich zwar einfach und plausibel an, bedarf aber einerseits einer Präzisierung und andererseits einer konkreten Ausfüllung. Präziser beschreibbar wird das Verhältnis von Anschauung und geometrischen Axiomen erst dann, wenn man versucht zu klären, was unter "Anschauung" zu verstehen ist. Meistens hat man nur einen vagen Begriff von Anschauung oder führt ihn negativ als die Summe nicht-logischer Randbedingungen bei der Entstehung eines geometrischen Satzes ein. Es erscheint daher lohnenswert, den Begriff der Anschauung zuvor zu analysieren, ehe wir im einzelnen auf das Verhältnis von Anschauung und Axiomatik in der absoluten Geometrie eingehen.

Was wir Anschauung nennen, steht in engem Zusammenhang mit dem allgemeineren Begriff des intuitiven Denkens und Erfassens. In der deutschen Übersetzung von Poincarés Buch "Der Wert der Wissenschaft" wird das französische Wort

"intuition" unmittelbar mit "Anschauung" übersetzt. So heißt es dort: "Wir haben ... mehrere Arten von Anschauung, erstens die Berufung auf die Sinne und die Einbildungskraft, dann die Verallgemeinerung durch Induktion, die den experimentellen Wissenschaften sozusagen nachgebildet wird; wir haben endlich die Anschauung der reinen Zahlen", aus der der Schluß von n auf $n+1$ hervorgegangen ist, "und die allein die wahre mathematische Schlußfolgerung erzeugen kann." (4, S. 16)
Betrachten wir das genauer.

1. Bei der "Berufung auf die Sinne und die Einbildungskraft" hat Poincaré ein sehr allgemeines Prinzip vor Augen, das entscheidend zur Entwicklung der Mathematik beigetragen hat. Es ist eine Tendenz, die in gewisser Weise den Geometer gegenüber dem Analytiker kennzeichnet. Die Analytiker gehen Schritt für Schritt vor, nur von der Kraft der Logik geleitet. Sie handeln, wie Poincaré sagt, "nach der Methode eines Vauban, der mit seinen Belagerungswerken gegen eine Festung vorrückt, ohne dem Zufall das geringste zu überlassen". Die Geometer dagegen "lassen sich durch die Anschauung leiten und machen, gleich kühnen Reitern im Vorpostengefecht, mit einem Schlag große Eroberungen, die aber nicht immer zuverlässig sind". (4, S. 8) Es ist der Unterschied zwischen Meray und Felix Klein, zwischen Hermite und Bertrand, Weierstraß und Riemann, Frau Kowalewski und Sophus Lie. Während etwa Weierstraß alles auf die Betrachtung von Reihen und deren analytische Unformung zurückführt, nimmt Riemann sofort die Geometrie zu Hilfe, "jede seiner Vorstellungen ist ein Bild, das man nie wieder vergißt, wenn man einmal den Sinn erfaßt hat". (4, S. 11)

Beide Tendenzen, die analytische und die geometrische, sind notwendige Bestandteile mathematischer Forschung, sie ergänzen sich. Sicherlich ist es übertrieben, sie auf Mathematiker in dem Sinne aufteilen zu wollen, daß der eine ganz Analytiker, der andere ganz Geometer sei. Aber die Akzente sind verschieden und der Akzent des stärker Intuitiven ist das, was Poincaré als erste Art der Anschauung darstellt. Abstrakte Gedanken kristallisieren in einer optischen Vorstellung und erhalten so eine Unterstützung und neue Verarbeitung durch die Sinne. Dabei kommt es sehr auf ein gut Maß an Phantasie, an "Einbildungskraft" an, mit der man allgemein mathematische und insbesondere geometrische Zusammenhänge erkennt.

2. Was die Verallgemeinerung durch Induktion betrifft, so weist Poincaré selbst auf den Zusammenhang mit den experimentellen Wissenschaften hin. Wenn an zahlreichen Beispielen der gleiche Sachverhalt beobachtet wird, so vermutet oder behauptet man, daß dem ein allgemeines Gesetz zugrunde liegt. Mißt man in vielen Dreiecken die Winkelsumme und erhält immer wieder 180°, so gelangt man zur Annahme, daß dies immer so sei (wobei offen bleibt, wie der Satz über die Winkelsumme im Dreieck historisch entstanden ist). Zwar erscheint es uns trivial, daß die Beobachtungen eines mathematischen Sachverhaltes selbst nicht als Beweis gelten können, aber nicht für jeden ist das selbstverständlich. So schickte vor einigen Jahren ein mathematischer Amateur (mit einem gehobenen Beruf) eine Arbeit an das Mathematische Institut in Mainz, in der er an 200 Zahlenbeispielen zeigt, daß der Fermatsche Satz nicht stimmen kann und schließt, daß damit das Problem gelöst sei. Auf einen freundlichen Brief eines Mitarbeiters hin, in dem erläutert wurde, daß dies kein Beweis sei, schickte er eine zweite Arbeit mit 400 Zahlenbeispielen und fügte hinzu: "Ich nehme an, daß damit Ihre Bedenken zerstreut sind".

Auch beim induktiven Erfassen handelt es sich nicht nur um Sachverhalte der Geometrie, sondern allgemein der Mathematik, ja der Wissenschaft überhaupt. Die Abstraktion des Allgemeinen aus dem Besonderen konkreter Beispiele ist ebenso wie das intuitive Erfassen ein allgemeines Prinzip, das Poincaré als Anschauung bezeichnet.

3. Bleibt noch die "Anschauung der reinen Zahlen", in der sich uns das Prinzip der vollständigen Induktion sozusagen aufdrängt. Genauer gesagt handelt es sich hier um ein synthetisches Urteil a priori im Sinne von Kant. Der Schluß von n auf $n+1$ ist weder ein notwendiges Ergebnis der Erfahrung noch die logische Folge aus vorgegebenen Sätzen (es sei denn, man steckt in diese Sätze das Prinzip der vollständigen Induktion schon hinein). Er ist vielmehr Ausdruck der ordnenden Kraft unseres Verstandes, mit der wir die Millionenflut der Sinnesreize zu gestalten vermögen. Auch diese ordnende Kraft wird von Poincaré als Anschauung bezeichnet.

Dem könnte man im Rahmen der Kant'schen Philosophie noch eine weitere Art der Anschauung hinzufügen, die zu den Bedingungen für die Möglichkeit synthetischer Urteile a priori gehört. Kant spricht von Raum und Zeit als von den "Formen reiner Anschauung". Raum und Zeit sind nicht Ergebnisse unserer Erfahrung. Vielmehr setzt unsere Erfahrung schon Raum und Zeit voraus. Raum und Zeit sind also objektive Bedingungen für die subjektive Verstandestätigkeit, die wir ausüben.

In welchem Sinne wollen wir nun von Anschauung sprechen, wenn wir das Verhältnis von Anschauung und Axiomatik in der absoluten Geometrie betrachten? Wählen wir eine der drei von Poincaré genannten Möglichkeiten oder vielleicht eine ganz andere? In der Tat bietet Poincaré einen brauchbaren Ansatzpunkt, und zwar mit allen drei Arten von Anschauung. Es handelt sich dabei gar nicht um die Verwendung desselben Namens für drei völlig verschiedenartige Dinge. Vielmehr hängen die drei Arten der Anschauung eng miteinander zusammen. So können Beispiele Ausgangspunkt und Anlaß sein für den Flug der Phantasie, die vom einzelnen ausgehend größere Zusammenhänge erfaßt. Intuition und Empirie, Vorstellungskraft und Induktion ergänzen und stützen sich gegenseitig. Beide finden wiederum im synthetischen Urteil a priori ihre Festigung. Der Schluß von den Beispielen auf das allgemeine Gesetz ist nämlich genauso wie der Schluß von n auf $n+1$ ein synthetisches Urteil a priori. Um das "a priori" zu vermeiden,kann man auch einfacher sagen (das läuft auf dasselbe hinaus), wir haben es mit einem Hebel unserer Verstandeskraft zu tun, mit dem wir an eine Bewältigung der Welterfahrung herangehen. Die synthetischen Urteile a priori sind keine notwendigen Folgerungen aus der Erfahrung, sondern Setzungen, Axiome, die Ordnung in unsere Erfahrung bringen. (Für Kant waren ja die Axiome der Mathematik prototypisch für synthetische Urteile a priori). Intuitiv erfaßte Sachverhalte bedürfen dann, sofern sie nicht selbst als Axiome erklärt werden, der logischen Rückführung auf Axiome, d.h. eines Beweises.

So ist also Anschauung nicht ein Anhängsel, das man beim Aufstellen mathematischer, besonders aber geometrischer Axiome und Sätze in Kauf nimmt. Vielmehr ist Anschauung ein philosophisches Fundament, auf dem die Beziehung zwischen Welterfahrung und abstrakter mathematischer Theorie ruht. Sie spielt überall in der Mathematik eine Rolle, wenngleich sie in der Geometrie als ihrem Ausgangsort in besonders klarer Weise sichtbar wird. Anschauung ist auch innerhalb der Mathematik eine unverzichtbare Kraft, ohne die die Mathematik ein starrer Formalismus mit geringem Erkenntniswert bliebe. Genauer gesagt, ohne Anschauung gäbe es überhaupt keine Mathematik.

Faßt man "Anschauung" in diesem Sinne, dann ist das Aufstellen geometrischer Axiome nicht nur durch Anschauung motiviert, sondern in der Anschauung begründet.

Allerdings stellen wir im einzelnen noch besondere Forderungen an die Anschauung, wenn es um Axiome geht. Diese Forderungen sind nicht erkenntnistheoretischer, sondern denkökonomischer und ästhetischer Natur. Axiome sollen einfach und möglichst gut durchsichtig sein. Dabei gibt es keinen eindeutigen Begriff von "einfach", wenngleich man im einzelnen Gründe dafür angeben kann, warum das eine Axiom einfacher ist als das andere. Prinzipiell kann man jedoch auch komplizierte Sachverhalte als Axiome setzen und einfachere als Sätze daraus herleiten. Da man jedoch die Widerspruchsfreiheit von Axiomen nachweisen muß, empfiehlt sich auch hier meistens die Zugrundelegung möglichst einfacher Annahmen. Dies ist eine Frage der Denkökonomie.

Entsprechend ist es mit dem ästhetischen Aspekt. Sowohl die Ästhetik der Sprache wie die Ästhetik in den vorgestellten mathematischen Objekten sind nicht erkenntnistheoretische Notwendigkeiten, sondern kommen unserer Phantasie, unserem Empfinden und meist auch der Durchsichtigkeit von Sachverhalten entgegen.

II. *Axiome der absoluten Geometrie*

Wenden wir uns nun einer axiomatischen Begründung der Geometrie zu! Die ursprünglichen Objekte der Geometrie waren idealisierte Körper wie Geraden, Prismen, Pyramiden. Allerdings erkannte man schon sehr früh, daß sich für eine logische Handhabung der Geometrie die Elementarbausteine Punkt und Strecke bzw. Punkt und Gerade besonders gut eignen. So dient heute mit Recht eine propädeutische Betrachtung von Prismen und Pyramiden dazu, daß der Schüler anhand der Ecken und Kanten ein "fühlbares" Verhältnis zu den abstrakten geometrischen Begriffen "Punkt", "Strecke" bzw. "Gerade" entwickelt. Man geht vom Ganzen zu den Teilen und baut aus den Teilen mit Hilfe von Eigenschaften und Relationen der Teile (z.B. Längen, Winkel) wieder das Ganze auf.

Will man allerdings ein breites, axiomatisches Fundament der Geometrie gewinnen, so darf man nicht bei der Analyse einzelner Körper mit sehr speziellen Eigenschaften stehenbleiben. Beobachtete Eigenschaften müssen vom einzelnen Objekt ablösbar sein. Besonders klar tritt dies bei Inzidenzeigenschaften von Punkten und Geraden zutage. (Zum Folgenden vgl. die Einführungen in (2) und (3)).

Fragen wir noch einmal: Was sind überhaupt Punkte und Geraden? Wir sprachen schon von den Ecken geometrischer Körper, die wir als "punktförmig" empfinden. Sie treten auch in Wohnräumen auf, etwa dort, wo sich Decke und zwei Wände treffen. Wir reden von einem "Treffpunkt", wenn wir eine bestimmte Stelle meinen, wo sich Menschen zusammenfinden. Auch kleine Flecke werden als Punkte bezeichnet, etwa der Punkt am Ende eines Satzes, der durch Auftragen einer kleinen Menge von Bleistiftkohle, Tinte oder Kugelschreiberfarbe auf Papier zustandekommt. Etwas abstrakter, aber immer noch technisch motiviert, ist der Begriff des "Drehpunktes" oder "Mittelpunktes" einer kreisförmigen Scheibe. Geht man schließlich dem sprachgeschichtlichen Ursprung des Wortes "Punkt" nach, so stößt man auf das lateinische Wort "pungere" = stechen, d.h. auf die Verbindung der Vorstellung "Punkt mit Nadelspitze" bzw. "Speerspitze" und dem Loch, das durch diese erzeugt wird.

Ähnlich steht es mit dem Begriff der "Gerade". Wir haben eine Vorstellung von Geraden bei den Kanten der Prismen und Pyramiden, beim Zusammenstoßen zweier Wände eines Zimmers, beim Spannen eines Fadens. Allerdings tritt hierbei eine eigenartige Doppelheit zwischen "Gerade" und "Strecke" auf. Technisch begegnen uns nur Strecken. Aber das unbegrenzte Aneinanderfügen von Strecken drängt sich anschaulich auf. Euklid hat die unbegrenzte Verlängerbarkeit der Gerade in seine Postulate aufgenommen. Vielleicht war es nur ein historischer Zufall, daß Punkte und Geraden, nicht Punkte und Strecken zu den Grundbausteinen der Geometrie erklärt wurden. Aber es spricht durchaus viel dafür, daß der Begriff "Gerade" sich aufgrund seiner größeren mathematischen (nicht anschaulichen) Einfachheit und Homogenität durchgesetzt hat. Alle Punkte einer Geraden sind gleichwertig, der Unterschied zwischen inneren Punkten und Endpunkten entfällt. Eine Gerade ist durch je zwei ihrer Punkte bestimmt, eine Strecke nur durch ihre Endpunkte. Bei der historischen Entwicklung des Begriffes "Gerade" spielte das gespannte Seil eine große Rolle, nicht nur als Urbild einer geometrischen Linie, sondern durch seine Verwendbarkeit für die Zeichnung von geraden Linien, Kreisen und rechten Winkeln. Die altägyptischen Geometer wurden von ihren griechischen Schülern als "Seilspanner" bezeichnet, und die älteste geometrische Abhandlung aus Indien über die Konstruktion von Altären heißt "Sulvasutra" = Regeln des Seils. (Vgl. hierzu (5, S. 4)).

Schließlich bemerken wir noch, daß wir die Vorstellung der Gerade auch bei der Betrachtung axialsymmetrischer Objekte vorfinden. Alle höheren Lebenwesen besitzen einen symmetrischen Bau, der sich in einem frontal aufgenommenen Bild in axialer Symmetrie niederschlägt. Interessanterweise wirkt dieser sich im Bau von Autos aus, die ebenfalls bei frontaler Betrachtung axialsymmetrisch sind. Sehr eindrucksvoll sind auch die Spiegelungen an ruhiger Wasseroberfläche oder die Erzeugung von Tintenklecksen in gefaltetem Papier.

Soviel zunächst über die anschauliche Motivation von "Punkten" und "Geraden". Stellen wir jetzt die Frage, was Punkte und Geraden "wirklich" sind, dann müssen wir zugeben, daß wir keinen Schritt weitergekommen sind. Dies liegt aber nicht daran, daß wir einen falschen Weg gewählt haben, sondern daran, daß die Frage selbst nicht sinnvoll ist. Schon Euklid hat uns das vorgeführt, ob bewußt oder unbewußt, ist nicht bekannt: In Euklids "Elementen" wird ein Punkt als das definiert, was keine Teile hat, und Geraden werden als "Länge ohne Breite" eingeführt. In den Axiomen und Beweisen wird allerdings von diesen Definitionen überhaupt kein Gebrauch gemacht. Lediglich auf die Relationen zwischen Punkten und Geraden kommt es an, nicht auf die "Objekte", die wir Punkte oder Geraden nennen. Auch die Erklärung, ein Punkt sei eine "Idealisierung" von sehr kleinen Objekten, bleibt im Bereich der Anschauung und geht nicht in die mathematischen Überlegungen ein, es sei denn, man hat bereits eine Geometrie mit Metrik oder Topologie entwickelt, in der ein Punkt nachträglich als Grenzwert einer Folge von Figuren angesehen werden kann, deren Durchmesser gegen Null strebt.

Hilbert hat am schärfsten diesen Sachverhalt ausgedrückt, wenn er sagt: Man kann sich unter Punkten und Geraden auch Stühle und Tische vorstellen.

Gleichwohl darf man dies nicht als Freibrief für einen willkürlichen Umgang mit geometrischen Objekten ansehen, jedenfalls dann, wenn die Geometrie Erkenntnisse über den physikalischen Raum und die Objekte im Raum liefern soll. Man kann zwar willkürlich Axiome setzen und dabei eine geometrische Sprache benutzen. Will man aber mit der Geometrie Ordnung in unsere räumlichen Sinneseindrücke bringen, dann muß man von den anschaulichen Gegebenheiten ausgehen.

Eine der interessantesten Fragen ist hierbei die nach der Eindeutigkeit der Anschauung. Daß zwei verschiedene Punkte durch genau eine Gerade verbunden werden, ist anschaulich aufgrund zahlreicher Erfahrungen akzeptiert. Dennoch ist von dem dänischen Geometer Hjelmslev eine sogenannte "natürliche Geometrie" axiomatisch begründet worden, in der von "benachbarten Punkten" die Rede ist. Derartige Punkte werden durch viele Geraden verbunden, in Anlehnung an die anschauliche Feststellung, daß wir Punkte als "Flecke" ansehen, die, wenn sie nahe aneinanderrücken, ineinander verschwimmen. Dieser Aufbau der Geometrie ist ebenso legitim wie derjenige, in dem je zwei Punkte eindeutige Verbindungsgeraden haben. Indessen ist er eher durch Nichtanschauung als durch Anschauung motiviert. Genauer gesagt: Hjelmslev trägt dem Versagen der Anschauung bei ineinander verschwimmenden physikalischen Punkten dadurch Rechnung, daß er nicht idealisiert und die makroskopisch anschaulichen Annahmen überträgt, sondern das Gegenteil ausdrücklich zuläßt.

Sehen wir von dem Ausnahmefall Hjelmslev'scher Geometrie ab, dann bleibt hinsichtlich einer Motivation eindeutiger Verbindungsgeraden immer noch folgendes Problem: Zwar denken wir hierbei heute ebenso wie die indischen, ägyptischen und griechischen Mathematiker meist an einen zwischen zwei Pfählen oder den Händen stramm gespannten Faden. Aber Geraden treten ja auch als Kanten auf, in denen sich ebene Flächen schneiden. Es wäre denkbar, daß die so gewonnenen "Geraden" andere Eigenschaften haben als die aus gespannten Fäden abgeleiteten. Wir legen demgegenüber eine Identität der beiden "Sorten" von Geraden zugrunde. Hierin liegt anschaulich gesehen eine starke Abstraktion, wenngleich sich diese hinterher auch empirisch bestätigen läßt, etwa indem man auf den Maurer hinweist, der mit Hilfe eines Lotes nachprüft, ob eine Mauerkante gerade ist.

Entsprechendes ist über die Beziehung von gespanntem Faden und Lichtstrahl zu sagen. Wir nehmen an, daß es sich beides Mal um die gleiche Art von Geraden handelt und bestätigen dies dadurch, daß wir flach über eine Kante hinwegschauen: Die Körperkante fällt optisch in einen Punkt zusammen.

Bleiben wir also für unsere Zwecke dabei, daß zwei verschiedene Punkte stets durch genau eine Gerade verbunden werden. Als ersten Schritt zu einer axiomatisch begründeten Geometrie legen wir daher (in der Formulierung von Hilbert) fest: Gegeben seien zwei Mengen von Dingen; die Elemente der einen nennen wir Punkte, die der anderen Geraden. Zwischen Punkten und Geraden sei eine Inzidenzbeziehung "liegt auf" gegeben.

Axiom I 1: *Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, auf der sie beide liegen.*

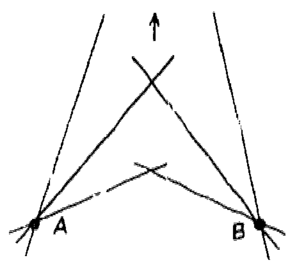
Wir fügen die beiden folgenden "Reichhaltigkeitsaxiome" hinzu (aus Zeitgründen gehen wir hier nicht auf das Problem der endlichen Geometrien ein):

Axiom I 2: *Auf jeder Geraden liegen mindestens drei verschiedene Punkte.*

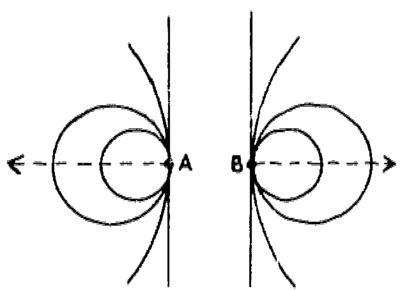
Axiom I 3: *Es gibt drei nicht auf einer und derselben Gerade gelegene Punkte.*

Wenden wir uns nun dem Problem der Parallelen zu. Bekanntlich hat man lange versucht, das euklidische Parallelenpostulat aus den anderen Euklidischen Axiomen herzuleiten. Schließlich stellte man fest, daß dies nicht geht und entdeckte die nichteuklidische Geometrie. Analysiert man einmal das Parallelenproblem nicht historisch, sondern von den Problemen der Anschauung her, so stellt man fest, daß sich die Möglichkeit alternativer Geometrien nicht nur logisch, sondern auch anschaulich anbietet. Gestatten Sie, daß ich dies mit einer Frustration erläutere, die ich als Schüler der mittleren Klasse hatte, lange bevor ich etwas vom Parallelenstreit wußte.

Unser Lehrer sagte: "Parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen" und begründete das folgendermaßen: Man drehe zwei Geraden mit Schnittpunkt P um je einen ihrer Punkte A bzw. B, bis sie parallel sind. Dann wandert P nach unendlich. Also schneiden sich parallele Geraden im Unendlichen.



Der gleiche Lehrer brachte uns an anderer Stelle des Unterrichts bei: Hält man einen Kreis in einem Punkt fest und läßt den Mittelpunkt in einer Richtung nach unendlich wandern, dann geht der Kreis in eine Gerade über. Ich sagte mir nun: Wenn man zwei (nichtschneidende) Kreise in ihren zueinander am nächsten gelegenen Punkten A, B festhält und die Mittelpunkte in entgegengesetzter Richtung nach unendlich wandern läßt, dann gehen die Kreise in parallele Geraden über. Ihre Punkte kommen sich nirgends näher als A und B. Also schneiden sich parallele Geraden nicht. Ich konnte diesen Widerspruch nicht verstehen und bekam Komplexe. (Ich war zu schüchtern, mich deshalb an den Lehrer zu wenden.)



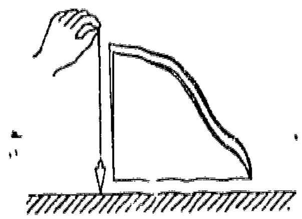
Wenn es um Probleme des Unendlichen geht, so kann unsere Anschauung nicht nur versagen, sie kann auch zu logisch entgegengesetzten Schlüssen kommen. Dies sagt keineswegs etwas gegen die Anschauung, im Gegenteil: Hätte man konsequenter die Anschauung in der Parallelenfrage zu Hilfe gezogen, wäre man vielleicht eher auf die nichteuklidische Geometrie gestoßen. Hat man sich einmal klargemacht, daß man die Sätze der Geometrie nicht aus der

Anschauung herleitetet, sondern die geometrischen Axiome mit Hilfe der Anschauung als mögliches Ordnungsmodell für die Sinneseindrücke setzt, dann legen anschauliche Alternativen auch logische Alternativen nahe.

Inzwischen ist man darangegangen, ein gemeinsames Fundament für euklidische und nichteuklidische Geometrie zu schaffen. Es wird auch absolute Geometrie genannt. Man klammert mit der absoluten Geometrie konsequent die Annahmen über das Unendliche aus, man treibt in gewisser Weise "Geometrie im begrenzten Raumstück". Im weiteren sollen einige Axiome entwickelt werden, die zu einer - noch recht allgemeinen - Geometrie führt. Sie ist der von F. Bachmann (1) angegebenen "metrischen Ebene" äquivalent. Allerdings wählen wir nicht den rein gruppentheoretischen Weg Bachmanns.

Hierzu sei folgendes bemerkt: Ist auch die Spiegelungsgeometrie Bachmanns sehr elegant und trägt den anschaulichen Gegebenheiten der Symmetrie Rechnung, so enthält sie am Anfang weniger anschauliche Elemente. Ausgangspunkt ist nämlich eine Gruppe mit einem System von involutorischen Erzeugenden, das gegenüber inneren Automorphismen invariant ist. Zwar kann man das anschaulich erläutern (bei Bachmann geschieht dies auch in einer ausführlichen elementargeometrischen Einleitung), man steckt dabei aber recht komplexe und komplizierte Sachverhalte in die Axiome hinein. Dies soll hier zum mindestens abgemildert werden.

Ein Formelement der Anschauung, das sich für die Begründung der metrischen Geometrie eignet, ist das des Senkrechtstehens oder der Orthogonalität. Zwar wird häufig das Senkrechtstehen durch den "Winkel 90°" definiert. Man kann es aber auf sehr elementare Axiome des Senkrechtstehens aufbauen.

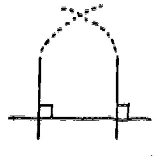


Das Wort "senkrecht" oder "lotrecht" drückt von seinem Ursprung her eine Relation zwischen einer horizontalen Fläche, etwa einer Wasserfläche, und einem über diese gehängtes Lot aus. Ersetzt man das Lot durch eine Gerade und die Fläche durch eine in ihr liegende Gerade durch den Lotfußpunkt, dann erhält man eine Relation zwischen zwei Geraden. Allerdings ist die Symmetrie dieser Relation nicht durch das Experiment mit dem Lot motiviert: Lot und Horizontale sind nicht vertauschbar. Faltet man dagegen ein Stück Papier zweimal, so daß beim zweiten Mal die Kante der ersten Faltung in sich geknickt wird, dann ergibt sich "eine Rechte", wie man sagt, ein Viertel des Vollkreises. Durch Vergleich mit der Lotrelation stellt man wieder empirisch fest, daß in beiden Experimenten die gleiche Senkrechtrelation zustandekommt. Mit dem gefalteten Papier läßt sich dann die Symmetrie der Senkrechtbeziehung motivieren. Wir legen also fest:

Gegeben sei eine Relation "senkrecht" zwischen den Geraden.

Axiom S 1: *Ist a zu b senkrecht, dann ist auch b zu a senkrecht.*

Wie durch das Lotexperiment nahegelegt, gibt es durch jeden Punkt ein Lot auf eine vorgegebene Gerade, sofern wir uns auf ebene Geometrie beschränken. Hier taucht nun wieder das Problem der Eindeutigkeit auf. Soll das



Lot immer als eindeutig gefordert werden? Dies hätte zur Folge, daß sich zwei Senkrechte derselben Geraden niemals schneiden dürfen. Beachtet man aber, daß zwei Senkrechte derselben

Gerade, anschaulich gesehen, "parallel" sind, dann bedeutet somit die Eindeutigkeit des Lotes eine Festlegung über den Schnitt von "Parallelen". Dies wollen wir im Rahmen der absoluten Geometrie vermeiden. Wir begnügen uns daher mit einer Eindeutigkeitsforderung, die nichts über den Schnitt von "Parallelen" aussagt: Das "Errichten" eines Lotes in einem Punkt von *a* sei stets eindeutig bestimmt. Also:

Axiom S 2: *Zu einer vorgegebenen Gerade a und einem vorgegebenen Punkt P gibt es eine zu a senkrechte Gerade b, die durch P verläuft. Liegt P auf a, dann ist b eindeutig bestimmt.*

Schließlich tragen wir der Annahme Rechnung, daß die "Horizontale" durch den Fußpunkt des Lotes verlaufen soll (bei räumlicher Geometrie braucht das nicht zu sein):

Axiom S 3: *Zwei senkrechte Geraden schneiden sich stets in genau einem Punkt.*

Die so eingeführten Inzidenz- und Orthogonalitätsaxiome bieten eine ausreichende Grundlage, um nunmehr Spiegelungen zu definieren und dann Axiome über Spiegelungen und allgemeinen Bewegungen (als Produkte von Spiegelungen) aufzustellen.

Zur Definition der Spiegelung greifen wir anschaulich bekannte Eigenschaften von Spiegelungen heraus. Warum wir diese und nicht andere auswählen, braucht dabei nicht näher motiviert zu werden. Wir haben hier denselben Freiheitsspielraum wie bei der Auswahl der Axiome überhaupt. Entscheidend ist, daß die gewählten Eigenschaften und Axiome das Gebäude der Geometrie tragen. Wir setzen hier den allgemeinen Begriff einer bijektiven Abbildung voraus (er ist geometrisch motiviert) und definieren eine Spiegelung als bijektive Abbildung der

Menge aller Punkte auf sich mit folgenden Eigenschaften:

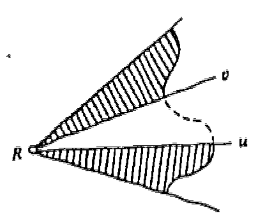
(1) Geraden werden stets auf Geraden abgebildet.
(2) Das Senkrechtstehen bleibt erhalten.
(3) Es gibt eine Gerade a, die punktweise festbleibt.
(4) Nicht alle Punkte bleiben fest.

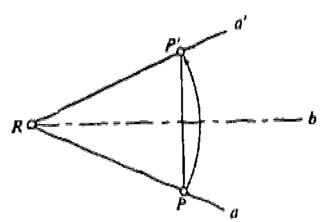
Die Gerade a heißt *Achse* der betrachteten Spiegelung.

Axiom B 1 ("Bewegungsaxiom"): *Jede Gerade ist Achse genau einer Spiegelung.*

Axiom B 2: *Bildet eine Spiegelung P auf P' ab, dann bildet sie auch P' auf P ab.*

Führt man zwei Spiegelungen an Geraden u, v mit einem Schnittpunkt R hintereinander aus, so erhält man als Gesamtergebnis eine Drehung mit R als Drehpunkt. Dies ergibt sich anschaulich wie in der Firgur angedeutet. Betrachten wir nun eine beliebige Gerade a durch R. Ihre Bildgerade unter der eben eingeführten Drehung sei mit a' bezeichnet. Sei P ein Punkt von a und P' sein Bildpunkt bei der Drehung. Wir fällen ein Lot b von R auf die Verbindungsgerade von P und P' (dabei sei $P \neq P'$ vorausgesetzt). Bei der Spiegelung an b wird ebenfalls P auf P' abgebildet. Man sieht,





daß dasselbe für alle Punkte von a der Fall ist (nicht aber für die außerhalb von a liegenden Punkte). Diesen

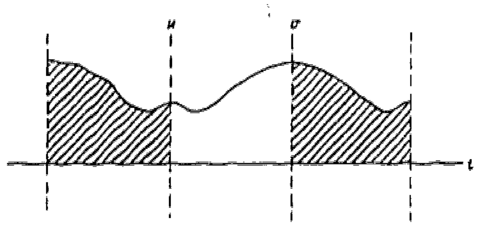
Sachverhalt wählen wir als Axiom:

Axiom B 3: *Eine Gerade a durch R werde durch eine Drehung um R auf a' abgebildet. Dann gibt es eine Spiegelung, die a punktweise genau so auf a' abbildet wie die gegebene Drehung.*

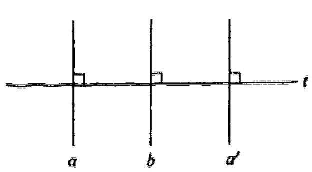
Dies Axiom ist zwar anschaulich motiviert, aber verglichen mit anderen Axiomen nicht besonders einfach. Da es sehr schnell zu einer Fülle geometrischer Sätze führt, nehmen wir uns aber die Freiheit, die Einfachheit hinter die Zweckmäßigkeit zurückzustellen. Wir sahen schon, daß dies keine prinzipielle, sondern eine denkökonomische Frage ist.

Ersetzen wir die Geraden *u*, *v* mit Schnittpunkt *R* durch Geraden *u*, *v* mit einer gemeinsamen Senkrechten *t*, dann übertragen sich die eben über Drehungen angestellten Betrachtungen unmittelbar auf Translationen:

Klappt man eine Figur nacheinander an *u* und *v* um, dann ist das Ergebnis anschaulich dasselbe, wie wenn man die Figur längs *t* verschoben hat. Wir *definieren* daher eine *Translation längs t* als Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen, deren Spiegelachsen eine gemeinsame Senkrechte *t* besitzen.



Axiom B 4: *Eine zur Gerade t senkrechte Gerade a werde durch eine Translation längs t auf eine Gerade a' abgebildet. Dann gibt es eine Spiegelung, die a punktweise genauso auf a' abbildet wie die gegebene Translation.*



Ein System von Punkten und Geraden mit einer Inzidenz- und einer Orthogonalitätsrelation, das den Axiomen I 1 - I 3, S 1 - S 3 und B 1 - B 4 genügt, nennen wir *metrische Ebene*.

Literatur

(1) F. Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. 2. Aufl. Springer Berlin usw. 1973

(2) G. Ewald, Geometrie, Eine Einführung für Studenten und Lehrer. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1974

(3) G. Ewald, Geometry. An introduction. Wadsworth, Belmont (Cal.) 1971

(4) H. Poincaré, Der Wert der Wissenschaft. Teubner, Leipzig und Berlin 1906

(5) B.A. Rosenfeld, Axiome und Grundbegriffe der Geometrie, in: Enzyklopädie der Elementarmathematik IV, Deutscher Verlag der Wiss. Berlin 1969

GEOMETRICAL INSIGHT AND THE SOLUTION OF PROBLEMS

T.J. Fletcher, Darlington

Introduction

In discussions of mathematics curricula in recent years there have been differences in view as to the extent to which we should

i. work for a systematic exposition of the subject matter

or ii. stress the activity of problem solving.

To do the first does not necessarily imply starting axiomatically, as it is quite possible to provide an experimental approach in the early stages followed by formalisation later. The point is simply that it is the strategy of the course to develop an overall view of geometry as a unified structure, and of its place in the hierarchy of mathematical systems.

To do the second involves the study of problems of two kinds. There are the internal problems of the subject, these are hard exercises, the outcome is geometrical, the question in a certain sense presupposes the type of solution. There is also a wider range of problems, problems in which the question does not suggest a method of solution and in which geometry may or may not be used as a tool.

The orderly development of school geometry is certainly a problem which demands attention. At the very least each teacher should have his ideas on how it should be done. The orderly development of geometry includes establishing its connections with other parts of mathematics. At Carbondale in 1971 (2) I explained ways of approaching Hilbert's work on the foundations of geometry and its relationship with abstract algebra, by considering the geometry of perspective and of nomograms. The important theoretical ideas here are the incidence axioms, and the theorems of Pappus and Desargues.

I would like to think that these ideas could be made accessible at school, although I believe that this work has not yet been made available in a sufficiently simple and a sufficiently well motivated form for this to be possible for any except the most gifted pupils.

I feel that I have nothing more to add to what I have already said about these important problems concerning the theoretical framework into which elementary geometry is to be placed, and today I am more concerned with the use of geometry in the solution of problems which originate elsewhere. At the ICMI meeting at Echternach last year I gave some examples of practical applications of number theory, and in most of these cases geometrical considerations greatly assisted an understanding of the number theoretic ideas (4). There are many places where geometry provides powerful elementary proofs in an unexpected way.

The solution of problems by unexpected geometrical methods gives a warning against believing that the problems of teaching geometry would be resolved if only we could organise the subject matter in the right way. Geometry involves a variety of methods and outlooks. Some problems are best done by one method, and others by other methods. No one approach to geometry has so far proved to be uniformly superior to others. In this paper I aim to show some of the excitement of geometry, but I have little encouragement to give to those who would seek to improve the teaching of geometry by establishing a more orderly tidy system.

As part of the school mathematics curriculum geometry has been on the retreat (in Britain at least) for many years, and its place is still diminishing. As part of the struggle to maintain it we must emphasise its value in other parts of mathematics, and the help it gives to the ordinary student to visualise relationships in the world around - not only spatial relationships but other types of relation as well. Most of my examples use ideas which are completely traditional, and I do this because I believe that teachers do not know enough applications of those old ideas. I welcome new ideas in school geometry as well, and I hope that applications of these will be used in teaching in a similar way.

Running track and footbal pitch

Example 1 The first problem is clearly geometrical. What is a good shape for a running track? Whilst the problem is geometrical it is not at all obvious what geometry is involved. If we want the best shape, what are we trying to optimise?

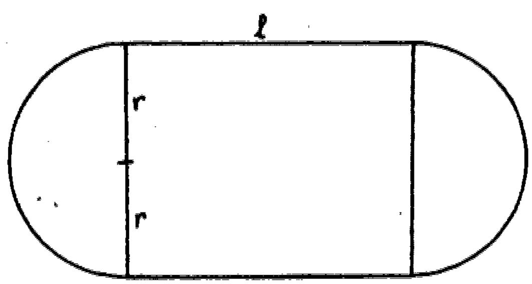


Fig 1

Previous experience suggests constructing a track with straight sides of length ℓ, and semi-circular ends of radius r. I hope you will excuse me using the now obsolate Imperial units, and allow me to design a track whose overall circumference is 440 yards. (You may work with 400 metres if you wish.) The rectangular area in the middle can be used for other sports, for example for a football pitch. Let us try to maximise this area.

From the perimeter

$$\pi r + \ell = 220.$$

The rectangular area in the centre is $A = 2r\ell$, and this we whish to maximise.

With pupils who know no calculus, and very little algebra, we may conduct numerical experiments, and establish the principle -

if the sum of two numbers is constant, their product is a maximum when they are equal.

(Since we are mainly concerned with geometry you may like to consider geometrical proofs of this principle.)

If we are clever enough to write

$$A = 2r\ell = \frac{2}{\pi}\,\pi r \cdot \ell,$$

we see that the principle applies. The sum of πr and ℓ is 220, so their product is a maximum when

$$\pi r = \ell = 110.$$

So $\ell = 110$ and $r = 35$, taking $\pi = 22/7$.

This gives a playing area of 110 yards by 70 yards. Is it coincidence that these are exactly the minimum dimensions of an international pitch in the English rules of football? I would be interested to know what figures are given in European regulations.

There is a small objection. Some space must be left outside the side lines of the football pitch. This can easily be arranged if ℓ is diminished a little for the running track and r increased. Looking at the football pitches on television in the recent World Cup it was very clear that the semicircular ends of the running track did indeed start just before the corner flags were reached.

A betting problem

Example 2

A recent innovation in many school courses is the topic of linear programming. The geometrical outlook gives a helpful framework within which to visualise such problems. It is not easy to give examples at school level which are genuine and which involve only a small number of variables.

A few years ago the football team in my home town was engaged in a fight for promotion at the top of Division Four of the English Football League. Bookmakers were offering the following odds on three teams

Darlington	5 - 4,
Bradford	evens,
Southend	5 - 1.

Is it possible so to lay bets that one wins whatever the outcome. We do not expect to be able to do so - but have the bookmakers covered themselves? and how do they plan so that they are safe?

Let us consider the outcome of laying stakes of x units on Darlington, y on Bradford and z on Southend.

If Darlington win we receive back our x units plus $5x/4$ but lose $y + z$. So if we are to make a profit we must have

$$5x/4 \quad > \quad y + z.$$

Likewise if we are to make a profit if Bradford win we must have

$$y \quad > \quad x + z,$$

and if Southend win

$$5z \quad > \quad x + y.$$

This can be seen as a linear programming problem in three dimensions. It is useful to draw a diagram in triangular coordinates using isometric paper, Fig. 2. We can see, as we might expect, that we cannot satisfy the three constraints simultaneously. But the bookmaker wishes to satisfy the three inequalities with opposite sign, and this he can do. But he can only feel safe whatever happens if he has arranged to have a distribution of bets corresponding to a point in a relatively small triangular region. It is for this reason that a bookmaker has to be prepared to 'lay off' bets; that is to say to pass bets on to someone else if too much has been staked on one team. In real life the problem is complicated by the way in which the odds may change with time.

The diagram can help the gambler to make further decisions. Suppose that you decide that Southend do not stand a chance. How should you distribute your bets on Darlington and Bradford so as to maximise your chances?

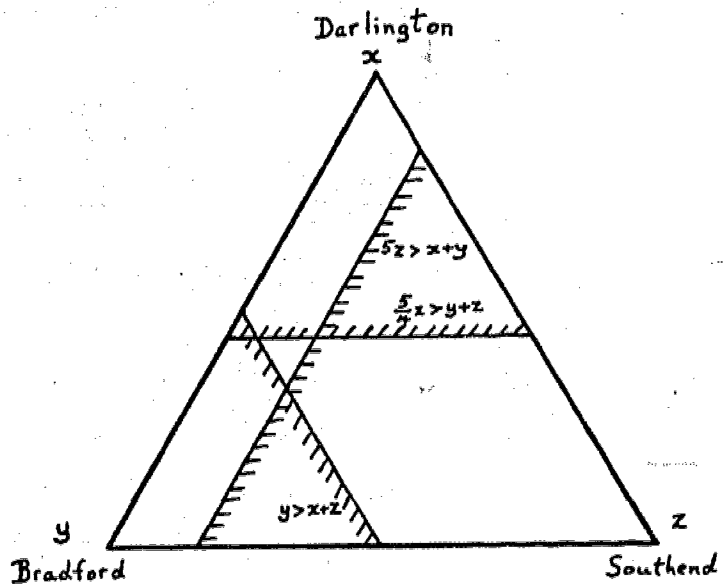


Fig 2

Suspension bridge cables

Example 3

The next example is extremely simple. Recently I watched some teachers on a course preparing work for young children. On a triangular grid they were drawing hexagonal numbers, and producing the sequence

1, 7, 19, 37, . . .

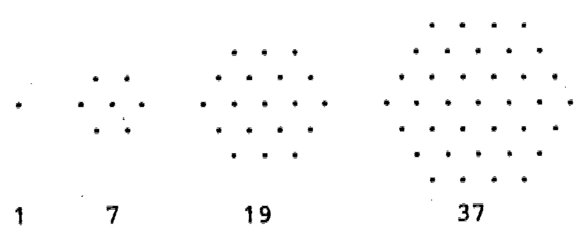


Fig. 3

I did not realise at the time that these numbers have an interesting application. Darlington not only has a football team, it also has a world famous company which builds suspension bridges. Suspension bridge cables are spun on the site, and spun in a number of strands. The cables for the suspension bridge over the Severn were made from 19 strands, while those for the bridge over the Forth were made from 37 strands. Why are these numbers especially suitable?

The problem of catalyst renewal

Example 4

In a chemical plant a catalyst is often necessary to promote a chemical reaction. As the reaction goes on the efficiency of the catalyst diminishes, until eventually it has to be renewed. This involves shutting down the plant for a given interval of time τ.

If we are given the productivity/time curve for the plant, starting with a fresh supply of the catalyst, when is the best time to shut down and renew?

In general the decay curve for the productivity of the plant will be some complicated, empirically given curve. To simplify the problem we will assume initially that the decay curve is a straight line. There is no loss of generality if we choose units on the two scales so that the initial productivity is unity, and diminishes to zero in unit time.

If the plant is shut down at time t, and restarted at time $t + \tau$ when the catalyst has been replaced the operation may be shown on the graph, Fig. 4.

The total production per cycle is given by the area $OABC$, which is

$$\tfrac{1}{2}t\ (1 + 1 - t) = \tfrac{1}{2}t\ (2 - t).$$

Since the cycle length is $t + \tau$, the average rate of production is

$$\frac{t(2 - t)}{2(t + \tau)} .$$

There are various ways of continuing and it is instructive to compare them.

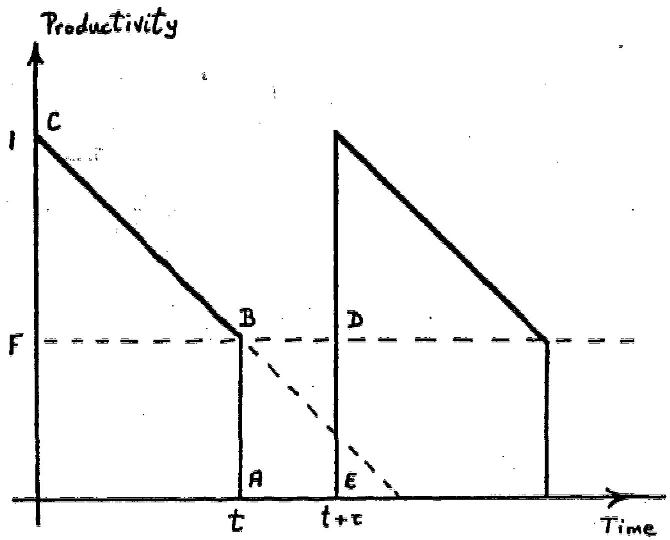


Fig. 4
6.

Method 1 Students who have learnt the early stages of the calculus may differentiate and maximise this function of t.

Method 2 We may put $T = t + \tau$, the total cycle length, and say

$$\frac{t(2 - t)}{2(t + \tau)} = \frac{(T - \tau)(2 - T + \tau)}{2T} = \frac{1}{2}\left[2+2\tau-T-\tau(2+\tau)/T \right].$$

To maximise this it is necessary to minimise

$$T + \frac{\tau(2+\tau)}{T} ,$$

but to do this is to minimise the sum of two terms whose product is constant. This may be done by using the converse of the principle in Example 1. The sum is a minimum when the two terms are equal; so

$$T = \tau(2+\tau) / T,$$

$$T = \sqrt{\tau(2+\tau)},$$

$$t = \sqrt{\tau(2+\tau)} - \tau.$$

Method 3 We may argue much more in terms of the original situation. It is foolish to shut the plant down while the productivity is still above the best possible working average, also it is foolish to continue operating when the productivity has fallen below the best possible working average. This means that we must arrange for the productivity to fall to average at time t, and so

$$\text{area } BCF = \text{area } BAED,$$

$$\tfrac{1}{2}t^2 = \tau(1-t),$$

$$t^2 + 2t\tau = 2\tau,$$

$$(t+\tau)^2 = 2\tau + \tau^2,$$

$$t + \tau = \sqrt{\tau(2+\tau)},$$

$$t = \sqrt{\tau(2+\tau)} - \tau.$$

Much can be learnt from this example. It is instructive to draw the graph $\tau = t^2 / [2(1-t)]$ and to interpret it.

In this problem the use of ideas of area enabled a simpler solution to be found. This can often be done, and it is a strategy in elementary geometry which teachers could employ more than they do. For example, the theory of nomograms can be more simply discussed using area than using proportion.

The third method of solution has further advantages over the other two. What should you do in a chemical works when the performance of the catalyst is not necessarily represented by a straight line, and when the catalyst may vary from batch to batch?

Combinatorial problems in geometry

Today pupils will often not meet some of the celebrated geometry theorems which were studied in the past. It is desirable that they develop a general knowledge of some areas of classical geometry, even if they do not always study detailed proofs, and it is desirable also to link geometry with algebraic ideas as well as showing its own self-contained independent development.

Some famous classical configurations have interesting groups of automorphisms. Simple questions on these ideas can be put to pupils as follows. In each case we show a diagram and a caption. The problem is simply, 'in how many ways may the letters be placed in the diagram?'. These problems are taken from Budden (1).

Example 5 A, B, C, D is a cyclic quadrangle,

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

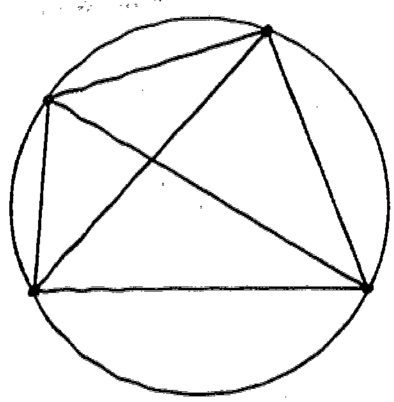


Fig 5

Example 6 A triangle ABC has altitudes AD, BE, CF which concur at H. The midpoints of AH, BH and CH, and BC, CA and AB, and D, E, F lie on a circle.

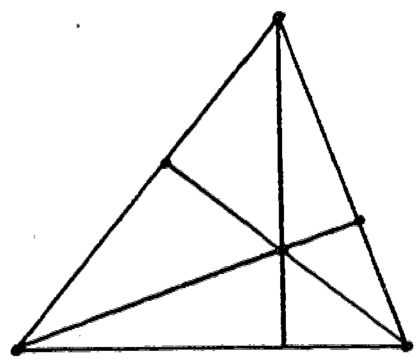


Fig 6

Example 7 A, B, C are collinear. A', B', C' are collinear. BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ and AB, $A'B'$ intersect in X, Y and Z respectively. Then X, Y and Z are collinear.

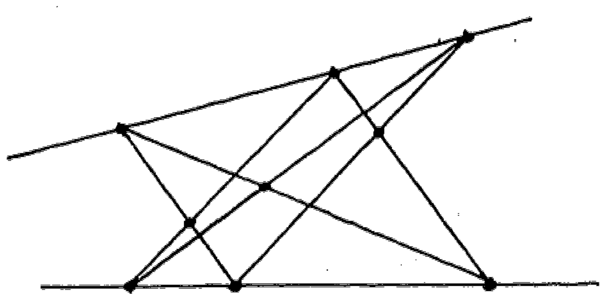


Fig 7

Example 8 In a seven point geometry the collinear points are given by the columns of the table:-

A	B	C	D	E	F	G
B	C	D	E	F	G	A
D	E	F	G	A	B	C

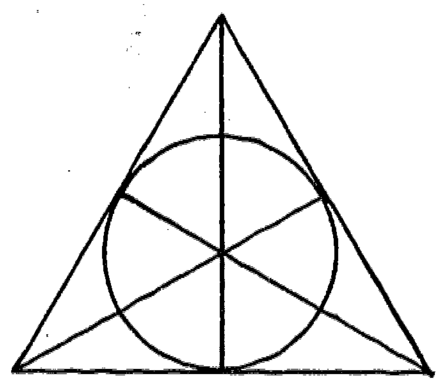


Fig 8

Paradoxes in ratios and averages

In sport it frequently happens that systems of scoring lead to situations which to a school pupil seem strange, and contrary to what he would expect. As an example we may take an extract from the Sunday Mirror on 2 May 1971.

> "Leeds are favourites but Arsenal can do it.
> If Arsenal beat Spurs OR get a goal-less draw the title will be theirs. If they win they will finish with a point more than Leeds. If they get a 0-0 draw they will take the title on goal average . . . .013 of a goal!
> But if they draw by any other score but 0-0 . . THE TITLE WILL GO TO LEEDS.

Now the top of the table reads:

	P	W	D	L	Gls.	Pts
LEEDS	42	27	10	5	72-30	64
ARSENAL	41	28	7	6	70-29	63

Leeds, who have finished their League programme, have a goal average of 2.40. Arsenal's goal average is 2.413- .013 better than the Yorkshire club's. So all Leeds can do now is wait ... and hope."

The question for the teacher is to see if geometrical diagrams can help the pupil to appreciate what is involved in this kind of situation. It is easier to discuss examples with smaller numbers, and so we will leave the example just given and consider some others which will bring out the principles.

Example 10 At a certain time in the season two teams in the league have scored an equal number of points. *A* has goal aggregate 9-4, and hence an average of 2.25. *B* has a goal aggregate of 11-5, and hence an average of 2.2.

The following Saturday both teams lose. *A* loses 3-4, and *B* loses 1-3.

Now the supporters of team *A* might think that they started with a better goal average than *B*, and they have done better this Saturday - whichever way you look at it it seems better to be beaten by only one goal than by two, and in any case 3-4 gives an average of .75 and 1-3 gives an average of only .33.

But when the goals are added up each team has an aggregate 12-8, and so they are now equal. We have a system of mathematics in which 9-4 and 3-4, and 11-5 and 1-3 both combine to give 12-8.

It is helpful to look at this geometrically (Fig. 9).

See Fig. 9.

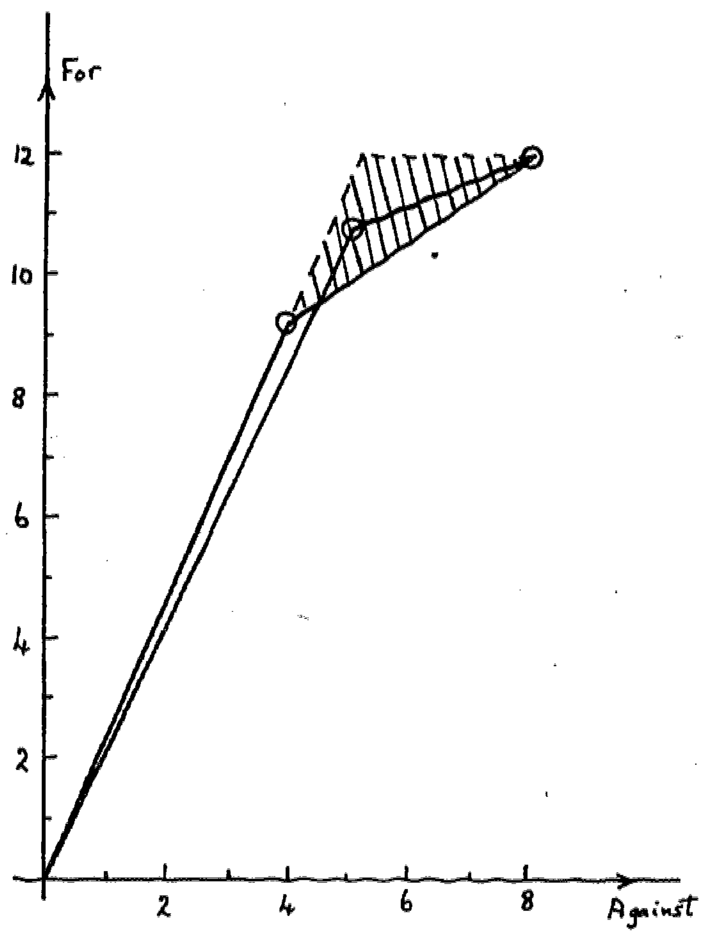


Fig 9

Two things are involved - vector addition and equivalent fractions. Sub-totals are added vectorically, but when the goal average is calculated we are concerned with the usual equivalence relation between fractions. A vector diagram presents the relation-ships in a visual form, and is a great help in constructing examples which show the peculiarities of the system. This form of presentation has important applications to rational approximation (3).

In this example, given the performance of team A, with its initial aggregate of 9-4 and the new score of 3-4, it is easy to see that the apparent paradox of a team with worse partial averages but the same overall average is related to the shaded area in the diagram. Any point in the area with integral coordinates enables an example to be constructed.

The following problems can all be attempted by similar methods. There are incidentally two types of problem. Some problems are concerned with the results of one of the given teams playing a third team - these problems are linear. Some problems are concerned with the two given teams playing one another - these problems are quadratic.

Example 11

Two teams are equal on points, but A has a better goal average than B. If they play one another and the result is a draw, is it possible for B to get a better goal average than A? That is to say, can their league positions interchange as a result of a draw?

Example 12

Consider a case where team A is 2 points ahead of team B, but B has a superior goal average. They play one another and B wins, so that they now have equal points.

Can we be sure that B still has a superior goal average?

Example 13

Can you construct some examples where the total goals for and against are such that A is ahead on goal *average* but B is ahead on goal *difference* ? Now that World Cup matches are decided on goal difference instead of goal average many interesting examples are lost.

From a theoretical point of view the paradoxes of goal average arise because the equivalence relation involved in equivalence of fractions is incompatible with vector addition. The idea of the compatibility of an equivalence relation and an operation is of the greatest importance in the development of mathematics from a structural standpoint. This situation provides a useful counter-example.

The three bar linkage

Example 14

The three bar linkage is an important practical method for producing elaborate mechanical movements in a simple way. It is used in the claw mechanism in the gate of a film projector, in foldaway furniture, in farm machinery and many other places. The simplest kind of three bar mechanism is shown in Fig. 10. XA, AB and BZ are three bars, pivoted at X and Z, and freely hinged at A and B. The interest is in the locus of a point in AB such as P.

What geometrical principles are involved?

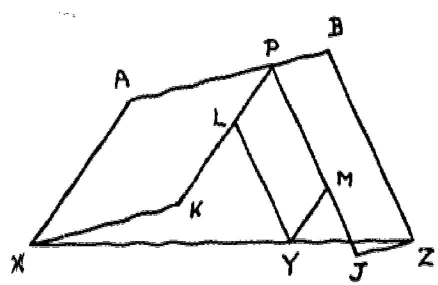


Fig 10

Let $AP/PB = \lambda/n$ with $\lambda + n = 1$.
Introduce vectors x, y, z, u, such that

$$XA = z, \quad AB = y, \quad BZ = x, \quad \text{and} \quad XZ = u, \text{ then}$$

$$z + y + x = u.$$

Complete parallelograms $XAPK$ and $PBJZ$, and take L on PK, with $PL = nPK$, and take M on PJ, with $PM = \lambda PJ$.

Now complete parallelogram $LPMY$.

$$XY = XK + KL + LY = AP + KL + PM = \lambda AB + \lambda KP + \lambda PJ, = \lambda y + \lambda z + \lambda x = \lambda u = \lambda XZ.$$

Hence Y divides XZ in the ratio λ/n.

This means that $XKLY$ is another three bar linkage which will generate the same locus, with P on KL.

Similarly $YMJZ$ is a third three bar linkage which will generate the same locus, with P on MJ.

In other words there are three different linkages, all of which generate the same locus. In a practical problem one of these might be much more convenient than the others.

We have taken x, y, z, u as vectors. But it is equally true for complex numbers that

$$x + y + z = u \quad \text{implies}$$

i. $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda u$

and ii. $z + \lambda y = \lambda y + z = \lambda u + nz - \lambda x$, with $\lambda + n = 1$.

In terms of complex numbers this means that the triple generation theorem is true in the extended case when P is not on the line AB, but is rigidly attached anywhere in the same plane. This is illustrated in Fig. 11.

See Fig. 11

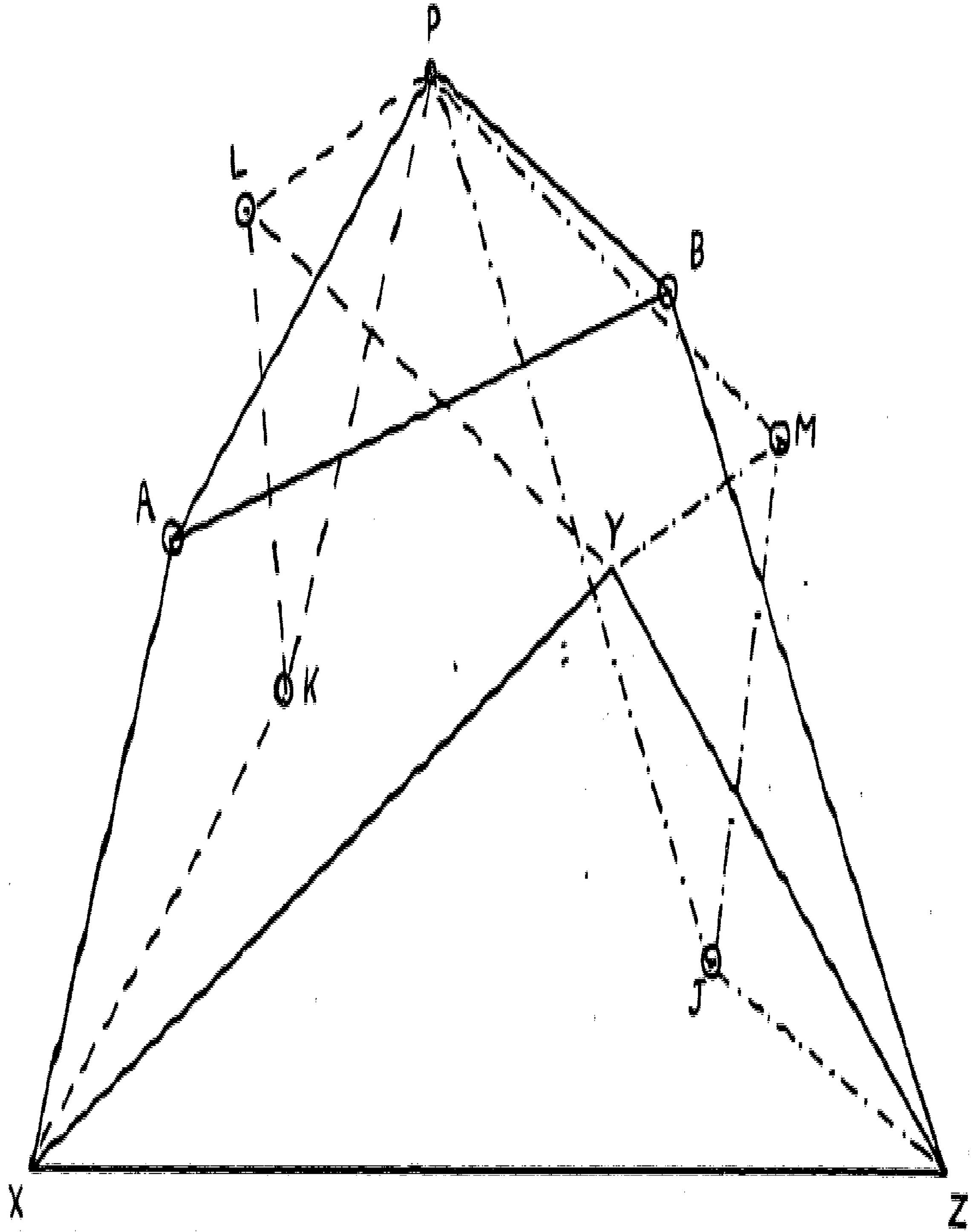


Fig 11

This extended theorem also has important practical applications. Three bar curves have many attractive geometrical properties which were studied in former times but which are little known today. Some of these would be worth studying in schools.

REFERENCES

1. F.J. Budden : The Fascination of Groups. Cambridge UP, 1972.

2. T.J. Fletcher : The teaching of geometry - present problems and future aims.
Educ. Studies in Math. 3, 3/4, 395-412, 1971.
German trans. Der Geometrieunterricht - aktuelle Probleme und Zielvorstellungen.
Der Mathematikunterricht 2o (1974) H.1, 19-35.

3. T.J. Fletcher : Approximating by vectors 1, 2.
Maths. Teaching, 63, June 1973, 4-9; 64, Sept. 1973, 42-4.

4. T.J. Fletcher : Producing numbers. ICMI Seminar, Echternach 1973, Proceedings to appear.

THE SOLUTION OF POLYNOMIAL EQUATIONS

T.J. Fletcher, Darlington

Every student of mathematics is concerned with the solution of polynomial equations at various points in the course. The algebraic solution of polynomials was a major concern of mathematicians for many centuries, and the discovery that the algebraic solution of the quintic equation is impossible was a major landmark. This was first achieved by Abel, and very shortly afterwards by Galois, and if there was any single event which changed algebra from 'traditional' to 'modern' it was surely the approach of Galois to the solution of equations.

To understand this problem involves considerable traditional algebraic manipulation - and there are complaints that some students do not get enough practice at this these days - and it also involves an appreciation of the strategic over-view which can be provided by group theory.

Group theory comes early in many courses today, but it can easily appear an 'empty' study because it does not seem to the student to solve any problems with which he is already acquainted. To give the student this idea is to falsify history. Group theory arose from the study of certain traditional problems for which previously known methods were inadequate.

Unfortunately the teaching of these ideas can take a long time in a course, and there are many other topics which demand attention. We must also respect the arguments of numerical analyses that the algebraic solution of equations is a matter of historical interest only, little related to current practice. But the group theory of algebraic equations is worth doing if it can be done sufficiently briefly, and brevity might be assisted by presenting some of the ideas in a more geometrical form.

I will present the ideas at a speed suitable for the present audience, but I believe they would be worth discussing during the first year of a college course and on inservice courses for teachers, and I wonder if some of the ideas might not be used with the most advanced pupils in schools.

This presentation assumes elementary knowledge of the symmetric functions of the roots of a polynomial, groups, subgroups and cosets, and the use of cycle notation to denote the elements of a permutation group. The aim is merely to show that the quintic cannot be solved algebraically, and the more general problems of Galois theory are not tackled. In particular no reference is made to the automorphisms of fields. The formal theorems are stated but not proved. Proofs may be found in references such as (3, 4, 8). The quadratic equation can be solved by reducing it to the problem of extracting a sqare root

$$x^2 + px + q = 0$$

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}(p^2 - 4q);$$

and the familiar method continues.

The historical methods for the solution of the cubic and the quartic also proceed by using root extractions in various ways, but there is no discernible underlying system. This can be provided by adopting the point of view of group theory. Throughout we will adopt certain standard notations, and consider the cubic equation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

with roots α, β, γ for which

$$\begin{aligned} -p &= \alpha+\beta+\gamma, \\ q &= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \\ -r &= \alpha\beta\gamma; \end{aligned}$$

and the quartic equation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

with roots $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ for which

$$-p = \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

$$q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta,$$

$$-r = \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma,$$

$$s = \alpha\beta\gamma\delta.$$

We assume that p, q, r and s come from some number field F. In practice we are usually concerned with the field of rational numbers.

There are many traditional exercises in which the student uses these basic equations to derive formulae for other symmetric functions of the roots; although in my own case the study was never pursued sufficiently far to see why anyone should want to do this.

In the case of the cubic a function such as $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$ is *symmetric* in the sense that if any of the substitutions of the symmetric group on three symbols, P_3, is performed on the function then it is left unaltered.

From this point of view there are functions which are not fully symmetric, but not completely asymmetric either.

Example 1 The following functions of the roots of the cubic equation,

$$\alpha + \beta,\ \alpha^2 + \beta^2,\ \gamma \text{ and } \alpha\gamma + \beta\gamma$$

are left invariant by the substitutions

$$I \text{ and } (\alpha\beta),$$

which form a subgroup H, of the group P_3. We will say that they have the symmetries of the subgroup H.

A truly remarkable property holds for functions which have the same (sub)group. In this case experiment will show such identities as

$$\alpha + \beta = -p - \gamma,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = (p + \gamma)^2 - 2r/\gamma,$$
$$\alpha\gamma + \beta\gamma = -p\gamma - \gamma^2.$$

A less obvious result is

$$\gamma = -[p^3-2pq+r-p(\alpha^2+\beta^2)] \;/\; [p^2-q-(\alpha^2+\beta^2)];$$

and further experiment will show that other rational functions having the same symmetry, for example

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \quad \alpha^9\gamma^2 + \beta^9\gamma^2, \quad \alpha^3\beta^3/(\alpha+\beta) \text{ and } \alpha+\beta+\alpha^2\beta^2,$$

have the truly remarkable property discovered by Lagrange, that any one may be expressed as a rational function of any other. To state this formally -

Theorem 1 Given an algebraic equation of degree n, any two rational functions of the roots which have the same symmetry group may be expressed rationally in terms of one another.

The proof of this theorem is not too difficult - it involves a certain amount of manipulation with determinants and/or matrices (3). The proof provides an algorithm for actually doing what is claimed, and furthermore enables it to be done with polynomials, which are a restricted class of rational functions. This stronger result is not needed for our purposes.

Students may gain much manipulative practice by experimenting with equations of this kind.

Example 2 Consider the quartic equation. Verify that

$$\theta = \alpha+\beta \quad \text{and} \quad \phi = \alpha\beta$$

belong to the subgroup

$$H: \quad I, \quad (\alpha\beta), \quad (\gamma\delta), \quad (\alpha\beta)(\gamma\delta).$$

Verify that

$$\theta = (p\phi^2 - r\phi) / (s - \phi^2)$$

and

$$\phi = (2\theta + p)s / (\theta^3 + 2p\theta^2 + p^2\theta + q\theta + pq - r).$$

Find some other functions which belong to the subgroup H, and express them rationally in terms of one another.

Interesting relations arise between two functions when one belongs to a larger subgroup which contains the subgroup of the other.

Example 3 Considering functions of the roots of the quartic,

$$\theta = \alpha\beta + \gamma\delta$$

has the group

$$G:\quad I,\ (\alpha\beta),\ (\gamma\delta),\ (\alpha\beta)(\gamma\delta),\ (\alpha\gamma)(\beta\delta),\ (\alpha\delta)(\beta\gamma),\ (\alpha\gamma\beta\delta),\ (\alpha\delta\beta\gamma).$$

$$\phi = \alpha\beta$$

has the group

$$H:\quad I,\ (\alpha\beta),\ (\gamma\delta),\ (\alpha\beta)(\gamma\delta).$$

It can be verified that

$$\theta = \phi + s/\phi .$$

ϕ cannot be expressed rationally in terms of θ, but it satisfies a quadratic equation of which the coefficients involve θ,

$$\phi^2 - \theta\phi + s = 0.$$

Consider also an example involving the roots of the cubic.

Example 4

$$\theta = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$$

has the group

$$G: \; I, \; (\alpha\beta\gamma), \quad (\alpha\gamma\beta);$$

whereas

$$\phi = \beta^2\gamma$$

has the group of order one, the identity.

θ can be expressed rationally in terms of ϕ;
some manipulation shows that

$$\theta = [\phi^3 + (pqr - 3r^2)\phi + r^3] \,/\, (\phi^2 - r\phi).$$

However ϕ cannot be expressed rationally in terms of θ. The best that can be done is to produce a cubic equation which ϕ satisfies, which has coefficients involving θ.

$$\phi^3 - \theta\phi^2 + r(pq - 3r + \theta)\;\phi + r^3 = 0.$$

These results exemplify two further general points. If the proof of Theorem 1 (not given here) is examined it can be seen that it demonstrates just as well that θ can be expressed rationally in terms of ϕ even when the symmetry group of ϕ is only a subgroup of the group of θ. The second general point, how we may attempt to express ϕ in terms of θ in this case, is explained in the next theorem.

Theorem 2 If θ and ϕ are rational functions of the roots of a polynomial with coefficients in some field F, and

i. θ has group G,
ii. ϕ has group H,
iii. H is a subgroup of G of index r,

then ϕ satisfies a polynomial equation of degree r with coefficients in $F(\theta)$.

Note 1 - the index of H in G is r means that the order of G divided by the order of H is r.

Note 2 - $F(\theta)$ denotes the field of numbers obtained by adjoining the element θ to the field F.

The proof of Theorem 2 is quite short but it will not be given here. The proof does however make use of a general idea which we will discuss.

Example 5 Consider the cubic.

$$\phi = \alpha^2 + \beta^2$$

has the group

$$H: I, (\alpha\beta)$$

of order 2. This group is of index 3, regarded as a subgroup of P_3, which is the group of the symmetric functions of the roots.

$$P_3: I, (\alpha\beta), (\beta\gamma), (\gamma\alpha), (\alpha\beta\gamma), (\alpha\gamma\beta).$$

We know that I and $(\alpha\beta)$ leave ϕ unchanged. Call it ϕ_1 for the moment. The operations $(\beta\gamma)$ and $(\alpha\gamma\beta)$ however change ϕ to ϕ_2 (say), where

$$\phi_2 = \alpha^2 + \gamma^2.$$

The remaining two operators $(\gamma\alpha)$ and $(\alpha\beta\gamma)$ change ϕ to ϕ_3,

$$\phi_3 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Theorem 2 tells us that ϕ $(=\phi_1)$ satisfies a cubic equation with coefficients in F. Tedious manipulation will produce this equation,

$$\phi^3 + 2(2q - p^2)\phi^2 + (p^4+q^2-4p^2q-2pr)\phi + (p^3-2pq+r)^2 - (p^2-2q)(p^2-q)^2 = 0.$$

The theoretical interest is that the three roots of this equation are ϕ_1, ϕ_2 and ϕ_3, and that the transformations of P_3 which transform ϕ_1 to ϕ_2 are a *coset* with respect to H, and the other two transformations which map ϕ to ϕ_3 are the remaining coset.

It is now possible to show without too much trouble that the famous solutions of the cubic and the quartic, named after Cardan and Ferrari, are explicable in this context. It is preferable, however, to emphasise how solutions of these equations may be carried out *purely by root extractions*. This we will now do. We introduce an extra trick, the theory of which we will consider later, which enables us to proceed from one stage to another by solving equations of the especially simple form $\Phi^{n} = \theta$. In the course of doing this it will be necessary to introduce complex roots of unity, as circumstances demand.

Example 6 The symmetric functions of the roots of the cubic belong to the group P_3. This has a subgroup of index 2, the alternating group A_3.

$$A_3: \quad I, \ (\alpha\beta\gamma), \ (\alpha\gamma\beta).$$

A function which has this group is

$$\phi_1 = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha.$$

Under the other transformations of P_3 this becomes

$$\phi_2 = \beta^2\alpha + \gamma^2\beta + \alpha^2\gamma.$$

From these two functions we may form

$$\Phi = \phi_1 - \phi_2 = \alpha\beta(\alpha-\beta) + \beta\gamma(\beta-\gamma) + \gamma\alpha(\gamma-\alpha).$$

As the argument develops we will come to regard Φ as being not so much the difference of ϕ_1 and ϕ_2, but as the two values of ϕ, added with weights equal to the two square roots of unity - but more of this later.

The important thing about Φ is that it is a function with group A_3 whose square has group P_3. This is best seen by realising that the operations of P_3 either leave Φ as it is, or multiply it by -1. Hence in either case they leave Φ^2 unaltered.

Hence Φ, which has group A_3, satisfies the equation

$$\Phi^2 = \theta,$$

where θ is some function with group P_3, which we may regard as known, because there is an algorithm for constructing it from the coefficients of the original equation.

Φ can be evaluated by taking a square root, and now all rational functions with group A_3 can be regarded as known, in the sense that Theorem 1 provides a method of expressing all others in terms of the Φ we have found.

We now start again and try to find a function whose group is the identity but whose cube has group A_3. Consider $\phi_1 = \alpha$. Under the other operations of A_3 this takes the values

$$\phi_2 = \beta \qquad \text{and} \qquad \phi_3 = \gamma.$$

Now form a new function Φ,

$$\Phi = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma, \quad \text{with} \quad \omega^3 = 1, \; \omega \neq 1. \tag{1}$$

This is to be regarded as the sum of the three values of our original ϕ, weighted with the three complex roots of unity. It is easy to verify that Φ has as group I, whereas its cube has group A_3. Hence

$$\Phi^3 = \theta,$$

with some new function θ which is known, in the sense that we can express it rationally in terms of already known quantities including the old Φ.

Now

$$\Phi' = \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma \tag{2}$$

is also calculable, since it has the same group as Φ. In fact

$$\Phi\,\Phi' = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = p^2 - 3q.$$

Furthermore

$$-p = \alpha + \beta + \gamma. \qquad (3)$$

Equations (1), (2) and (3) may now be solved for α, β and γ, and the equation is solved completely.

The process of solution is to be seen as working systematically from functions with symmetry group P_3 down to functions whose group is the identity. Note that any given root of the equation actually has a larger group than the identity, thus the root α has a group of order two with elements I and $(\beta\gamma)$; but when we know some function whose group is the identity, by Theorem 2 all of the roots may be expressed in terms of it. We have given an alternative procedure which is a little more convenient.

Exercise Express each of α, β and γ rationally in terms of

$$\mathcal{I} = \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma.$$

This function is called a *Lagrange resolvent* of the cubic.

Example 7 We will now solve the general quartic equation in a similar way.

The fully symmetric functions of the roots have group P_4. It is possible to find a function $\mathcal{I}$ which has group A_4, but whose square has group P_4; that is to say it satisfies an equation

$$\mathcal{I}^2 = \theta,$$

with θ expressible in terms of p, q, r, s.

One such function is $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)$; but more general principles are indicated by looking at the problem another way. We may take a sufficiently asymmetric function, such as for example $\alpha^3\beta^2\gamma$, and form 11 other functions by using the transformations of A_4. Adding up these 12 gives a function ϕ_1 with group A_4. The remaining

12 transformations in P_4 change ϕ_1 to a function ϕ_2. Then

$$\Phi = \phi_1 - \phi_2$$

has the required property.

A_4, which is of order 12, has a subgroup

G_4: I, $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$, $(\alpha\gamma)(\beta\delta)$, $(\alpha\delta)(\beta\gamma)$.

Our standard methods produce a function

$$\Phi = (\alpha\beta+\gamma\delta) + \omega(\alpha\gamma+\beta\delta) + \omega^2(\alpha\delta+\beta\gamma), \ \omega^3 = 1, \ \omega \neq 1$$

with group G_4 whose cube has group A_4.

The rest is easy: G_4 has a subgroup

G_2: I, $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$.

And G_2 has a subgroup I. In each case the reader may construct suitable functions Φ which have the symmetries of the smaller group and whose square has the symmetries of the larger group. All of the roots are then expressible in terms of the last function we find.

There are practical procedures for the solution of the quartic which are more convenient than the method just outlined, but this method brings out the principles. The great importance of the decomposition of a group into cosets can be seen all the time.

The ultimate aim is to show that no such procedure is possible in the case of the general quintic. Before we can do this we must establish one more general principle. If we have a function θ with group G and another function ϕ with group H, where H is a subgroup of G with index r, then Theorem 2 ensures that ϕ satisfies a polynomial of degree r with coefficients in $F(\theta)$. In Examples 6 and 7 these polynomial equations were of the very special form

$$\Phi^r = \theta.$$

It remains to explain why this could be done in the cases demonstrated, when it cannot be done always.

The reason is that H has to be a special kind of subgroup of G. Actually H has to be special in two ways, and we will consider these one at a time.

In the course of Example 7 we considered G_4, a subgroup of A_4.

$$G_4: I, \quad (\alpha\beta)(\gamma\delta), \quad (\alpha\gamma)(\beta\delta), \quad (\alpha\delta)(\beta\gamma).$$

$\phi_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$ has the group G_4, but some of the other permutations of A_4 (a coset of permutations) change ϕ_1 to

$$\phi_2 = \alpha\gamma + \beta\delta,$$

and the remaining permutations change it to

$$\phi_3 = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

From ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 we built up the function

$$\Phi = \phi_1 + \omega\phi_2 + \omega^2\phi_3 = (\alpha\beta+\gamma\delta)+\omega(\alpha\gamma+\beta\delta)+\omega^2(\alpha\delta+\beta\gamma).$$

Now an important link in the argument was that the permutations of G_4 left this whole expression invariant. This comes about because not only does ϕ_1 have group G_4, ϕ_2 and ϕ_3 have group G_4 as well. This is not always the case, as the following example will show.

Example 8 We might attempt to solve the quartic this way

$\phi_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$ has a group of order 8.

$$G_8: I, \ (\alpha\beta), \ (\gamma\delta), \ (\alpha\beta)(\gamma\delta), \ (\alpha\gamma)(\beta\delta), \ (\alpha\delta)(\beta\gamma), \ (\alpha\gamma\beta\delta), \ (\alpha\delta\beta\gamma).$$

This is a subgroup of P_4 of index 3. Observe that we noted a short way back that $\alpha\beta + \gamma\delta$ had a group G_4. This was because we were then working inside the group A_4. We are at the moment working inside P_4. G_8 is a subgroup of P_4, but only the part of G_8 which we called G_4 is a subgroup of A_4.

Now the other permutations of P_4 change ϕ_1 to

$$\phi_2 = \alpha\gamma + \beta\delta,$$
$$\phi_3 = \alpha\delta + \beta\gamma,$$

just as before. But what happens when we form

$$\Phi = (\alpha\beta+\gamma\delta) + \omega(\alpha\gamma+\beta\delta) + \omega^2(\alpha\delta+\beta\gamma) \ ?$$

Φ does not now have the group G_8! This is because a permutation such as $(\alpha\beta)$, which is in G_8, changes Φ to

$$\Phi' = (\alpha\beta+\gamma\delta) + \omega(\alpha\delta+\beta\gamma) + \omega^2(\alpha\gamma+\beta\delta) .$$

This means that whereas Theorem 2 ensures that $\phi = \alpha\beta + \gamma\delta$ satisfies a cubic equation with coefficients in F the attempt to construct a function Φ for which the equation takes the specially simple form fails.

The process succeeded in Examples 6 and 7 because the subgroup was not only a symmetry group for ϕ_1, it was also a symmetry group for ϕ_2 and ϕ_3 as well. We did not point this out at the time, but it is crucial. When we consider ϕ_2 and ϕ_3 in the two examples this crucial difference is seen as follows.

The symmetries of G_4 leave ϕ_1 invariant, and they leave ϕ_2 and ϕ_3 invariant as well. However the remaining symmetries in G_8, which are $(\alpha\beta)$, $(\gamma\delta)$, $(\alpha\gamma\beta\delta)$ and $(\alpha\delta\beta\gamma)$, interchange ϕ_2 and ϕ_3 with one another. Consequently the attempt to build the function Φ from ϕ_1 fails.

<u>Exercise</u> Show that similar difficulties arise if we try to solve the cubic by seeing that $\phi = \alpha\beta$ has a group of order 2, and trying to construct a suitable Φ from it.

This special property of H as a subgroup of G, which permits an equation connecting functions with these groups to be put in the specially simple form, now has to be expressed entirely in self-contained group theoretic terms. We consider the case where H is a subgroup of G of index 3, but the argument can be generalised.

Suppose that a decomposition of G into cosets by H is given by

$$H,\ Hg_2 \text{ and } Hg_3, \qquad g_2,\ g_3 \in G.$$

Suppose further that ϕ_1 has group G, and that it is changed to ϕ_2 by g_2 and to ϕ_3 by g_3. Then

all the elements of H transform ϕ_1 to ϕ_1,

all the elements of Hg_2 transform ϕ_1 to ϕ_2,

all the elements of Hg_3 transform ϕ_1 to ϕ_3.

Now choose some arbitrary g and suppose that

$$\phi_r g = \phi_s \qquad \text{or} \qquad \phi_r = \phi_s g^{-1}.$$

Since any $h \in H$, leaves all the ϕs invariant,

$$\phi_r = \phi_r h = \phi_s g^{-1} h.$$

Operating further with the initially chosen g,

$$\phi_r g = \phi_s g^{-1} h g;$$

and since $\phi_r g = \phi_s$ we have

$$\forall g \in G,\ \forall h \in H,\ \forall s, \qquad \phi_s = \phi_s g^{-1} h g.$$

This means that $g^{-1} h g \in H$, since it leaves ϕ_s invariant.

This condition may also be written as

$$\forall g, \qquad g^{-1} H g = H \qquad \text{or} \qquad Hg = gH.$$

This property is well known in group theory, where it occurs in many contexts.

Definition Given a group G with a subgroup H, then H is called an *invariant*, *normal* or *self-conjugate* subgroup if

$$\forall g, \qquad Hg = gH.$$

Different writers use different terms for this, but we will speak of an *invariant* subgroup because this term seems to describe the geometrical aspects of the situation very well.

One further matter remains to be checked. We have been employing a particular strategy to construct a function Φ, but it might be possible to construct a suitable Φ by some other method. This point is not difficult to resolve; and then Theorem 3 can be established.

Theorem 3 Given a group G and a subgroup H, of index r in G, then if there exists a function Φ with group H and a function θ with group G such that

$$\Phi^{r} = \theta$$

then H is necessarily an invariant subgroup of G.

However, if H is an invariant subgroup of G this alone is not sufficient to ensure the existence of a relation of the form $\Phi^{r} = \theta$. H has to be special in another way as well. This matter will not concern us in our limited aim of proving the general quintic insoluble by these methods; but it has to be understood in order to develop other aspects of the theory. We therefore mention this point for completeness, but give it no discussion. Given any group G and an invariant subgroup H then it is possible to form something called the *quotient group*. For these methods of equation solving to work, at each stage not only must G have an invariant subgroup H but the quotient group must be cyclic. Those who do not appreciate this technicality need not worry, as it does not concern us any more.

It now follows that if at any stage in the attempt to solve an equation by the successive extraction of roots, we find that the appropriate group G has no invariant subgroups whatever, then the process will fail at this point as there is no way to continue. We will see that this is the case with the general equation of degree five.

It is more than time to look at some of these things geometrically. Geometrical considerations can give insight at two levels, at least. We may look at the axes of symmetry of the appropriate geometrical objects, or we may look at Cayley graphs.

Consider the solution of the cubic carried out in Example 6. This involved the group P_3, and a geometrical object with this group is the equilateral triangle. The axes of symmetry of an equilateral triangle are indicated in Fig. 1. This assists our thinking about P_3. There

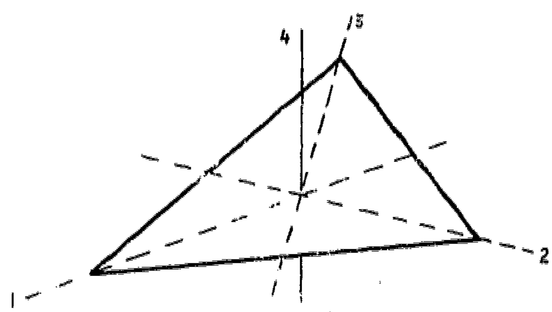


Fig. 1

are three 2-fold axes, labelled 1, 2, 3, and one 3-fold axis, labelled 4. For convenience we may initially regard these axes as fixed in space and think of rotations taking place about them. The meaning of a subgroup on this kind of picture should be quite clear.

It is geometrically evident that we may take a further step. Take a 'copy' of axis 4 and perform the other operations of the group on it. It is clear that they all leave axis 4 invariant - they leave it invariant as an overall configuration although they may alter its sense. If we consider the subgroup corresponding to axis 2 (say), the situation is different. If we take a copy of axis 2 and carry out the operations of the group on it, it may be left where it is or it may be transformed into axis 1 or axis 3. This shows the difference between subgroups which are invariant and subgroups which are not. This geometrical model helps us to recognise which subgroups are invariant by inspection. (The ideas of *conjugate* subgroups are also brought out very well, but we do not need them for our limited purpose).

The solution of the quartic involves P_4, and the direct isometrics of the cube provide a picture of this.

Exercise Draw diagrams and construct models of the axes of symmetry of a cube. List these axes. Identify some subgroups. Distinguish between subgroups which are invariant and subgroups which are not. Identify the groups and subgroups involved in Example 7, and verify at each step in the argument that the subgroups used are invariant subgroups.

Exercise Prove that a subgroup of index 2 is necessarily invariant.

Exercise Check that if A is an invariant subgroup of B, and B is an invariant subgroup of C, that A is not necessarily an invariant subgroup of C.

We may now look at the quintic equation, with which is associated the group P_5. This is the group of all permutations on five symbols. We can immediately find a subgroup of index 2 - the group A_5 consisting of even permutations only. Being of index 2 this must be an invariant subgroup, but in any case we can quickly see that the function

$$\phi = \Pi(\alpha - \beta)$$

has the group A_5 and that its square has group P_5. The first step towards a solution is taken. Has A_5 any invariant subgroups?

A model of A_5 is provided by the icosahedron, dodecahedron or any other solid with the same symmetries. One such object is the football based on the truncated icosahedron. Inspection of a football makes it plain that there are no invariant subgroups of A_5, and so the quintic is insoluble.

Regrettably there is a small gap still remaining in the argument. Perhaps P_5 has some other invariant subgroups, within which a furhter invariant subgroup can be found, and that a solution may be constructed by this alternative route. It would be nice to produce a three-dimensional object with symmetry group P_5 - but I do not know of one.

Exercise Show that the group of the 120 isometrics of the icosahedron, direct and indirect, is *not* isomorphic to the group P_5.

Geometrical pictures can give further help in understanding what is involved in an invariant subgroup. Inspection of the axes of symmetry of the equilateral triangle and the cube shows that the symmetries may be arranged in a very obvious way in different types or *classes*.

The equilateral triangle has the following symmetries:

the identity	1
$\frac{1}{2}$-turns	3
$\frac{1}{3}$-turns	2
	6

The cube has the following symmetries:-

the identity	1
$\frac{1}{2}$-turns about axes through opposite edges	6
$\frac{1}{3}$-turns about long diagonals	8
$\frac{1}{2}$-turns about axes through opposite faces	3
$\frac{1}{4}$-turns about axes through opposite faces	6
	24

It is geometrically obvious that if a subgroup is to be invariant then all the elements in any given class must be treated in the same way - they must all be included or all excluded. Hence, in the case of P_3 the number of elements in an invariant subgroup must be of the form

$$1 + 3\delta_1 + 2\delta_2, \text{ with } \delta_1, \delta_2 = 0 \text{ or } 1;$$

and this number must also divide the order of the group, which is 6. The only possibility for a proper subgroup is $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$. This gives the invariant subgroup of order 3 which we know.

In the case of P_4 the corresponding expression is

$$1 + 6\delta_1 + 8\delta_2 + 3\delta_3 + 6\delta_4, \text{ with } \delta_1, \ldots, \delta_4 = 0 \text{ or } 1,$$

and the total must divide 24. There are only two possibilities:-

$1 + 8 + 3$, which leades to A_4,

$1 + 3$, which gives an invariant subgroup, but which does not lead to an alternative solution of the quartic because it runs into the other difficulty that was mentioned, a suitable $\mathcal{J}$ cannot be constructed because the quotient group is not cyclic.

Exercise Apply these arguments to the icosahedron, and show that A_5 has no invariant subgroups.

These arguments may be put into an algebraic form and they may then be applied to P_5, and this enables the next theorem to be proved completely.

Theorem 4

i. The group P_5 has only one invariant subgroup A_5;

ii. A_5 has no invariant subgroups.

All the evidence has now been accumulated to demonstrate Theorem 5.

Theorem 5 The general algebraic equation of degree five cannot be solved using only

i. rational operations,

ii. introduction of the rth roots of unity,

iii. extraction of rth roots.

There are other geometrical ways of getting insight into group structure. The icosahedral football may be regarded as a Cayley graph of A_5. Cayley graphs are explained very simply in reference (5). A triangular prism provides a Cayley graph for P_3, and a truncated cube a Cayley graph for P_4.

The crucial step of finding an invariant subgroup of index 3 is illustrated well by these models. The various values which the function ϕ takes are associated with the nodes of the graph. These are partitioned into sets to be labelled ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. Comparing the situations arising from Examples 7 and 8 we see how in the one case the symmetries of ϕ_1 are also symmetries of ϕ_2 and ϕ_3, but how in the other case they interchange them.

We also see how, in the satisfactory case, other symmetries of the group exist which rotate the cosets into one another. (The quotient group is cyclic). We may see further how P_4

has the invariant subgroup of order 4, referred to above, and how there are 6 cosets, but that these may not be rotated one to the other by using some fixed axis - showing how the attempt to construct a $\oint$ by using powers of some root of unity as weights breaks down.

The construction of the equation $\oint^{n} = \theta$ corresponds to the geometrical problem - colour the nodes of the Cayley graph with n colours in such a way that the sets of each colour are congruent, have the same symmetries, and can be rotated into one another by using a single axis.

Once more, inspection of the football will show that we cannot do this.

Exercise: Yet another way of employing geometrical objects to illustrate group relations is to use the faces of a polyhedron to represent elements of the group instead of the vertices. This produces duals of Cayley graphs. This method was employed by Klein and others and is described in textbooks such as Burnside (2). It is widely used in the discussion of groups which arise in connection with certain functions of the complex variable.

The reader may investigate the appropriate representations of this kind for the groups which we have been discussing.

REFERENCES

1. F.J. Budden : <u>The Fascination of Groups</u>, Cambridge UP, 1972.

2. W.S. Burnside : <u>Theory of Groups of Finite Order</u>. Reprinted, Dover.

3. W.S. Burnside and A.W. Panton : <u>Theory of Equations</u>, 2 vols. Reprinted, Dover.

4. F. Cajori : <u>An Introduction to the Theory of Equations</u>. Reprinted, Dover, 1969.

5. I. Grossman and W. Magnus : <u>Groups and their Graphs</u>. Random House, 1964.

6. F. Klein : <u>Lectures on the Icosahedron</u>. Trans. G.G.Morrice. Reprinted, Dover.

7. D.E. Littlewood : <u>The Skeleton Key of Mathematics</u>. Hutchinson, 195o.

8. D.E. Littlewood : <u>A University Algebra</u>. Heinemann, 195o.

DI[illegible]GEOMETRIE IM DIENST EINER PROGRESSIVEN UND [illegible]ETEN PÄDAGOGIK

G. Glaeser, Strasbourg

Der vorliegende Vortrag trägt den gleichen Titel wie das Vorwort zu einem Band des "Livre du Problème", das augenblicklich vorbereitet wird [1]. In diesem Werk werden einige pädagogische Grundsätze aufgezeigt, und vor allem auch *praktisch angewendet*, die, obwohl sie banal erscheinen oder weil sie banal erscheinen, immer noch zu sehr vernachlässigt werden.

Grundsatz:

Das Ziel des Mathematikunterrichtes *besteht nicht in der Übermittlung von Kenntnissen*. Das Wesentliche ist die *Entwicklung der intellektuellen Fähigkeiten*, die nur durch die mathematische Praxis erreicht werden kann:

Anregen zum mathematischen Schließen, Hinführen zur Handhabung der Abstraktion für die Lösung praktischer Probleme, *Anspornen von Phantasie, Kombinationsge[illegible]* zur *Kreativität im Rahmen der vorhandenen Möglichkeiten.*

Unser Standpunkt synthetisiert die drei Haupttendenzen:

- *Die Pädagogik der Mathematiker "ohne Schüler"*, wie sie zum Beispiel in den Werken von Dieudonné erscheint, wo zusammenhängende Abhandlungen von einigen Teilen der Mathematik erarbeitet werden.

- Den Trend der *Pädagogen*, die sich vor allem mit dem Verhalten der Schüler befassen, ohne dabei dem mathematischen Unterrichtsstoff ausreichendes Interesse zu schenken. (Im

Hinblick hierauf scheinen die Arbeiten von M. WAGENSCHEIN [2] ausnehmend interessant zu sein).

- Und schließlich die Tendenz *der Didaktiker*, die sich vor allem mit Modellen zur Nachrichtenübermittlung befassen, ohne dabei das Hauptgewicht auf eine lebendige Mathematik und die bei den Schülern beobachteten Reaktionen zu legen. Das Werk von E. WITTMANN enthält die sichtbarsten Ergebnisse in dieser Hinsicht [3].

Unser Bestreben ist es, pädagogische Maßnahmen vorzubereiten, die den jeweiligen Forderungen dieser Tendenzen Rechnung tragen.

Das Entscheidende für eine erfolgreiche mathematische Ausbildung ist *der definitive Bruch mit dem synkretischen Denken:* in den ersten Phasen seiner geistigen Entwicklung nimmt das Kind seine Umwelt aufgrund der Fülle von Eindrücken, die in einer Masse von parasitären Informationen verborgen ist, nur *global* auf.

Das Lehren des deduktiven Denkens, das eines der Ziele unseres Unterrichtes darstellt, erfordert eine Analyse und eine Strukturierung dieses Bilderstroms: es geht darum zu lernen, wie die mathematische Sprechweise von den sie umgebenden "Hintergrundgeräuschen" befreit, die Melodie aus den Kratzgeräuschen der Schallplatte herausgehört werden kann.

Um dem Schüler dabei zu helfen, diese Mutation durchzuführen, müssen *progressive*, pädagogische Maßnahmen entwickelt werden, die bereits mehrere Jahre im voraus konzipiert und geplant werden. Etwa mit vierzehn Jahren muß der Schüler in der Lage sein, *Beweise abzuleiten und zu ersinnen.*

Die Inzidenzgeometrie eignet sich besonders gut für diese Aufgabe. Nachstehend z. B. eine sehr unvollkommene Auswahl der Versuche, die wir am I.R.E.M. von Strasbourg durchgeführt haben.

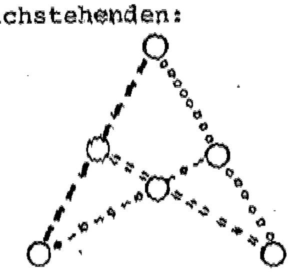
a) *Befreiung von Ausdrucksschwierigkeiten* bei den ersten Einführungen in das mathematische Schließen.

In verschiedenen Grundschulklassen (8- bis 10-jährige Schüler) erprobten wir Inzidenzmodelle mit Hilfe eines Lehrmaterials, das aus auf Wollfäden aufgezogenen Knöpfen bestand.

Man stellte z. B. die Aufgaben, die Anordnungen in der Weise zu vervollständigen bzw. zu modifizieren, daß "zwei verschiedene Knöpfe stets auf einem und genau einem Faden aufgefädelt sind."

Durch den Gebrauch der Ausdrücke "Knöpfe" und "Fäden" verwendete man eine den Kindern bereits vertraute Sprache und klammerte die semantischen Hintergrundgeräusche aus, die durch die Wörter "Gerade" und "Punkte" hervorgerufen werden.

Zum Beispiel ist die Untersuchung der Automorphismen des vollständigen Vierecks von Klassen mit 10-jährigen Schülern in dem folgenden Zusammenhang mit Leichtigkeit bewältigt worden: es ging darum, Steinchen auf zwei Figuren, die der nachstehenden:

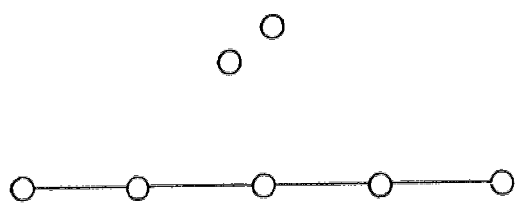


analog waren, so zu verschieben, daß jeweils drei Steinchen, die auf der ersten Figur "in einer Reihe liegen", auch auf der zweiten in einer Reihe bleiben.

Einigen Kindern gelang es (dank eines geeigneten Materials), alle 24 Automorphismen der Figur zu finden - (und die anderen fanden recht viele).

Danach wurde nachdrücklich darauf hingewiesen, daß es vorteilhafter ist, wenn man statt der Steinchen die Fäden verschiebt; dies ist viel einfacher und zeigt deutlich die Fruchtbarkeit der Dualität.

Für 12- bis 13-jährige Schüler haben wir Zettel vorbereitet, und zwar in dem Stil "gezeichneter Streifen" auf der Grundlage von fiktiven *U-Bahnnetzen*:
es wurde zum Beispiel gefragt, ob es möglich sei, ein U-Bahnnetz mit sieben Stationen, von dem nur eine Linie bereits konstruiert ist, so zu vervollständigen, daß zwei verschiedene Linien jeweils eine gemeinsame Station haben und zwei Stationen jeweils durch eine und genau eine direkte Linie miteinander verbunden sind.



Der Vorteil dieser "Maskeraden" lag darin, daß eine Einführung in die axiomatische Methode möglich war, während die Schüler gleichzeitig von den bereits begründeten und feststehenden Darstellungen, die die Wörter "Punkte" und "Gerade" beinhalten, unbehelligt blieben. (Ähnliche Versuche sind von Professor H. SCHUPP, Saarbrücken, durchgeführt worden [4]).

b) Beweis und Überzeugung

Die Beobachtung zeigt für gewöhnlich, daß ein Kind zur

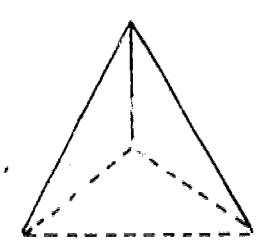
Begründung seiner Überzeugung nicht immer einen Beweis für notwendig hält, und daß ein formaler Beweis seine Zweifel oft nicht zerstreuen kann.

In den gleichen Bereich fällt die folgende Beobachtung eines 11-jährigen Jungen, der sich mit der nachstehenden Aufgabe befaßte:

Aufgabe:

Mit *"Dreizack"* bezeichnet man ein System von drei Kanten mit einer gemeinsamen Ecke. Man will die Kanten eines vollständigen Graphen mit 4 Ecken zweifarbig anmalen. Es soll bewiesen werden, daß, wenn es bei einer solchen Färbung einen einfarbigen Dreizack gibt, dann auch ein einfarbiges Dreieck vorhanden ist.

Das Kind ließ sich die Situation erst in nicht-technischen Ausdrücken erklären und entschied dann, zunächst einmal einen Dreizack blau anzumalen und zu versuchen, die Kolorierung durchzuführen, ohne einfarbige Dreiecke herzustellen. Er stellte fest, daß er den Blaustift nicht mehr verwenden konnte, ohne daß ein blaues Dreieck entstand, und daß er ein einfarbig rotes Dreieck erhielt, wenn er die verbleibenden drei Kanten rot malte... Zu unserem großen Erstaunen jedoch hielt er den Beweis nicht für vollständig. Er begann von neuem, die Schlußfolgerung für jeden einzelnen Dreizack sukzessive durchzuführen, wies jedoch dabei darauf hin, daß es unnütz sei, den Beweis mit roten Dreizacks zu liefern.... Da er sich aber über die Äquivalenz der 4 Dreizacks nicht klar geworden



war, erkannte er nicht spontan, daß er unabhängig voneinander vier Mal dasselbe Argument vorbrachte.

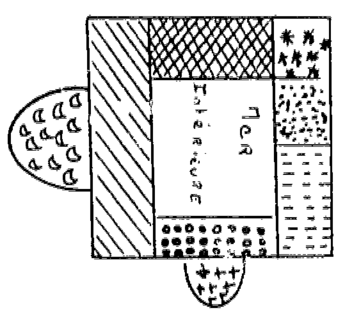
Dies ist ein Beispiel für die pädagogischen Fallstricke, die der Begriff des Beweises in sich birgt. Es ist wünschenswert, daß geeignete Übungen erarbeitet werden, die die Verbindung zwischen formalem Beweis und Gültigkeitsnachweis fördern.

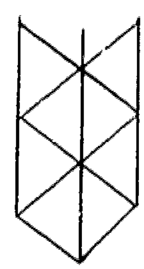
Aufgabe:

Man sagt, zwei Landkarten sind gleichartig gefärbt, falls immer dann, wenn zwei Länder der ersten Karte eine gemeinsame Grenze (bzw. keine gemeinsame Grenze) haben, die Länder derselben Farbe auf der zweiten Karte eine gemeinsame Grenze (bzw. keine gemeinsame Grenze) haben.

Kann man die zweite Karte, unten, ebenso anmalen wie die erste Karte?

Die Antwort kann nur einer Überlegung entstammen, wobei man versucht, eine der gewünschten Färbungen zu erreichen wenn man von einer der gewünschten Färbung ausgeht.





c) *Ausschaltung der Hintergrundgeräusche*

Wenn man eine Sammlung kleiner Überlegungen mit einigen Schlußfolgerungen anlegt, die gut artikuliert und auch dazu geeignet sind, jüngeren Kindern die Logik nahezubringen, stellt man fest, daß die Beweise der elementaren Inzidenzgeometrie (siehe die ersten Seiten von [5]) diesen Forderungen entsprechen.

Kann man jedoch die Aufgabe stellen zu beweisen, daß "jede Gerade" (einer Inzidenzstruktur, die bestimmte Axiome befriedigt) mindestens drei "Punkte" enthält? Der Begriff "Gerad ist mit einer solchen Vorstellung verknüpft, daß Nicht-Eingeweihte eine Frage dieser Art für dumm ha' en würden.

Um aber dennoch dieses so kostbare Material verwenden zu können, muß es in einem anderen Zusammenhang neu formuliert werden. So kann man fragen, ob es möglich ist, ein Autobahnnetz zu konstruieren, das dieselben Axiome befriedigt, und wobei bestimmte Strecken an weniger als drei Städten verlaufen. Man kommt somit zu akzeptableren Fragen, mit denen sich die Kinder (12 Jahre alt) gern auseinandersetzen.

Die Verwendung von Verkehrsnetzen enthält andere Hintergrundgeräusche: zum Beispiel muß die geographische Anordnung der Städte oder der Stationen beiseite gelassen werden.

Wir befürworten eine *polykonkrete* Pädagogik, wie André LICHNEROWICZ es nennt. Man bedient sich dabei vieler konkreter Situationen die ausreichend unterschiedlich sind, damit sich die verschiedenen Hintergrundgeräusche neutralisieren können; und alles dies geschieht zu dem Zweck, daß das gemeinsame Element auftaucht: *die Struktur*.

d) *Das Lehren einer heuristischen Sprache*

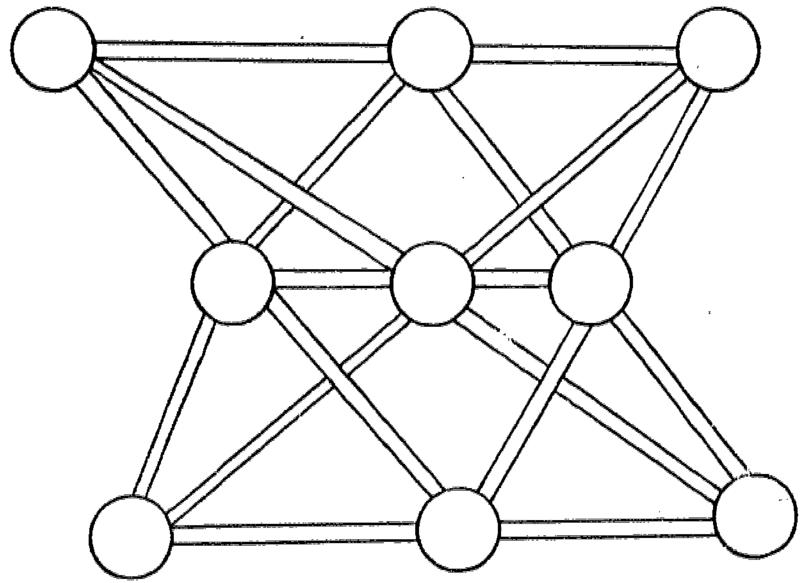
Die Geometrie ist schon längst nicht mehr das Modell der logischen Strenge. (Abhandlung "more geometrico").

Andererseits entnehmen die Mathematiker gerade der Geometrie am häufigsten die suggestiven Begriffe und Ausdrücke, die ihnen die Forschung erleichtern. Es ist angebracht, schon bei kleineren Kindern Stilgewohnheiten zu entwickeln (Wahl guter Notationen, geschickte Anordnungen von Zeichnungen und Figuren, usw), die das Widererkennen der Formen vereinfachen [6].

Es gibt zum Beispiel eine "*Pädagogik des Farbstiftes*". Heutzutage fördern die Herausgeber die Lehrbücher mit reichlicher Kolorierung. Wenn man jedoch diese Werke ernsthaft prüft, stellt sich manchmal heraus, daß allzu grell hervorgehobene Einzelheiten Ablenkungen darstellen, wodurch den Schülern das Wesentliche entgeht. Wir werden später ein Beispiel darüber anführen, was der Lehrer in bezug auf den heuristischen Stil bei den Schülern erreichen kann.

e) *Einführung in die Gruppentheorie*

Bis jetzt haben wir lediglich von pädagogischen Maßnahmen gesprochen, die sich für kleinere Kinder eignen. Nun soll jedoch von einer - wörtlich gesprochen - progressiven Pädagogik, von Versuchen die Rede sein, die sich an die Studenten im ersten Studienjahr an der Universität, ebenso an angehende Lehrer (zwei Jahre vor ihrem Eintritt ins Berufsleben) richteten. Es ging darum, sie in drei, jeweils zweistündigen Unterrichtsveranstaltungen die Gruppe der Automorphismen der Poppusschen Konfiguration untersuchen zu lassen. Man stellt fest, daß die meisten Schlüsselbegriffe dort vorkommen (Nicht-Kommutativität, ausgezeichnete Untergruppen, Transitivität, Nicht-Primitivität, Parität einer Permutation, Zerlegung einer Permutation in Zyklen, Existenz von Fixpunkten).



Die Studenten stellten rasch fest, daß eine Art des Vorgehens darin bestand, das obige Gitter in zwei Ausfertigungen herzustellen und Steinchen von einem Gitter auf das andere zu verschieben (wie beim Hüpfspiel). Sie entdecken bereits am Anfang, daß die Relation: "Die Punkte ... und ... *sind nicht* durch eine direkte Linie verbunden" eine Äquivalenzrelation ist. Es war angebracht, die zu einer gleichen Klasse gehörigen Punkte in derselben Farbe *anzumalen*. Ebenso sind drei *Richtungen* vorhanden, die die Äquivalenzklassen [illegible] paarweise getrennten Linien sind. Und auch hier k[illegible] wiederum mit Hilfe des Farbstiftes diese wichtige Tatsache herausgestellt werden.

Die untersuchte Gruppe von Automorphismen ist von der Ordnung 108. Es ist also uninteressant, davon eine Verknüpfungstafel aufzustellen. Aber man kann diese 108 Automorphismen nach ihren Fixpunkten (oder dual dazu nach ihren Fixgeraden) klassifizieren, oder auch nach der Parität der Permutation, die sie auf den Punkten (oder den Geraden) induzieren, oder nach den Permutationen, die auf den Farben der Punkte (oder den Richtungen) induzieren.

Eine Aufstellung aller dieser ausgezeichneten Untergruppen ist leicht und auf natürliche Weise zu machen.

Vom didaktischen Standpunkt aus scheint uns das systematische Durchführen dieses Beispiels weitaus gewinnbringender zu sein als eine Vorlesung über die elementare Gruppentheorie. Nach dieser Art von Tätigkeit können durch die rasche Lektüre eines Kapitels über Algebra die Begriffe an die richtige Stelle gerückt werden. Diese Lektüre wird den Studenten jedoch auf jeder Seite an längst beobachtete und analysierte Tatsachen erinnern.

Am Schluß dieses Vortrags muß unbedingt auf den fragmentarischen Charakter dieser Auswahl von Beispielen hingewiesen werden: in Wirklichkeit umfaßt die Arbeit des I.R.E.M. in Strasbourg weitaus vielfältigere Aspekte: vor allem vergißt man nicht, Beispiele aus der Praxis zu behandeln..

LITERATURVERZEICHNIS:

[1] I.R.E.M. de Strasbourg. Le livre du Problème; fascicule 1, 2, 3, 4, 5 (C.E.D.I.C) · Paris

[2] Martin WAGENSCHEIN: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Stuttgart 1965

[3] Erich WITTMANN: Grundfragen des Mathematik-Unterrichts. Braunschweig 1974

[4] Hans SCHUPP: Mühlegeometrie. Paderborn 1974

[5] Günther PICKERT: Projektive Ebenen, Berlin 1958

[6] Georges GLAESER: L'observation clinique des comportements heuristiques. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 6 (1974) S. 153-156.

ÜBER EINIGE ERFAHRUNGEN DES TSCHECHOSLOWAKISCHEN EXPERIMENTALZENTRUMS.
KOMBINATORISCHE GEOMETRIE IM UNTERRICHT.

J. Vyšin, Prag

Mein Beitrag betrifft einige *Fragen des Geometrieunterrichts*, wie sie sich uns vom Stand einer zehnjährigen Forschungstätigkeit aus darstellen. Diese Forschungstätigkeit wird vom Kabinett für Modernisierung des Mathematikunterrichts, einer kleinen didaktischen Forschungsabteilung des Mathematischen Instituts der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften, geleitet. Der Experimentalunterricht läuft an 12 Experimentalschulen; davon sind 9 neunjährige Grundschulen (ohne Selektion) und 3 vierjährige Gymnasien. Man unterrichtet da nach dem üblichen Stundenplan, aber nach einem besonderen Lehrplan und mit Hilfe besonderer Lehrtexte. Diese sind meistens als thematische Hefte verfaßt (also nicht als Lehrbücher für einzelne Jahrgänge); außerdem werden noch Arbeitsblätter, Sammlungen von Vorbereitungsaufgaben (Motivierungsaufgaben) und Sammlungen von Kontrollaufgaben verwendet. Die Unterrichtsformen werden entsprechend dem Altersniveau der Schüler gewählt und geändert. Der Forschungscharakter des Experimentalunterrichts besteht besonders darin, daß aufgrund der mit Hilfe didaktischer Tests festgestellten Ergebnisse einige thematische Hefte von Zeit zur Zeit durch neue ersetzt und im mathematischen Experimentalkursus an geeigneten Stellen Sonden eingegliedert werden. Die Sonden sind gewisse "Miniexperimente", mit deren Hilfe man die Anwendbarkeit, Angemessenheit und Attivität neuer Themen untersucht, wobei man vor allem die Schülerreaktionen auf diese Themen studiert. Unserer Hypothese nach soll der Unterricht in der Grundschule nicht zu systematisch sein; er soll eine Gesamtheit von Propädeutiken vorstellen, er soll die Schüler durch seinen Inhalt anziehen und durch seine Methoden aktivieren. In der

Mittelschule liegt natürlich eine andere Situation vor. Nach unserer Auffassung tritt dort nach und nach der deduktive Charakter der Mathematik immer mehr hervor, und das System im Unterricht ist überwiegend. Aber auch da darf man nicht den Grundsatz verlassen, daß der Mathematikunterricht sowohl dem Inhalt wie auch der Form nach nützlich und interessant sein soll. Diese letzte Forderung wird wahrscheinlich durch Aktivitäten verwirklicht, die wir mit der Gesamtbezeichnung *Problemunterricht* kennzeichnen. Wir verstehen darunter einen überlegten, heuristisch angelegten Unterricht, dessen Kern zweifellos *geleitete Entdeckungen* sind.

In unseren Ländern hat der Geometrieunterricht an den Selektionsschulen eine alte Tradition; es handelt sich freilich um die klassische konstruktive Geometrie, welche sich an die Vertreter der projektiven Geometrie des XIX. Jahrhunderts anschlossen (z.B. Gebrüder Weyr), sowie an die sog. tschechische geometrische Schule, deren Einfluß noch in der Zeit zwischen den beiden Weltkriegen nachklang (Sobotka). Da gehörten zum Mittelpunkt des Unterrichts die Aufgaben, größtenteils sehr interessante Aufgaben mit sinnreichen Lösungen. Es waren aber solche Aufgaben, die wir im Problemunterricht heute ungern sehen; denn diese Aufgaben überzeugen den Bearbeiter nicht davon, daß die Theorie nötig ist, daß man ohne Theorie keinen Schritt vorwärts machen kann. In der Mittelschule gingen Theorie und die Aufgaben beziehungslos nebeneinander her. Die Theorie war der fade, manchmal für die Schüler schwer begreifliche logische Aufbau der euklidischen Geometrie. Wenn auch manche Didaktiker der Gegenwart die euklidische Geometrie für ein ausgezeichnetes Muster halten, wie sich aus einem konkreten Modell eine abstrakte Theorie ausarbeiten läßt, zeigen unsere Erfahrungen etwas anderes. Im Mittelpunkt des Interesses für die Mathematik am Gymnasium und noch mehr an der Grundschule steht im allgemeinen nicht der logische Aufbau. Namentlich in der Geometrie entsteht die Situation, die nur einem Fachmann völlig verständlich und annehmbar ist, daß nämlich gewisse mit

Hilfe der Anschauung gewonnene Kenntnisse ohne Beweis vo ausgesetzt werden, dagegen andere ebenso evidente Tatsachen manchmal sehr mühsam mit Hilfe eines deduktiven Verfahrens abgeleitet werden. Unsere Erfahrung zeigt, daß die Schüler der Grundschulen und auch der Gymnasien mehr danach verla en, in der Geometrie etwas Neues kennen zu lernen, klein Probleme mit angemessenem Schwierigkeitsgrad zu lösen, be denen das Ergebnis nicht im voraus intuitiv bekan , und wo in der Tat gewisse "Miniforschungen" erforderlich sind.

Wenn es wahr ist, daß an der Wiege einer ganzen Reihe mathematischer Disziplinen die Geometrie stand, wie es übrigens die mathematische Terminologie zu bezeugen scheint, so kann daraus die Berechtigung des didaktischen Verfahrens folgen, die man kurz als *Geometrisierung der Schulmathematik* bezeichnen kann. Das bedeutet, daß wir den geometrischen Zugang zu verschiedenen Themen verstärken wollen (wie z.B. Arithmetik, Algebra,Funktionentheorie, mathematisc Analysis u.a.). Ferner wollen wir die Koordinatenmethode, geometrische Abbildungen, graphische Methoden zur Lösung von Gleichungen und Ungleichungen, geometrische Topologie usw. verwenden. Wir sind der Meinung, daß dadurch ausdrücklich die gut bekannte psychologische Tatsache geltend gemacht wird, daß die Mehrheit der Menschen dem visuellen Typus angehört. Dabei haben wir keine Angst, daß dieser Weg zu einer Vulgarisierung - oder auf der Oberstufe - zur Unterdrückung der Dedu ion führen könnte. Im Gegenteil. Unsere Erfahrungen zeigen folgendes: Im Falle des geometrischen Zugangs und der graphischen Methoden geraten die Schüler in die Lage, wo sie einen genaueren Apparat brauchen als denjenigen der konstruktiven Geometrie. Sie wollen wissen, warum ein gewisser Apparat funktioniert. So beginnen sie selbst, d ive Begründungen zu fordern. Namentlich in der U ist eine solche unaufgezwungene Einführung der Dedu sehr geeignet.

Die angedeutete Auffassung des Mathematikunterrichts ändert natürlich die Rolle der Geometrie sehr wesentlich. Beim geometrischen Zugang befindet sich die Geometrie völlig im Dienst der anderen Lehrstoffgebiete. Wollen wir die "echte" Geometrie retten - und das scheint uns fast unentbehrlich zu sein - müssen wir eine geeignete nicht traditionelle Thematik suchen, die mit unserer Auffassung gut übereinstimmt. In unserem Experiment haben wir eine gute Erfahrung mit der *kombinatorischen Geometrie* gemacht. Erlauben Sie mir, diesem Thema einige Bemerkungen zu widmen.

Die kombinatorische Geometrie erfrischt wirklich die Fadheit der euklidischen Geometrie. Sehr eng hängt sie mit einer Reihe von Themen der Schulmathematik zusammen: erstens ist es die Kombinatorik selbst, weiter die Arithmetik der ganzen Zahlen (samt der mathematischen Induktion), die konstruktive Geometrie und geometrische Axiomatik, die klassische und moderne Algebra (unter den Strukturen namentlich die Gruppen und die metrischen Räume), dann die elementare Mengentheorie und Topologie, die Graphentheorie, die Theorie der konvexen Mengen u.a. In methodischer Hinsicht bietet die kombinatorische Geometrie viele Gelegenheiten zum heuristischen Unterricht, zum Experimentieren, zum Entwickeln von Problemsituationen, zur Analyse der Begriffe und der verschiedenen Verfahren.

Was das Eingliedern der kombinatorischen Geometrie in den Mathematikunterricht anbelangt, so sehen wir diese folgendermaßen: Es handelt sich um eine Disziplin mit geringer eigener Theorie, aber mit einer großen Menge von Problemen verschiedener Schwierigkeit und verschiedenem Anspruch an die erforderliche Technik. Deshalb kann man sie in den ganzen Mathematikkursus einstreuen, sozusagen "vom Kindergarten bis zur Universität". Jede der kombinatorischen Geometrie gewidmete Stunde bringt Gewinn.

Wir haben folgende Vorstellung von der *Einführung der kombinatorischen Geometrie* in den Mathematikunterricht: Man wählt geeignetes Material von Aufgaben man teilt es nach der Technik ein, die für das Lösen nötig ist. Man gliedert Gruppen von diesen Aufgaben - besser gesagt Problemsituationen - an denjenigen Stellen ein, wo die entsprechende Technik durchgenommen wird - also unter dem Gesichtspunkt der Anwendung. Es handelt sich also um ein gewisses "Durchschießen" der Schulmathematik mit den Elementen der kombinatorischen Geometrie. Dabei ist zu beachten, daß ein und dieselbe Aufgabe sich auf verschiedenen Niveaus der Allgemeinheit und Schwierigkeit lösen läßt, was sehr gut mit dem *Prinzip der Spirallehrpläne* übereinstimmt.

Das Kabinett hat vorläufig ein einziges Sondierungsexperiment aus der kombinatorischen Geometrie im letzten Jahrgang der Experimentalgrundschulen durchgeführt. Einen entsprechenden Forschungscharakter hatte auch die Eingliederung des Themas "kombinatorische Geometrie" in das für die unter den Gymnasialschülern ausgewählten Teilnehmer der Mathematikolympiade veranstaltete Seminar. Der Inhalt beider Erprobungen ist namentlich aus folgenden Themen ausgewählt worden: Inzidenzprobleme - Einteilung in Gebiete - Konfigurationen und endliche Modelle - Netze - namentlich Netze von Gitterpunkten- Eigenschaften der konvexen Mengen - Realisierung der Bedingungen für Entfernungen - Deckungsbewegungen. Das Material für diese Themen wurde aus folgenden Büchern geschöpft:

Hadwiger - Debrunner: Kombinatorische Geometrie der Ebene. Genf 196o.
Jaglom - Boltjanskij: Konvexe Figuren. Berlin 19[illegible].
Meschkowski: Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie. Braunschweig 196o.

Wir haben einen Komplex von etwa 5o Aufgaben in 6 Arbeitsblättern zusammengestellt, die für 12 Unterrichtsstunden geplant worden sind. Zu den Aufgaben gehören beispielsweise die folgenden:

1. Es ist die Rekursionsformel für die Anzahl der Gebiete

abzuleiten, in welche die Ebene durch n Kreislinien eingeteilt wird, von denen je zwei sich schneiden und je drei keinen gemeinsamen Punkt haben; es ist das Verfahren zu beschreiben, wie sich eine solche Gruppe von Kreislinien konstruieren läßt, und zwar für einige numerische Werte von n.

2. Es ist zu bestimmen, ob man in einer Ebene ein System M von 6,7,8,... Punkten konstruieren derart kann, daß M in keiner Gerade liegt und die Verbindungslinie von je zwei Punkten aus M mindesten einem weiteren Punkt aus M enthält.

Diese Aufgabe stellt eigentlich den experimentellen Zugang zum Satz von Sylvester dar, der schließlich als Hypothese ausgesprochen wird.

3. Es ist das Quadrat ABCD gegeben, dessen Seite die Länge 1 hat. Die Menge M ist folgendermaßen definiert: a) sie enthält die Punkte A,B,C,D; b) mit zwei verschiedenen Punkten X,Y enthält sie auch den Mittelpunkt der Strecke XY. c) die Menge enthält keine anderen als die durch a) und b) bestimmten Punkte. Die Aufgabe lautet: konstruieren Sie einen Punkt $P \in M$, der weder einer Seite noch einer Diagonale des Quadrats ABCD angehört. Untersuchen Sie, welche Zahlen die orthonormalen Koordinaten der Punkte von M sind, wenn wir die Geraden AB, AD als Koordinatenachsen wählen. Konstruieren Sie eine das Quadrat ABCD schneidende Gerade, die keinen Punkt von M enthält.

Wirklich überraschend war die Schülerreaktion auf die gestellten Aufgaben. Obwohl es sich um keine Selektionsklassen handelte, waren die Schüler außerordentlich aktiv, sie bearbeiteten sämtliche Arbeitsblätter in einer kürzeren Zeit als ursprünglich vorgesehen war. Die Schüler leiteten selbständig rekursive Formeln ab, füllten die Tabellen aus und bemühten sich, die Endformeln zu finden, die sie dann mit Hilfe der rekursiven Formel überprüften, d.h. sie fanden eigentlich den Beweis aufgrund der mathematischen Induktion, von der sie vorher nie gehört hatten.

Beim Lösen der konstruktiven Aufgaben, z.B. der erwähnten Aufgabe von n Kreislinien, begriffen die Schüler nach einigen anregenden Fragen, daß ein großer Unterschied zwischen den beiden Verfahren besteht:"Beiläufig 6 bis 7 Kreislinien mit den verlangten Eigenschaften zu konstruieren" und "einen rekursiven Algorithmus anzugeben, wie sich ein solches System von Kreislinien für jedes n (z.B. $n = 10^4$) verläßlich bestimmen läßt".

Im Seminar für Gymnasien haben wir manche von der Art der angeführten Aufgaben auf höherem Niveau gelöst. So z.B. bewiesen die Schüler den Satz von Sylvester mit Hilfe der Kongruenz. Mit Hilfe eines endlichen Modelles der affinen Inzidenzgeometrie leiteten sie sogar ab, daß dieser Satz kein Satz der Inzidenzgeometrie ist, wie man laut seiner Formulierung falsch schließen könnte. Auch die Aufgabe von der Einteilung der Ebene durch n Kreislinien kam z.B. in einer komplizierteren Variante vor: die Gebiete, in welche die Ebene von Kreislinien $k_1, \ldots, k_n$ eingeteilt wird, wurden mit binären Koordinaten charakterisiert (die Zahl $x_i = 1$ bedeutet, daß das Gebiet im Kreise k_i liegt, die Zahl $x_i = 0$ bedeutet das Gegenteil). Das Problem war folgendes: es ist festzustellen, ob man die Kreise $k_1, \ldots, k_n$ derart wählen kann, daß verschiedene Gebiete verschiedene Koordinaten haben. Eine andere im Seminar gelöste Aufgabe bezog sich auf Gitterpolygone, d.h. Polygone, deren sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte eines Quadratnetzes sind; ferner auf die Konstruktionen von Punktmengen, bei denen je zwei Punkte eine ganzzahlige Entfernung haben (Satz von Borsuk) u.a.. Auch in diesem Seminar waren das Interesse und die Aktivität der Teilnehmer außerordentlich hoch.

Man kann sagen, daß die Erfahrungen, die wir im Experiment wie auch im Seminar gewonnen haben, für uns eine angenehme Überraschung waren. Wir werden an den Texten weiter arbeiten, und wir hoffen, daß die Schulverwaltung unsere Ergebnisse in der breiten Reform des Mathematikunterrichts ausnützen können wird.

Unter der Modernisierung der Schulgeometrie versteht man gewöhnlich die Entwicklung der Vektor- und Matrizenalgebra, der Elemente der Topologie, vielleicht auch der Gruppen von geometrischen Abbildungen und der Graphentheorie. Sehr oft handelt es sich um Mathematikgebiete mit großen Theorien, aber relativ geringen Möglichkeiten für anregende Aufgaben. Dagegen steht die kombinatorische Geometrie, die aus der euklidischen Geometrie herauswächst, in einem Gegenpol. Ihre Bedeutung für die Rekonstruktion des Geometrieunterrichts ist bisher noch nicht richtig bewertet worden.

SHORT STATEMENT FROM THE IRISH DELEGATION TO THE BIELEFELD CONFERENCE ON THE TEACHING OF GEOMETRY

Chairman,

I am glad of this opportunity to pay a well earned tribute to you and to your Committee for the splendid way in which this conference was organised. We have learned much from the formal lectures and from the working groups and in the course of the past few days we have met people who have contributed to our knowledge of Mathematics in general and to our knowledge of geometry in particular. Now at the end of the conference we can perceive and understand more fully the "problem strategy" and we can see more clearly that "Visual Mathematics" is a powerful pedagogical tool.

The problem of the "why" and the "how" of axioms, definitions and theorems is still with us but we feel that the strategy adopted in our Irish syllabus is the correct one. For although we have a "build up" through axioms and definitions, the teaching aims to motivate by intuition and by problems. The seeds of geometrical thinking are sown in the first two years. The crop of well known Euclidean theorems are reaped in the third. And the concepts of sets and functions used both in Algebra and Geometry are powerful unifying factors.

The Syllabus ist the results of two years' work by a committee of nine people representative of the teaching bodies and of the Department of Education. The committee spent another year on the preparation of a sample examination paper. In arriving at a consensus, the committee studies many methods, including the I.M.U. method used in Sweden and it *took into consideration* the recommendations of various reports, in particular:

The Teaching of Geometry at the Pre-College Level

(Proceedings of the 2nd. C.S.M.P. Conference at Carbondale Illinois in 1970 - Edited by H. G. Steiner)

Lectures on Modern Teaching of Geometry and related topics

(I.C.M.I. seminar in Aarhus 1960).

New Trends in Mathematics Teaching

(U.N.E.S.C.O.), Vol. I (1966), Vol II (1970).

Curriculum Improvement and Educational Development

(O.E.C.D. 1966)

Texts, using many colours, have been written to suit the syllabus and T.V. programmes on the material are available during the school hours.

No syllabus to-day should remain static for very long and in Ireland a review is carried out every five years. As a result of this conference in Bielefeld we hope to suggest some improvements when the next review takes place.

Generally speaking I am happy about what has been achieved at this conference. I feel, however, that three areas have not been adequately touched upon - topology, probability and operations research - which have many applications to geometry.

Any course in elementary geometry should, I feel, begin with the topological ideas of arc, curve, closed curve, simple closed curve, inside, outside and should use the Königsberg bridge problem as a motivation for even and odd nodes. Children (and teachers also) are always facinated by unsolved problems and there is none more easy to formulate than the Four Colour Problems.

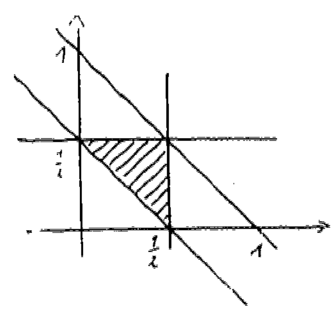
Probability and its applications have a greater importance to-day than ever before and many problems are best articulated and solved by means of geometry.

At a recent International Conference in Scotland on the teaching of Computers much was made of the following problem as an ideal computer orientated test:

> "A glass rod falls and breaks into three parts. What is the probability that the three parts form a triangle"?

When viewed from a geometrical viewpoint, the solution is obvious. Lt the three parts have lengths x, y and $\ell - (x + y)$. Then

$$x > 0, \quad y > 0$$
$$x + y < 1$$
$$x + y > \frac{1}{2}$$
$$y > \frac{1}{2}$$
$$x > \frac{1}{2}$$



Since the ratio
area of shaded : area of feasible = 1 : 4,
the required probability is $\frac{1}{4}$.

A standard problem in Operations Research (O.R.) is one of maximizing or minimizing a linear function under given linear constraints. The resulting linear programming (L.P.) problem is solved by the Simplex method and this method makes great use of the theory of vector spaces particularly that of Basis.

These three areas combining as they do the visual and the problem strategy serve as unifying elements in the overall "axiomatic" approach to our syllabus.

Thank You.

AKTUELLE PROBLEME DES GEOMETRIEUNTERRICHTS. DISKUSSIONSPUNKTE WÄHREND DER BIELEFELDER GEOMETRIE-TAGUNG.

H.G. Steiner und B. Winkelmann, IDM Bielefeld

Den auf der Tagung gehaltenen Vorträgen folgten Diskussionen in einzelnen Gruppen, Berichte der Diskussionsleiter im Plenum und anschließende Plenumsdiskussionen. Am Ende der Tagung fand ein längeres gemeinsames Gespräch statt. Den folgenden Ausführungen, die sich auf einige Schwerpunkte konzentrieren, liegen Protokolle über die verschiedenen Diskussionen zugrunde. An dieser Stelle sei den Diskussionsleitern aus dem Kreis der Teilnehmer und den Protokollanten aus dem IDM vielmals gedankt.

0. Einige Vorbemerkungen zur Gesamtentwicklung

Versucht man einen Vergleich mit früheren internationalen Tagungen zum Geometrieunterricht (Aarhus 1960, Carbondale 1970), so zeigt sich in der Bielefelder Tagung insgesamt eine Akzentverschiebung von den inhaltlichen Fragen, insbesondere der Darlegung mathematischer Alternativen, zur Problematik der Rechtfertigung bestimmter Stoffauswahlen, zur stärkeren Berücksichtigung der psychologischen und pädagogischen Aspekte, zur Frage nach neuen Organisationsprinzipien, nach denen geometrische Anschauung, Anwendungen und Problemlösen stärker zur Geltung kommen können.
Der Fragenkatalog, der 1970 vor der Carbondale-Tagung an die Teilnehmer verschickt wurde, enthielt folgende Punkte:

(1) Einführung in die Geometrie in den ersten Schuljahren: topologische Aspekte; Behandlung räumlicher vor ebener Geometrie; experimentell-empirische Einstellung zur Geometrie; Vorbereitungen zur Abbildungsgeometrie; Symmetriephänomene.
(2) Geometrie für die Mittelstufe: Rolle der affinen

Geometrie; Übergang von einer experimentellen zur theoretisch-deduktiven Einstellung; die Rolle der Mathematisierung; die Behandlung der Begriffe Ordnung und Orientierung; Möglichkeiten zur Einführung des Winkelbegriffs; Zusammenhang zwischen Geometrie und Zahlen (Algebraisierung); gruppentheoretische Aspekte der Geometrie; Kongruenz; Ähnlichkeit; geometrische Konstruktionen; Maßgrößen wie Länge, Winkelmaß, Flächeninhalt, Volumen.

(3) Geometrie auf der Oberstufe: Aufbau der Geometrie von der linearen Algebra aus; Koordinatengeometrie; lineare Abbildungen; Bilinearformen und Kegelschnitte; die orthogonale Gruppe; Einordnung der Trigonometrie; projektive Geometrie; nicht-euklidische Geometrie; konvexe Mengen; kombinatorische Geometrie; topologische Aspekte der Geometrie; Anwendungen der Geometrie; die Verwendung der geometrischen Sprache in anderen mathematischen Gebieten.

Hinter diesem breiten Stoff- und Darstellungsspektrum standen die Bemühungen der Didaktik der Mathematik, die in der mathematischen Wissenschaft vorangegangenen Entwicklungen für die Niveaus des Unterrichts zu verarbeiten. Es handelt sich dabei vor allem um folgende Hauptthemen:

(a) Die Auffassung der Topologie als einer sehr allgemeinen Form von Geometrie und ihre Verwendung als Explorations- und Experimentalfeld für geometrische Komponenten des Grundschulunterrichts.

(b) Die Rolle der Abbildungen und Abbildungsgruppen zum Verständnis geometrischer Relationen wie Kongruenz, Ähnlichkeit, affine und projektive Verwandtschaft, ihre frühzeitige Vorbereitung und Berücksichtigung schon vom Grundschulunterricht an und ihre Stellung bei einem synthetischen Aufbau der Geometrie im Unterricht der Mittelstufe.

(c) Die Möglichkeit des Aufbaus der euklidischen (affinen und projektiven) Geometrie auf der Grundlage des Vektorraumbegriffs und der linearen Algebra sowohl als Alternativkonzept zur synthetischen Geometrie auf der Mittelstufe wie als moderne Weiterentwicklung der analytischen (Koordinaten-) Geometrie der Oberstufe.

Als entscheidender Vertreter einer kompromißlosen Realisierung von (c) meinte Jean Dieudonné mit seinem Verdikt "A bas Euclide" die Ablehnung aller Bemühungen, synthetische Geometrie ohne unmittelbare Verwendung der Zahlen an irgendeiner Stelle des Schulunterrichts systematisch zu behandeln[1]. Nach Kenntnisnahme der obigen Stichwortsammlung für die Carbondale-Tagung sagte er seine Teilnahme mit dem Hinweis ab, er könne an einer Tagung nicht teilnehmen, auf der andere Alternativen auch nur in Erwägung gezogen würden.

Hinsichtlich der Stellung der Geometrie im Unterricht der Oberstufe (Sekundarstufe II) stehen die Lehrpläne und Lehrbücher in der BRD gegenwärtig in gewisser Übereinstimmung mit den Forderungen Dieudonnés. Sie haben sich im Bereich Analytische Geometrie den Anfängervorlesungen an den Universitäten zur Linearen Algebra angepaßt und stellen häufig Miniaturen davon dar, die neuerdings zunehmend als mathematisch und pädagogisch unbefriedigend angesehen werden.
In der didaktischen Literatur sind zahlreiche Versuche veröffentlicht worden, einen Übergang von einer in der Mittelstufe zunächst ohne Verwendung der Zahlen angesetzten Geometrie zum reellen Vektorraum und zur linearen Algebra herzustellen, wobei die Konstruktion der reellen Zahlen mit verschiedenen Variationen nach dem Vorbild von E. Artins "Geometric Algebra" als Automorphismenring der Vektorgruppe im Verlauf des Aufbaus der Geometrie erfolgt[2]. G. Papy beschritt in "Mathématique Moderne 2: Nombres Réels et Vectoriel Plan"

1) Siehe hierzu auch J. Dieudonné: Geometrie in den Gymnasien und in der modernen mathematischen Forschung ("Die Fehlgriffe von v. Staudt" oder "Vom unheilvollen Einfluß philosophischer a priori Ideen auf die Mathematik"), Vortrag in Braunschweig 1966, vervielfältigt beim Westermann Verlag, Braunschweig.
2) Siehe hierzu etwa: a) A. Kirsch u. F. Zech: Affine Geometrie der Ebene. Stuttgart 1972. b) H.G. Steiner: Grundlagen und Aufbau der Geometrie in didaktischer Sicht. Münster 1966

(1965) als einer der ersten einen für den Unterricht ausgearbeiteten Weg in dieser Richtung, der mit einigen Abweichungen im wesentlichen auch von W. Servais in seinem in diesem Heft abgedruckten Beitrag dargestellt wird. Entsprechende Vorschläge sind in der BRD auf dem Schulbuchniveau bisher nicht umgesetzt worden, und es dürfte hier wohl allgemein Skepsis gegenüber einer angemessenen unterrichtlichen Realisierbarkeit bestehen.
Demgegenüber haben in der BRD in den letzten 15 Jahren außerordentlich starke Bemühungen vorgeherrscht, eine Axiomatik in den Lehrbüchern der Mittelstufe zu entwickeln, die die Euklid-Hilbertschen Kongruenzaxiome durch Abbildungsaxiome, häufig ausgehend von den Geradenspiegelungen, ersetzt. Soweit damit globale Axiomatisierungsansprüche verbunden sind, dürfte auch hier das grundsätzliche Problem, beim Schüler ein den gesamten Aufbau durchhaltendes Interesse und Verständnis für die unumgänglichen Systemfragen neben den inhaltlichen Aussagen zu erreichen und zugleich andere Aspekte der Geometrie zu entfalten, unüberwindbar sein[3]. Über die entsprechenden negativen Erfahrungen scheint sich allmählich ein Konsensus herauszubilden.

Die Einbeziehung topologischer Materialien, Übungen und Problemstellungen in den Unterricht der Grundschule und die geometrische Propädeutik der Orientierungsstufe (5. und 6. Schuljahr) hat neue Dimensionen für den elementaren Unterricht eröffnet[4]. Faßt man Geometrie in einem weiteren Sinne als durch Topologie ergänzte Gesamtheit auf, so werden durch entsprechend angelegte Lernangebote sicher die geometrischen Fähigkeiten insgesamt gefördert, was durch Untersuchungen

3) Hierzu: a) H.G.Steiner: Analyse von Lehrbüchern der Geometrie für die Mittelstufe der Gymnasien. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1/197o, pp. 11-15. b) G.Holland: Voschläge zur Entwicklung eines Curriculums für den Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I. Beiträge zum Mathematikunterricht 1972, Teil 1, pp. 1o3-118.

4) Siehe etwa: H.Winter: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. Der Mathematikunterricht 17 (1971), Heft 5 und die dort angegebene Literatur.

belegt wurde[5]. Eine offene Frage ist die Weiterführung der topologischen Anteile im fortgesetzten Unterricht, wozu bisher kaum Möglichkeiten der Vertiefung und Systematisierung erörtert wurden. Eine andere Frage ist die Auswirkung einer frühen Beschäftigung mit topologischen Sachverhalten auf die Entwicklung der Fähigkeiten in den nichttopologischen Anteilen der Geometrie. Diese scheint verhältnismäßig gering zu sein, während von den kombinatorischen Komponenten solcher Bestandteile der Topologie wie der Äquivalenz von Netzen, Wegen in Netzen, Färbungsproblemen, Graphen usw. eher eine Förderung der Rechenfähigkeit zu resultieren scheint[6].

1. *Geometrie in der Grundschule* (6-12jährige)

Mit diesem Gegenstand beschäftigte sich eine Arbeitsgruppe. Die Diskussion erbrachte zunächst eine Bestandsaufnahme des Geometrieunterrichts in der Grundschule der BRD. Die vorfindbaren Lehrgänge unterscheiden sich sehr stark in der Auswahl und Quantität der Inhalte. Das Kontinuum erstreckt sich von Kursen, die fast keine Geometrie beinhalten, bis hin zu Kursen, nach denen sehr viele Aspekte der Geometrie behandelt werden, wie:

- o Kennenlernen einer Vielzahl geometrischer Formen und ihrer Eigenschaften;
- o Abbildungsgeometrie, speziell kongruente Abbildungen;
- o Vorbereitung des Flächeninhaltsbegriffs;
- o Eine Reihe geometrischer Probleme, die unter topologischen und kombinatorischen Gesichtspunkten behandelt werden;
- o Anfänge der Körpergeometrie.

5) Siehe etwa: H. Wallrabenstein: Unterrichtsversuche zur Topologie im 5. und 6. Schuljahr. Beiträge zum Mathematikunterricht 1971. Hannover 1972, pp. 25o-264.

6) Siehe hierzu: I. Weidig: Topologie als geometrische Propädeutik? Beiträge zum Mathematikunterricht 1975. Hannover 1975, pp. 2o7-211.

Es wurde deutlich, daß eine Liste mathematischer Begriffe nicht das repräsentiert, was sich im Geometrieunterricht der Grundschule abspielt. Die von den Kindern gesammelten Umgangserfahrungen sind zunächst von anderer Art als sich in der geometrischen Begrifflichkeit niederschlägt. Sie bildet den Zielhorizont, sagt aber nichts über die Stadien der Begriffsgenese aus.
Im Vordergrund der Diskussion stand die Frage nach dem "Warum". Was sind die Grundvorstellungen, auf die hin man Geometrie in der Grundschule ausrichten sollte? Dabei wurden die folgenden, z.T. divergenten Thesen formuliert:

1. Geometrie in der Grundschule ist als eine Vorstufe bzw. Präfiguration der Geometrie in der Sekundarstufe anzusehen.
2. Geometrie in der Grundschule sollte der Förderung der kindlichen Persönlichkeit dienen.
3. Das Hauptziel des Geometrieunterrichts in der Grundschule liegt im Explizitmachen von Umweltsituationen unter geometrischen Gesichtspunkten. Das beinhaltet:
   a) Anknüpfen an unmittelbare, konkrete Erfahrungen;
   b) Explizitmachen von Strukturen, wo sie realiter vorfindbar sind;
   c) Anfänge von Geometrie unterhalb der mathematischen Sprache;
   d) Klärung von Strukturen im Hinblick auf ihre spätere Verwendbarkeit.
4) Geometrie in der Grundschule sollte aus motivationalen Gründen von Anwendungsfällen ausgehen, in denen sich geometrische Strukturen besonders eignen, Probleme zu lösen.
5) Hauptaufgabe des Geometrieunterrichts in der Grundschule ist die Entwicklung der Raumanschauung, oder allgemein des Operierens bzw. Denkens in geometrischen Grundvorstellungen.

Aus den Beiträgen wurde deutlich, daß über Legitimation und Ziele einer Geometrie in der Grundschule kein Konsens besteht.

Von einigen Teilnehmern wurde bemängelt, daß man den Bereich "Geometrie in der Grundschule" bereits mit Inhalten zu füllen versucht, ehe eine Diskussion möglicher Ziele bzw. Qualifikationen stattgefunden hat.

2. *Geometrie in der Sekundarstufe* (13-19jährige)

Auch dieses Thema war Gegenstand der Diskussion einer Arbeitsgruppe.
Bezüglich der *Sekundarstufe* I wurde von der Problematik der Organisation und Systematisierung der Geometrie auf dieser Stufe ausgegangen. Als dominierender Gesichtspunkt hat hier in vielen Ländern der Übergang zum *axiomatischen Aufbau* gegolten. Vorbild war die Geschichte und die Philosophie der synthetischen Geometrie als strenger Wissenschaft von Plato und Euklid bis Hilbert. Gegenüber einer empirisch-anschaulichen Propädeutik wird dabei die Strenge des Aufbaus nach Axiomen, Definitionen, Sätzen und Beweisen dem Schüler explizit als neues Prinzip deutlich zu machen versucht. Dies ist im allgemeinen verbunden mit dem Anspruch der Vollständigkeit, also einem globalen Axiomatisierungsprogramm für die euklidische Geometrie. Die Objekte der Erfahrung und Anschauung werden dabei als für dieses Vorhaben ungeeignete Vorgaben angesehen. Sie bedürfen im Sinne einer platonisch-idealistischen Philosophie der Idealisierung zu idealen Punkten, Geraden, Ebenen usw. Die Axiome sind nicht Konventionen, sondern beschreiben die Verhältnisse in dieser Welt der reinen Anschauung, auf die sich das Ethos der Geometrie als strenger Wissenschaft bezieht. Viele Lehrbücher für die Geometrie der Mittelstufe beginnen noch heute ihre Einleitungskapitel in diesem Geiste.

In der Diskussion herrschte Einigkeit darüber, daß diese Position methodologisch überholt und in ihren Ansprüchen unterrichtlich nicht zu verwirklichen sei. An die Stelle der Geometrie als Wissenschaft idealer Objekte könne auch für den globalen Ansatz der Aspekt der *mathematischen Modellbildung* treten.

Das globale Programm wird in den Büchern de facto nach wenigen Seiten aufgegeben. Komponenten wie Inzidenz und Ordnung werden häufig überhaupt nicht oder nur unzulänglich behandelt, und bei den Definitionen und Sätzen treten Lükken oder unmittelbare axiomatisch nicht verankerte Rückgriffe auf die Anschauung auf.
Bemühungen um einen axiomatischen Aufbau erfordern ständig explizite Bezugnahmen auf das *entwickelte System*, also den Bestand der bisher formulierten Axiome, Definitionen und Sätze sowie der Beweise als Systembestandteile. In Verbindung mit der anschaulich-empirischen Geltungsebene stellt das einen fortwährenden Wechsel der Betrachtungsebenen dar. Bei einem globalen Programm bedeuten beide Anforderungen eine Überschreitung der Motivierbarkeit und Möglichkeiten der Schüler der entsprechenden Altersstufe.
Die Systemorientiertheit hat zudem einengende Auswirkungen auf die Auswahl und Bearbeitung von Problemen und Anwendungen, die in ihrer Ursprünglichkeit häufig anderes Hintergrundwissen, andere Methoden und Vorstellungen aktualisieren, als sie nach dem Stand der Systementwicklung und in der Systemgebundenheit zur Verfügung stehen. Auf dieser Basis bestand bei den Diskussionsteilnehmern Einigkeit darüber, daß die in der Didaktik der Mathematik in den letzten Jahren betriebene *Suche nach dem besten Axiomensystem* für den Geometrieunterricht der Mittelstufe nur graduelle Unterschiede bewirken kann und als prinzipielles Problem falsch gestellt ist. Wohl aber haben diese Untersuchungen zur Aufhellung von Zusammenhängen beigetragen, deren Beherrschung zur mathematischen Ortsbestimmung der jeweiligen unterrichtlichen Situationen für den Lehrer von größter Bedeutung ist.

Gegenüber der globalen Systemorientiertheit bietet die *lokale Organisation* der für die Lösung bestimmter Probleme oder das Verständnis bestimmter Phänomene erforderlichen Zusammenhänge einer Alternative, die im Prinzip im Geometrieunterricht nicht neu ist, jedoch einer stärkeren methodologischen und

didaktischen Entfaltung bedarf. Insbesondere wurde in dieser Hinsicht auf die frühzeitige Verbindung von Geometrie und Algebra hingewiesen, die den Spielraum der Methoden zur lokalen Organisation erheblich erweitere. Es wurde die Frage diskutiert, nach welchen Gesichtspunkten Bereiche der Geometrie, Probleme und Anwendungsgebiete für eine lokale Organisation ausgewählt werden sollen.
Grundsätzlich sind zwei Arten von lokaler Organisation zu unterscheiden. Die eine ist gleichsam vertikal; sie führt zu Abstraktionen wie Inzidenzstrukturen oder einem allgemeinen Abstandsbegriff (metrische Räume). Sie wird beherrscht durch kleine, *nicht-kategorische Axiomensysteme*. Die andere ist gleichsam horizontal. Sie stellt ein partielles *logisches Ordnen* dar ohne Änderung der begrifflichen bzw. ontologischen Ebene. Für den Unterricht der Mittelstufe kommt in erster Linie die lokale Organisation der zweiten Art in Frage. Kleine Versuche in Richtung der ersten Art können jedoch dazu dienen, die zum Verständnis der Geometrie als deduktiver Wissenschaft notwendigen Lösungen von den ontologischen Bindungen vorzubereiten.

An dieser Stelle sei auf einen Diskussionspunkt hingewiesen, der durch den Vortrag von W. Servais aufgeworfen und mehrfach bei verschiedenen Gelegenheiten angesprochen wurde. Er betrifft die Auffassung der *Geraden als Punktmengen*, wie sie von Servais auch unter Zulassung endlicher Geometrien für die Sekundarstufe I vorgetragen wurde.
Er wurde gefragt, ob die Kinder hier nicht zu einer Auffassung überredet würden, die sie als fremd zu ihren anschaulichen Vorstellungen empfinden und die Ihnen unnatürliche Redeweisen abverlangt, deren Einübung den Akzent des Unterrichts ungebührlich auf formale Nebensächlichkeiten verlagert. In der mengentheoretischen Beschreibung weiterer Objekte wie Streckenzüge, Winkel usw. träten dann die Hindernisse einer verfrühten Explizitheit besonders in Erscheinung. Es wurde darauf hingewiesen, daß man es bei einer solchen Auffassung in der Geometrie plötzlich mit Mengen von Mengen zu tun hat,

während man vorher nur aus einer Grundmenge ausgesondert habe.
Obwohl zu jedem Modell einer mit drei (oder zwei) Sorten von Grundobjekten (Punkte, Geraden, Ebenen) dargestellten Inzidenzgeometrie ein isomorphes mengentheoretisches Modell existiere, sei es auch für manche Interpretationen nützlich, Geraden (und Ebenen) nicht als Punktmengen aufzufassen.

Für dem Unterricht wurde von einigen Diskussionsteilnehmern eine allmähliche Einführung und gelegentliche, aber keineswegs dominierende Mengensprech- und -schreibweise vorgeschlagen. Falls auf geometrische Objekte Abbildungen angewendet würden, sei es sinnvoll, die Objekte als Punktmengen aufzufassen. Zunächst sei jedoch der kindlichen Auffassung gemäß davon auszugehen, daß auf jeder Geraden unendlich viele Punkte liegen, wobei der Standpunkt des potentiell Unendlichen angemessen sei.

Sodann wurde auf die Gefahr einer zu frühen lokalen Systematisierung und der Dominanz der kleinen Theorien, etwa die systematische Behandlung der euklidischen Bewegungsgruppe als theoretischer Rahmen für Symmetrieprobleme, hingewiesen. Dahinter stand die Frage nach den *Qualifikationen* , die beim Schüler im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I entwickelt werden sollen. Hervorgehoben wurden Fähigkeiten, wie sie zur Lösung von Problemen aus der kombinatorischen Geometrie erforderlich sein. Sie erlauben die Entwicklung geometrischer Intuition und geometrischer Sprache ohne sogleich auf logische Organisation zu drängen. Geometrie ist hier Medium der Mathematik und nicht in erster Linie Reflexionsgegenstand. Vermutlich kommt diese Auffassung dem heutigen Verständnis von Geometrie im Rahmen der Gesamtmathematik am nächsten.

Hinsichtlich der *Sekundarstufe II* bedauerten einige Diskussionsteilnehmer, daß mit der Betonung der *Linearen Algebra* häufig wesentliche Komponenten der Geometrie verdrängt würden: Lineare Algebra sei kein Surrogat für Geometrie. Um im Rahmen der linearen Algebra geometrische Interpretationen bewerkstelligen zu können, müsse man erst einmal geometrisch zu denken gelernt haben.

Andererseits erlaube jedoch die Verwendung der linearen Algebra in verschiedenen Teilen der Mathematik partiell die Übertragung geometrischen Denkens in andere mathematische Gebiete, wofür die Funktionalanalysis, in der Begriffe wie Linearität, Abstand, Konvexität, Fixpunkt usw. vorkommen, ein Musterbeispiel sei.

Bei der Behandlung der Geometrie in der Sekundarstufe II auf der Grundlage des im Mittelstufenunterrichts vorbereiteten Begriffs des zwei- bzw. drei-dimensionalen reellen Vektorraums ergeben sich u.a. Probleme bei der Einführung der Norm und des Skalarprodukts, falls man nicht gleich auf die koordinatengebundenen Standarddefinitionen abzielt. In diesem Zusammenhang wurde von einigen Diskussionsteilnehmern für die vom Skalarprodukt unabhängige Behandlung der verschiedenen Möglichkeiten, eine Norm einzuführen, und damit für die Behandlung der *Minkowski-Geometrien*, die interessante Anwendungen besitzen, plädiert.
Eine globale synthetische Behandlung der euklidischen Geometrie auf dieser Stufe fand keine Unterstützung. Anstatt die euklidische Geometrie als in einem kategorischen Axiomensystem dargestellten Monolithen anzusehen, solle man besser bestimmte Aspekte wie lineare Strukturen, Inzidenzstrukturen, Abstandsstrukturen, abheben und mit ihrer Hilfe geometrisches Denken universeller verfügbar machen. In diesem Zusammenhang wurden auch *endliche Modelle*, wie sie etwa in der Kodierungstheorie auftreten, als interessante aktuelle Anwendungsbereiche genannt.

3. *Geometrie in der Ausbildung der Lehrer*

Die Diskussion zu diesem Thema konzentrierte sich auf zwei Hauptfragen:

a) Welche fachlichen Voraussetzungen benötigt der künftige Lehrer, um erfolgreich Geometrie lehren zu können?
b) Wie kann die fachliche mit der didaktischen Ausbildung verbunden werden?

Im Zusammenhang mit der ersten Frage wurde übereinstimmend festgestellt, daß die Geometrie im Lehrangebot der Universitäten zu stark vernachlässigt würde und die fachlichen Voraussetzungen für die Lehrer im allgemeinen nicht gewährleistet seien. Insbesondere fehle es den Lehrern an Kenntnissen und Übung in der klassischen Geometrie. Eine Wiederbelebung der euklidischen Geometrie des Anschauungsraumes, etwa in Verbindung mit darstellender Geometrie, sei notwendig. Als unbedingt erforderlich wurden Kurse angesehen, die die wissenschaftlichen Grundlagen der Schulgeometrie behandeln. Dazu müßten aber auch Einblicke in die Topologie und die algebraische Geometrie als gegenwärtig wichtige moderne Forschungsgebiete mit geometrischen Problemen und Methoden treten.

Das Verfügen über inhaltliche Kenntnisse wurde jedoch als nicht allein ausschlaggebend angesehen. Besonders der Mathematiklehrer müsse Erfahrung im Problemlösen und der vielfältigen Verwendung geometrischer Methoden besitzen.

Gerade wegen der Schwierigkeiten, aus dem systematischen Lehrangebot der Mathematik für den Geometrieunterricht geeignete Voraussetzungen beim Lehrer zu schaffen, wurde die Entwicklung didaktisch orientierter Geometriekurse an den Universitäten als geeignete Form der Verbindung von fachlicher und unterrichtsbezogener Ausbildung empfohlen.

4. Probleme, Methoden, Systeme

Problemorientiertheit und Problemlösen waren Gegenstände insbesondere der Vorträge von R. Stowasser, T. Fletcher und

G. Glaeser und der anschließenden Diskussionen.
In der Diskussion des Vortrags von R. Stowasser wurde sogleich eine Reihe von Fragen aufgeworfen:

- o Erkennt der Schüler hinter den Problemen die allgemeinen Zusammenhänge?
- o Lernt er von isolierten Problemen aus allgemeinere Lösungsmethoden kennen?
- o Lernt er Lösungsstrategien, die er auf andere Probleme transferieren kann?
- o Welchen Realitätsbezug haben die ausgewählten Problembeispiele und wie wichtig ist der Realitätsbezug?
- o Sollten Probleme vor allem Zugänge zu geometrischen Themen eröffnen oder auch im weiteren Unterricht ein stärkeres Gewicht haben?
- o In welchem Verhältnis sollen einzelne Probleme zu explizit gelehrten Methoden und zur Systematik im Aufbau des Unterrichts stehen?
- o Nach welchen Gesichtspunkten sollen Problemfelder strukturiert werden?
- o Ist ein stark problemorientierter Unterricht für manche Schüler nicht zu schwierig?

In der Erörterung dieser Fragen wurde betont, daß der problemorientierte Unterricht *verschiedene Aspekte* besitze, die alle einseitig überbetont werden könnten. Es käme jedoch auf eine ausgewogene Berücksichtigung der Aspekte an. Als wichtig wurde angesehen, daß der Schüler nicht nur Probleme vorgesetzt bekommt, sondern lernt, sich selbst Probleme zu stellen. Dazu kann insbesondere die Nachbereitung eines gelösten Problems dienen, in der nach ähnlichen Problemen, Verallgemeinerungsmöglichkeiten usw. gefragt wird. Ferner kann die Bearbeitung eines Problems, bei der Schwierigkeiten auftreten, sinnvoll zur Variation des Problems führen. Sodann sollten im Unterricht Problemfelder und offene Probleme bereitgestellt werden, aus denen ein Schüler sich Einzelprobleme zur Bearbeitung aussuchen könne.
Der *Realitätsbezug* von Problemen wurde vor allem unter dem

Gesichtspunkt des Realitätssinns der Schüler und der motivierenden Funktion der Realitätsbezogenheit diskutiert. Oft seien skurrile Einkleidungen, die die Phantasie ansprechen, besonders anregend für Schüler. Das gelte aber auch für Wissenschaftler. Die Geschichte der Wissenschaft zeige, daß der Realitätsbegriff komplex sei und daß oft unerwartete Modelle zur Beschreibung der Wirklichkeit geeignet seien. Andererseits seien viele stark realitätsbezogene, einfach zu stellende Probleme außerordentlich schwierig und auch in der Wissenschaft nicht gelöst.
Um den unterschiedlichen Interessen und Begabungen der Schüler entgegen zu kommen, wurde empfohlen, Einseitigkeiten in der Auswahl der Probleme und der geeigneten Methoden zu vermeiden und eine Vielfalt von Methoden zu entwickeln und zuzulassen.
Im Zusammenhang mit dem Vortrag von G. Glaeser wurde die *Konkretisierung mathematischer Strukturen* durch Situationsmodelle, Spiele usw., in deren Kontext dann Probleme formuliert werden, erörtert. Als Argument für die Verwendung solcher Konkretisierungen wurde u.a. angeführt, daß dadurch wohldefinierte mathematische Fragestellungen geschaffen würden, die unmittelbar zu mathematischer Argumentation führen und typisch mathematisches Denken fördern. Die Situationen aus der natürlichen Umwelt seien dazu im allgemeinen zu komplex. Andererseits wurde geltend gemacht, daß häufig übersehen würde, daß bei den Kindern doch Sekundärmerkmale der Konkretisierungen und Repräsentierungen eine primäre Bewertung erfahren und daß die gewünschten Begriffsbildungen und Erfahrungen individuell nicht nach den Zielvorstellungen des Lehrers verlaufen, was zu erheblichen Lernschwierigkeiten bei einzelnen Kindern führen könne.

In der Diskussion zum Vortrag von T. Fletcher wurde die Auffassung vertreten, daß es nicht die *Aufgabe des Unterrichts* sei, die Schüler im Problemlösen auszubilden. Man könne in einer allgemeinbildenden Schule nicht erwarten, daß alle Schüler für mathematische Probleme wie ein Mathematiker aufgeschlossen

seien. Vielmehr sei es Aufgabe der Schule, durch die Möglichkeit der eigenen Erfahrung und Teilhabe dem Schüler deutlich zu machen, daß Mathematiker Probleme lösen und daß Mathematik, insbesondere Geometrie, von verschiedenen Leuten verwendet wird, z.B. von Architekten.
Zur Frage der Stellung der Probleme im Unterricht wurden noch vier als grundsätzlich bedeutsam angesehene Punkte festgehalten:

1. Es ist wichtiger, ein Problem mit drei Methoden zu lösen als umgekehrt.
2. Die Aneignung von Techniken ist notwendig, da Problemlösen Kenntnisse und Methoden erfordert.
3. Der Schüler muß lernen, Fragen zu stellen; eine Fixierung auf das Lösen vorgegebener Probleme wäre einseitig.
4. Ein angemessener problemorientierter Unterricht erfordert hohe Flexibilität des Lehrers. Er muß individuelle Ansätze und Möglichkeiten bei den Schülern erkennen und fördern und Schwierigkeiten und Fehler analysieren können.

Das Verhältnis von Problemen, Methoden und Systematik wurde insgesamt als außerordentlich kompliziert angesehen und nur in einigen Ansätzen diskutiert. Es wurde festgestellt, daß hier große Entwicklungs- und Forschungsaufgaben der Mathematikdidaktik liegen.

5. *Darstellende Geometrie*

Ausgangspunkt der Diskussion bildete die Feststellung, daß es bedauerlich sei, wenn heute die meisten Studenten ein Mathematikstudium ohne Kenntnis der räumlichen bzw. darstellenden Geometrie (DG) abschließen. Als Zielgruppen einer verstärkten Behandlung von Modellen aus der DG wurden angesehen:

1. Studierende des Faches Mathematik
2. Lehramtstudenten mit der Fachrichtung Mathematik

Die zweite Zielgruppe ist in Verbindung mit der Forderung zu sehen, daß DG in die Mathematikcurricula aller Schulstufen aufgenommen werden sollte. Als Begründung für diese Forderungen wurden angeführt:

- DG ist während des Studiums im Zusammenhang mit anderen mathematischen Teilbereichen (z.B. Analysis, analytische Geometrie) von Interesse und Bedeutung. Sie sollte nach der linearen Algebra angeboten werden.
- Aktivitäten bzw. Methoden der DG bieten Zugänge zu interessanten und aktuellen Teilbereichen der Mathematik.
- Elemente der DG sind Bestandteile einer allgemeinen Bildung.

Die Diskussion über die didaktische Umsetzung in der Schule brachte folgende Thesen:

1. DG sollte nicht additiv, sondern integriert und mit verstärktem Anwendungscharakter angeboten werden.
2. Elementare Teile der DG sollten für alle Schüler, auch auf der Primarstufe, verbindlich sein. Dabei kann die Theorie zunächst zurückgestellt werden. Zu einem späteren Zeitpunkt müßten allerdings einzelne Begriffe expliziert werden.
3. Die sich anbietenden Verbindungen zu anderen Schulfächern (z.B. Geographie, Arbeitslehre) sollten ausgenutzt werden.

Als ein möglicher Ausgangspunkt für Betrachtungen im Sinne der DG kann das Lesen und Erstellen von technischen Zeichnungen bzw. Landkarten angesehen werden. Zu einem sehr viel späteren Zeitpunkt könnten perspektivisches Zeichnen oder das Analysieren perspektivischer Verzerrungen Themen von Arbeitsgemeinschaften sein.
Als gegenwärtige Probleme wurden formuliert:

- DG wird in den derzeit gültigen Lehrplänen nicht oder nur am Rande erwähnt.
- DG steht in den Lehrbüchern isoliert und wird in der Regel nicht bearbeitet.

Als Einschränkungen für die Zukunft erbrachte die Diskussion:

- Es darf nicht wieder zu einer Systematisierung der DG kommen.

o Was soll in der fachlichen Lehrerausbildung zugunsten der DG gekürzt werden?

6. *Visuelle Mathematik*

Die Ausführungen A. Bishops zu diesem Thema fanden teilweise starken Anklang, riefen aber auch eine Reihe kritischer Reaktionen hervor.
Unterstützt wurde die Thematisierung eines erweiterten Verständnisses geometrischer Anschauung im Sinne von visueller Mathematik, die in vielen Aktivitäten und Darstellungsweisen der Mathematik zum Ausdruck kommt. Insbesondere wurde auf die Rolle der *Diagramme* der verschiedensten Art hingewiesen, deren Berücksichtigung Bishop aus seinen Betrachtungen ausgeschlossen hatte.
Bestätigt wurde, daß der übliche Unterricht die Entwicklung visueller Fähigkeiten bei den Kindern stark vernachlässigt und daß hier vielversprechendes Material zur Förderung vorgelegt wird, dessen Wirkung auch unter dem Gesichtspunkt der Ausbildung *subverbaler Aktivitäten* diskutiert wurde. Besonders wurde auf positive Effekte in Untersuchungen aus den USA mit emotional gestörten Kindern hingewiesen (Marion Walter).

Andererseits wurde vor visueller Artistik gewarnt und vor Überforderungen, die den individuell unterschiedlichen Anlagen und kognitiven Stilen der Kinder nicht gerecht werden.
In Bezug auf den *Geometrieunterricht* wurde von einigen Diskussionsteilnehmern in Bishops Vorschlägen eine sinnvolle Ergänzung gesehen, nicht aber eine Alternative zum Geometrieunterricht. Es treffe nicht zu, daß der Geometrieunterricht für die Grundschule grundsätzlich falsch angelegt sei und die Kinder nicht anspreche und fördere. Es wurde auf die Gefahr hingewiesen, daß mit einer Orientierung des Unterrichts im Sinne einer Schulung visueller Fähigkeiten eine Zersplitterung in mathematisch isolierte Einzelprobleme verbunden sei.
In einer Stellungnahme wurde betont, daß die mit visueller Mathematik gemeinten Fähigkeiten und Fertigkeiten für die

mathematische Tätigkeit äußerst fruchtbar seien, daß sie allein jedoch noch nicht Mathematik ausmachten. Zur Mathematik gehörten logische Schlußfolgerungen, und diese ließen sich nicht mit den Augen und Sinnen vollziehen.

Bezüglich der *Organisation von Problemen* standen sich folgende Ansichten gegenüber:

a) Neue Probleme können im allgemeinen nur im Rückblick auf schon gelöste Probleme und die dabei verwendeten Lösungsstrategien effektiv gelöst werden.
b) Die Strukturierung nach Problemsequenzen kann die Lösung neuartiger Probleme blockieren.

7. *Weitere Diskussionspunkte*

In der abschließenden Besprechung standen neben einer Reihe von Einzelfragen noch einmal zwei grundlegende Probleme, die während der Tagung mehrfach berührt worden waren, zur Diskussion:

1. Welche *Minimalkenntnisse* in Geometrie sollte ein Schüler am Ende der Sekundarstufe I besitzen, insbesondere im Hinblick auf eine berufsbezogene weitere Ausbildung?
2. In welchem *Kontext* und mit welchen *Zielen* soll Geometrie im Unterricht entwickelt werden?

Auf keine der schwierigen Fragen konnten bündige Antworten gegeben werden. Um bessere Antworten auf die erste Frage zu finden, wurde von einigen Tagungsteilnehmern vorgeschlagen, Abnehmer und Benutzer der Mathematik in verschiedenen Berufsgruppen zu fragen. Man hätte vielleicht Vertreter solcher Berufe zur Tagung einladen sollen. Demgegenüber wurde aber auf die Schwierigkeiten hingewiesen, die mit solchen Befragungen verbunden sind, insbesondere darauf, daß die Abnehmer neue Möglichkeiten einer Verwendung von Mathematik, die sie selbst nicht kennengelernt haben, nicht übersehen.
Es wäre notwendig, daß Mathematiklehrer und Mathematikdidaktiker sich mit den Verhältnissen in den jeweiligen Berufs-

sphären und den dazugehörigen Ausbildungssituationen selbst intensiv auseinandersetzten, um ein ausgewogenes Bild eines Allgemeinbildung wie Berufsorientiertheit verbindenden Geometrielehrplans zu entwickeln.

Zur Frage der *Berufsorientiertheit* vertrat T. Fletcher die Auffassung, daß diese nicht zu eng und zu direkt gesehen werden dürfe. In der allgemeinbildenden Schule solle Mathematik so gelehrt werden, daß den Schülern deutlich würde, warum Mathematik für andere Leute Bedeutung habe (*why mathematics matters to other people*). Es komme darauf an, soviel zu vermitteln, daß mit diesen Leuten die Kommunikation über ihre Verwendung von Mathematik möglich sei. Der Mathematikunterricht müsse deshalb die *Beziehung zu den anderen Fächern* pflegen. Für die Mathematiklehrer bedeute das, daß sie sich mehr als Kollegen anderer Benutzer von Mathematik verstehen und orientieren sollten. Hier seien falsche Entwicklungen und isolierte Standpunkte in Zukunft zu überwinden.

Diese Perspektive wurde auch bei den Versuchen zur Beantwortung der zweiten Frage herangezogen, bei deren Erörterung neben dem Spielraum von Problem, Methode, System vor allem die *Entwicklung und aktive Beteiligung des lernenden Kindes im Vordergrund stand*. Bei der Zielbestimmung müsse den schichtungsspezifischen und kognitionspsychologischen Unterschieden der Kinder Rechnung getragen werden, was die Beantwortung der Frage, was optimal für viele sei, außerordentlich schwierig mache.
Einerseits wurde gefordert, daß die Kinder beziehungshaltige Mathematik kennenlernen sollten in einem sie interessierenden Kontext und mit den Möglichkeiten wesentlicher Selbsttätigkeit. Andererseits wurde aber darauf hingewiesen, daß hierzu von der wissenschaftlichen Didaktik wohl Kriterien und Material entwickelt, nicht aber die wesentlichen Entscheidungen gegenüber der Komplexität des Unterrichts vorweggenommen werden könnten, die der Lehrer in konkreten Situationen selbst zu treffen habe.

CONFERENCE PROGRAM TAGUNGSPROGRAMM

Monday, September 16, 1974

15.oo (3 p.m.) *Welcome* by the President of the FRG-Subcommittee of ICMI and by the Chairman.

15.15 *H.J. Vollrath*, Würzburg:
The Place of Geometry in the Teaching of Mathematics.
An Analysis of Recent Development.

16.3o *Working Groups*:
Geometry in the Elementary School (ages 6 – 12)
Geometry at the Secondary Level (ages 13 - 18)
The Role of Geometry in the Training of Teachers.

17.3o *Plenary Discussion*

18.15 Welcome by the Rector of the University of Bielefeld:
Professor Dr. K.P. Grotemeyer.

Tuesday, September 17, 1974

9.oo *W. Servais*, Morlanwelz:
A Comprehensive and Modern Teaching of Geometry

1o.15 *R. Stowasser*, Bielefeld:
Problemorientierte Zugänge zur Geometry.

11.3o *G. Pickert*, Giessen:
Die Bedeutung der Darstellenden Geometrie für die Mathematikausbildung.

12.3o Lunch

15.oo *Working Groups*
related to the morning sessions

16.3o *Reports* by the working groups
Plenary Discussion

Wednesday, September 18, 1974

9.oo *H. Freudenthal*, Utrecht:
Geometrie in der Grundschule

1o.15 *A. Bishop*, Cambridge:
Visual Mathematics

11.3o *S. Iyanaga,* Tokyo:
A Combined Geometry-Algebra Curriculum for Japanese Secondary Schools

12.3o Lunch

15.oo *Working Groups*
related to the morning sessions

16.3o *Reports*
Plenary Discussion

Thursday, September 19, 1974

9.oo *G. Ewald*, Bochum:
Anschauung und Axiomatik, dargestellt an einer Begründung der absoluten Geometrie.

1o.15 *T.J. Fletcher*, Darlington:
Geometrical Insight and Solution of Problems.
The Solution of Polynomial Equations.

11.3o *G. Glaeser*, Strasbourg:
Die Inzidenzgeometrie im Dienste einer progressiven und polykonkreten Pädagogik

12.3o Lunch

15.oo *Working Groups*
related to the morning sessions

16.3o *Reports* by the working groups
Plenary Discussion

17.45 Projection of films: "Minoes", "Quadrate in Quadraten", "Punktgitter", "Zahlengitter I", produced by H. Bauersfeld et al.

Friday, September 2o, 1974

9.oo *Free Statements*
Final Discussion

12.oo Lunch

14.3o *Trip by Bus* to the Externsteine, Coffee at Silberbachtal-Mühle, Walk, Dinner at Blomberg Burghotel

23.oo Return to Bielefeld

LIST OF PARTICIPANTS | TEILNEHMERVERZEICHNIS

Artmann, Benno	Darmstadt
Barner, M.	Freiburg
Bauersfeld, Heinrich	Bielefeld IDM
Baumann, Rüdeger	Lüneburg
Baumgartner, Erich	Düsseldorf
Becker, Gerhard	Bremen
Bell, A.W.	Nottingham/Großbritannien
Bergmann, A.	Düsseldorf
Bishop, A.J.	Cambridge
Blänsdorf, Klaus	Kiel
de Boer, D.	Utrecht/Niederlande
Bosman, J.N.	Utrecht IOWO/Niederlande
Brasse, Hartmut	Unna
Brolin, Hans	Uppsala/Schweden
Bucher	Brilon
Burscheid, Hans-Joachim	Wuppertal
Bussmann, Hans	Bielefeld IDM
Denneberg, Dieter	Garbsen
Dyrszlag, Zygfryd	Opole/Polen
Dzick, Eckart	Lüneburg
Ernestam, Arne	Uppsala/Schweden
Ewald, G.	Bochum
Falke, Christine	Bremen
Fischer, W.	Bremen
Fletcher, T.J.	Darlington/Großbritannien
Freudenthal, Hans	Utrecht/Niederlande
Geiss, Fritz	Moerfelden
Gilissen, L.J.M.	Odijk/Niederlande
Glaeser, Georges	Strasbourg/Frankreich
Glaser, Herbert	Schweinfurt
Greger, Karl	Göteborg/Schweden
Grotemeyer, K.P.	Bielefeld
Heink, Gisela	Berlin
Holland, Gerhard	Gießen
Infantozzi, Carlos Alberto	Montevideo/Uruguay
Iyanaga, S.	Tokio/Japan

Jäger, Dieter	Düsseldorf
Jahnke, Niels	Bielefeld IDM
O'Keefe, C.C.	Dublin/Irland
Kieffer, Lucien	Luxemburg/Luxemburg
Kinder, H.P.	Münster
Klawonn, Dagmar u. Klaus	Recklinghausen
Kleist, Gunter	Hamburg
Kliem, Uwe	Bremerhaven
Kremers, W.	Utrecht IOWO/Niederlande
Kunle, H.	Karlsruhe
Kurth, Ina	Bremen
Laugwitz, Detlef	Darmstadt
Leenders, C.P.	Utrecht IOWO/Niederlande
Löttgen, U.	Köln
Meijer, G.H.	Utrecht IOWO/Niederlande
Meißner, Hartwig	Münster
Meuer, Jürgen	Lilienthal
Meyer	Brilon
Mies, Thomas	Bielefeld IDM
Möller, H.	Münster
de Moor, E.W.A.	Utrecht IOWO/Niederlande
Moritz, Peter	Kiel
Neill, Hugh	Durham/Großbritannien
Otte, Michael	Bielefeld IDM
Pickert, Günter	Giessen
Radatz, Hendrik	Bielefeld IDM
Reinhardt, Rudolf	Berlin
Rinkens, H.-D.	Paderborn
Servais, Willy	Morlanwelz/Belgien
Siemon, Helmut	Poppenweiler
Slaby, Christoph	Grosslittgen
Soeteman, D.W.	Groningen/Niederlande
Spiegel, Hartmut	Reutlingen
Schmähling, Reiner	Düsseldorf
Schmidt, Jürgen A.	Korb
Schneider, Wiland	Münster
Schoemaker, G.	Utrecht IOWO/Niederlande
Schönbeck, Jürgen	Heidelberg
Schrage, Rosemarie	Münster

Schrick, Herbert	Münster
Schubring, Gert	Bielefeld IDM
Schumacher, Barbara	Hannover
Schumann, H.P.	Weingarten
Stachel, Hellmuth	Graz/Österreich
Steen, B.P.	Dublin/Irland
Steinbring, Heinz	Bielefeld IDM
Steiner, Hans-Georg	Bielefeld IDM
Stelljes, Helmut	Worpswede
Sternemann, Willi	Münster
Stowasser, Roland	Bielefeld IDM
Strässer, Rudolf	Münster
Streefland, L.	Utrecht IOWO/Niederlande
Thode, Thomas	Düsseldorf
Thomessen, Karl-Heinz	Bochum
Tietze, Uwe	Göttingen
Vogel, Dankwart	Bielefeld IDM
Volk, Dieter	Münster
Vollrath, H.J.	Würzburg
Vyšin, Jan	Prag/CSSR
Walter, Marion	Boston/Mass.,USA
Walther, Gerd	Dortmund
Weidig, Ingo	Landau
Wellstein, Hartmut	Würzburg
Willson, William S.W.	Birmingham/Großbritannien
Windelberg, Dirk	Hannover
Winkelmann, Bernard	Bielefeld IDM
Winzen, Werner	Aachen
Wittmann, Erich	Dortmund
Wode, Dieter	Hannover
Wünsche, G.	Berlin
Zippel, Klaus	Bremen