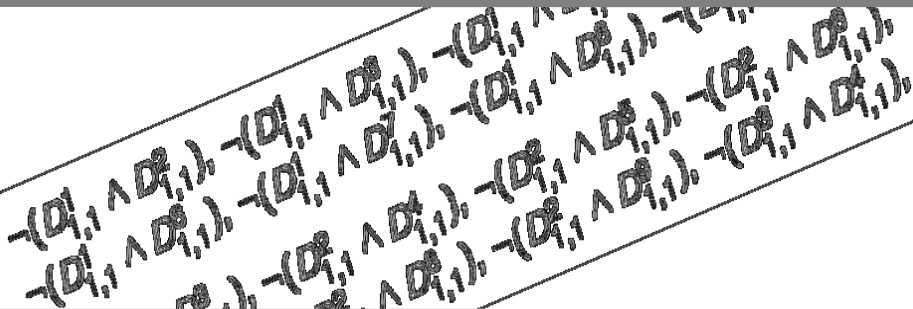


Formale Systeme

Prädikatenlogik: Tableaukalkül (ohne Gleichheit)

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2010/2011

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Typ α :

F	F_1	F_2
$1\neg A$	$0A$	$-$
$0\neg A$	$1A$	$-$
$1A \wedge B$	$1A$	$1B$
$0A \vee B$	$0A$	$0B$
$0A \rightarrow B$	$1A$	$0B$

Typ β

F	F_1	F_2
$0A \wedge B$	$0A$	$0B$
$1A \vee B$	$1A$	$1B$
$1A \rightarrow B$	$0A$	$1B$

Typ γ :

F	F_1
$1\forall xA(x)$	$1A(x)$
$0\exists xA(x)$	$0A(x)$

Typ δ :

F	F_1
$1\exists xA(x)$	$1A(x)$
$0\forall xA(x)$	$0A(x)$

Zusammenfassung der Tableauregeln

α -Regel $\frac{F}{\frac{F_1}{F_2}}$ für α -Formeln F

β -Regel $\frac{F}{F_1|F_2}$ für β -Formeln F

γ -Regel $\frac{F}{F_1(y)}$ für γ -Formeln F und eine neue Variable y

δ -Regel $\frac{F}{F_1(f(x_1, \dots, x_n))}$ für δ -Formeln F , wobei x_1, \dots, x_n alle freien Variablen in F sind und f ein neues n -stelliges Funktionssymbol

Zusammenfassung der Tableauregeln

Anfangsregel $\frac{}{0A}$ für die zu beweisende Formel A

A ohne freie Variable

V-Regel $\frac{}{1B}$ für jedes $B \in M$,

B ohne freie Variablen

Sei T ein Tableau, π ein Pfad in T und σ eine Substitution.

Definition

σ *schließt* π , wenn es

- Formeln B, C gibt, so daß $\sigma(B) = \sigma(C)$, σ kollisionsfrei für B und C ist und $1B, 0C$ auf π liegen oder
- eine der Formeln 01 oder 10 liegt auf π .

σ *schließt* ein Tableau T , wenn σ alle seine Pfade schließt .

Die Abschlußregel oder C-Regel:

Aus einem Tableau T erzeuge ein Tableau T_1
durch Wahl eines Pfades π und einer Substitution σ , die π
schließt, und

Anwendung von σ auf das ganze Tableau T .

Ein einfaches Beispiel

0	$\forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y)$	(Start)
1	$\forall x p(x)$	(α -Regel)
0	$\exists y p(y)$	(α -Regel)
1	$p(X)$	(γ -Regel)
0	$p(Y)$	(γ -Regel)

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α - und γ -Regel das linke Tableau.

Ein einfaches Beispiel

$$\begin{array}{l} 0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y) \quad (\text{Start}) \\ | \\ 1 \forall x p(x) \quad (\alpha\text{-Regel}) \\ | \\ 0 \exists y p(y) \quad (\alpha\text{-Regel}) \\ | \\ 1 p(X) \quad (\gamma\text{-Regel}) \\ | \\ 0 p(Y) \quad (\gamma\text{-Regel}) \end{array}$$

C-Regel
 \implies
 $\{Y/X\}$

$$\begin{array}{l} 0 \forall x p(x) \rightarrow \exists y p(y) \\ | \\ 1 \forall x p(x) \\ | \\ 0 \exists y p(y) \\ | \\ 1 p(X) \\ | \\ 0 p(X) \end{array}$$

Aus der zu beweisenden Aussage entsteht durch Anwendung der α - und γ -Regel das linke Tableau, daraus dann das rechts stehende durch Anwendung der C-Regel.

$$1[] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$$

$$2[1] \quad 1 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 1 \forall x p(x, a)$$

$$5[3] \quad 0 \exists y p(b, y)$$

$$6[4] \quad 1 p(X, a)$$

$$7[5] \quad 0 p(b, Y)$$

geschlossen mit $\sigma(X) = b$ und $\sigma(Y) = a$

$$1[] \quad 0\forall x\exists y p(x, y) \rightarrow \exists y\forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0\exists y\forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1\forall x\exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0\forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1\exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1p(X, g(X))$$

$p(f(Y), Y)$ und $p(X, g(X))$ sind nicht unifizierbar
es müßte gelten

$$\sigma(X) = \sigma(f(Y)) \text{ und } \sigma(Y) = \sigma(g(X))$$

$$\text{also } \sigma(X) = f(g(\sigma(X)))$$

Mehrfache Anwendung der γ -Regel

Beweisaufgabe: $p(0) \wedge \forall x(p(x) \rightarrow p(s(x))) \models p(s(s(0)))$

Tableaubeweis:

$$1[] \quad 1p(0)$$

$$2[] \quad 1\forall x(p(x) \rightarrow p(s(x)))$$

$$3[] \quad 0p(s(s(0)))$$

$$4[2] \quad 1p(X) \rightarrow p(s(X))$$

$$5[4] \quad 0p(X)$$

$$\sigma_1(X) = 0$$

$$5a \quad 0p(0)$$

$$6[4] \quad 1p(s(X))$$

$$6a \quad 1p(s(0))$$

$$7[2] \quad 1p(Y) \rightarrow p(s(Y))$$

$$9[7] \quad 1p(s(Y))$$

$$8[7] \quad 0p(Y)$$

$$\sigma_2(Y) = s(0)$$

$$8a \quad 0p(s(0))$$

$$9a \quad 1p(s(s(0)))$$

Korrektheit und Vollständigkeit

Definition

Es seien $A \in For_{\Sigma}$, $M \subseteq For_{\Sigma}$,
 T ein Tableau für A über M und
 \mathcal{D} eine Interpretation über $\bar{\Sigma}$,
wobei $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{f \mid f \text{ neues Funktionssymbol in } T\}$.
 \mathcal{D} heißt **Modell von T über M** gdw. gilt

- \mathcal{D} ist Modell von M
- zu jeder Variablenbelegung β gibt es einen Pfad π in T mit $val_{\mathcal{D},\beta}(F) = W$ für alle F auf π .

Theorem

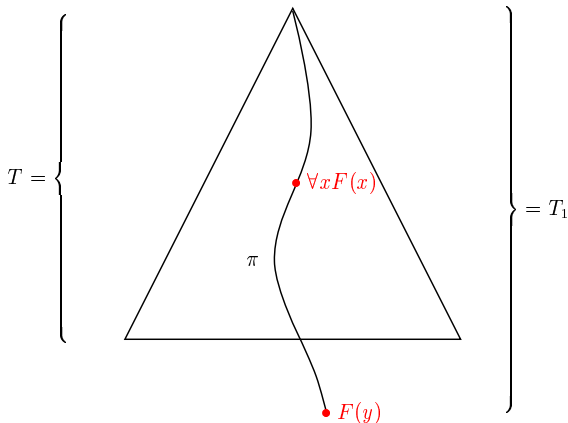
M sei eine Formelmenge.

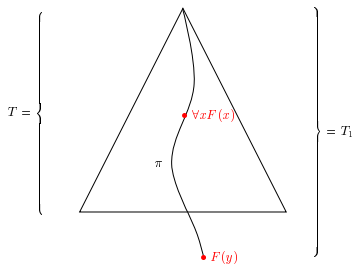
Das Tableau T' über M gehe aus T über M durch Anwendung einer Tableauregel hervor.

Hat T ein Modell über M , dann auch T' .

Beweis des Korrektheitslemma,

γ -Fall

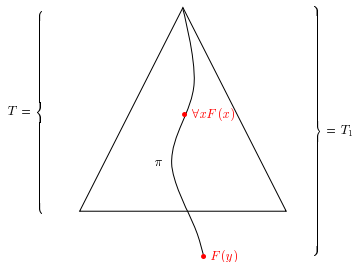




\mathcal{D} sei ein Modell von T über M . Wir zeigen, daß \mathcal{D} auch Modell von T_1 ist.

Sei β eine Belegung und π_0 ein Pfad in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Wenn $\pi_0 \neq \pi$, ist π_0 unverändert ein Pfad in T_1 , fertig.

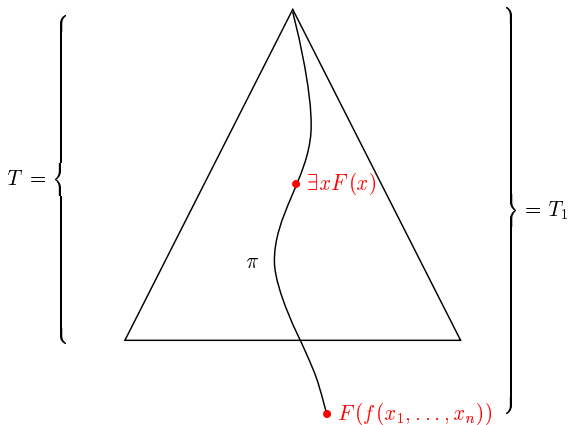


\mathcal{D} sei ein Modell von T über M . Wir zeigen, daß \mathcal{D} auch Modell von T_1 ist.

Sei β eine Belegung und $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$, i.e. $\pi_0 = \pi$.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \forall x F$ folgt insbesondere $(\mathcal{D}, \beta) \models F(y)$, also $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi \cup \{F(y)\}$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall



Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

Nach Voraussetzung sei \mathcal{D} Modell von T über M .

Wir konstruieren eine Interpretation \mathcal{D}' , die sich von \mathcal{D} nur darin unterscheidet, daß dem Funktionszeichen f eine Interpretation $f^{\mathcal{D}'}$ zugeordnet wird.

$$f^{\mathcal{D}'}(d_1, \dots, d_n) = d?$$

Für $d_1, \dots, d_n \in D$ und β mit $\beta(x_i) = d_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt entweder

$$(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F$$

in diesem Fall gibt es ein $d \in D$ mit

$$(\mathcal{D}, \beta_x^d) \models F(x)$$

oder $(\mathcal{D}, \beta) \not\models \exists x F$ gilt nicht. Im letzten Fall wählen wir einen beliebigen Wert $d \in D$.

Beweis des Korrektheitslemma, δ -Fall

Wir wollen zeigen, daß \mathcal{D}' Modell von T' ist.

Es sei β eine beliebige Belegung bzgl. \mathcal{D}' , β ist auch Belegung bzgl. \mathcal{D} , da sich der Grundbereich nicht geändert hat.

Es gibt π_0 in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi_0$.

Nur der Fall $\pi_0 = \pi$ ist interessant.

Aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \exists x F(x_1, \dots, x_n)$ folgt nach Konstruktion von \mathcal{D}' auch

$$(\mathcal{D}', \beta) \models F(f(x_1, \dots, x_n))$$

.

Da in den restlichen Formeln des Pfades π und in M das Zeichen f nicht vorkommt, erhalten wir insgesamt

$$(\mathcal{D}', \beta) \models \pi \cup \{F(f(x_1, \dots, x_n))\} \text{ und } (\mathcal{D}', \beta) \models M.$$

Theorem

- *Ist \mathcal{D} Modell von T über M*
- *und entsteht T' aus T durch Schließen eines Pfades,*
- *dann ist \mathcal{D} auch Modell von T' .*

Beweis des Korrektheitslemma

Sei β' eine beliebige Belegung.

Gemäß Voraussetzung gibt es zu jeder Belegung β einen Pfad π in T mit $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$.

T' entstehe durch Anwenden der Substitution σ und Schließen eines Pfades gemäß einer der beiden Möglichkeiten in der Definition.

Wir definieren $\beta(y) = \text{val}_{\beta'}(\sigma(y))$,

Nach dem Substitutionslemma gilt für alle C

$$(\mathcal{D}, \beta) \models C \text{ gdw. } (\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(C)$$

so daß aus $(\mathcal{D}, \beta) \models \pi$ folgt:

$$(\mathcal{D}, \beta') \models \sigma(\pi)$$

Sei $A \in For_{\Sigma}$, $M \subseteq For_{\Sigma}$, alle ohne freie Variablen.
Das Anfangstableau T_0 für diese Beweisaufgabe besteht aus einem einzigen Pfad auf dem genau die folgenden Formeln liegen

- $0A$
- $1B$ für alle $B \in M$

Beobachtungen

- T_0 für A über M ist unerfüllbar genau dann wenn, $M \models A$.
- ein geschlossenes Tableau ist unerfüllbar

Theorem

Sei $A \in \text{For}_\Sigma$, $M \subseteq \text{For}_\Sigma$, alle ohne freie Variablen
Wenn es ein geschlossenes Tableau für A über M gibt, dann ist
 $M \models A$.

Beweis:

T_0	Anfangstableau	nicht erfüllbar
\vdots		
T_k	Zwischentableau	nicht erfüllbar nach vorigem Theorem
T_{k+1}	Zwischentableau	nicht erfüllbar
\vdots		
T_n	geschlossenes Tableau	nicht erfüllbar

Ein offenes Tableau

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0 \forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1 \exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0 p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1 p(X, g(X))$$

offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Modell \mathcal{D} für alle Formeln in π :

$$D = \{a, b\}$$

$$f^{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} b & \text{falls } x = a \\ a & \text{falls } x = b \end{cases}$$

$$g^{\mathcal{D}}(x) = x$$

$$p^{\mathcal{D}}(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$1[] \quad 0 \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x p(x, y)$$

$$2[1] \quad 0 \exists y \forall x p(x, y)$$

$$3[1] \quad 1 \forall x \exists y p(x, y)$$

$$4[2] \quad 0 \forall x p(x, Y)$$

$$5[3] \quad 1 \exists y p(X, y)$$

$$6[4] \quad 0 p(f(Y), Y)$$

$$7[5] \quad 1 p(X, g(X))$$

$$8[2] \quad 0 \forall x p(x, V)$$

$$9[3] \quad 1 \exists y p(U, y)$$

$$10[8] \quad 0 p(f'(V), V)$$

$$11[9] \quad 1 p(U, g'(U))$$

offener Pfad π

Noch nicht (abschließend) behandelte Formeln

Definition

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Theorem

Jede Hintikka-Menge H besitzt ein Modell.

Beweis:

Wir setzen

$$D = \{t : t \text{ ein Grundterm}\}$$

Die Interpretationsfunktion I wird definiert durch

$$I(f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

$$(t_1, \dots, t_n) \in I(p) \Leftrightarrow 1p(t_1, \dots, t_n) \in H$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 1)

Mit der obigen Definition gilt für jeden Grundterm:

$$I(t) = t$$

Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über den Termaufbau.

Für $t = c$, ein Konstantensymbol, gilt nach Definition

$$I(c) = c.$$

Sei jetzt $t = f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} I(t) &= I(f)(t_1^{\mathcal{D}}, \dots, t_n^{\mathcal{D}}) && \text{(Def. von } I(t)) \\ &= I(f)(t_1, \dots, t_n) && \text{(Ind.Vor.)} \\ &= f(t_1, \dots, t_n) && \text{(Def. von } I(f)) \end{aligned}$$

Beweis des Modell-Lemmas (Forts. 2)

Es bleibt, um den Beweis des Modell-Lemmas zu vervollständigen, noch nachzuweisen, daß für jede Formel $F \in H$ gilt

$$(D, I) \models F.$$

Dieser Nachweis wird wieder durch Induktion über den Aufbau von F geführt.

(Man beachte, daß H nur geschlossene Formeln enthält.)

1. Fall: $F = 1p(t_1, \dots, t_n)$

Falls $F \in H$, dann gilt $\mathcal{D} \models F$ nach Definition von \mathcal{D} .

2. Fall: $F = 0p(t_1, \dots, t_n)$.

Wenn $F \in H$, dann gilt wegen (H 6)

$1p(t_1, \dots, t_n) \notin H$. Nach Definition von (D, I) also $(D, I) \not\models p(t_1, \dots, t_n)$, d. h. $(D, I) \models \neg p(t_1, \dots, t_n)$

Die weiteren Induktionsschritte sind jetzt einfache

Konstruktionsvorschrift

Es sei t_1, \dots, t_n, \dots eine Aufzählung aller Grundterme.

Parallel zur Konstruktion einer Folge von Tableaus \mathcal{T}_i wird eine Folge von Grundsubstitutionen σ_i erzeugt.

Entsteht \mathcal{T}_{i+1} aus \mathcal{T}_i durch Anwendung einer γ -Regel mit der Formel F auf dem Pfad π dann ist

$$\sigma_{i+1} = \{X/t_n\} \circ \sigma_i,$$

wobei X die neu eingeführte Variable ist und es sich um die n -te Anwendung der γ -Regel für F auf π handelt.

Sonst $\sigma_{i+1} = \sigma_i$.

Ein Pfad π im Tableau \mathcal{T}_i wird nicht erweitert, wenn $\sigma_i(\pi)$ abgeschlossen ist.

Theorem

Sei A eine Formel und M eine Menge von Formeln jeweils ohne freie Variablen.

Gilt $M \models A$
dann terminiert jedes

- *faire Verfahren,*
- *das mit $\perp A$ und $\sigma_0 = id$ beginnt,*
- *und die Konstruktionsvorschrift einhält*

nach endlich vielen Schritten in einem geschlossenen Tableau.

Fairness bedeutet, daß auf jedem Pfad, jede mögliche Regelanwendung auch schließlich stattfindet.

Insbesondere wird auf jedem offenen Pfad jede γ -Formel unbeschränkt oft benutzt.

In jedem unendlichen,
endlich verzweigenden
Baum existiert ein
unendlicher Pfad.

Angenommen die fair konstruierte Folge $(\mathcal{T}_0, \sigma_0), \dots, (\mathcal{T}_n, \sigma_n) \dots$ terminiert nicht.

Wir wollen ein Modell \mathcal{D} finden mit $\mathcal{D} \models M$ und $\mathcal{D} \models \neg A$

Setze $\mathcal{T} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{T}_i$ und $\sigma = \bigcup_{i \geq 0} \sigma_i$.

$\sigma(\mathcal{T})$ ist ein unendlicher endlich verzweigender Baum.

Nach Königs Lemma gibt es einen unendlichen Pfad π in $\sigma(\mathcal{T})$.

Noch Konstruktion muß π ein offener Pfad sein.

$H = \pi$ ist eine Hintikka-Menge.

Definition

Eine Menge H geschlossener Vorzeichenformeln über einer Signatur Σ heißt eine **Hintikka-Menge**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (H 1) Gilt für eine α -Formel F , $F \in H$, dann auch $F_1 \in H$ und $F_2 \in H$.
- (H 2) Gilt $F \in H$ für eine β -Formel F , dann auch $F_1 \in H$ oder $F_2 \in H$.
- (H 3) Gilt $F \in H$ für eine δ -Formel F ,
dann gibt es einen Grundterm t mit $F_1(t) \in H$.
- (H 4) Gilt $F \in H$ für eine γ -Formel F ,
dann gilt $F_1(t) \in H$ für jeden Grundterm t .
- (H 5) Für keine A kommen $1A$ und $0A$ in H vor.

Freie Variablen in Voraussetzung und Behauptung

Vergleiche

logische Konsequenz		geschlossenes Tableau	
$p(x) \models \forall x p(x)$	wahr	$\forall x p(x)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a)$	wahr	$p(a)$ über $p(x)$	wahr
$p(x) \models p(a) \wedge p(b)$	wahr	$p(a) \wedge p(b)$ über $p(x)$	falsch
$\exists x p(x) \models p(x)$	falsch	$p(x)$ über $\exists x p(x)$	wahr
$p(x) \models p(y) \wedge p(z)$	wahr	$p(y) \wedge p(z)$ über $p(x)$	wahr

Theorem

Die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

- 1 *Ist eine prädikatenlogische Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ allgemeingültig?
Triviale Signaturen Σ ausgenommen.*
- 2 *Was ist die maximale Anzahl von γ -Regelanwendungen in einem Tableaubeweis einer prädikatenlogische Formel $F \in \text{For}_\Sigma$?*

Rekursionstheoretische Eigenschaften der Prädikatenlogik

Theorem

- 1 *Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik ist rekursiv aufzählbar.*
- 2 *Die Menge der erfüllbaren Formeln der Prädikatenlogik ist **nicht** rekursiv aufzählbar.*