Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Bernhard Beckert
Thorsten Bormer, Dr. Vladimir Klebanov, Dr. Mattias Ulbrich

Formale Systeme, WS 2015/2016

Übungsblatt 4

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 27.11.2015 besprochen.

Aufgabe 1

Tante Agathe wurde in ihrem Haus tot aufgefunden. Nach bisherigen Ermittlungen gilt Folgendes als sicher:

1. Im Haus lebten nur Agathe, ihr Butler und Onkel Charles.
2. Agathe wurde von einem Hausbewohner getötet.
3. Wer jemanden tötet, hasst sein Opfer.
4. Charles hasst niemanden, den Agathe hasste.
5. Der Täter ist niemals reicher als das Opfer.
6. Der Butler hasst alle, die nicht reicher als Agathe sind oder die Agathe hasste.
7. Kein Bewohner des Hauses hasst(e) alle Hausbewohner.

Gegeben ist ferner die prädikatenlogische Signatur $\Sigma_{Agathe} = (F, P, \alpha)$ mit

- $P = \{\text{kills}, \text{hates}, \text{richer}\}$
- $F = \{a, b, c\}$
- $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(c) = 0, \qquad \alpha(\text{kills}) = \alpha(\text{hates}) = \alpha(\text{richer}) = 2$

Formalisieren Sie die Aussagen 1-7 in Prädikatenlogik mit dem Vokabular aus Σ_{Agathe}.

Aufgabe 2

(a) Betrachten Sie jeweils die folgenden Substitutionen σ und Formeln F. Falls σ für F kollisionsfrei ist, geben Sie $\sigma(F)$ an; andernfalls geben Sie an, wo eine Kollision auftritt.

(i)	$\sigma = \{x/c,\ y/f(c, g(x))\}$	$F = \forall x(p(g(x), f(x, y)) \vee q(x))$
(ii)	$\sigma = \{x/f(g(x), c)\}$	$F = \exists y(p(x, y) \vee \exists z \forall x(f(z, c) \doteq f(c, x)))$
(iii)	$\sigma = \{y/g(x),\ z/g(y)\}$	$F = p(x, y) \rightarrow \forall x(q(f(x, z)) \vee \exists y(q(f(x, y))))$

(b) Betrachten Sie jeweils die folgenden Formeln F und G. Geben Sie einen allgemeinsten Unifikator μ sowie das Ergebnis $\mu(F) = \mu(G)$ der Unifikation an, falls sie unifizierbar sind.

(Hierbei sind a, b Konstanten, f, g, h Funktionssymbole und v, x, y, z Variablen.)

(i)	$F = f(x, z, z)$	$G = f(g(a, y), h(v), h(y))$
(ii)	$F = f(g(x, z), z, h(b, x))$	$G = f(g(a, y), h(v, a), y)$
(iii)	$F = g(x, y)$	$G = g(f(y), f(x))$
(iv)	$F = f(g(y), h(y, g(y)))$	$G = f(z, h(g(x), g(g(x))))$

Aufgabe 3

Geben Sie eine Folge

$$(s_1, t_1),\ (s_2, t_2),\ (s_3, t_3),\ \ldots$$

von Termpaaren an, so daß:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind s_n und t_n unifizierbar.
- Die Größe der Terme s_n und t_n wächst (höchstens) linear in n.
- Die Größe des Ergebnisses $\sigma_n(s_n)$ bzw. $\sigma_n(t_n)$ der Unifikation (σ_n ist ein allgemeinster Unifikator von s_n und t_n) wächst exponentiell in n.

Hinweis: Betrachten Sie die Terme $g(x_1, x_2)$ und $g(c, f(x_1, x_1))$, und verallgemeinern Sie.

Aufgabe 4

Sei Σ eine prädikatenlogische Signatur mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p.

(a) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F über Σ an, so dass gilt: Eine Interpretation (D, I) ist genau dann Modell von F, wenn die Relation $I(p)$ eine *strikte Halbordnung* (also transitiv und irreflexiv) auf D ist.

(b) Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Formel G über Σ an, so dass gilt: Wenn eine Interpretation (D, I) Modell von G ist, dann ist D unendlich.