Hilberts umfassendes Programm

Reinhard Kahle

CMA and DM, FCT, Universidade Nova de Lisboa

Logik zwischen Mathematik und Philosophie

Göttingen

28.4.2017

This work is partially supported by the Portuguese Science Foundation, FCT, through the projects UID/MAT/00297/2013 (Centro de Matemática e Aplicações) and PTDC/MHC-FIL/2583/2014 (Hilbert's 24th Problem).

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

Hilberts Programm (∼1920–1931)

Finite Widerspruchsfreiheitsbeweise formalisierter mathematischer Theorien.

- Es gibt viele (durchaus philosophische) Aspekte dieses Programms, die es Wert sind, untersucht zu werden.
  - Finitismus (auch in seinem Verhältnis zum Intuitionismus).
  - Widerspruchsfreiheitsbeweise:
    wie können sie aussehen; was würden sie leisten; ...
  - Formalisierung mathematischer Theorien.
- Es ist zu bemerken, daß wir es hier, in der von Hilbert gegebenen Form, mit einem rein mathematischen Problem zu tun haben!
  - Gödels Unvollständigkeitssätze zeigen, daß dieses Programm (in seiner ursprünglich intendierten Form) undurchführbar ist.
  - Diese Sätze werden auch rein mathematisch bewiesen, ohne Rückgriff auf spezielle philosophische Argumente. (Sie sind allerdings, nach Gödel selbst, aus einer *realistischen* Grundhaltung heraus entdeckt worden.)

Wir wollen hier zeigen, wie sich dieses (engere) Hilbertsche Programm in dessen sehr viel weiter zu fassendes Grundlagenprogramm einbettet.

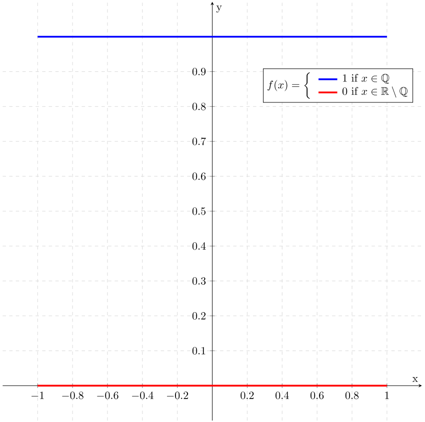
(Mathematische) Vorgeschichte

I. Dirichlet-Funktion

Dirichlet-Funktion, 1829

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

- D ist in jedem Punkt unstetig.
- D ist Lebesgue-integrierbar.



Poincaré, 1889

Vor hundert Jahren hätte man eine derartige Funktion als Beleidigung des gesunden Menschenverstandes betrachtet.

Leopold Kronecker

- Begründung der Mathematik auf rein arithmetischer Basis

Kronecker, 1886

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Ferdinand Lindemann, 1906

[S]o sagte er mir in seiner lebhaften und zu Paradoxen geneigten Art einmal: „Was nützt uns Ihre schöne Untersuchung über die Zahl π? Wozu das Nachdenken über solche Probleme, wenn es doch gar keine irrationalen Zahlen gibt?“

NB1. Auch Gauß und Dirichlet vertraten bereits die Auffassung, daß sich letztlich alle Mathematik auf Arithmetik zurückführen lasse.

NB2. Gödels Unvollständigkeitssätze widerlegen diese Überzeugung!

Leopold Kronecker

- Begründung der Mathematik auf rein arithmetischer Basis
- Berechnung der Lösung, nicht deren Existenz, steht im Vordergrund
  - 1888 bewies Hilbert den heute sogenannten *Hilbertschen Nullstellensatz* in nicht-konstruktiver Weise; d.h., er zeigte, daß es eine Lösung gibt, ohne damit auch einen Weg aufzuzeigen, diese Lösung zu berechnen.

Paul Gordan

Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie!

  - Die Verteidigung nicht-konstruktiver Beweise wurde später eines der Anliegen der Hilbertschen Grundlagenforschung.
- Ablehnung abstrakter Konzeptionen in der Mathematik
  - Dedekind (Algebra)
  - Cantor (Mengenlehre)

Leopold Kronecker

- Begründung der Mathematik auf rein arithmetischer Basis
- Berechnung der Lösung, nicht deren Existenz, steht im Vordergrund
- Ablehnung abstrakter Konzeptionen in der Mathematik

Blumenthal 1935: Hilberts Lebensgeschichte

Kronecker war in Hilberts Entwicklungszeit ein Gewaltiger, eine gebieterische Persönlichkeit, die der mathematischen Forschung die von ihm bevorzugten Wege weisen wollte und Außenseiter abwies. Gegen jede Beschränkung der geistigen Freiheit aber lehnte sich Hilbert mit seiner ganzen Leidenschaftlichkeit auf. Kroneckers Kritik an dem Dedekind-Weierstraßschen Zahlbegriff, die sich in „Polizeiverboten“ äußerte, hat zweifellos den ersten Anstoß zu Hilberts Ringen um die Axiome der Arithmetik gegeben.

(Mathematische) Vorgeschichte

III. Cantors Mengenlehre

Arthur Schoenflies, Mengenlehrebericht, 1913

Die Entwickelung der *Mengenlehre* hat ihre Quelle in dem Bestreben, für zwei grundlegende mathematische Begriffe eine klärende Analyse zu schaffen, nämlich für die Begriffe des *Arguments* und der *Funktion*.

- Die Cantorsche Mengenlehre konnte, in weiten Teilen, die entstandenen mathematischen Probleme „in den Griff bekommen".

Blumenthal 1935: Hilberts Lebensgeschichte

Und er [Hilbert] ist stolz darauf, daß im Gegensatz zu Kronecker die Königsberger zu den ersten deutschen Mathematikern gehörten, die G. Cantors von Kronecker abgelehnte mengentheoretische Schöpfung würdigten und anwandten.

- Aber . . .

(Mathematische) Vorgeschichte

IV. Paradoxien der Mengenlehre

- Cantorsche „Paradoxien“
  - Die Menge aller Mengen. Sie widerspricht dem Cantorschen Satz, daß die Potenzmenge immer größere Kardinalität als die Ausgangsmenge hat.
  - Die Menge aller Kardinalzahlen.
- Für Cantor waren dies keine Paradoxien, sondern nur „Reductio-ad-absurdum“-Argumente für die Nichtexistenz dieser Mengen.
- Hilbert (und Frege) waren mit dieser Sichtweise nicht einverstanden:

Hilbert, 1917

Wenn wir einen mathematischen Beweis erst am Resultate auf seine Zulässigkeit prüfen können, so brauchen wir überhaupt keinen Beweis.

- Die Hilbertsche Paradoxie (eine Variante der Cantorschen der Menge aller Mengen).

  Sie war zentral für Hilberts Motivation:

Hilbert, 1905

[A]ls ich ihn [den Widerspruch] fand, glaubte ich zuerst, daß er der Mengentheorie unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg legte, an denen sie scheitern müßte; ich glaube jedoch jetzt sicher, daß wie stets bisher in der Wissenschaft, nach der Revision der Grundlagen alles Wesentliche erhalten bleiben wird.

Blumenthal 1935: Hilberts Lebensgeschichte

Die Lage war aber kritisch. Die Paradoxien der Mengenlehre zeigten in erschreckender Weise, daß gewisse Operationen mit dem Unendlichen, die jedermann für zulässig hielt, zu zweifellosen Widersprüchen führten.

- Es wichtig festzuhalten, daß Hilberts Motivation für seine grundlagentheoretischen Arbeiten fast ausschließlich mathematisch motiviert war.
  - Dementsprechend sollte auch alle spätere Kritik (sofern sie denn Hilbert treffen soll) an ihren mathematischen Konsequenzen gemessen werden und nicht an ihren philosophischen Voraussetzungen.
- Es gibt allerdings eine Ausnahme:

Emil Heinrich Du Bois-Reymond, 1872

Ignoramus et ignorabimus.

- Hilbert widersetzte sich jeder philosophisch motivitierten Beschränkung der mathematischen Gestaltungsfreiheit.

Hilbert, 1900

In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!

Hilbert, 1930

Wir müssen wissen! Wir werden wissen!

Hilbert 1900

- Unter den berühmten 23 Problemen, die Hilbert 1900 auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris vorstellte, findet sich an prominenter Stelle das:

Zweite Hilbertsche Problem

Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome.

- Der gedruckte Text des Vortrags enthält neben den Problemen selbst eine Reihe wortgewandt vorgebrachter Überzeugungen Hilberts, die seinen Wissenschaftoptimismus für die Mathematik untermauern.
  - Neben dem bereits genannten „In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus“ gehört dazu auch
  - die klare Aussage, daß der Nachweis der *Unmöglichkeit einer Lösung* als „Lösung“ eines mathematischen Problems zu betrachten ist,
  - und daß, *in diesem Sinne*, „jedes mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse“.

Hilbert 1904/5

- Auf dem ICM 1904 in Heidelberg stellte Hilbert eine erste Skizze vor, wie ein (syntaktischer) Widerspruchsfreiheitsbeweis aussehen könnte.
    - Die behandelte „Spielzeug“-Theorie war aber ohne mathematische Aussagekraft, und die methodischen Überlegungen konnten nicht weiter entwickelt werden — oder wie Hilbert sich 1928 ausdrückte: die Entwicklung wurde „durch Poincaré verrammelt“.
    - Poincaré: Induktion lasse sich nur induktiv rechtfertigen $\rightarrow$ zirkulär.
- Hilbert hat 1905 in Göttingen eine Vorlesung unter dem Titel *Logische Principien des mathematischen Denkens* gehalten.
    - Hilbert war sich zu dieser Zeit bereits der wesentlichen Aufgabenstellungen einer jeglichen mathematischen Grundlagenforschung bewußt.
    - Man findet die Fragen, aber noch nicht die Antworten.

Hilbert, 1905

Ich kann hier vorläufig nur Ideen und Andeutungen bringen, eine nähere Ausführung und Durchbildung dieser sehr schwierigen, bisher noch nie in Angriff genommenen Dinge behalte ich mir für einen späteren Zeitpunkt vor.

Hilbert 1904/05

Hilbert, 1905, Randnotiz

Warum ist die Gesammtheit aller Mengen eine unerlaubte,
warum die Menge aller reellen Zahlen eine erlaubte Zusammenfassung?

Nelson an Hessenberg, Juni 1905

Um den Widerspruch in der Mengenlehre zu beseitigen, will er [Hilbert] (nicht etwa die Mengenlehre sondern) die Logik reformieren.

Hilberts umfassendes Programm

Aus einer Analyse der Hilbertschen Quellen zwischen 1900 und 1905 ergeben sich die folgenden Punkte, die man einem *umfassenden Hilbertschen Programm* zugrunde zu legen hat:

- Absicherung der Mathematik (Paradoxien in der naiven Mengenlehre).
- Es gibt kein *ignorabimus* in der Mathematik.
- Grundlagenfragen mit mathematischen Mitteln lösen.
- „Reform der Logik“

Dazu tritt noch das wohl erst 1917 so formuliertes Anliegen einer:

- Tieferlegung der Fundamente.

Die genaueren Fragestellungen eines solchen Programms wurden von Hilbert 1917 in seinem Vortrag *Axiomatisches Denken* ausgeführt.

Hilbert 1917

Vortrag *Axiomatisches Denken*, Zürich, September 1917

Diese Vollendung [der *Axiomatisierung der Logik*] wird indessen noch neuer und vielseitiger Arbeit bedürfen. Bei näherer Überlegung erkennen wir nämlich bald, daß die Frage der Widerspruchslosigkeit bei den ganzen Zahlen und Mengen nicht eine für sich alleinstehende ist, sondern einem großen Bereiche schwierigster erkenntnistheoretischer Fragen von spezifisch mathematischer Färbung angehört: ich nenne, um diesen Bereich von Fragen kurz zu charakterisieren, das Problem der prinzipiellen *Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage*, das Problem der nachträglichen *Kontrollierbarkeit* des Resultates einer mathematischen Untersuchung, ferner die Frage nach einem *Kriterium für die Einfachheit* von mathematischen Beweisen, die Frage nach dem Verhältnis zwischen *Inhaltlichkeit und Formalismus* in der Mathematik und Logik und endlich das Problem der *Entscheidbarkeit* einer mathematischen Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen.

Hilbert 1917

1. Axiomatisierung der Logik
   - Durch Frege und Whitehead/Russell bereits weitgehend vorbereitet.
   - Für die Logik erster Stufe durch Bernays im wesentlichen auf die heutige Form gebracht; in Hilbert/Ackermann 1928 veröffentlicht.
   - Durch Gödels Vollständigkeitssatz für die Logik erster Stufe (und die Nichtaxiomatisierbarkeit der Logik zweiter Stufe) vollständig geklärt.
   - Damit ist aber auch die von Nelson angesprochene „Reform der Logik" vollzogen.
2. **Widerspruchslosigkeit** bei den ganzen Zahlen und Mengen
   $\rightarrow$ Hilberts engeres Programm; siehe unten.
3. Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage
   - Von Hilbert 1900 als *Axiom* behauptet und noch 1928 betont.
   - Nicht zu verwechseln mit der *Entscheidbarkeit* (s.u.); Unentscheidbarkeit einer Frage ist explizit als Lösung zugelassen!
   - Von Brouwer direkt in Frage gestellt (und damit neben dem *Tertium-non-datur* der „Hauptangriffspunkt" des Intuitionismus).
   - Der Status dieser Frage ist auch heute nicht eindeutig geklärt; nur:

Gödels Resultate widerlegen diese Annahme keinesfalls.

Hilbert 1917

4. Kontrollierbarkeit des Resultates einer mathematischen Untersuchung
   - Eine durchaus überraschende Frage;
   - wohl auch, weil wir sie heute als vollständig geklärt betrachtet sollten.
   - Interessant wäre zu erötern, ob die Hilbertsche Beweistheorie *allein* für diese Klärung verantwortlich gemacht werden kann.
   - Hales' computerunterstützte Verifikation seines Beweises der Kepler-Vermutung mag als eindrücklichstes Beispiel dafür dienen.
5. Kriterium für die Einfachheit von mathematischen Beweisen

   $\rightarrow$ „Hilberts 24. Problem".
   - Allem Anschein nach wurde dieses Problem in der Hilbertschule (oder auch anderswo) nicht weiter verfolgt.
6. Verhältnis zwischen Inhaltlichkeit und Formalismus
   - Interessante Frage, die auch heute noch einer Diskussion bedarf.
   - Die moderne Unterscheidung von Syntax und Semantik sollte hier hilfreich sein.
   - Achtung: Viele (naive) Interpretationen zeichnen hier ein völlig falsches Bild der Hilbertschen Position.

Hilbert 1917

7. Entscheidbarkeit einer mathematischen Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen
   - Gelöst durch die Resultate von Church und Turing:
     es ist im allgemeinen nicht entscheidbar, ob eine Frage (durch eine endliche Anzahl von Operationen) entscheidbar ist.
   - Durch Juri Matijassewitsch auch für das spezifisch mathematische Hilbertsche 10. Problem (negativ) gelöst.

Hilbert, 1917

[Z]ur Eroberung dieses Feldes müssen wir — das ist meine Überzeugung — den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung machen.

Hilberts engeres Programm

Finite Widerspruchsfreiheitsbeweise formalisierter mathematischer Theorien.

- Grundgedanke der Hilbertschen Idee
  (unsere Rekonstruktion als *Modus Tollens* Argument):
  1. Finite Mathematik für einen Widerspruchsfreiheitsbeweis der klassischen Mathematik benutzen.
  2. Sollte die klassische Mathematik einen Widerspruch enthalten, würde die finite Mathematik einen enthalten.
  3. Finite (oder intutionistische Mathematik) ist aber aus intuitiven/inhaltlichen Gründen als widerspruchsfrei einzusehen.
- Da Brouwer und Weyl 3 zu unterschreiben hätten, müßten sie auch klassische Mathematik anerkennen.

  NB. Brouwer hat nicht gegen die Konsistenz der klassischen Mathematik argumentiert, sondern daß Konsistenz alleine keine *Bedeutung* hervorrufe. Insofern hat er Hilberts Programm keinesfalls als undurchführbar betrachtet, sondern sah keinen Gewinn darin.

„Fundierung“ der Mathematik

- Hilberts ursprüngliche Idee (Hoffnung); $\triangleright$ zu lesen als „rechtfertigt“:

Hilberts finites Programm

Finite Mathematik $\quad\triangleright\quad$ Mathematik in ihrer Gesamtheit

- Durch Gödels Resultate als undurchführbar erwiesen.
- Als Konsequenz ist aber nicht die „Mathematik in ihrer Gesamtheit“ in Frage zu stellen, sondern:

Hilbert, 1934

Im Hinblick auf dieses Ziel möchte ich hervorheben, daß die zeitweilig aufgekommene Meinung, aus gewissen neueren Ergebnissen von GÖDEL folge die Undurchführbarkeit meiner Beweistheorie, als irrtümlich erwiesen ist. Jenes Ergebnis zeigt in der Tat auch nur, daß man für die weitergehenden Widerspruchsfreiheitsbeweise den finiten Standpunkt in einer schärferen Weise ausnutzen muß, als dieses bei der Betrachtung der elementaren Formalismen erforderlich ist.

„Fundierung“ der Mathematik

Revidiertes Hilbertsches Programm

Konstruktive transfinite Mathematik $\triangleright$ Mathematik in ihrer Gesamtheit

- Nur bis zu bestimmten Teilsystemen der Analysis — z.Z. Π^2_1 Komprehension (Michael Rathjen) — durchgeführt.
- Von Martin-Löf als gescheitert angesehen (und tatsächlich ist nicht abzusehen, wann/wie eine vollständige Durchführung zu erwarten ist).

Aus einer angemessenen Hilbertschen Perspektive ist aber nicht dieses revidierte Programm gescheitert, sondern der Konstruktivismus, der als Fundierungstheorie nicht auszureichen scheint.

„Fundierung“ der Mathematik

Offenes Hilbertsches Programm

? $\quad \triangleright \quad$ Mathematik in ihrer Gesamtheit

- Welches ist die passende Theorie, um die Mathematik in ihrer Gesamtheit zu „rechtfertigen“?

Die Aufgabe ist nicht, eine Grundlagentheorie zu wählen und zu fragen, „wieviel Mathematik“ durch sie gerechtfertigt wird (und die darüberhinausgehende eventuell zu verwerfen), sondern umgekehrt zu fragen, welche Grundlage man wählen muß, um die bewährte(!) Mathematik in ihrer Gesamtheit zu rechtfertigen.

- (Warum nicht ZFC? Aber das wäre ein anderer Vortrag.)

Was hat Hilberts umfassendes Programm geleistet?

Beweistheorie

- Beweise selbst als mathematische Objekte rekonstruiert.
- Beweistheorie als eigene, mathematisch fruchtbare Disziplin innerhalb der neu formierten mathematischen Logik etabliert.

  NB. Es war die Beweistheorie, nicht die Widerspruchsfreiheitsbeweise, um die es Hilbert ging:

Georg Kreisel, 2011

According to Bernays [...] Hilbert was asked [...] if his claims for the ideal of consistency should be taken literally. In his (then) usual style, he laughed and quipped that the claims served only to attract the attention of mathematicians to the potential of proof theory.

Was hat Hilberts umfassendes Programm geleistet?

Mathematisierung der Grundlagenfragen

Hilbert, ICM Rom, 1928

Mit dieser Neubegründung der Mathematik, die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, glaube ich die Grundlagenfragen in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt zu schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch den ganzen Fragenkomplex in die Domäne der reinen Mathematik versetze.

Gerhard Gentzen, 1938

Ein Hauptmerkmal des *Hilbert*schen Standpunkts scheint mir das Bestreben zu sein, das mathematische Grundlagenproblem der *Philosophie* zu entziehen und es soweit wie irgendmöglich mit den eigenen Hilfsmitteln der Mathematik zu behandeln.

Was hat Hilberts umfassendes Programm geleistet?

Mittelbare Resultate

- Klärung des Verhältnisses von Syntax und Semantik.
- Klärung der Mengenlehre und Etablierung dieser als umfassende Grundlagentheorie in der Mathematik.
- Klärung des nicht-konstruktiven Charakters gewisser Beweisführungen.
- Begründung der Rekursionstheorie (Berechenbarkeitstheorie) und damit der theoretischen Informatik.

„Hilbert ist der Vater des Computers sowie Bach der Vater des Jazz ist.“

- Das vielleicht bedeutendste Resultat von Hilberts umfassendes Programm ist die „Reform der Logik“.
- Nach Frege und Whitehead/Russell war es in erster Linie Hilbert (mit seiner Schule), der eine fundamentale Verschiebung der Logikauffassung von der traditionellen Aristotelischen zur modernen mathematischen Logik ermöglicht, propagiert und durchgesetzt hat.

Logik zwischen Mathematik und Philosophie

Logik ist heute mehr der Mathematik als der Philosophie zuzuordnen.

Was hat Hilberts umfassendes Programm geleistet?

Logik zwischen Mathematik und Philosophie

- Aus technischer Sicht kann die Logik bedenkenlos als ein spezifischer Zweig der Mathematik betrachtet werden:
  - Arithmetik sei die Mathematik des Datentyps `nat` (d.h., der natürlichen Zahlen);
  - Logik sei die Mathematik des Datentyps `bool` (d.h., der beiden Wahrheitswerte `wahr` und `falsch`).
- Zwar verliert die Logik damit ihren traditionell ausgezeichneten Status;
- in der Sache öffnet sie sich aber den mathematischen Untersuchungsmethoden, die es erlaubten, in den letzten 150 Jahren Erkenntnisse über die Logik zu gewinnen, die rechtfertigen, alles was in den 2000 Jahren zuvor geleistet wurde, als Trivialitäten zu betrachten.

Die wesentlichen Impulse dazu — und viele Teile der Umsetzung — wurden von den Grundlagenforschern im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts hier in Göttingen geliefert.