

Literatur

- [1] H. C. Bennet-Clark: Scale Effects in Jumping Animals. In: Pedley (Ed.): Scale Effects in Animals Locomotion. London: Academic Press 1977
[2] S. J. Gould: Darwin nach Darwin. Berlin: Ullstein 1984
[3] J. B. S. Haldane: On being the right size. In: J. R. Newman (Ed.): The world of Mathematics, Vol. 2, New York: Simon & Schuster 1956
[4] M. Kleiber: Der Energiehaushalt von Mensch und Haustier. Hamburg: Parey 1967
[5] H. Lin: Fundamentals of biological scaling. Am. J. Phys. 50/1, 72 (1982)
[6] T. A. McMahon, J. T. Bonner: Form und Leben. Heidelberg: Spektrum 1985

- [7] H. J. Schlichting, B. Rodewald: Ikarus' Traum und die aerodynamische Wirklichkeit. PdN-Ph 35/5, 7 (1986)
[8] H. J. Schlichting: Energie und Energieentwertung in Naturwissenschaft und Umwelt. Heidelberg: Quelle & Meyer 1983
[9] D'Arcy Thompson: Über Wachstum und Form: Frankfurt: Suhrkamp 1983
[10] K. Urich: Vergleichende Physiologie der Tiere. Stoff- und Energiewechsel. Berlin, New York: De Gruyter 1977
[11] F. W. Went: The Size of Man: American Scientist 56/4, 40 (1968)

Anschrift der Verfasser:

Dr. Bernd Rodewald / Prof. Dr. Hans Joachim Schlichting, Universität Osnabrück, Postfach 4469, 4500 Osnabrück

Die Gestalt von Bäumen — zufällig oder gesetzmäßig?

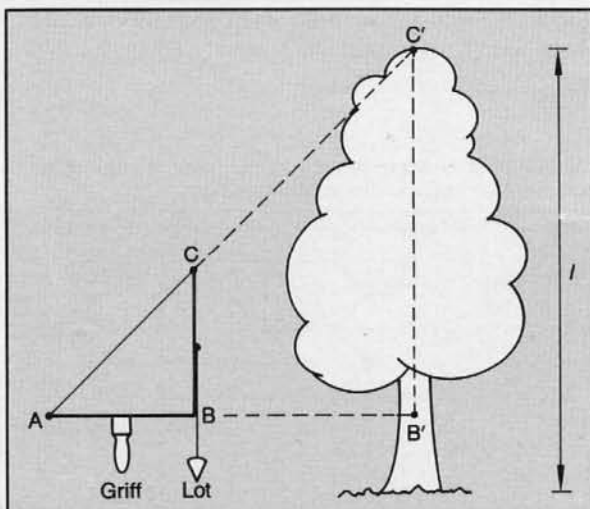
Von Bernd Rodewald und Hans Joachim Schlichting

1 Beobachtungen an Bäumen

Es ist die Absicht dieses Beitrags, einige physikalische Grundprinzipien aufzuzeigen, welche die Architektur eines Baumes entscheidend bestimmen. Denn obgleich es keine zwei Bäume zu geben scheint, die sich vollständig gleichen, können die vielfältigen Verzweigungen und Verzweigungen eines Baumes nicht reine Produkte des Zufalls sein. Gewisse Regelmäßigkeiten, welche einen Baum als „Baum“ erkennbar werden lassen, sind durchaus zu beobachten:

- Bäume wachsen nicht in den Himmel, Äste und Zweige werden nicht beliebig lang.
- Je größer ein Baum ist, desto plumper erscheint i. a. sein Stamm.
- Die Ast- und Zweigstücke zwischen zwei Gabelungen sind sehr oft gerade gewachsen.
- Die Äste, in die ein Stamm gabelt, sind immer dünner als der Stamm selbst.

Abb. 1 Bestimmung der Höhe eines Baumes mit Hilfe des sog. Försterdreiecks: Das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck ABC wird so gehalten, daß die Seite BC senkrecht ausgerichtet ist und beim Anpeilen des Baumes über die Kante AC gerade noch dessen Spitze C' sichtbar ist. Dann stimmen die Strecken $\overline{AB'}$ und $\overline{B'C'}$ überein. l ergibt sich damit durch Ausmessen der Strecke $\overline{AB'}$, wobei die Höhe der Försterdreiecksunterkante \overline{AB} über dem Erdboden dazuzuaddieren ist



— Je dünner ein vom Stamm wegführender Ast ist, desto näher kommt seine Orientierung der horizontalen Ebene. Je dünner ein Zweig ist, desto stärker weicht seine Richtung von der Richtung des Astes ab, aus dem er erwächst.

— Die Stellen, an denen sich ein Ast verzweigt, scheinen relativ willkürlich zu sein.

Die genannten Bauprinzipien sind uns und den Schülern z. T. so selbstverständlich, daß sie einer ausführlichen Bewußtwerdung bedürfen. Eine Möglichkeit hierzu bietet unserer Erfahrung nach das vorlagenfreie Zeichnen und Malen von Bäumen. Ein Vergleich der dabei entstehenden Bilder deckt bereits viele Grundmuster eines Baumes auf. Weitere Einsichten lassen sich dann im Vergleich mit den realen Bäumen der Natur oder mit Fotos davon gewinnen. Letztere sind auch ein wichtiges Dokument für die sich anschließenden detaillierten Untersuchungen der Einzelaspekte, wie sie im folgenden ausgeführt sind.

2 Der Stabilitätsgesichtspunkt

2.1 Stabilität und Dickenwachstum

Der Stamm eines Baumes muß offensichtlich eine gewisse Mindestdicke haben, um die Krone mit ihrem reichen Verzweigungswerk an Ästen und ihren Blättern tragen zu können. Je größer die Länge l eines Baumes ist, desto größer muß natürlich auch der Durchmesser d des Stammes (z. B. über dem Erdboden gemessen) sein, um den Baum am Umknicken oder Zerbrechen durch sein Eigengewicht zu hindern. Die naive Vermutung, d würde im gleichen Maße wie l wachsen, trifft jedoch nicht zu. Bereits die auffällige Plumpheit größerer Bäume bringt zum Ausdruck, daß d und l nicht proportional zueinander wachsen. Man sagt auch: der sog. Schlankheitsgrad l/d bleibt nicht konstant.

Schüler können diesen Sachverhalt durch entsprechende Messungen an Bäumen einer Sorte (z. B. Buche) leicht nachweisen. Aus einer Umfangmessung des Stammes errechnet sich dessen Durchmesser d , und mit Hilfe des sog. Försterdreiecks läßt sich die Baumhöhe l näherungsweise bestimmen (Abb. 1).

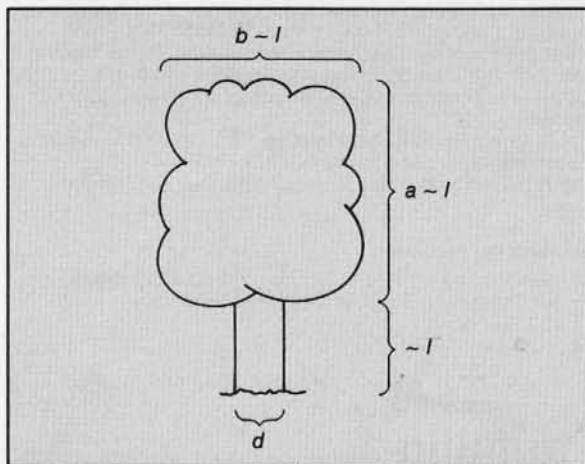


Abb. 2 Skizze zur Stabilitätsbetrachtung

Trägt man jetzt d als Funktion von l in ein Diagramm ein, so gewinnt man eine Ausgleichskurve, die sich mit wachsendem l nach oben krümmt.

Ein solches nichtlineares Dickenwachstum kann man sich nicht unbegrenzt fortgesetzt denken, ohne daß der Baum seine typische Form verliert. In der Tat wird diese Grenze bereits bei den kalifornischen Riesensequoien fast erreicht, welche bei einer Höhe von 100 m einen Stammdurchmesser von 6 bis 7 m besitzen. Ihr Stamm könnte also ein mittleres Einfamilienhaus verdecken. Die Begrenzung des Wachstums ist darin begründet, daß der hierfür erforderliche Materialaufwand schließlich zu hoch wäre, als daß er stoffwechselfysiologisch bereitzustellen wäre, noch könnte er durch sekundäres Dickenwachstum überhaupt angelagert werden (vgl. *Nachtigall* 1979, S. 229).

Aus den gleichen Gründen wie beim Stamm wächst auch die Dicke der Äste überproportional mit ihrer Länge. Weil sie infolge noch zu diskutierender Zusammenhänge bei weitem nicht die Dicke des Stammes annehmen können, ist auch ihre Länge entsprechend begrenzt.

2.2 Ein einfaches mechanisches Modell

Mit Hilfe eines einfachen Baummodells läßt sich das beschriebene Dickenwachstum erklären. Hierzu stellen wir uns vor, daß die Hauptmasse des Baumes in dem durch Verästelungen geprägten Bereich liegt. Dieser Bereich sei zylindrisch angenommen und durch Abmessungen a und b gekennzeichnet, welche mit der Baumlänge l mitwachsen, d. h.: $a \sim l$, $b \sim l$. Den tragenden Stamm denke man sich als zylindrische Säule der Dicke d , deren Länge wiederum proportional zu l ist (Abb. 2).

Die durch das Baumvolumen $V \sim ab^2$ bestimmte Gewichtskraft F_G ist dann im wesentlichen durch die Proportionalitäten

$$F_G \sim V \sim ab^2 \sim l^3$$

bestimmt, während für die Querschnittsfläche A des tragenden Stammes gilt:

$$A \sim d^2.$$

Soll sich im Verlauf des Wachstums der Druck F_G/A auf die Querschnittsfläche nicht ändern, damit die Stabilität gewährleistet bleibt, so muß nach den oben stehenden Proportionalitäten offenbar gelten:

$$\frac{l^3}{d^2} = c = \text{const.},$$

$$\text{was } d = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot l^{3/2}$$

$$d \sim l^{3/2} \quad (1)$$

bedeutet. Diese Beziehung formuliert das überproportionale Dickenwachstum halb-quantitativ.

Das beschriebene einfache Modell versagt bei den Bäumen, bei denen der tragende Stamm gedanklich nicht mehr ohne weiteres von dem Teil getrennt werden kann, welcher die Hauptgewichtskraft ausmacht, was z. B. bei Tannen der Fall ist. Dieses gilt genauso natürlich für alle möglichen Äste und Zweige, die eine tragende Funktion haben, im wesentlichen dabei aber mit ihrem Eigengewicht fertig werden müssen. Das Gesetz für das Dickenwachstum läßt sich hier erst durch die weitaus komplizierteren Überlegungen zur Biegebeanspruchung eines Stabes verstehen. Doch auch diese allgemeineren Überlegungen führen zu der gleichen Proportionalität (1) (vgl. *Gerthsen* u. a. 1982, S. 117; *McMahon/Bonner* 1985, S. 118).

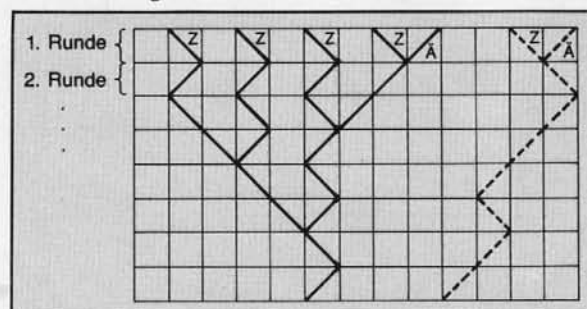
3 Das Wirken des Zufalls

Charakteristisch für einen Baum ist das Auftreten von Verzweigungen. Es gibt jedoch keine typischen Raumpunkte, an denen Verzweigungen auftreten müssen. Könnte man den Ort der Verzweigung verschieben, so bliebe nach wie vor die Grundstruktur eines Baumes erhalten. An welcher Stelle sich ein Ast verzweigt, scheint also dem Zufall überlassen zu sein. Wir können diesen Wirkungen des Zufalls in einem Simulationsspiel nachgehen. Dazu betrachten wir der Einfachheit halber nur Verästelungen in einer Ebene und nehmen darüberhinaus zunächst an, daß als mögliche Richtungen eines Ast- oder Zweigstücks nur die Diagonalen eines Quadrats in Frage kommen. Dabei denken wir uns die Ebene durch ein Quadratgitter untergliedert (Abb. 3).

An den eingezeichneten dicken Punkten von Abb. 4 mögen die Spitzen einiger Zweige liegen. Die Frage, wie eine zufallsbedingte Verästelung des Baumes bis zu diesen Zweigspitzen aussehen könnte, wird mit Hilfe einer Münze beantwortet, deren Wurfresultate (Ähre, Zahl) nur vom Zufall abhängen.

Zufallsexperiment: In der ersten Runde werden durch Münzwurf die Richtungen der Zweigabschnitte ermittelt, welche in den dick eingezeichneten Punkten der Abb. 3 enden. Dabei soll ein Zweigabschnitt diagonal von rechts unten nach links oben gezeichnet werden, wenn der Wurf „Zahl“ (Z) ergibt. Zeigt der Wurf

Abb. 3 Zufallsbedingte Verzweigungen. Z und Ä geben beispielhaft die Wurfresultate der ersten Runde an



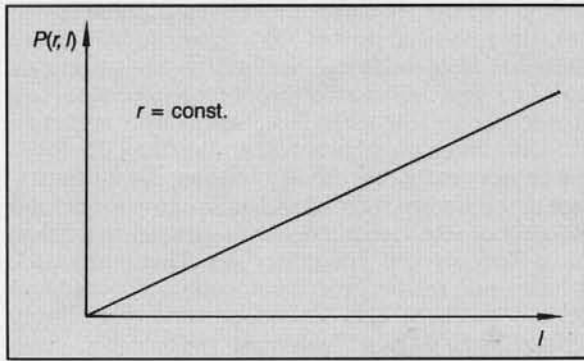


Abb. 5 Die Leistung $P(r, l)$ in Abhängigkeit von der Röhrenlänge l bei konstantem Röhrendurchmesser

Maß für die Stärke des austretenden Luftstroms. Durch entsprechend starkes Pusten versuche man jetzt, bei den unten genannten Fällen a) und b) die gleiche Stromstärke zu erzielen.

Fall a): Vergleich zwischen einem Rohr mit einfacher und mit doppelter Länge bei gleichem Querschnitt.

Fall b): Vergleich zwischen einem Rohr mit einfachem und doppelt so großem Radius bei gleicher Länge.

Der Versuch zeigt, daß man umso mehr Energie investieren muß, um eine konstante Stromstärke aufrecht zu erhalten, je länger das Rohr oder je dünner das Rohr ist. Der zuletzt genannte Effekt ist dabei besonders stark spürbar. Es gilt also:

- Vergr. sich r , so verkleinert sich $P_R(r, l)$.
- Vergr. sich l , so vergr. sich auch $P_R(r, l)$.

Die im folgenden zu betrachtende gesamte Leistung (Energie pro Zeiteinheit) P ergibt sich dann aus:

$$P(r, l) = P_{st}(r, l) + P_R(r, l) \quad (4)$$

Nach den Gesetzen (2) und (3) wächst P monoton mit l . Dieses ist in Abb. 5 dargestellt. (Dabei berücksichtigt die Abbildung, daß eine quantitative Analyse das Wachstum als linear auszeichnen würde).

Das Verhalten von P in Abhängigkeit von r ist nach (2) und (3) offensichtlich komplizierter: Für kleines r dominiert der Term P_R in (4) und damit ein Abfall von P mit wachsendem r ; für großes r dominiert der Term P_{st} in (4) und damit das monoton wachsende Verhalten von P mit r . Insgesamt ergibt sich der in Abb. 6 dargestellte Zusammenhang mit einem lokalen Minimum von P beim Radius r_{min} .

Wir können jetzt das Ökonomieprinzip anwenden, nach welchem verzweigungsfreie Aststücke eines Baumes so dimensioniert sind, daß der Ausdruck (4) minimal wird:

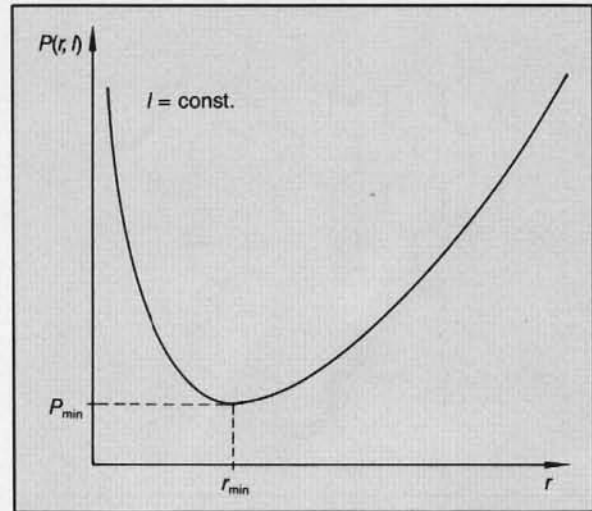


Abb. 6 Die Leistung $P(r, l)$ in Abhängigkeit vom Röhrenradius r bei konstanter Röhrenlänge l

— Aus dem monoton wachsenden Zusammenhang zwischen P und l folgt, daß die Ast- und Zweigstücke gerade sein müssen, da die kürzeste Verbindungslinien zweier Punkte eine Gerade darstellt. Willkürliche Krümmungen von Zweigstücken wie in Abb. 3 oder 4 sind damit ausgeschlossen.

— Das lokale Minimum von P in Abb. 6 bedeutet, daß jede Abweichung von r_{min} die erforderliche Leistung für den Transport erhöhen würde. Da der Radius eines Baumastes zum betrachteten Radius r der Modellröhre proportional ist, folgt hieraus, daß die betrachteten Ast- und Zweigstücke keine plötzlichen Verdickungen oder Verengungen aufweisen dürfen.

4.3 Ökonomische Verzweigungen

Wir betrachten hier den einfachsten Fall, bei dem sich ein Ast in genau zwei Zweige auffächert. Dies bedeutet, daß der Nährstoffstrom des Astes in zwei Teilströme zerlegt wird, welche natürlich jeweils kleiner als der Aststrom sind. Entsprechende Dickenverhältnisse müssen dann auch bei den zugehörigen Transportröhren vorliegen. Damit sagt bereits diese einfache Kontinuitätsüberlegung für den Strom voraus, daß ein sich gabelnder Ast stets dicker ist als die aus ihm hervorgehenden Zweige. Berücksichtigt man darüber hinaus, daß für den Ast vor der Gabelung als auch für die Zweige hinter der Gabelung die Überle-



Abb. 7 Grenzfälle für die Dickenverhältnisse hinter einer Astgabelung:
a Der links abbiegende Zweig ist vergleichsweise dünn.
b Beide Zweige sind gleich dick

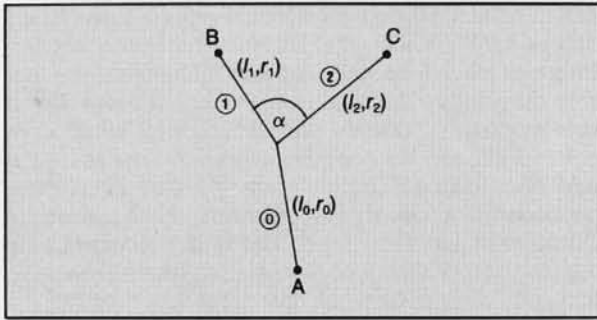


Abb. 8 Versorgung zweier Punkte B und C mit Nährstoffen vom Punkt A aus mit Hilfe einer Verzweigung. l_i ist die Länge und r_i der Radius des Leitungsstücks Nr. i ($i = 0,1,2$). α bezeichnet den Winkel zwischen den Zweigen (1) und (2)

gungen zum Ökonomieprinzip aus dem vorherigen Abschnitt anwendbar sind, so lassen sich sogar genauere Angaben über die Dickenverhältnisse bei den Zweigen machen (vgl. Murray 1926).

Für die folgenden qualitativen Überlegungen ist hier nur wichtig, daß nach der oben angesprochenen Kontinuitätsvorstellung der eine Zweig hinter der Gabelung umso dünner ist, je dicker der andere Zweig ist. Damit lassen sich zwei Grenzfälle unterscheiden:

— Der eine Zweig ist extrem dünn gegenüber dem anderen Zweig (Abb. 7a).

— Beide Zweige einer Gabelung sind gleich dick (Abb. 7b).

Wir wollen hier die Gesetzmäßigkeit für den Winkel zwischen den beiden Zweigen näher betrachten, denn diese ist den Schülern bei ihren Beobachtungen noch am auffälligsten:

— Sind beide Zweige gleich dick, so mißt man stets Winkel von ca. 60° bis 75° .

— Je dünner der eine Zweig gegenüber dem anderen Zweig wird, desto näher rückt der Winkel an den Grenzwert 90° .

Nehmen wir also an, die Nährstoffleitung des Astes gehe durch den Punkt A und habe über eine Gabelung die Punkte B und C zu versorgen. Die Längen der auftretenden Leitungsstücke seien mit l_0 , l_1 und l_2 , die Radien der Leitungsstücke mit r_0 , r_1 und r_2 bezeichnet (Abb. 8). Das Ökonomieprinzip verlangt eine Minimierung der Gesamtleistung

$$P_{\text{ges}} = P(r_0, l_0) + P(r_1, l_1) + P(r_2, l_2). \quad (5)$$

Wir betrachten die Extremfälle.

Fall a): r_2 ist extrem klein gegenüber r_1 .

Dann muß r_1 fast so groß wie r_0 sein, so daß der größte Teil des Nährstoffes durch die Leitungsstücke (0) und (1) wandert. Die für diesen Teil erforderliche Leistung ist nach Abschnitt 4.2 (vgl. Abb. 5) umso

Abb. 9 Zur Minimierung der Gesamtleistung für den Nährstofftransport bei extrem dünnem Zweig (2)

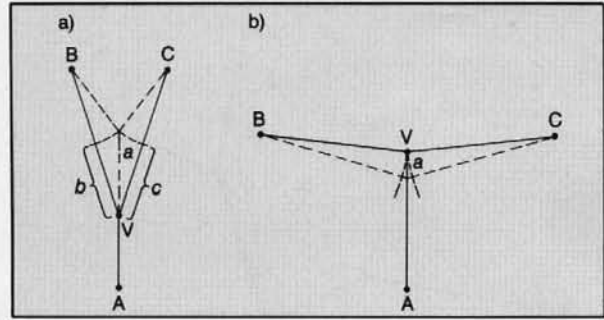
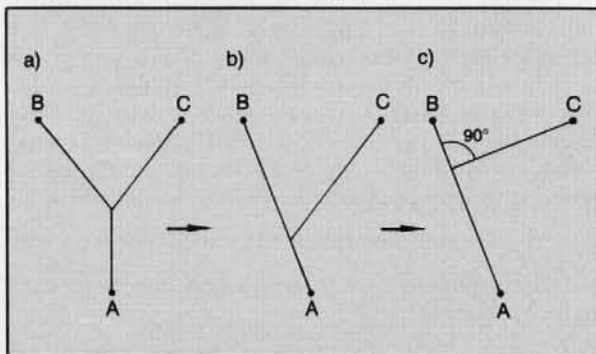


Abb. 10 Zur Minimierung der erforderlichen Leistung bei gleich dicken Zweigen

niedriger, je kleiner die Gesamtröhrenlänge zwischen den Punkten A und B ist. Deren Minimum wird offensichtlich erreicht, wenn die Verbindung der Punkte A und B eine Gerade bildet (Abb. 9b). Zur Minimierung von Ausdruck (5) ist schließlich noch der durch die Leitung (2) fließende Teilstrom zu berücksichtigen. Um die für diesen Teilstrom erforderliche Leistung ebenfalls möglichst gering zu halten, ist die Länge l_2 zu minimieren, was den erwarteten Wert $\alpha = 90^\circ$ für den Winkel zwischen den Zweigen (1) und (2) zur Folge hat (Abb. 9c).

Fall b): r_1 und r_2 sind gleich groß.

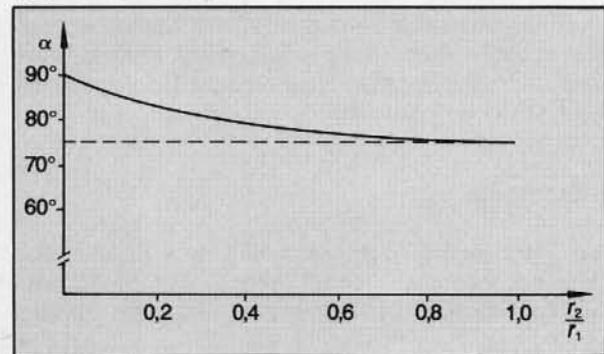
Dann sind die Zweige (1) und (2) bzgl. der Nährstoffleitung nicht unterscheidbar, so daß eine prinzipiell symmetrische Situation wie in Abb. 10 vorliegen muß. Daß dabei der Winkel α einen wohldefinierten, für alle Bäume gültigen Wert annehmen muß, demonstriert die Abb. 10.

Ein extrem kleiner Winkel α liegt in Abb. 10a vor, wenn V den Verzweigungspunkt darstellt. Vergrößert man α , indem man V weiter nach oben verlegt, so spart man Leistung P ein, da dabei die beiden vergleichsweise engen Röhrenstücke b und c durch ein einziges, dickeres Röhrenstück a ersetzt werden. Ein größerer Winkel α ist also ökonomischer.

Andererseits kann α auch nicht so extrem groß sein wie in Abb. 10b. Verkleinert man hier α durch Absenken von V, so werden die Zweigleitungen von B und C nur wenig länger, die Zuleitung durch A wird jedoch deutlich um das Röhrenstück a verkürzt, so daß die erforderliche Gesamtleistung geringer wird. Ein kleinerer Winkel α ist also ökonomischer.

P erreicht damit sein Minimum zwischen den Extremfällen von Abb. 10a und Abb. 10b. Eine quantitative Betrachtung unseres Modells zeigt, daß dieses bei $\alpha = 75^\circ$ der Fall ist (vgl. Rodewald/Schlichting 1984). Im allgemeinen liegen die Radien der Zweige zwi-

Abb. 11 Der Winkel α als Funktion des Zweigradienverhältnisses r_2/r_1



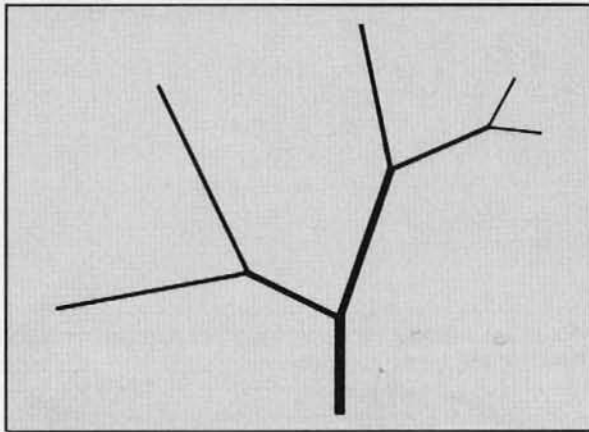


Abb. 12 Der Modellbaum

schen den beiden betrachteten Grenzfällen, so daß der Winkel α im Bereich $75^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ variiert. Abb. 11 gibt diesen Sachverhalt wieder (Murray 1926).

5 Der Modellbaum

Faßt man die hier angestellten Stabilitätsüberlegungen, die Schlußfolgerungen aus dem Ökonomieprinzip und das Zufallsgeschehen beim Aufbau von Verzweigungen zusammen, so ergibt sich das Bild eines Modellbaumes, welcher einem realen Baum bereits erstaunlich ähnlich sieht. Abb. 12 zeigt das Muster, welches aus dem Verzweigungsdiagramm von Abb. 3 bzw. Abb. 4 bei Berücksichtigung der genannten physikalischen Prinzipien entsteht.

Springen, Gehen, Laufen

Von Bernd Rodewald und Hans Joachim Schlichting

Die folgenden Ausführungen beschäftigen sich mit der Fortbewegung des Menschen. Dieses Kapitel der Biophysik läßt sich durch sehr einfache Experimente mit dem eigenen Körper erschließen und ist ein vorzügliches Anwendungsgebiet für die aus dem Physikunterricht bekannten Grundprinzipien der Mechanik und Energetik.

Wir beginnen unsere Erörterungen mit dem Springen, welches als typische Fortbewegungsmöglichkeit von Frosch, Känguruh, Floh oder Heuschrecke bekannt ist. Wenngleich das Springen für den Menschen nur eine untergeordnete Rolle spielt, so ist seine Erörterung nichtsdestoweniger grundlegend für die Physik des Gehens und Laufens.

1 Springen

Wir betrachten hier das sehr lehrreiche Beispiel des „Sprungs aus dem Stand“ durch den Menschen. Wenn dieser die Masse m besitzt und beim Sprung

Unser Modell ist natürlich noch viel zu einfach, als daß es die Wirklichkeit erschöpfend erfassen könnte. Immer wieder wird man auf Abweichungen von den hier dargelegten Voraussagen treffen, da eine Reihe von Wachstumsfaktoren unberücksichtigt blieb: Zum Beispiel können Verzweigungswinkel kleiner ausfallen und Aststücke gekrümmt sein, weil das Ringen um ausreichend Licht dieses erfordert, konkurrierende Pflanzen in der Nähe stehen, der Boden sich im Laufe der Zeit verschoben hat, der Mensch durch Beschneiden o. ä. eingegriffen hat und dergleichen mehr.

Literatur

- [1] Gerthsen, Ch./Kneser, H. O./Vogel, H.: Physik. Berlin, Heidelberg, New York: 14. Aufl., Springer 1982
- [2] McMahon, T. A./Bonner, J. T.: Form und Leben. Heidelberg: Spektrum 1985
- [3] Murray, C. D.: The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries. Journal of General Physiology 9 (1926), S. 835
- [4] Nachtigall, W.: Unbekannte Umwelt. Hamburg: Hoffmann u. Campe 1979
- [5] Prigogine, I.: Vom Sein zum Werden. München, Zürich: Piper 1979
- [6] Rodewald, B./Schlichting, H. J.: Vorlesungsmanuskript 1984 (unveröffentlicht)
- [7] Schlichting, H. J.: Energie und Energieentwertung. Heidelberg: Quelle & Meyer 1983
- [8] Stevens, P. S.: Zauber der Formen in der Natur. München, Wien: Oldenbourg Verlag 1983

Anschrift der Verfasser:

Dr. Bernd Rodewald / Priv. Doz. Dr. Hans Joachim Schlichting,
Universität Osnabrück, Postfach 4469, 4500 Osnabrück

seinen Schwerpunkt um die Höhe h anhebt, so muß er die potentielle Energie

$$W_{\text{pot}} = mgh \quad (1)$$

aufbringen ($g = \text{Erdbeschleunigung}$).

Da diese Energie durch die Beinmuskeln aufgebracht werden muß, gibt die erreichte Höhe h Aufschluß über die hierzu erforderliche Beinmuskulatur F_B . Um diese berechnen zu können, benötigt man noch die Strecke s , entlang der F_B ausgeübt wird. Abb. 1 veranschaulicht eine mögliche Modellvorstellung, aus der sich s ergibt: Ober- und Unterschenkel seien halb so lang wie die Beine der Länge l . Sie bilden in der Hockstellung beim Absprung einen rechten Winkel. Indem der Körper aus dieser Hockstellung in eine gestreckte Sprunghaltung übergeht, um sodann anzuheben, durchmißt er (Satz des Pythagoras) die Strecke

$$s = l(1 - 1/\sqrt{2}). \quad (2)$$

Auf dieser Strecke s wirke die als konstant angenommene Muskelkraft F_B .