* Lehrplankapitel Dynamische Prozesse

Lehrplan AHS - Oberstufe

8. Klasse

Franz Schlöglhofer

19. 3.2013

Lehrplan AHS - Oberstufe 8. Klasse

Dynamische Prozesse

* Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzengleichungen oder Differentialgleichungen
* Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen
* Lösen von einfachen Differentialgleichungen, insbesondere $y' = k.y$

*Grundkompetenzen

Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können

Wissenschaft

Dynamische Systeme

Systemdynamik

Dynamisches Verhalten

Mathematische Methoden

Darstellungen

Berechnungen - Simulationen

*Club of Rome

Nichtkommerzielle Organisation, die einen globalen Gedankenaustausch zu verschiedenen internationalen politischen Fragen betreibt.

Mit dem 1972 veröffentlichten Bericht *Die Grenzen des Wachstums* erlangte der Club of Rome große weltweite Beachtung (z.B. Rohstoffmangel).

http://de.wikipedia.org/wiki/Club_of_Rome

System Dynamics

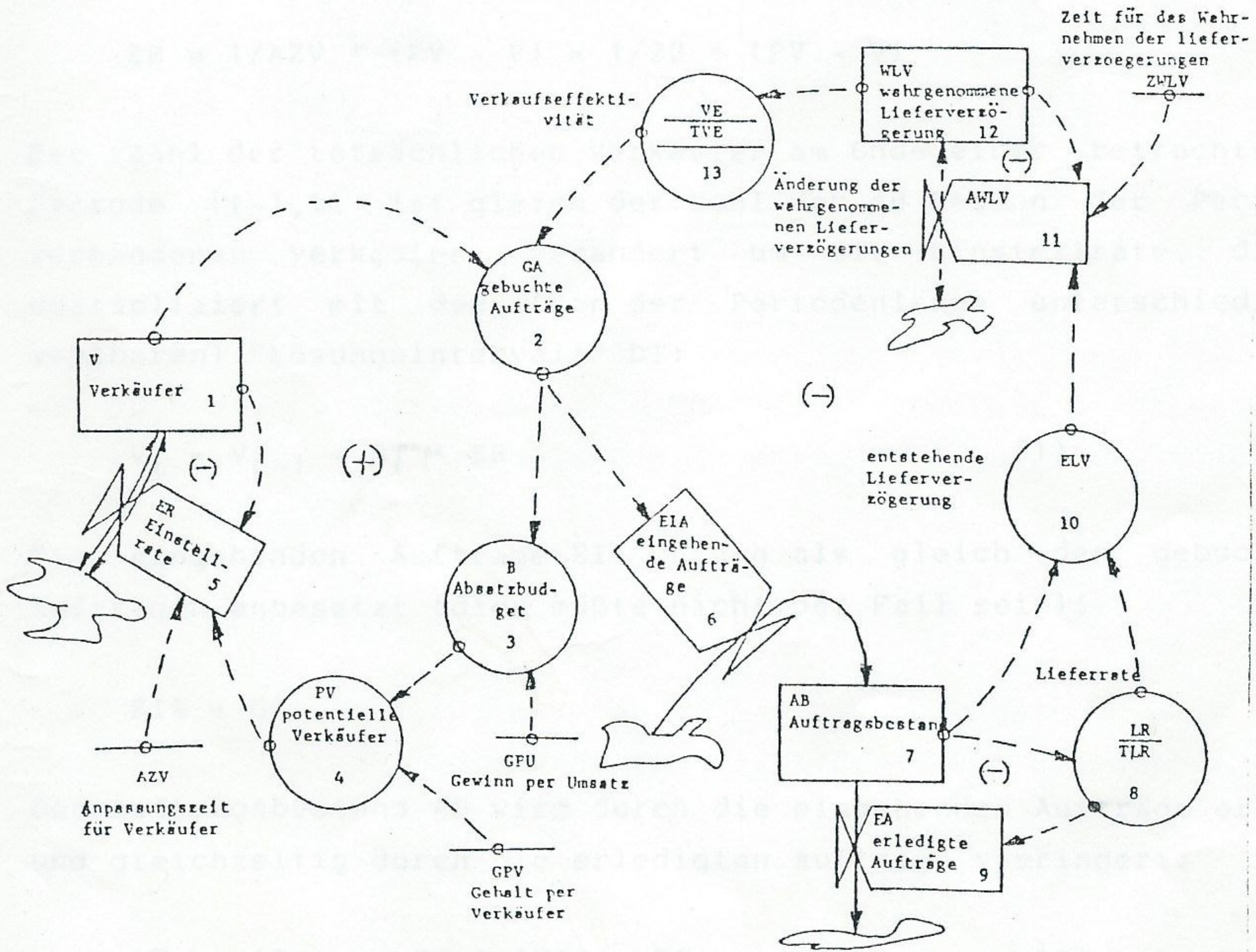
Jay W.Forrester ca. 1960 am MIT:

Methodik zur ganzheitlichen Analyse und Modellsimulation komplexer und dynamischer Systeme

Qualitative Modelle:
Kausaldiagramme (influence diagrams)

Quantitative Modelle:
Flussdiagramme (flow diagrams)

Simulation am Computer:
DYNAMO (Programmiersprache)


Zeit für das Wahrnehmen der lieferverzoegerungen
ZWLV
WLV
wahrgenommene Lieferverzögerung 12
Verkaufseffektivität
VE
TVE
13
Änderung der wahrgenommenen Lieferverzögerungen
AWLV
11
(−)
GA
gebuchte Aufträge
2
V
Verkäufer
1
(−)
(+)
ER
Einstellrate
5
(−)
entstehende Lieferverzögerung
ELV
10
B
Absatzbudget
3
EIA
eingehende Aufträge
6
Lieferrate
PV
potentielle Verkäufer
4
AZV
Anpassungszeit für Verkäufer
GPU
Gewinn per Umsatz
AB
Auftragsbestand
7
LR
TLR
8
(−)
EA
erledigte Aufträge
9
GPV
Gehalt per Verkäufer

… Our intuition is reliable only in very straightforward situations. In the more complex dynamic structures , which increasingly dominate our lives, the intuition carried over from simple systems is misleading.

As an example, in simple systems we learn that cause and effect are closely related in both time and space; in touching a hot stove, the hand is burned now and it is burned here. We repeatedly learn to expect a close association between action and the result.

In more complex systems, however, the cause of a symptom may lie far back in time in a remote part of the system. Only through study of structure and behavior can we develop intuition that is reliable when confronted by complexity.

Schule

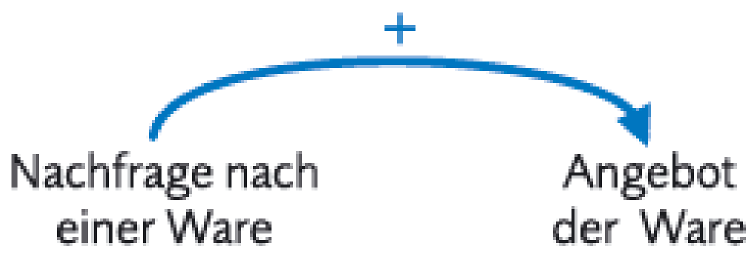
und

„Vernetzte Systeme“?

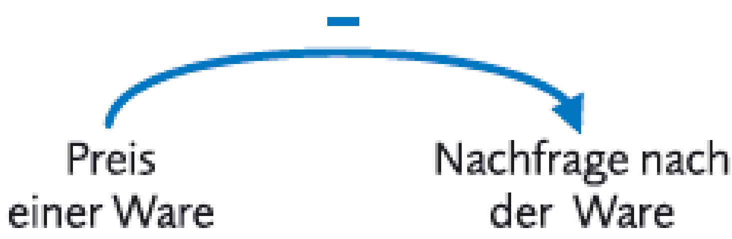
Qualitative Modelle

Mit Hilfe von Pfeilen werden Wirkungen dargestellt, die Systemgrößen aufeinander ausüben.

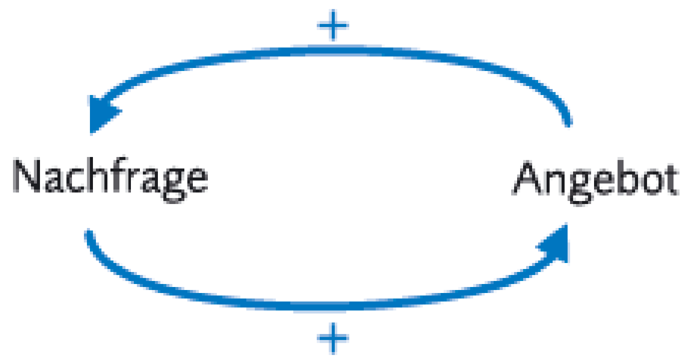
Der mit „+“ bewertete Pfeil soll bedeuten: Wenn die Nachfrage nach einer Ware steigt, so steigt auch das Angebot. Wenn die Nachfrage nach der Ware sinkt, so wird auch das Angebot sinken.



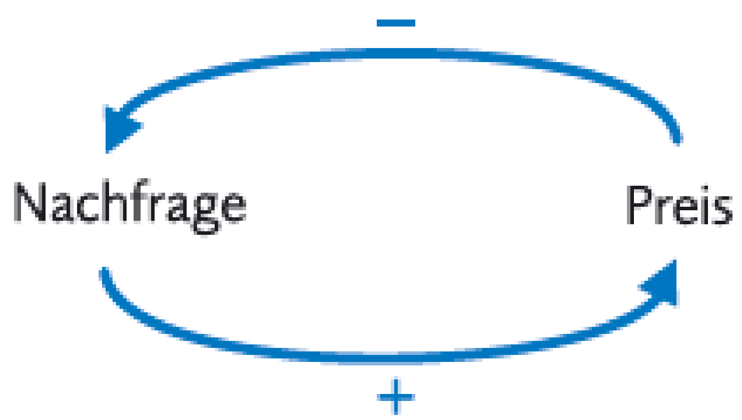
Der mit „–“ bewertete Pfeil soll bedeuten: Wenn der Preis einer Ware steigt, so wird die Nachfrage nach dieser Ware abnehmen. Wenn der Preis einer Ware sinkt, so wird die Nachfrage zunehmen.

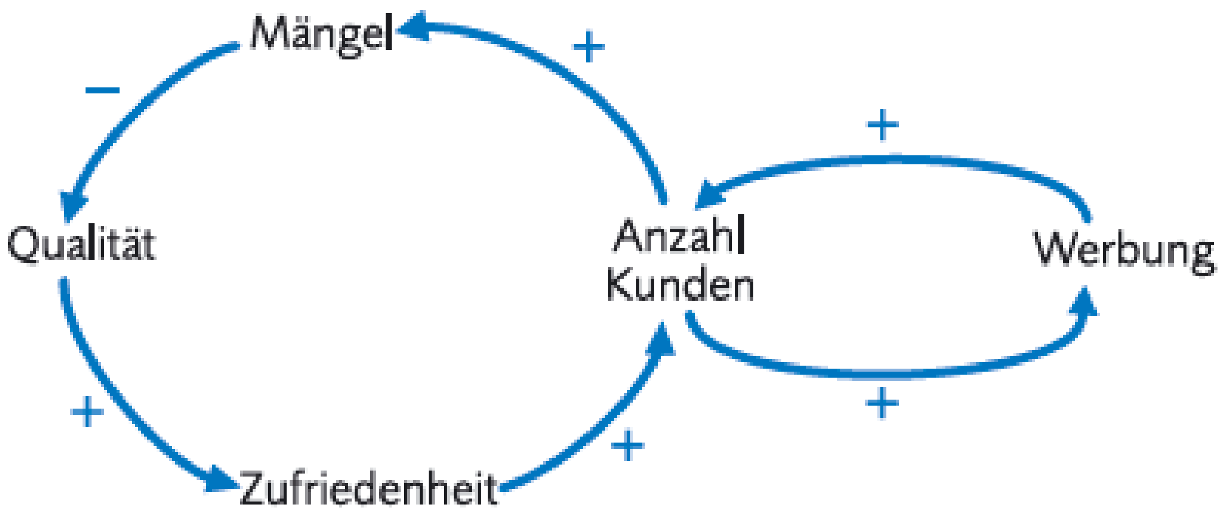


Eskalierender Rückkopplungskreis: Beide Pfeile sind mit „+“ bewertet. Ein Wirtschafter kann dies folgendermaßen interpretieren:
Je größer die Nachfrage ist, desto größer wird das Angebot und je größer das Angebot ist, desto größer wird die Nachfrage. Man kann den Rückkopplungskreis auch in der anderen Richtung interpretieren: Je kleiner die Nachfrage ist, desto kleiner wird das Angebot und je kleiner das Angebot ist, desto kleiner wird die Nachfrage usw.

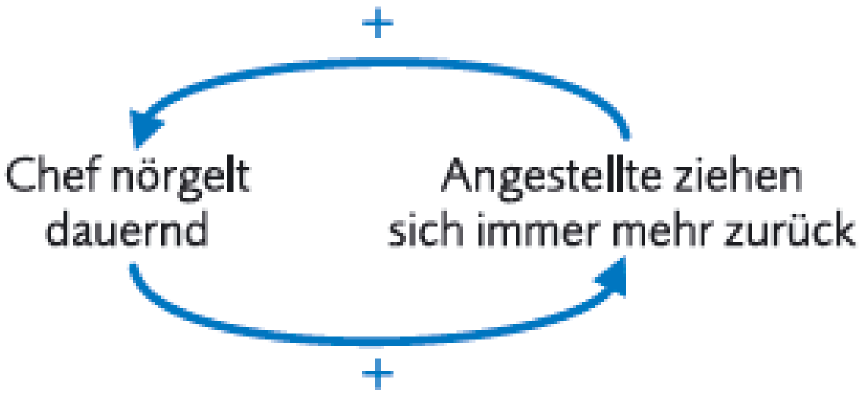


Stabilisierender Rückkopplungskreis: Ein Pfeil ist mit „+“ bewertet, der andere mit „−“. Man kann folgendermaßen interpretieren:
Je größer die Nachfrage ist, desto höher wird der Preis (z.B. wenn dadurch das Angebot sinkt), aber je höher der Preis ist, desto geringer wird die Nachfrage.





Dynamik in sozialen Systemen (Paul Watzlawick)



Darstellung

Kommunikation

Differenzengleichungen

Rückblick auf bereits behandelte Folgen (Differenzengleichungen)

Einfache Wachstumsmodelle

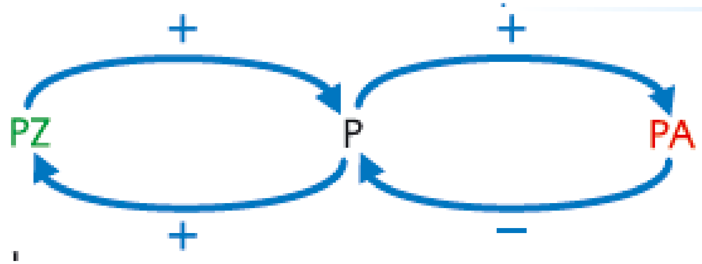
Arithmetische Folge
(Lineares Wachstum)
$x_{n+1} = x_n + 3,\ x_0 = 1$
$x_1 = x_0 + 3 = 4$
$x_2 = x_1 + 3 = 7$
...

Geometrische Folge
(Exponentielles Wachstum)
$x_{n+1} = x_0 \cdot 3,\ x_0 = 1$
$x_1 = x_0 \cdot 3 = 3$
$x_2 = x_1 \cdot 3 = 9$
...

Ein einfaches Populationsmodell

In diesem Modell nehmen wir an, dass es eine Zunahme und eine Abnahme gibt, die beide proportional zur Bestandsgröße sind. Berechnung der Anzahl der Individuen $P_0, P_1, P_2, \ldots$ einer Population nach folgender Gleichung:

$$P_{n+1} = P_n + \underbrace{z \cdot P_n}_{PZ} - \underbrace{a \cdot P_n}_{PA}$$



Die Zunahme PZ und die Abnahme PA sind jeweils proportional zu P_n.
Je größer z ist, desto größer ist die Zunahme, je größer a, desto größer die Abnahme.

$P_{n+1} = P_n + 0{,}5 \cdot P_n - 0{,}1 \cdot P_n = 1{,}4 \cdot P_n$
$P_{n+1} = 1{,}4 \cdot P_n$
$P_0 = 100,\ P_1 = 140,\ P_2 = 196, \ldots$

$P_{n+1} = P_n + 0{,}2 \cdot P_n - 0{,}4 \cdot P_n = 0{,}8 \cdot P_n$
$P_{n+1} = 0{,}8 \cdot P_n$
$P_0 = 100,\ P_1 = 80,\ P_2 = 64, \ldots$

$$\boxed{P_{n+1} = P_n + z \cdot P_n - a \cdot P_n}$$

$$\boxed{P_{n+1} = P_n \cdot (1 + z - a)}$$

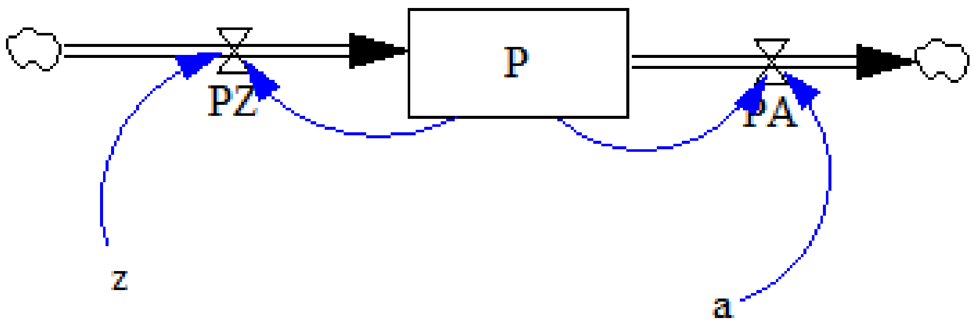
Tabellenkalkulation:

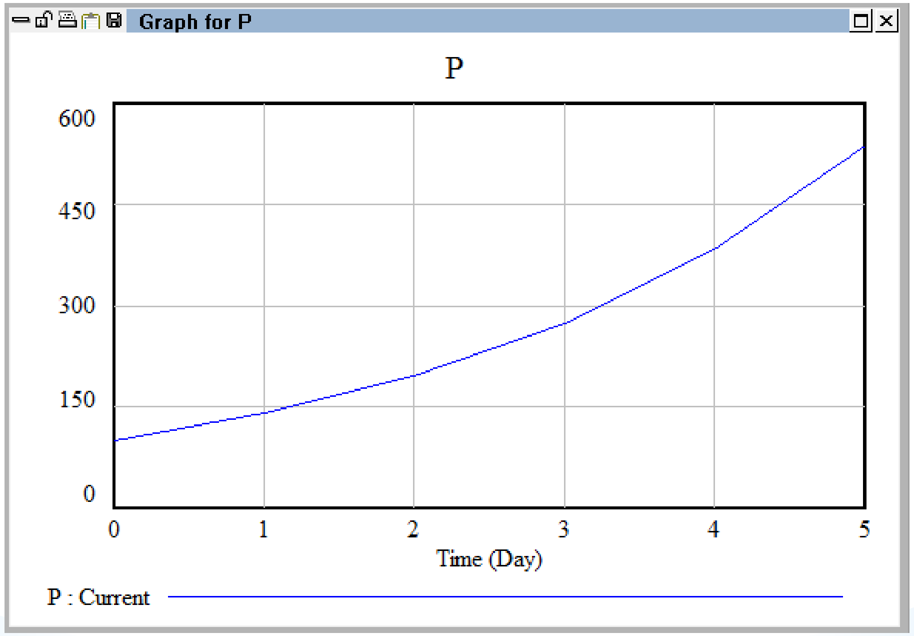
D2 =D1+$B$1*D1-$B$2*D1

	A	B	C	D	E
1	a:	0,5	0	100	
2	b:	0,1	1	140	
3			2	196	
4			3	274,4	
5			4	384,16	

„Flussdiagramm“ (flow diagram)

Software VENSIM - Modellaufbau graphisch, Simulation

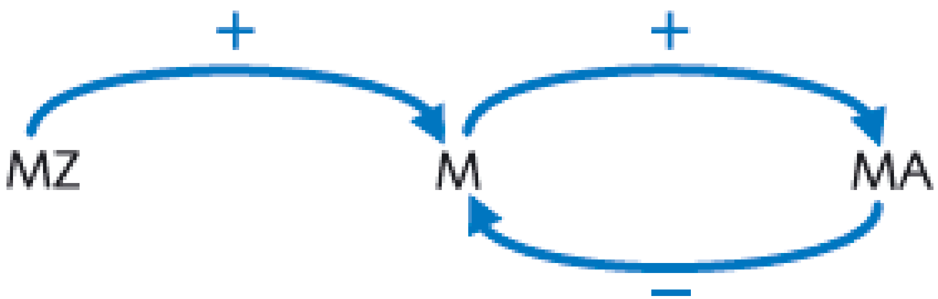




Medikamentenzufuhr und -abbau; Beschreibung durch eine Differenzengleichung

Mit x0, x1, x2, … bezeichnen wir die Menge des Medikaments (M) am 0. Tag,
1. Tag, 2. Tag, … Wir nehmen folgende Entwicklung an: Die Medikamentenzufuhr (MZ) soll am Morgen sein, der Abbau des Medikaments (MA) bis zum folgenden Morgen zum Zeitpunkt der neuerlichen Medikamentenaufnahme.

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\text{Menge am (n+1)-ten Tag}} = \underbrace{x_n}_{\text{Menge am n-ten Tag}} - \underbrace{0{,}4 \cdot x_n}_{\text{40\% abgebaut, es bleiben 60\%}} + \underbrace{20}_{\text{tägliche Zufuhr}} = 0{,}6 \cdot x_n + 20$$



0. Tag: $x_0 = 20$

1. Tag: $x_1 = 0{,}6 \cdot 20 + 20 = 32$

2. Tag: $x_2 = 0{,}6 \cdot 32 + 20 = 39{,}2$

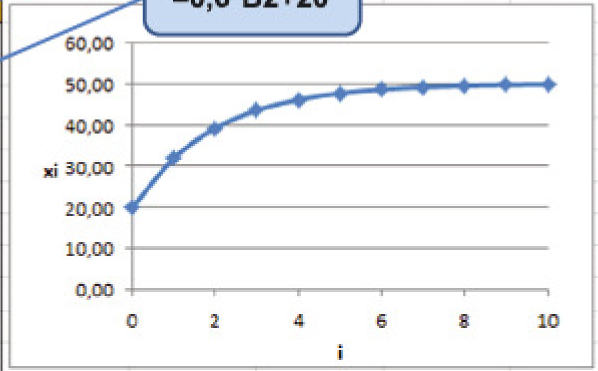
3. Tag: $x_3 = 0{,}6 \cdot 39{,}2 + 20 \approx 43{,}5$

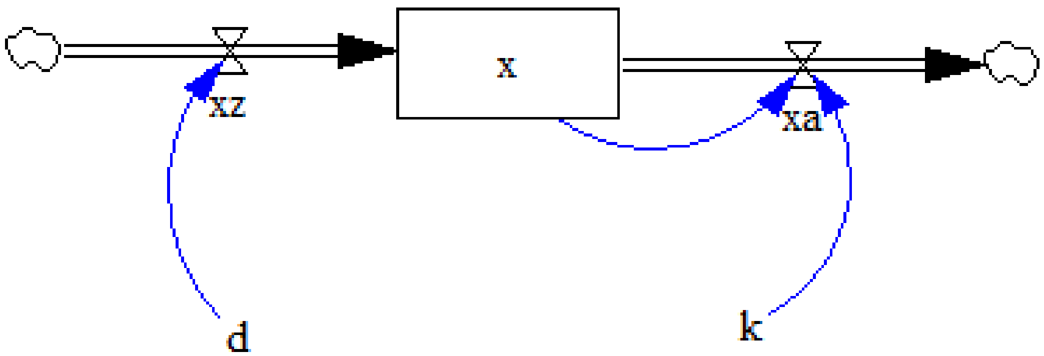
...

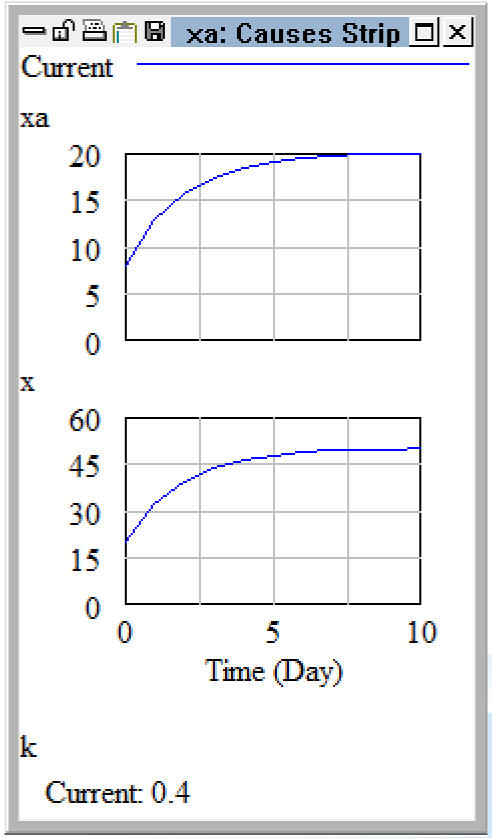
=A2+1

=0,6*B2+20

	A	B
1	i	xi
2	0	20,00
3	1	32,00
4	2	39,20
5	3	43,52
6	4	46,11
7	5	47,67
8	6	48,60
9	7	49,16
10	8	49,50
11	9	49,70
12	10	49,82







Längerfristige Prognose bei systemdynamischen Modellen:

- Ist die berechnete Folge für alle Elemente streng monoton steigend?
- Ist die Folge nach oben beschränkt, wächst sie in das Unendliche oder geht sie gegen null?
- Längerfristige Entwicklung: Gibt es einen Wert, an den sich die Folge unbegrenzt annähert?

Monotonie

Vermutung: streng monoton steigend

für die Elemente der Folge gilt: $x_1 > x_0$, $x_2 > x_1$, ...

$x_{n+1} > x_n$

Mit $x_{n+1} = 0{,}6 \cdot x_n + 20$ ergibt sich:

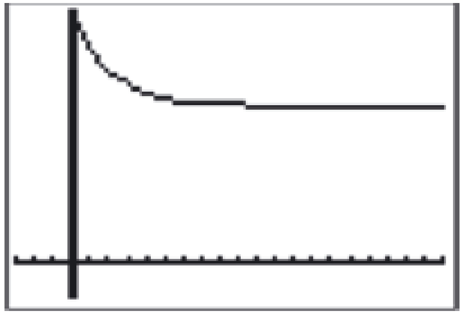
$$\begin{aligned} 0{,}6 \cdot x_n + 20 &> x_n \\ 0{,}4 \cdot x_n &< 20 \\ x_n &< 50 \end{aligned}$$

$x_0 = 50$, gleich bleibend

$$\begin{aligned} x_0 &= 50 \\ x_1 &= 0{,}6 \cdot x_0 + 20 \\ &= 0{,}6 \cdot 50 + 20 \\ &= 50 \end{aligned}$$

...

$x_0 = 80$, fallend

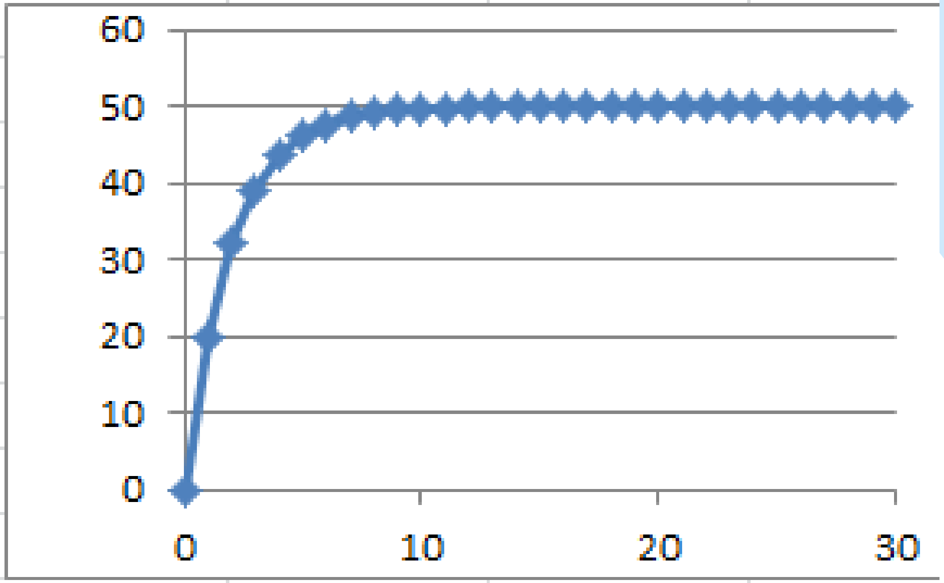


$$\begin{aligned} x_0 &= 80 \\ x_1 &= 0{,}6 \cdot x_0 + 20 \\ &= 0{,}6 \cdot 80 + 20 \\ &= 68 \end{aligned}$$

...

E2 f_x =$B$1*E1+$B$2

	A	B	C	D	E
1	a:	0,6		0	0
2	b:	20		1	20
3				2	32
4				3	39,2
5				4	43,52
6				5	46,112
7				6	47,6672
8				7	48,60032
9				8	49,160192



Lineare Differenzengleichungen vom Typ $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ mit dem Startwert x_0

$$x_1 = a \cdot x_0 + b$$
$$x_2 = a \cdot x_1 + b = a \cdot (a \cdot x_0 + b) + b = a^2 \cdot x_0 + a \cdot b + b$$
$$x_3 = a \cdot x_2 + b = a \cdot (a^2 \cdot x_0 + a \cdot b + b) + b = a^3 \cdot x_0 + a^2 \cdot b + a \cdot b + b$$

...

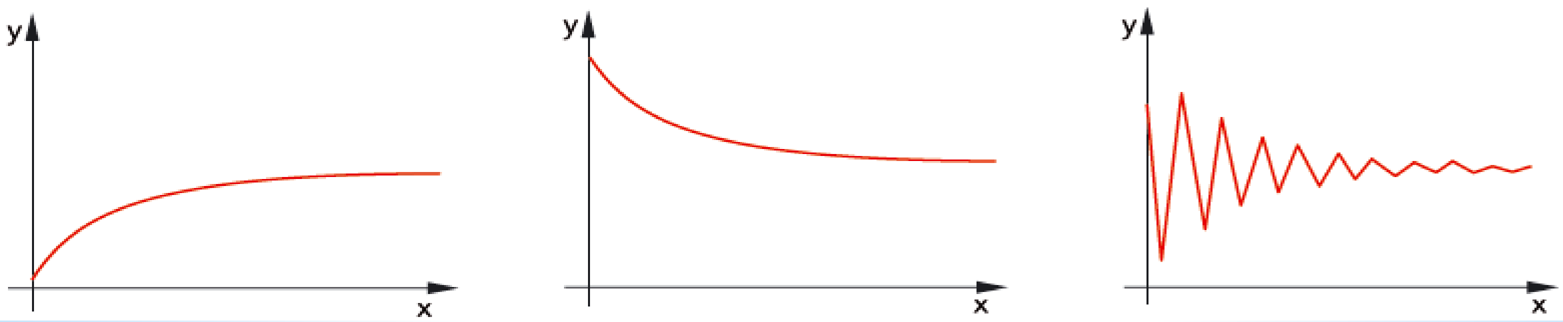
$$x_n = a \cdot x_{n-1} + b = a^n \cdot x_0 + \underbrace{a^{n-1} \cdot b + \ldots + a \cdot b + b}_{\text{geometrische Reihe}} = a^n \cdot x_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$$

Da mit $-1 < a < 1$ für den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ gilt, erhält man für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot x_0 + b \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{b}{1-a}$$

Der Grenzwert der Folge ist unabhängig vom Startwert.

Die Folge kann monoton steigend, monoton fallend, gleich bleibend oder alternierend sein



Einige Anwendungen

„Angebot-Nachfrage“-Modell

$P_n = u - v \cdot A_n, A_{n+1} = m + n \cdot P_n, u, v, m, n > 0.$

$$A_{n+1} = a \cdot A_n + b$$

Kreditzinsen - Rückzahlung

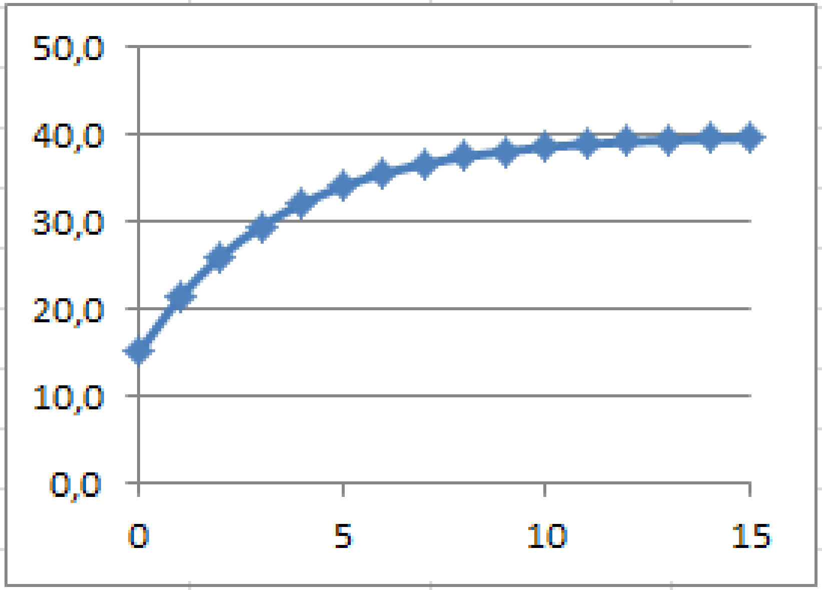
Prozentuelle Zunahme des Kreditbetrages, lineare Abnahme (Rückzahlung)

Temperaturanpassung:

Anfangstemperatur Ta, Endtemperatur Te. In jeder Periode passt sich die Temperatur um ein Viertel des verbleibenden Temperaturdifferenz an.

E2 | f_x | =E1+$B$4*($B$2-E1)

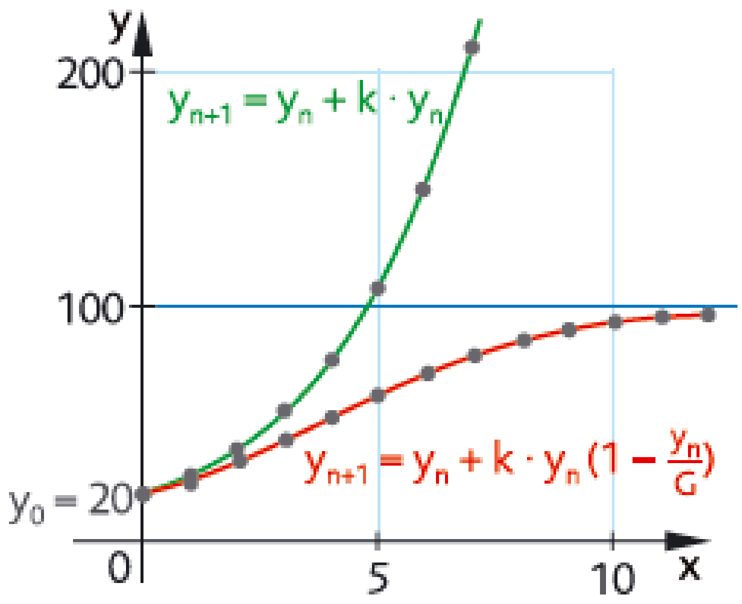
	A	B	C	D	E	F
1	Ta:	15		0	15,0	
2	Te:	40		1	21,3	
3				2	25,9	
4	r:	0,25		3	29,5	
5				4	32,1	
6				5	34,1	
7				6	35,6	
				7	36,7	
				8	37,5	
				9	38,1	
				10	38,6	



Logistisches Wachstum

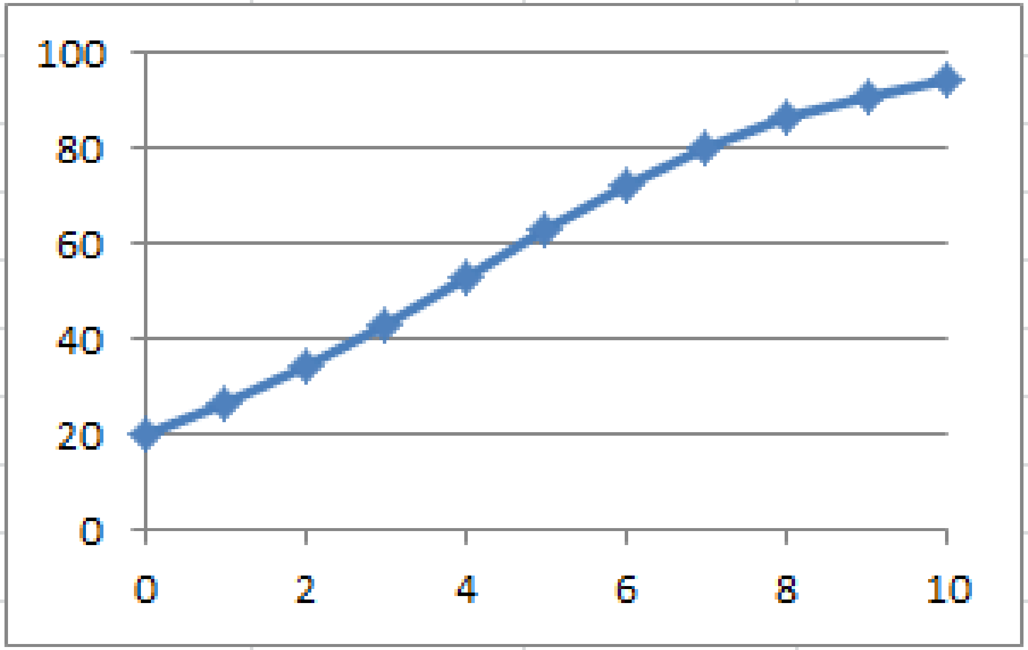
Differenzengleichung

$y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n$	$y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n \cdot \left(1 - \frac{y_n}{G}\right)$
$y_0 = 20$	$y_0 = 20$
$y_1 = 20 + 0{,}4 \cdot 20 = 28$	$y_1 = 20 + 0{,}4 \cdot 20 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 26{,}4$
$y_2 = 28 + 0{,}4 \cdot 28 = 39{,}2$	$y_2 = 26{,}4 + 0{,}4 \cdot 26{,}4 \cdot \left(1 - \frac{26{,}4}{100}\right) = 34{,}17$
...	...



E2 | f_x | =E1+$B$1*E1*(1-E1/$B$2)

	A	B	C	D	E
1	k:	0,4		0	20
2	G:	100		1	26,4
3				2	34,2
4				3	43,2
5				4	53,0
6				5	62,9
7				6	72,3
8				7	80,3
9				8	86,6
10				9	91,3



Die Differenzialgleichung $y' = k \cdot y$

Kontinuierliches Wachstumsmodell

Unter bestimmten Bedingungen nimmt eine Bakterienkultur innerhalb einer Stunde um 20% bzw. p% zu. Zum Zeitpunkt t = 0 zählt man 100 Bakterien pro Flächeneinheit. Beschreibe den Vorgang durch eine Differenzengleichung.

Mit $y_0, y_1, y_2, \ldots$ geben wir die Bakterienanzahl zu den Zeitpunkten 0, 1, 2, … an (in Stunden).

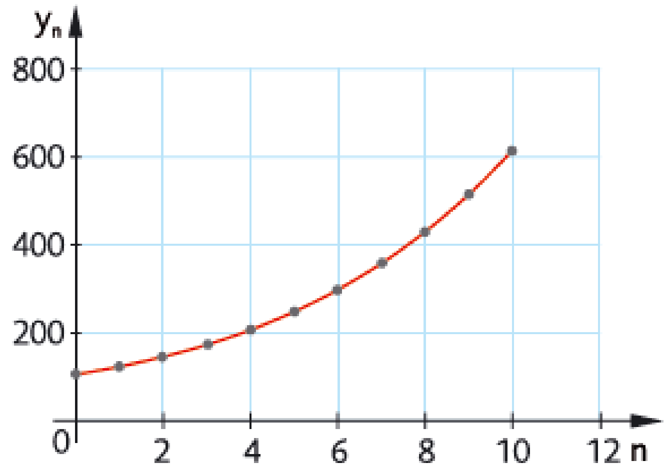
$y_0 = 100$

$y_1 = y_0 \cdot 1{,}2 = 120$

$y_2 = y_1 \cdot 1{,}2 = y_0 \cdot 1{,}2^2 = 144$

…

$y_n = y_{n-1} + y_{n-1} \cdot 0{,}2 = y_0 \cdot 1{,}2^n$



Vermehrung im Intervall $[t; t+h]$.

Änderung der Anzahl der Bakterien im Zeitintervall $[t; t+1]$: $y_{t+1} = y_t + y_t \cdot k$ (proportional zu y_t)
Änderung der Anzahl der Bakterien im Zeitintervall $[t; t+h]$: $y_{t+h} = y_t + h \cdot y_t \cdot k$

Differenzenquotient $\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = k \cdot y(t)$

Grenzübergang $h \to 0$

Die Aussage dieser Differenzialgleichung ist also, dass zu jedem Zeitpunkt die Änderungsrate der Bakterienanzahl proportional zur Bakterienanzahl ist.

Lösung der Differenzialgleichung $f'(t) = k \cdot f(t)$

Lösung der Gleichung „erraten“:

$f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ (und $c \in \mathbb{R}$ konstant)

Durch Einsetzen in die Gleichung kann man überprüfen, dass dadurch Lösungen der Gleichung gegeben sind:

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$
$$c \cdot e^{k \cdot t} \cdot k = k \cdot c \cdot e^{k \cdot t}$$

Bedeutung von c als Startwert (oder Anfangswert):

$$f(0) = f_0 = c \cdot e^{k \cdot 0} = c \cdot 1 = c$$

Daraus erkennt man, dass man c als Funktionswert zum Zeitpunkt $t = 0$ interpretieren kann und die Lösungen lauten damit: $\mathbf{f(t) = f_0 \cdot e^{k \cdot t}}$

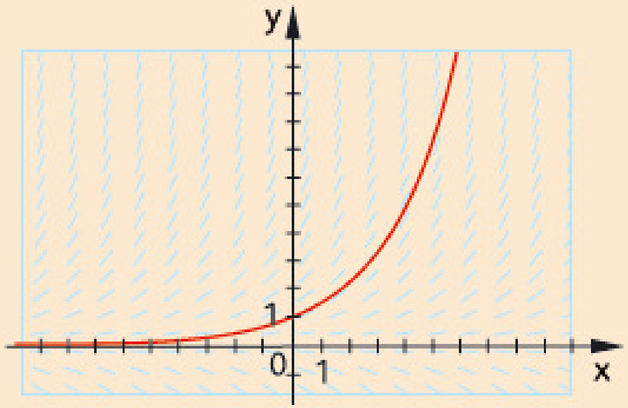
Die Differenzialgleichung $\mathbf{f'(x) = k \cdot f(x)}$ mit dem Anfangswert $\mathbf{f_0 = f(0)}$ hat als Lösungen die Exponentialfunktionen $\mathbf{f(x) = f_0 \cdot e^{k \cdot x} = f_0 \cdot a^x}$ mit der Umrechnung $a = e^k$ bzw. $k = \ln(a)$.
Die Lösungen sind eindeutig bis auf eine multiplikative Konstante.

Für $f_0 > 0$ gilt:

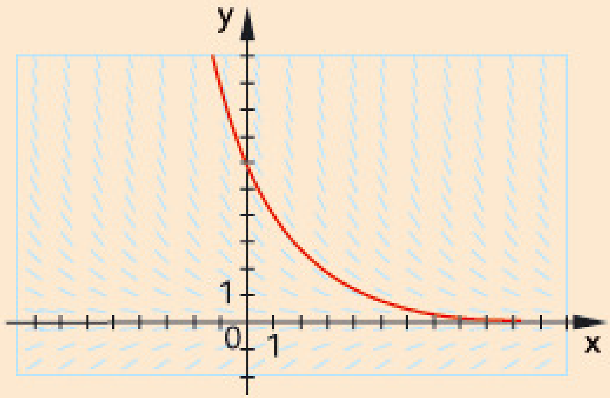
- Ist $\mathbf{k > 0}$, so ist $\mathbf{a > 1}$ und die Lösungsfunktionen sind **streng monoton steigend**.
- Ist $\mathbf{k < 0}$, so ist $\mathbf{0 < a < 1}$ und die Lösungsfunktionen sind **streng monoton fallend**.

Man kann zur Differenzialgleichung $f'(x) = k \cdot f(x)$ ein **Richtungsfeld** darstellen, indem man in jedem Punkt die Steigung ermittelt. Dazu die beiden Beispiele:

$f'(x) = 0{,}4 \cdot f(x)$, $(x_0|f_0) = (0|1)$



$f'(x) = -0{,}4 \cdot f(x)$, $(x_0|f_0) = (0|6)$



Diskrete und kontinuierliche Modelle

Einem Patienten werden täglich d mg einer Wirksubstanz zugeführt; täglich wird das k-Fache der im Blut befindlichen Substanz abgebaut.

a) Beschreibe den Vorgang zunächst durch eine Differenzengleichung.
b) Der Vorgang soll jetzt kontinuierlich erfolgen. Beschreibe den Vorgang durch eine Differenzialgleichung.

Differenzengleichung: $y_{n+1} = y_n + d - k \cdot y_n \ (k > 0)$

Differenzialgleichung zur Beschreibung der Entwicklung der Wirkstoffmenge
Übergang vom **diskreten Wachstumsmodell** zum **kontinuierlichen Wachstumsmodell**:

Wir betrachten die Entwicklung von $y(t)$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$. Die Gleichung im Intervall $[t; t+h]$ lautet:

$$y(t + h) = y(t) + h \cdot (d - k \cdot y(t))$$

Daraus ergibt sich der **Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate)**:

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = d - k \cdot y(t)$$

Mit $h \to 0$ gelangt man zum Differenzialquotienten und zur **Differenzialgleichung** $y'(t) = d - k \cdot y(t)$.

Lösung der Differenzialgleichung $y' = d - k \cdot y$

Zur Lösung verwenden wir die folgende Substitution: $z(t) = y(t) - \frac{d}{k} \Rightarrow y(t) = z(t) + \frac{d}{k} \Rightarrow y'(t) = z'(t)$

$y'(t) = d - k \cdot y(t)$	*Substitution*
$z'(t) = d - k \cdot \left(z(t) + \frac{d}{k}\right)$	*vereinfachen*
$z'(t) = -k \cdot z(t)$	*Lösung der Differenzialgleichung gemäß Kapitel 3.3.1*
$z(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}$	*Rücksubstitution*
$y(t) - \frac{d}{k} = c \cdot e^{-k \cdot t}$	$\left\vert + \frac{d}{k}\right.$
$y(t) = \frac{d}{k} + c \cdot e^{-k \cdot t}$	

Anfangsbedingung: $y(0) = y_0 = \frac{d}{k} + c \cdot e^{-k \cdot 0} = \frac{d}{k} + c \Rightarrow c = y_0 - \frac{d}{k}$

Lösung der Gleichung: $\mathbf{y(t) = \frac{d}{k} + \left(y_0 - \frac{d}{k}\right) \cdot e^{-k \cdot t}}$

$d = 20 \quad$ und $\quad k = 0{,}4.$

$y_{n+1} = y_n + 20 - 0{,}4 \cdot y_n$

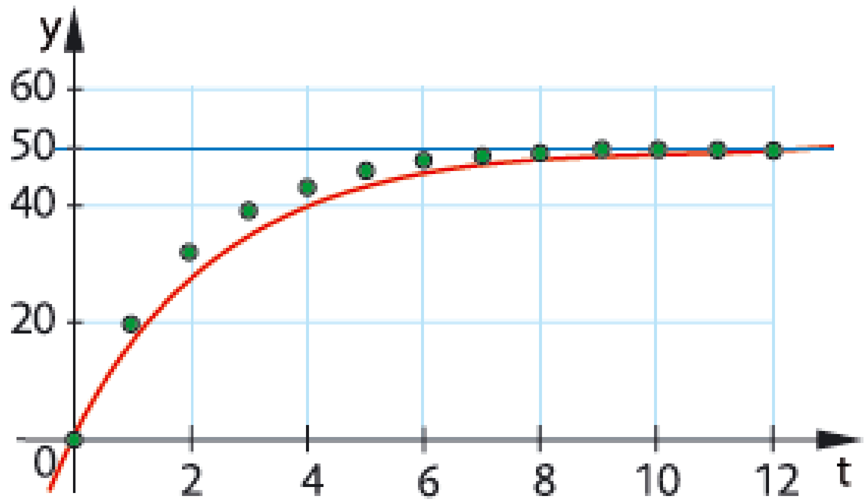
Differenzialgleichung $\; y' = 20 - 0{,}4 \cdot y$

$y(t) = 50 + (y_0 - 50) \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}$

Mit dem Anfangswert $y_0 = 0$ ergibt sich:

$$y(t) = 50 - 50 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} = 50 \cdot (1 - e^{-0{,}4 \cdot t})$$

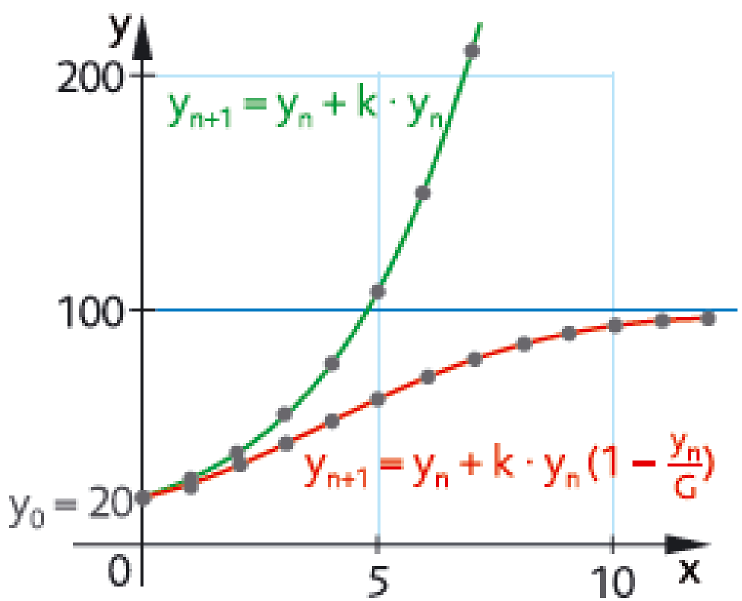
Für $t = 0$ ist $y(0) = 0$. Mit $t \to \infty$ geht $e^{-k \cdot t} \to 0$ und damit $y(t) \to 50$.



Logistisches Wachstum

Differenzengleichung

$y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n$	$y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n \cdot \left(1 - \frac{y_n}{G}\right)$
$y_0 = 20$	$y_0 = 20$
$y_1 = 20 + 0{,}4 \cdot 20 = 28$	$y_1 = 20 + 0{,}4 \cdot 20 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 26{,}4$
$y_2 = 28 + 0{,}4 \cdot 28 = 39{,}2$	$y_2 = 26{,}4 + 0{,}4 \cdot 26{,}4 \cdot \left(1 - \frac{26{,}4}{100}\right) = 34{,}17$
...	...

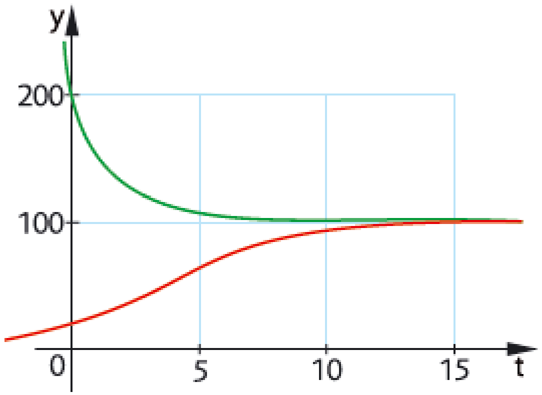


Differenzialgleichung

Differenzengleichung $y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n \cdot \left(1 - \frac{y_n}{G}\right)$

Differenzialgleichung: $y'(t) = k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{G}\right)$.

Lösungsfunktion ist $y(t) = \frac{G \cdot y_0}{y_0 + (G - y_0) \cdot e^{-k \cdot t}}$.



$$y(t+h) = y(t) + h \cdot k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{G}\right) \Rightarrow \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{G}\right)$$

Mit dem Grenzübergang $h \to 0$ ergibt sich die Differenzialgleichung:

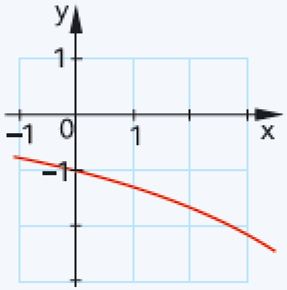
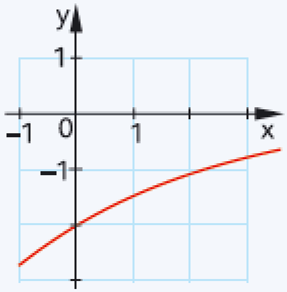
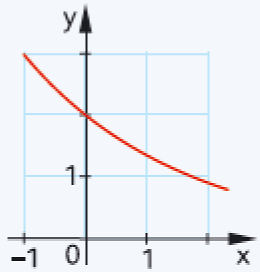
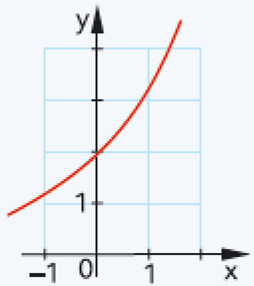
$$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{G}\right)$$

Zeige, dass $y(t) = \frac{G \cdot y_0}{y_0 + (G - y_0) \cdot e^{-k \cdot t}}$ Lösung der Differenzialgleichung ist.

Ordne die jeweilige Gleichung der entsprechenden Wachstumsform zu.

Gleichung		Wachstumsform	
A	$x_{n+1} = x_n + 0{,}3 \cdot x_n$	**1**	Lineares Wachstum
B	$x_{n+1} = x_n + 0{,}1 \cdot x_n \cdot (1 - 0{,}02 \cdot x_n)$	**2**	Medikamentenzufuhr und -abbau, Annäherung an 30
C	$x_{n+1} = x_n + 20$	**3**	Exponentielles Wachstum
D	$x_{n+1} = x_n - 0{,}8 \cdot x_n + 24,\ x_0 = 0$	**4**	Logistisches Wachstum
E	$x_{n+1} = x_n + c \cdot x_n - d \cdot x_n$	**5**	Temperaturanpassung, Annäherung an 40
F	$x_{n+1} = 0{,}25 \cdot x_n + 30,\ x_0 = 10$	**6**	Exponentielles Wachstum

Ordne der Differenzialgleichung jeweils den passenden Funktionsgraphen zu. Begründe die Zuordnung.

(A) ☐	(B) ☐	(C) ☐	(D) ☐
			

(1)	(2)	(3)	(4)
$y' = 0{,}5y,\ y_0 = 2$	$y' = -0{,}4y,\ y_0 = 2$	$y' = -0{,}3y,\ y_0 = -2$	$y' = 0{,}25y,\ y_0 = -1$

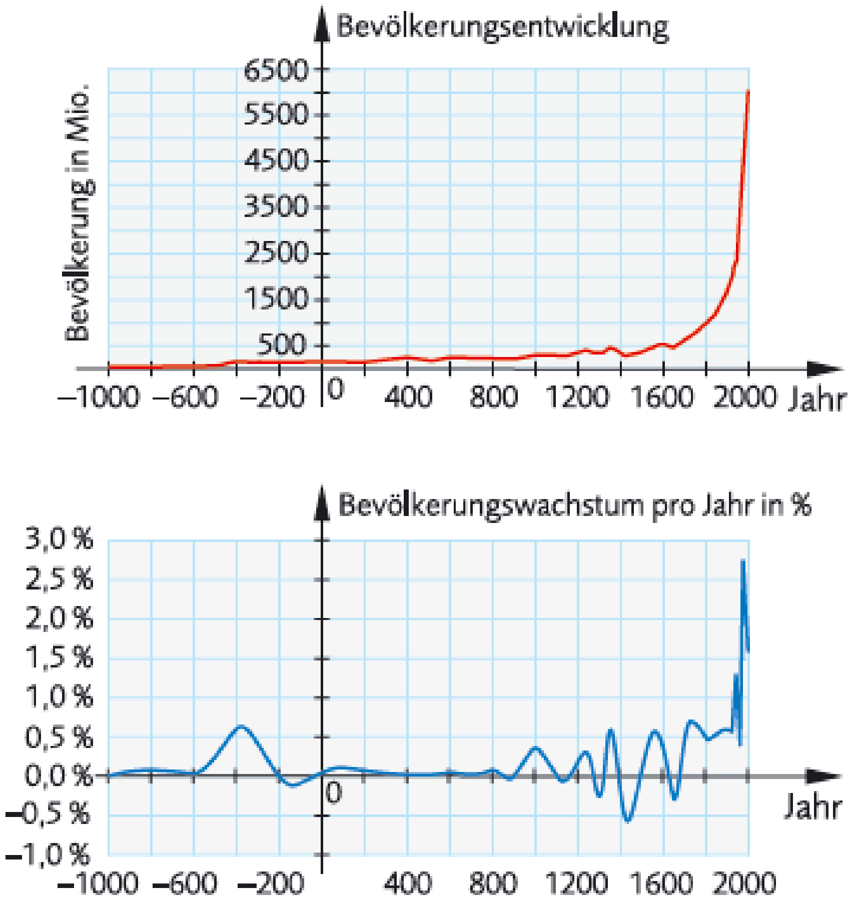
Populationsdynamik – Wechselwirkungen

Das **systemdynamische Verhalten von Größen** durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können.

- Interpretation von Datenmaterial

- Bildung von Modellen

Entwicklung der Bevölkerungszahl der Erde



Welche Funktion passst?

Exponentielles oder logistisches Wachstum der Erdbevölkerung?

Weltbevölkerung	
Jahr	Anzahl in Milliarden
1650	0,54
1750	0,73
1800	0,91
1850	1,17
1900	1,61
1930	2,07
2010	6,9

Exponentielles Wachstum

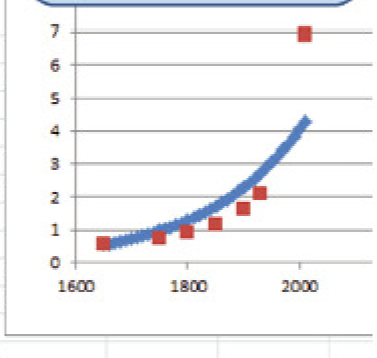
$$x_{n+1} = x_n + \frac{p}{100} \cdot x_n$$

Änderung von p (Zelle B1)

	A	B	C
1	p:	5,9	
2			
3	Jahr	Anzahl Simulation	Anzahl geschätzt
4	1650	0,545	0,545
5	1660	0,577155	
6	1670	0,61120715	
7	1680	0,64726837	
8	1690	0,6854572	
9	1700	0,72589917	
10	1710	0,76872723	
11	1720	0,81408213	
12	1730	0,86211298	
13	1740	0,91297764	
14	1750	0,96684333	0,73
15	1760	1,02388708	

=A4+10

=B4+$B$1/100*B4



Logistisches Wachstum

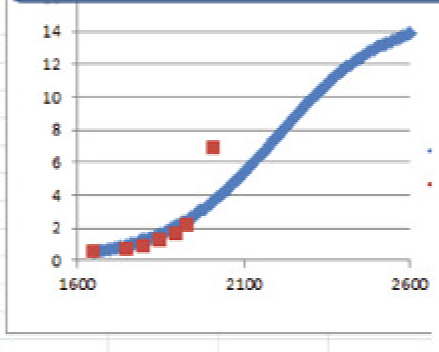
$$x_{n+1} = x_n + \frac{p}{100} \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{G}\right)$$

Änderung von p (Zelle B1) und G (Zelle B2)

	A	B	C
1	p:	6,1	
2	G:	15	
3	Jahr	Anzahl Simulation	Anzahl geschätzt
4	1650	0,545	0,545
5	1660	0,5770371	
6	1670	0,61088228	
7	1680	0,64662851	
8	1690	0,68437246	
9	1700	0,72421449	
10	1710	0,76625866	
11	1720	0,81061269	
12	1730	0,85738788	
13	1740	0,90669908	
14	1750	0,95866451	0,73
15	1760	1,01140562	

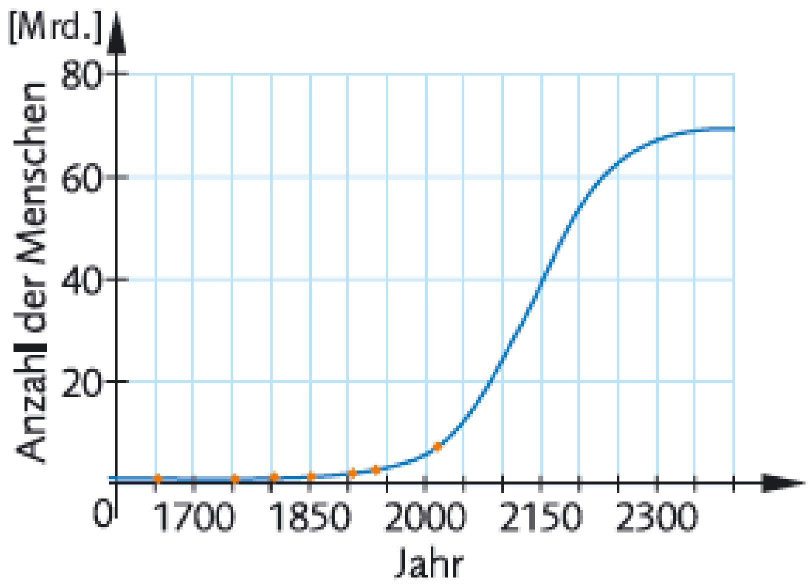
=A4+10

=B4+$B$1/100*B4*(1-B4/$B$2)



Daten von 2010 weichen erheblich ab – stärkeres Wachstum

Es ist notwendig, sorgsam mit Modellen umzugehen



Modell: Logistisches Wachstum
Regressionsanalyse
Im Jahr 2300 ca. 70 Mrd. Menschen

Wechselwirkung zwischen zwei Populationen

Konkurrenz, Symbiose, Räuber-Beute-Beziehung, …

Ein Räuber-Beute-Modell

Lotka, Volterra

Weltkrieg, obere Adria

Rückgang Fischerei

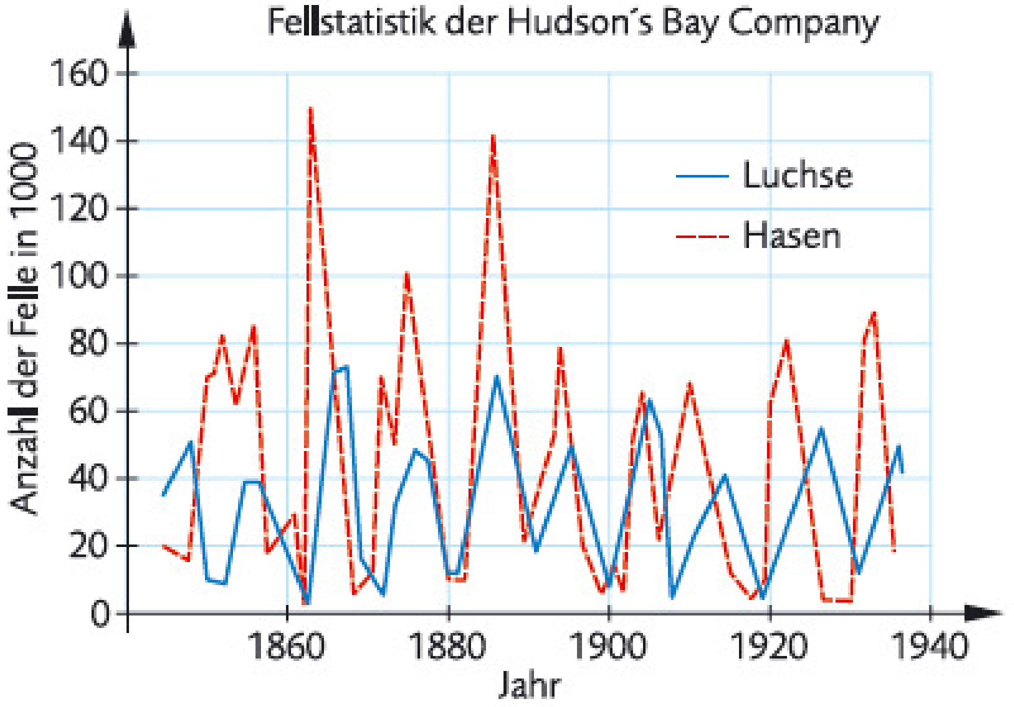
Bevorzugung der Raubfischpopulation
(beim Netzfang wird nicht unterschieden).

Anteil Raubfische unter gefischter Beute	
Jahr	Anteil Raubfische
1914	11,9 %
1915	21,4 %
1916	22,1 %
1917	21,6 %
1918	36,4 %
1919	27,3 %
1920	16,0 %
1921	15,9 %
1922	14,8 %
1923	10,7 %

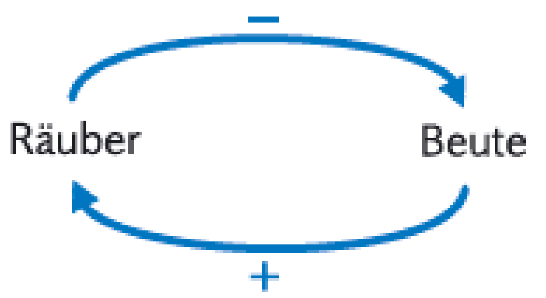
Schneehasen – Luchse

Hudson´s Bay Company

Räuber – Beute- Beziehung ?



Ursache – Wirkung - Diagramm



System von Differenzengleichungen

Aus b_n und r_n erhalten wir b_{n+1} und r_{n+1} mit den Parametern $z, a, u, v > 0$ durch folgende Formeln:

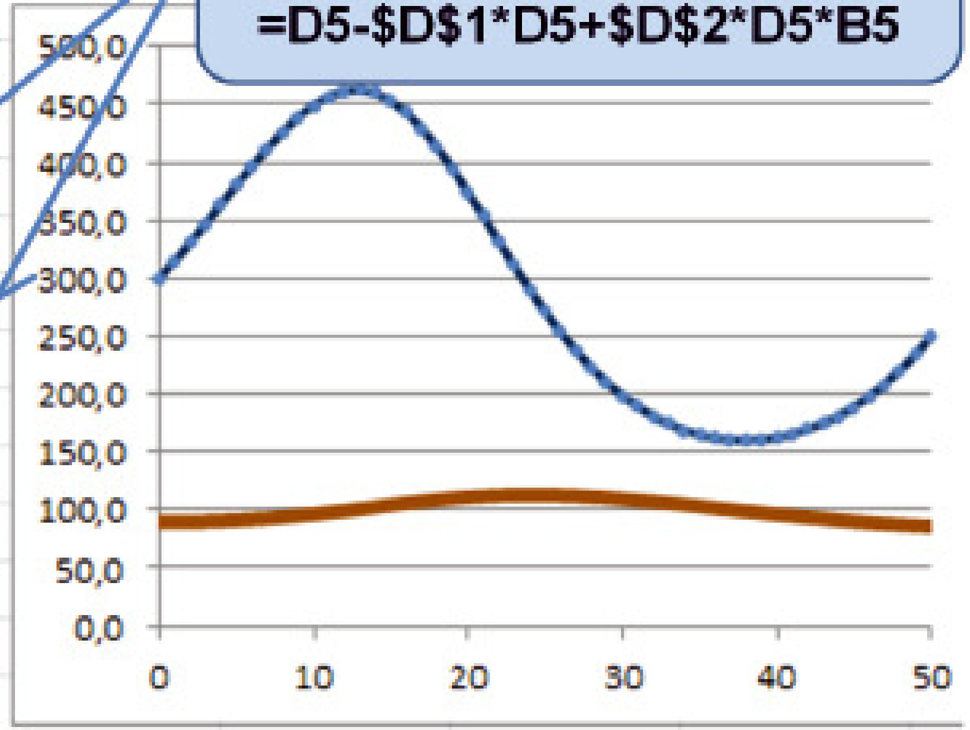
Beute:	$b_{n+1} = b_n$	$+$	$z \cdot b_n$	$-$	$u \cdot b_n \cdot r_n$
			Zunahme proportional zu b_n (ohne Einfluss der Räuber)		Abnahme proportional zum Produkt $b_n \cdot r_n$ (proportional zur Wahrscheinlichkeit des „Treffens“ zwischen Räuber und Beute)
Räuber:	$r_{n+1} = r_n$	$-$	$a \cdot r_n$	$+$	$v \cdot b_n \cdot r_n$
			Abnahme proportional zu r_n (ohne Beute sterben die Räuber aus)		Zunahme proportional zum Produkt $b_n \cdot r_n$ (proportional zur Wahrscheinlichkeit des „Treffens“ zwischen Räuber und Beute)

$$\begin{cases} b_{n+1} = b_n - 0{,}5 \cdot b_n + 0{,}005 \cdot b_n \cdot r_n \\ r_{n+1} = r_n + 0{,}03 \cdot r_n - 0{,}0001 \cdot b_n \cdot r_n \end{cases}$$

=B5+$B$1*B5-$B$2*B5*D5

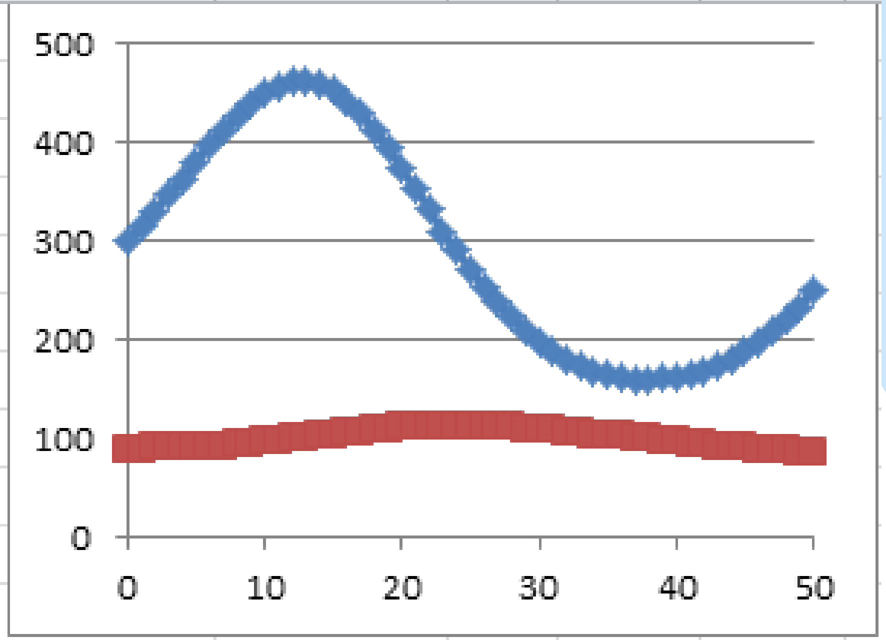
=D5-$D$1*D5+$D$2*D5*B5

	A	B	C	D
1	z:	0,5	a:	0,03
2	u:	0,005	v:	0,0001
3				
4	t	Beute		Räuber
5	0	300,0		90,0
6	1	315,0		90,0
7	2	330,8		90,1
8	3	347,1		90,4
9	4	363,7		90,8
10	5	380,4		91,4
11	6	396,7		92,2
12	7	412,3		93,0
13	8	426,6		94,1



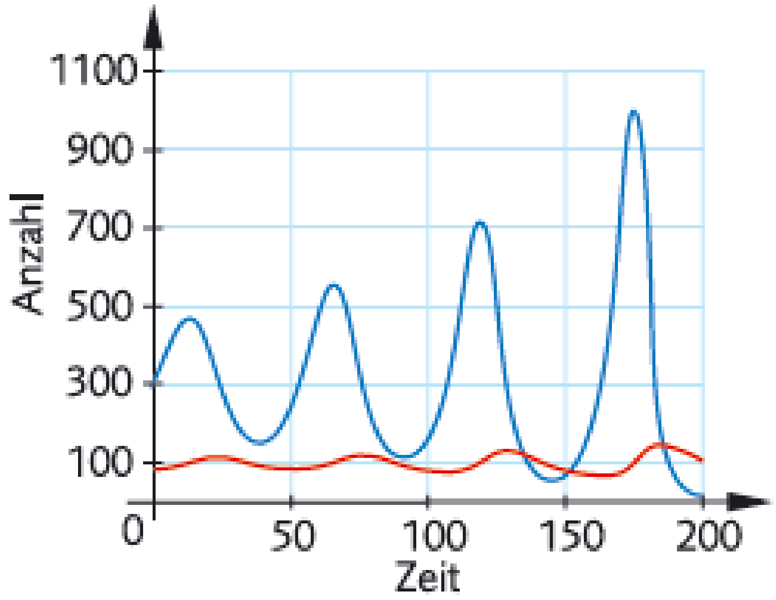
E3 f_x =E2+$B$2*E2-$B$3*E2*F2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				n	bn	rn					
2	z:	0,5		**0**	**300**	**90**					
3	u:	0,005		1	315	90					
4				2	330,75	90,135					
5	a:	0,03		3	347,0642	90,4122					
6	v:	0,0001		4	363,7022	90,8377					
7				5	380,364	91,4163					
8				6	396,6886	92,151					
9				7	412,2566	93,042					
10				8	426,599	94,0865					
11				9	439,2126	95,2776					
12				10	449,5834	96,604				r0=z/u	100
13				11	457,2174	98,049				b0=a/v	300

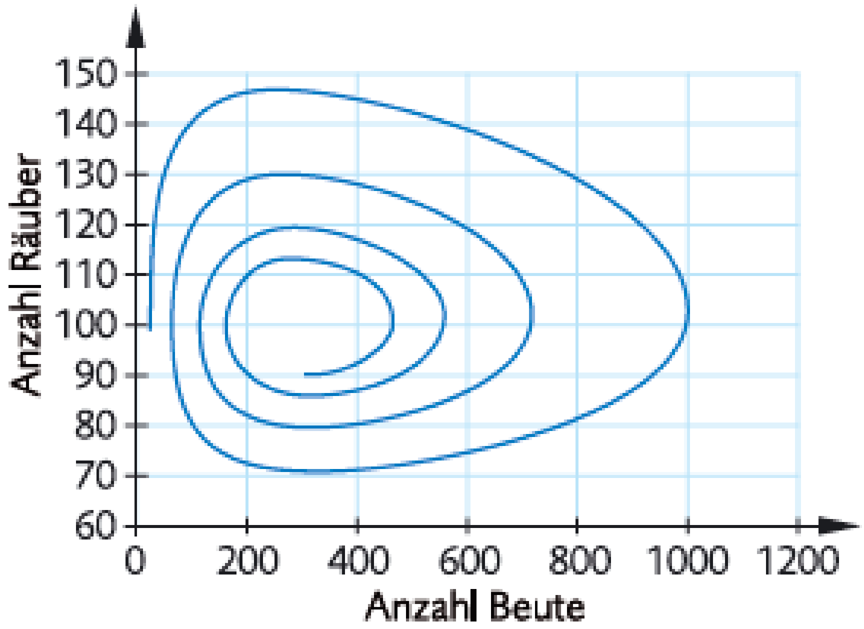


Simulation

periodische Entwicklung



Phasendiagramm



Gleichgewicht beim Räuber-Beute-Modell:

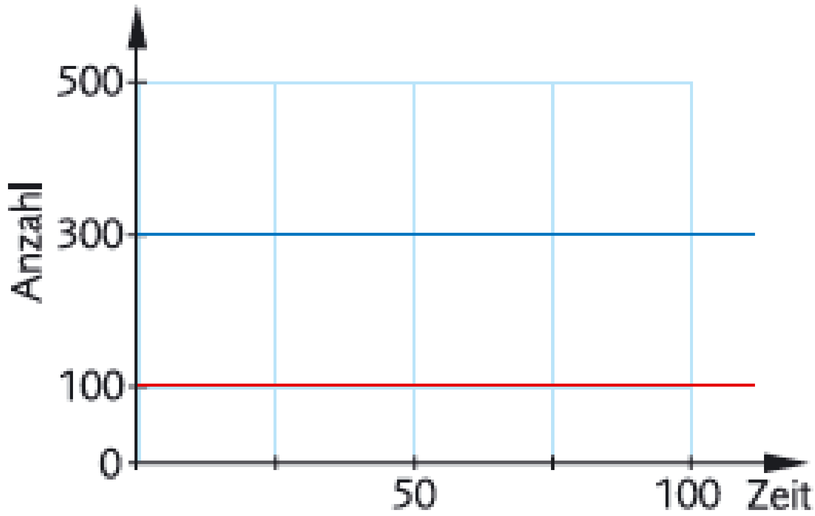
Im System soll sich nichts ändern. $b_{n+1} = b_n$ und $r_{n+1} = r_n$

$b_n = b_n + z \cdot b_n - u \cdot b_n \cdot r_n$ und $r_n = r_n - a \cdot r_n + v \cdot b_n \cdot r_n$

$0 = z \cdot b_n - u \cdot b_n \cdot r_n$ $\quad$ $0 = -a \cdot r_n + v \cdot b_n \cdot r_n$

$r_n = \frac{z}{u}$ $\quad$ $b_n = \frac{a}{v}$

$r_0 = \frac{0,5}{0,005} = 100$ $\quad$ $b_0 = \frac{0,03}{0,0001} = 300$



Bateman-Funktionen

Differenzengleichungen:

$$x_{n+1} = x_n - a \cdot x_n$$
$$y_{n+1} = y_n + a \cdot x_n - b \cdot y_n$$

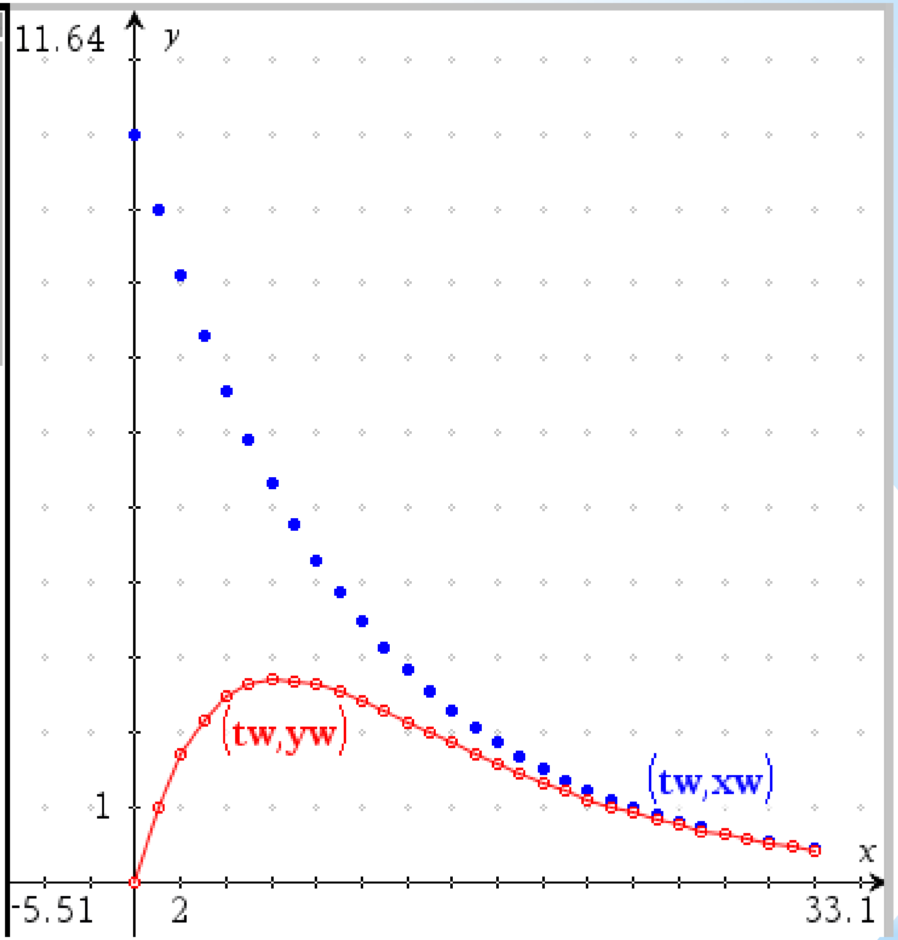
Tabellenkalkulation

	A	B	C tw	D xw	E yw	F
◆						
1	a:	**0.1**	0	10	0	
2	b:	**0.2**	1	9.	1.	
3			2	8.1	1.7	
4			3	7.29	2.17	

2. Zeile

c2: c1+1, d2: d1-a*d1, e2: e1+a*d1-b*e1

	A	B	C tw	D xw	E yw	F
◆						
1	a:	**0.1**	0	10	0	
2	b:	**0.2**	1	9.	1.	
3			2	8.1	1.7	
4			3	7.29	2.17	
5			4	6.561	2.465	
6			5	5.9049	2.6281	
7			6	5.31441	2.69297	
8			7	4.78297	2.68582	
9			8	4.30467	2.62695	
10			9	3.8742	2.53203	
11			10	3.48678	2.41304	
12			11	3.13811	2.27911	



Übergang zu einem kontinuierlichen Modell:

$$x_{t+h} = x_t - h \cdot a \cdot x_t$$
$$y_{t+h} = y_t + h \cdot (a \cdot x_t - b \cdot y_t)$$

$$\frac{x_{t+h} - x_t}{h} = -a \cdot x_t$$
$$\frac{y_{t+h} - y_t}{h} = a \cdot x_t - b \cdot y_t$$

$$\lim_{h \to 0} (x, y)$$

$$\boldsymbol{x'(t) = -a \cdot x(t)}$$
$$\boldsymbol{y'(t) = a \cdot x(t) - b \cdot y(t)}$$

Lösung des kontinuierlichen Modells:

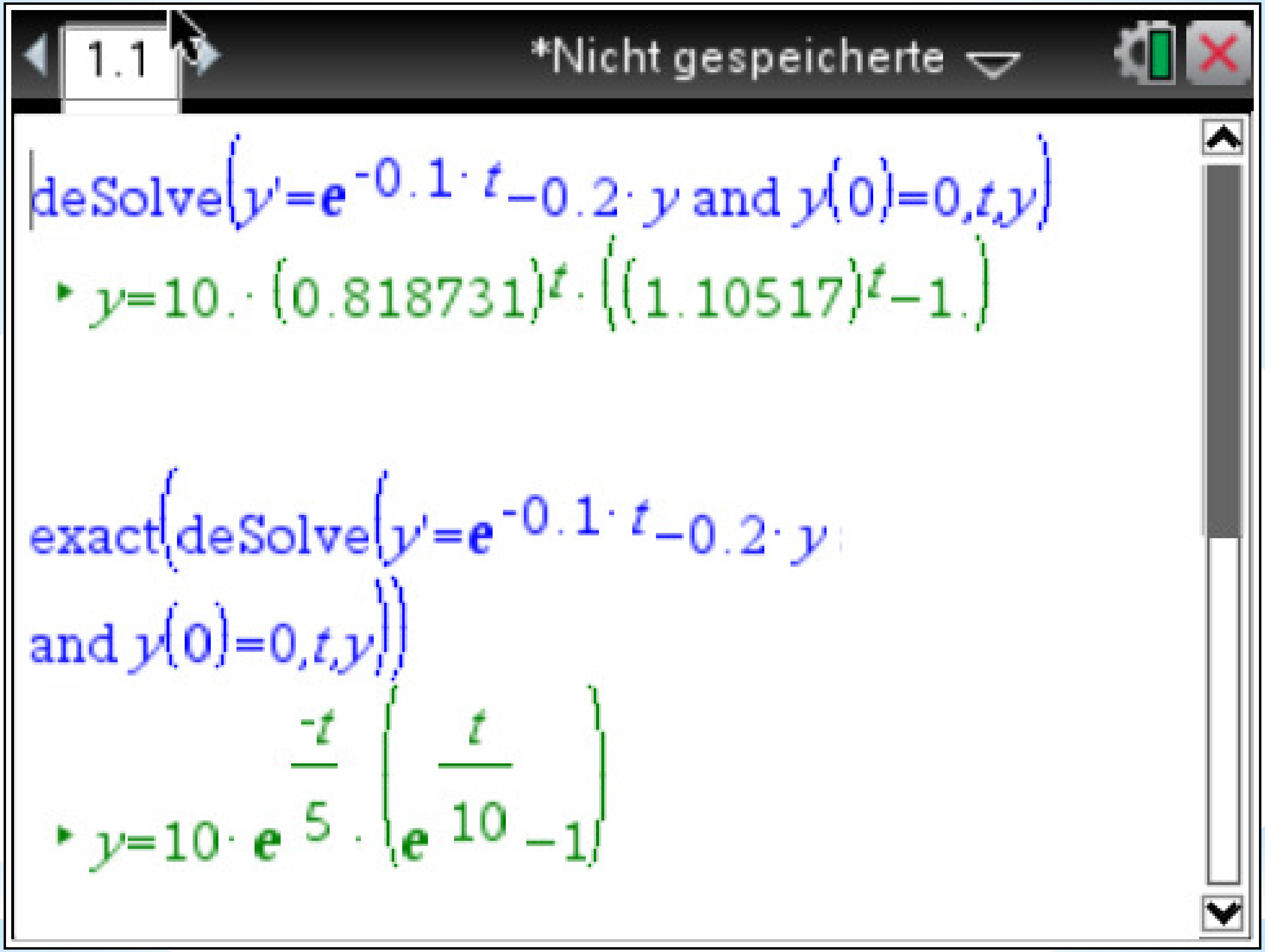
$$x'(t) = -a \cdot x(t)$$
$$y'(t) = \quad a \cdot x(t) \; - b \cdot y(t)$$

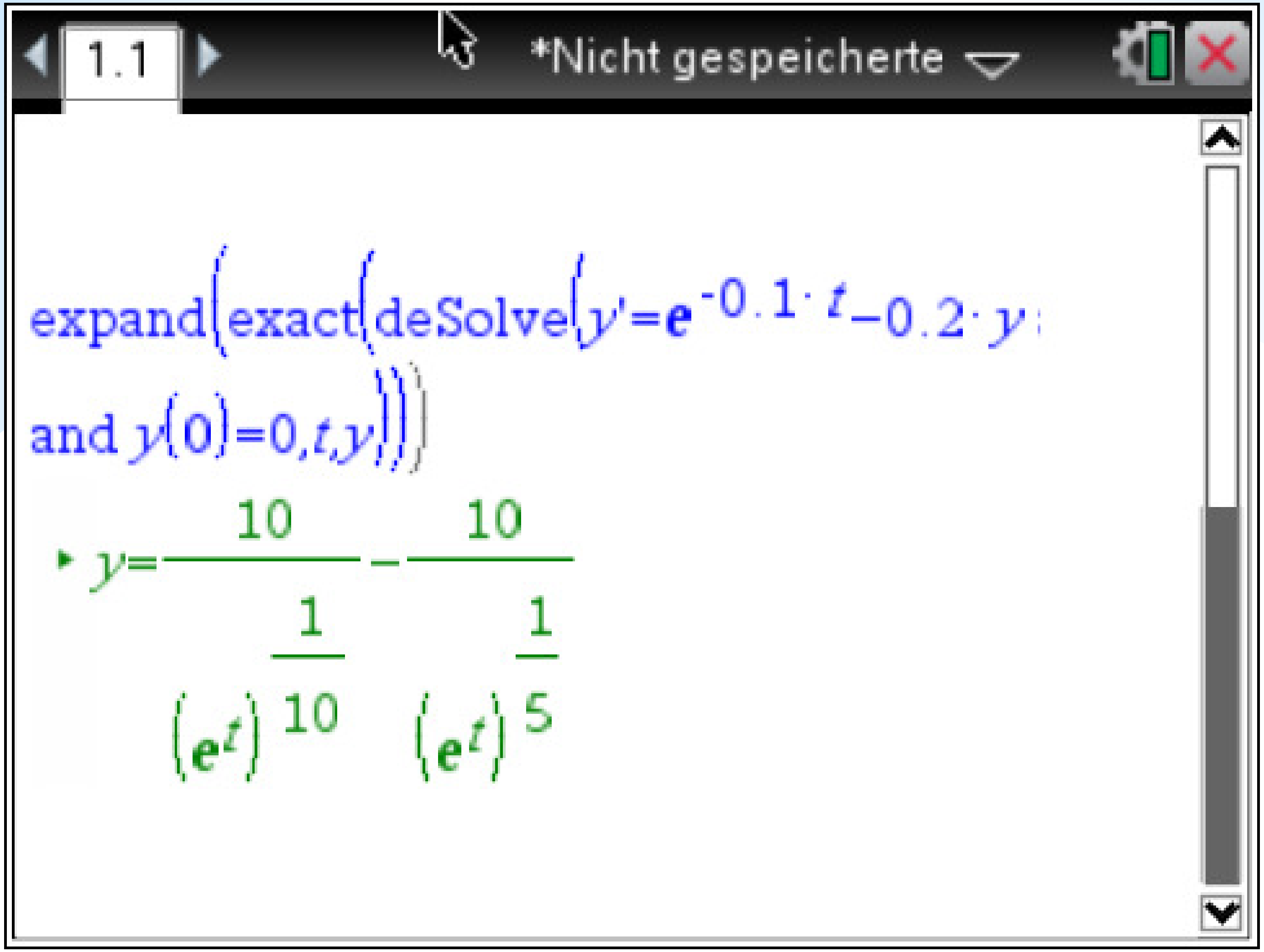
$$x'(t) = -0,1 \cdot x(t)$$
$$y'(t) = \quad 0,1 \cdot x(t) - 0,2 \cdot y(t)$$

$$x(t) = 10 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$$

$$y'(t) = \; 0,1 \cdot 10 \cdot e^{-0,1 \cdot t} - 0,2 \cdot y(t)$$

$$y'(t) = e^{-0,1 \cdot t} - 0,2 \cdot y(t) \qquad y(0) = 0$$


1.1
*Nicht gespeicherte
deSolve(y'=e^(-0.1·t)-0.2·y and y(0)=0,t,y)
▸ y=10.·(0.818731)^t·((1.10517)^t-1.)
exact(deSolve(y'=e^(-0.1·t)-0.2·y
and y(0)=0,t,y))
▸ y=10·e^(-t/5)·(e^(t/10)-1)



$$y(t) = 10 \cdot \left(e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-0{,}2 \cdot t}\right)$$

Differenzengleichungen:

$$x_{n+1} = x_n - a \cdot x_n$$
$$y_{n+1} = y_n + a \cdot x_n - b \cdot y_n$$

Kontinuierliches Modell

$$\mathbf{y(t) = 10 \cdot (e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-0{,}2 \cdot t})}$$

Lösung der Differenzialgleichung (etwas trickreich):

$$y'(t) = e^{-0,1\cdot t} - 0,2 \cdot y(t)$$

$$y'(t) + 0,2 \cdot y(t) = e^{-0,1\cdot t} \quad | \cdot e^{0,2\cdot t}$$

$$y'(t) \cdot e^{0,2\cdot t} + 0,2 \cdot y(t) \cdot e^{0,2\cdot t} = e^{0,1\cdot t}$$

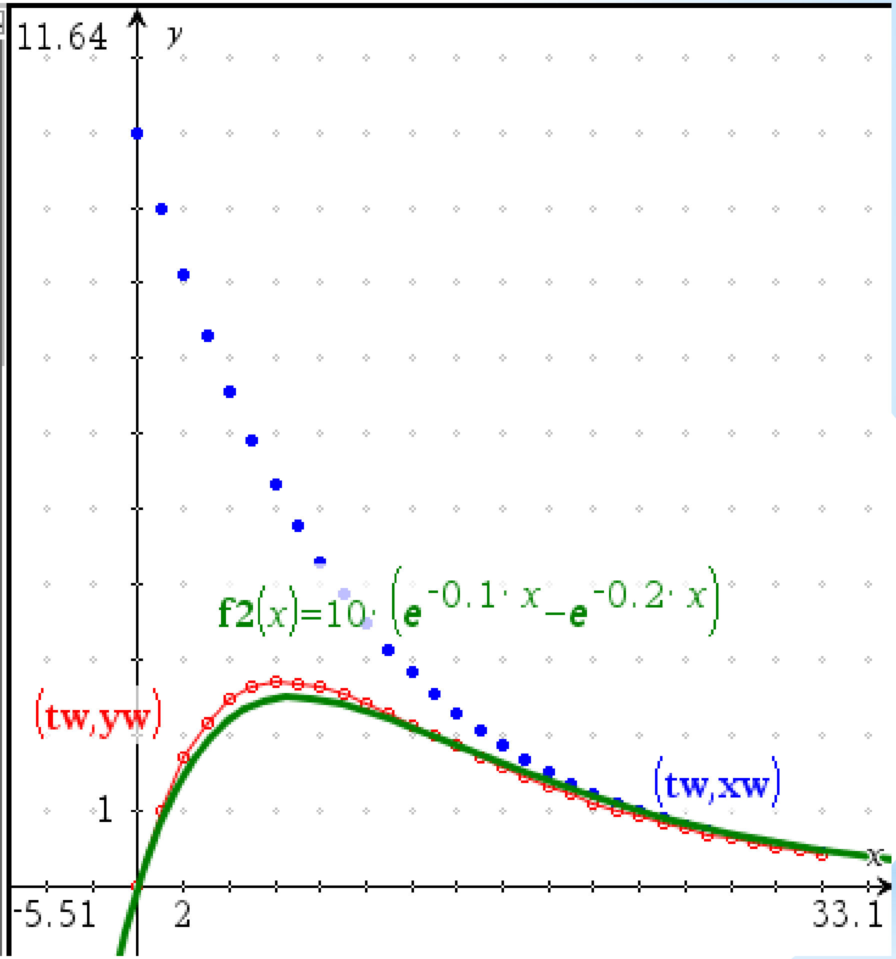
$$(y(t) \cdot e^{0,2\cdot t})' = e^{0,1\cdot t}$$

$$y(t) \cdot e^{0,2\cdot t} = 10 \cdot e^{0,1\cdot t} + c \qquad y(0) = 0 \qquad c = -10$$

$$y(t) \cdot e^{0,2\cdot t} = 10 \cdot e^{0,1\cdot t} - 10$$

$$y(t) = 10 \cdot (e^{-0,1\cdot t} - e^{-0,2\cdot t})$$

	A	B	C tw	D xw	E yw	F
◆						
1	a:	**0.1**	0	10	0	
2	b:	**0.2**	1	9.	1.	
3			2	8.1	1.7	
4			3	7.29	2.17	
5			4	6.561	2.465	
6			5	5.9049	2.6281	
7			6	5.31441	2.69297	
8			7	4.78297	2.68582	
9			8	4.30467	2.62695	
10			9	3.8742	2.53203	
11			10	3.48678	2.41304	
12			11	3.13811	2.27911	
[illegible]			12	[illegible]	[illegible]	



Funktionsuntersuchung:

$f(x):=10\cdot\left(e^{-0.1\cdot x}-e^{-0.2\cdot x}\right)$ ▸ *Fertig*

$fa(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Fertig*

$\text{exact}(fa(x))$ ▸ $-e^{\frac{-x}{5}}\cdot\left(e^{\frac{x}{10}}-2\right)$

$fa2(x):=\frac{d}{dx}(fa(x))$ ▸ *Fertig*

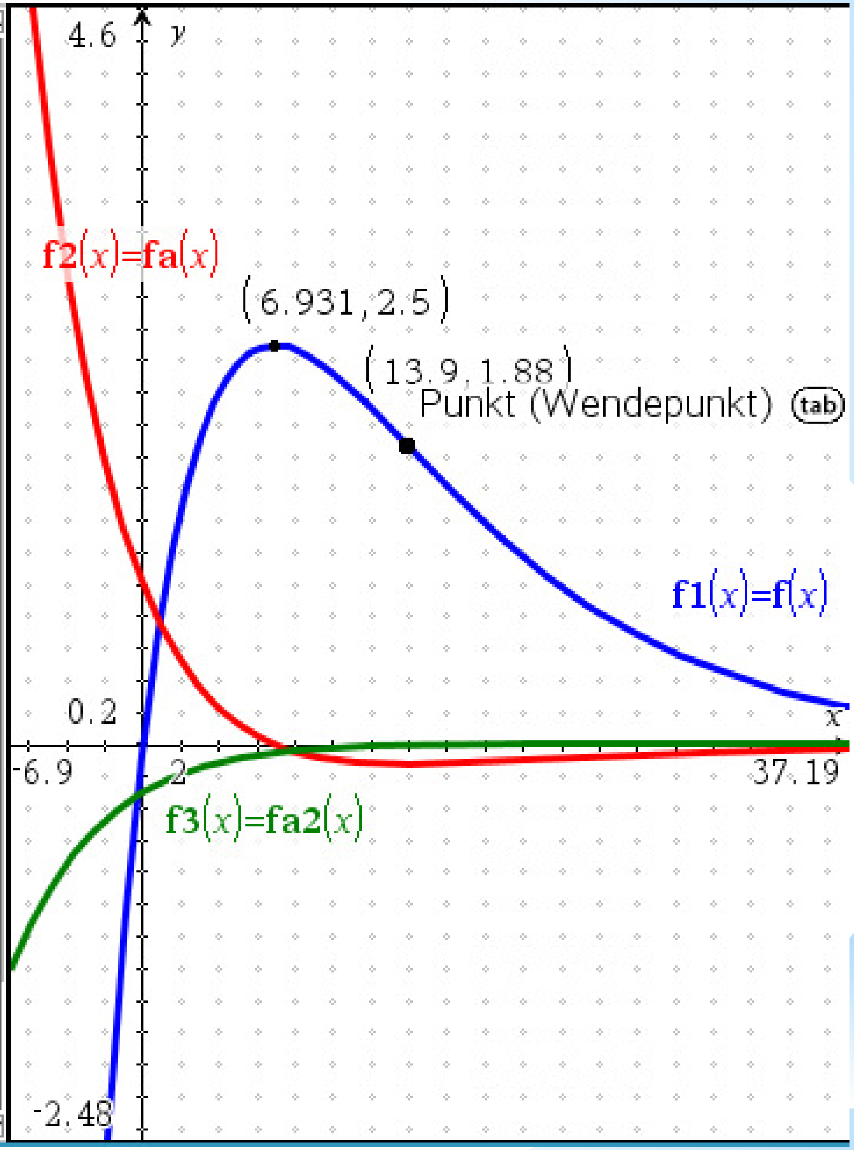
$\text{exact}(fa2(x))$ ▸ $\frac{e^{\frac{-x}{5}}\cdot\left(e^{\frac{x}{10}}-4\right)}{10}$

$mx:=\text{right}(\text{solve}(fa(x)=0,x))$ ▸ 6.93147

$f(mx)$ ▸ 2.5

$wx:=\text{right}(\text{solve}(fa2(x)=0,x))$ ▸ 13.8629

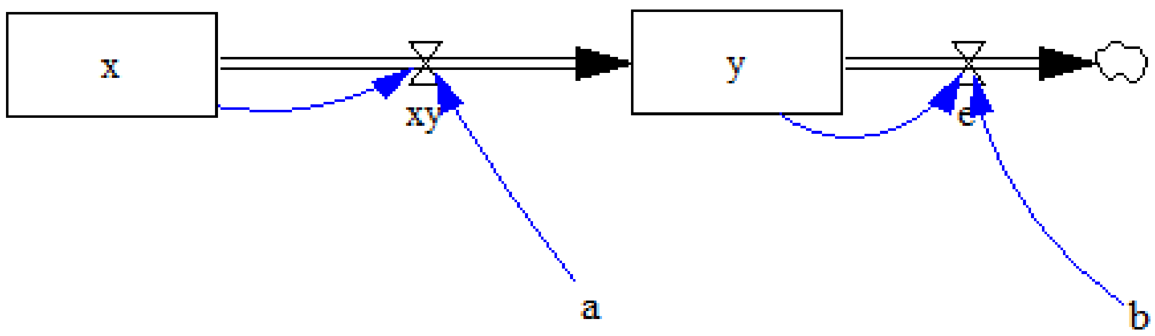
$f(wx)$ ▸ 1.875



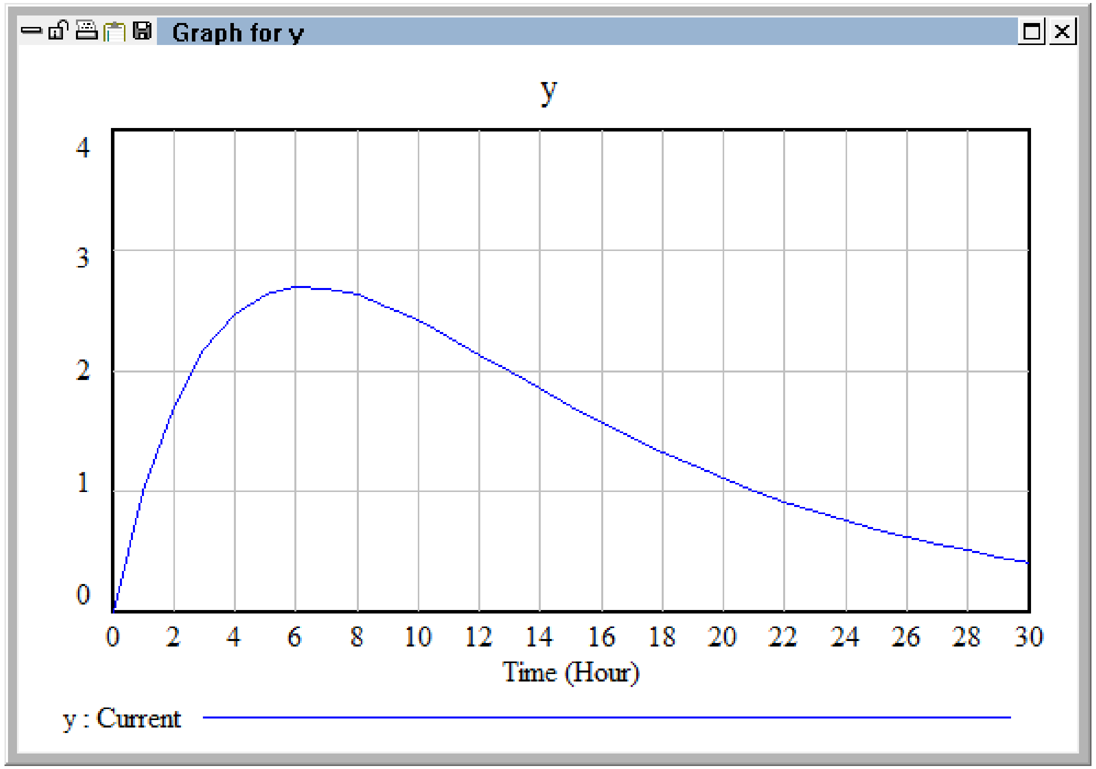
Lösung der Differenzialgleichung mit Technologie:

$$\text{exact}\left(\text{deSolve}\left(y'=e^{-0.1\cdot x}-0.2\cdot y \text{ and } y(0)=0,x,y\right)\right) \blacktriangleright y=10\cdot e^{\frac{-x}{5}}\cdot\left(e^{\frac{x}{10}}-1\right)$$

VENSIM



x
xy
y
e
a
b



Graph for y
y
4
3
2
1
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30
Time (Hour)
y : Current

Entwicklung einer Epidemie

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - r \cdot x_n \cdot y_n \\ y_{n+1} = y_n + r \cdot x_n \cdot y_n - s \cdot y_n \end{cases}, \quad (r, s > 0)$$

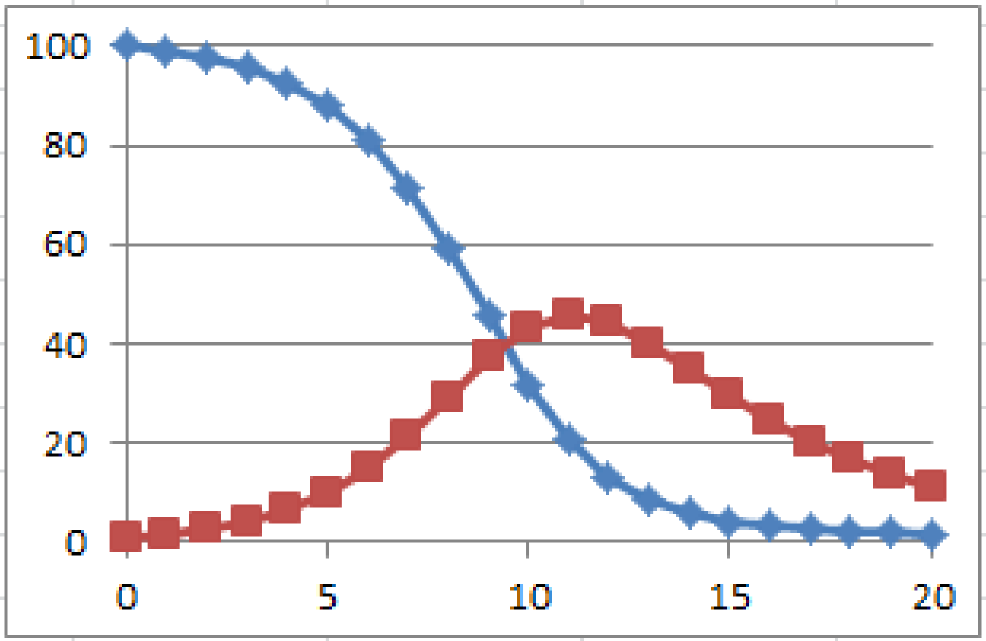
Die Anzahl der Infizierbaren x_n ist anfangs $x_0 > 0$ und wird verringert beim Zusammentreffen mit den bereits Infizierten y_n durch $-r \cdot x_n \cdot y_n$.

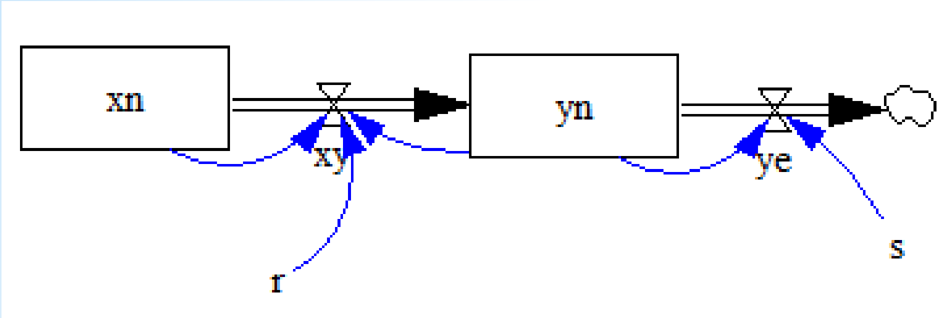
Die Anzahl der Infizierten nimmt um diese Anzahl zu und proportional zur Anzahl ab mit $(-s \cdot y_n)$, z. B. durch Gesundung.

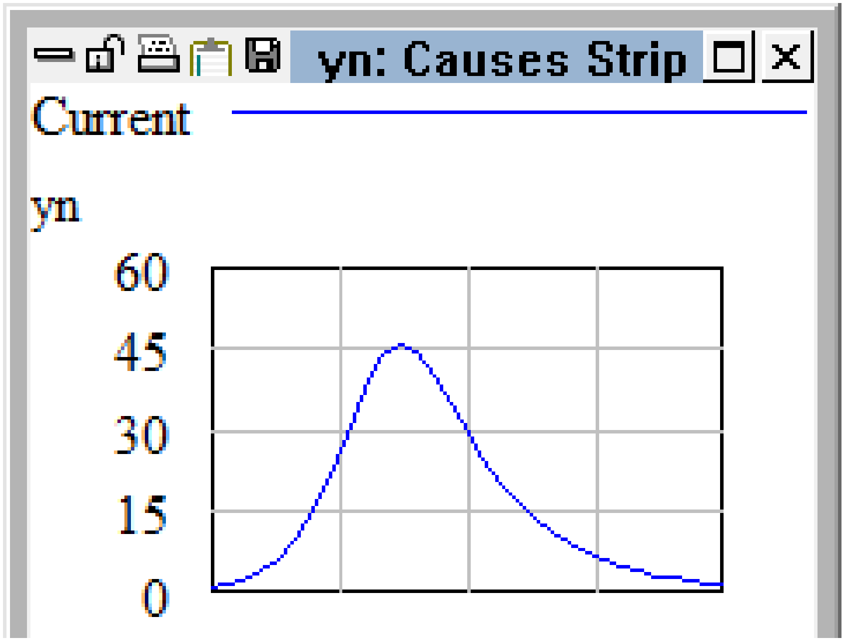
$r = 0{,}008$ und $s = 0{,}2$ $\quad x_0 = 100$ und $y_0 = 1.$

F2 | f_x | =F1+$B$1*E1*F1-$B$2*F1

	A	B	C	D	E	F	G
1	r:	0,008		0	100	1	
2	s:	0,2		1	99,2	1,6	
3				2	97,93024	2,54976	
4				3	95,9326511	4,03739687	
5				4	92,8341056	6,32846298	
6				5	88,134128	9,76274799	




xn
xy
yn
ye
r
s


yn: Causes Strip
Current
yn
60
45
30
15
0