Inverse einer Matrix

Ist $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $a \neq 0$, dann ist

$$a^{-1}a = \frac{1}{a}a = 1$$

a^{-1} ist das „(multiplikative) Inverse" von a.

Inverse in der Matrizenwelt?

1. Das Einselement für Matrizen ist die Einheitsmatrix I_n

2. Die Inverse einer $n \times n$ Matrix A ist die $n \times n$ Matrix X, für die gilt

$$XA = AX = I_n$$

   Man bezeichnet dann X mit A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ist $X = A^{-1}$?

Es genügt „eine Richtung“ zu zeigen:

$$AX = I \implies X = A^{-1}$$
$$YA = I \implies Y = A^{-1}$$

Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Inverse hat.

Es tauchen die folgenden Fragen auf:

A. *Welche Matrizen haben Inverse?*

B. *Kann eine gegebene Matrix mehr als eine Inverse haben?*

C. *Wie finden wir die Inverse, falls sie existiert?*

Eigenschaften der Matrix-Inversen

A. A hat eine Inverse $\iff$ $\det(A) \neq 0$

B. Die Inverse A^{-1} einer Matrix A ist eindeutig.

C. z.B. durch Lösen linearer Gleichungssysteme:

Inverse von A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$?

Es muss gelten $AX = I_3$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gleichungen und Unbekannte

Berechnung von inversen Matrizen mittels LGSe

$$A \cdot X = I_3$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31} & a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32} & a_{11}x_{13}+a_{12}x_{23}+a_{13}x_{33} \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31} & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32} & a_{21}x_{13}+a_{22}x_{23}+a_{23}x_{33} \\ a_{31}x_{11}+a_{32}x_{21}+a_{33}x_{31} & a_{31}x_{12}+a_{32}x_{22}+a_{33}x_{32} & a_{31}x_{13}+a_{32}x_{23}+a_{33}x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementweise gleichsetzen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\begin{array}{l} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31} = 1 \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31} = 0 \\ a_{31}x_{11}+a_{32}x_{21}+a_{33}x_{31} = 0 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right) \\[2ex]
\begin{array}{l} a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32} = 0 \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32} = 1 \\ a_{31}x_{12}+a_{32}x_{22}+a_{33}x_{32} = 0 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right) \\[2ex]
\begin{array}{l} a_{11}x_{13}+a_{12}x_{23}+a_{13}x_{33} = 0 \\ a_{21}x_{13}+a_{22}x_{23}+a_{23}x_{33} = 0 \\ a_{31}x_{13}+a_{32}x_{23}+a_{33}x_{33} = 1 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right)
\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Berechnung von inversen Matrizen mittels LGSe - Fortsetzung

Das lineare Gleichungssystem in 9 Variablen zerfällt in 3 lineare Gleichungssystemen mit je 3 Variablen, die alle dieselbe Koeffizientenmatrix A aber verschiedene Ergebnisvektoren haben. Die 3 Gleichungssysteme werden simultan mit dem Gaussalgorithmus umgeformt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right) \begin{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_{11} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} \end{array}\right) & \begin{array}{l} x_{11} = c_{11} \\ x_{21} = c_{21} \\ x_{31} = c_{31} \end{array} \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_{12} \\ 0 & 1 & 0 & c_{22} \\ 0 & 0 & 1 & c_{32} \end{array}\right) & \begin{array}{l} x_{12} = c_{12} \\ x_{22} = c_{22} \\ x_{32} = c_{32} \end{array} \\ \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{33} \end{array}\right) & \begin{array}{l} x_{13} = c_{13} \\ x_{23} = c_{23} \\ x_{33} = c_{33} \end{array} \end{cases}$$

Zusammenfassung zur Berechnung der inversen Matrix durch Lösen eines linearen Gleichungssystems:

1. Die Matrix A und die Einheitsmatrix I_n werden in ein Gauss-Tableau geschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Das Tableau wird mit den Operationen für den Gauss-Algorithmus so umgeformt, dass links die Einheitsmatrix I_n steht.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right) \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

3. Rechts kann die inverse Matrix A^{-1} abgelesen werden.

Die Methode funktioniert für invertierbare Matrizen beliebiger Größe!

Ein Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad A^{-1} =$$

Inverse für 2×2 und Diagonalmatrizen

- Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) \neq 0$, dann ist $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Ist $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})$, Diagonalmatrix mit $\det(D) = d_{11} \cdots d_{nn} \neq 0$, dann ist

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn}^{-1} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\tfrac{1}{d_{11}}, \dots, \tfrac{1}{d_{nn}}),$$

Anwendungsaufgaben: Lösen von Matrizengleichungen

Es seien A, und B invertierbare $n \times n$-Matrizen. Bestimme die $n \times n$-Matrix X!

a) $A^{-1} \cdot B = A \cdot B + A^{-1} \cdot X \cdot B$

b) $AX = AB - X$

c) $(A \cdot B) \cdot X = I_n$

Rechenregeln für Inverse

allgemeine Eigenschaften der Inversen

Es seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ invertierbare $n \times n$ Matrizen. Dann gilt:

(a) $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist invertierbar und $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

(b) $\boldsymbol{AB}$ ist invertierbar und $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(c) Die Transponierte $\boldsymbol{A}'$ ist invertierbar und $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$.

(d) $(c\boldsymbol{A})^{-1} = c^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ für jede Zahl $c \neq 0$.

Beispiel: Vereinfachen von Matrizenausdrücken

a) $(A \cdot B)^t + A\left[(B \cdot A)^{-1} + I_n\right] - B^t \cdot A^t =$

b) $(A + B) \cdot \left[B^{-1} + (A + B)^{-1}\right] \cdot A^{-1} =$

Beispiel:

Für welche reellen Zahlen x ist die folgende Matrix invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ -x & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Lösen von linearen Gleichungssystemen

Ein Gleichungssystem in n Gleichungen und n Variablen kann geschrieben werden als

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

wobei A die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist. z.B.:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Big| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{v.l.}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme und inverse Matrizen

Ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen und n Gleichungen der Form

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

kann durch die Umformung

$$\begin{aligned} A \cdot \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} && \quad | \cdot A^{-1} \quad \text{von links} \\ \boldsymbol{x} &= A^{-1} \cdot \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

gelöst werden, wenn die inverse der Koeffizientenmatrix A existiert.
Die Lösung des Gleichungssystems ist in diesem Fall eindeutig.

$$\text{Wir wissen:} \qquad A^{-1} \quad \text{existiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0$$

Das heißt: Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null ist.
Kürzer:

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{ist eindeutig lösbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0$$

Ein Beispiel:

Für welche reellen Zahlen a ist das folgende Gleichungssystem eindeutig lösbar?

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x & - & 2y & + & a \cdot z & = & -2 \\
x & + & a \cdot y & & & = & 0 \\
4x & + & 3y & + & 5z & = & 12
\end{array}
$$