

# Physik der Teilchenbeschleuniger

Prof. Dr. Otmar Biebel

## Inhalt der Vorlesung:

- Einführung in die Teilchenbeschleuniger
- Teilchenbeschleunigeroptik
- Teilchenablenkung durch Magnete
- Teilchenbewegung im Kreisbeschleuniger
- Betatron-Oszillationen
- starke und schwache Fokussierung, Phasenfokussierung
- Luminosität, Strahlemittanz
- Liouville Theorem
- Strahlkühlung
- Synchrotronstrahlung
- Linear- vs. Kreisbeschleuniger
- Supraleitende Beschleuniger
- Korrektur nicht-perfekter Strahloptik

(Folien) im WWW

<http://www.physik.uni-muenchen.de/~biebel/beschleuniger>

Termin der Vorlesung: Donnerstags 10 - 13 Uhr, Seminarraum: 4/16

Beginn: 23. Oktober 2003

## Literatur zur Vorlesung

Eine kleine Auswahl:

- Wiedemann: Particle Accelerator Physics, Vol.1&2 (Springer),
- Conte, MacKay: Introduction to the Physics of Particle Accelerators (World Scientific),
- Wille: The Physics of Particle Accelerators (Oxford University Press),
- Hinterberger: Physik der Teilchenbeschleuniger (Springer),
- CERN Accelerator School: 5th General Accelerator Physics Course, CERN 94-01 Vol.1&2:  
[http://preprints.cern.ch/cgi-bin/setlink?base=cernrep&categ=Yellow\\_Report&id=94-01\\_v1](http://preprints.cern.ch/cgi-bin/setlink?base=cernrep&categ=Yellow_Report&id=94-01_v1),  
[http://preprints.cern.ch/cgi-bin/setlink?base=cernrep&categ=Yellow\\_Report&id=94-01\\_v2](http://preprints.cern.ch/cgi-bin/setlink?base=cernrep&categ=Yellow_Report&id=94-01_v2),
- [Wille: Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen (Teubner)]
- [Daniel: Beschleuniger (Teubner)]

## Geplante Themen der Vorlesung

1. Einleitung, Motivation
  - (a) Historie
  - (b) Übersicht von Konzepten
  - (c) Anwendungen
  - (d) Prinzipielle Aufbau eines Beschleunigers
2. Lineare Beschleuniger
  - (a) Prinzipien
  - (b) HF-Beschleuniger
3. Zirkulare/Kreis-Beschleuniger
  - (a) Betatron
  - (b) Schwache Fokussierung, adiabatische Dämpfung
  - (c) Microtron, Synchro-/Isochron-Zyklotron
  - (d) Synchrotron
4. Geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern
  - (a) Lorentzkraft
  - (b) Grundlagen zur Optik von Strahlen geladener Teilchen
  - (c) Multipolfeld-Entwicklung für Magnete
  - (d) Bewegungsgleichung der Teilchenstrahldynamik
  - (e) Generelle Lösungen der Bewegungsgleichung
5. Lineare Strahldynamik
  - (a) Matrizen-Formalismus
  - (b) Fokussierung in Ablenkmagneten
  - (c) Teilchenstrahlen und Phasenraum: Emittanz und Liouville-Theorem
  - (d) Betatron Funktion und Strahleinhüllende
  - (e) Weglänge und "Momentum compaction"

## 6. Periodische Fokussierungssysteme

(a) “Combined function” vs. “separated function”:

FODO-Struktur

(b) Betatron-Bewegung in periodischen Strukturen

(c) Strahldynamik in geschlossenen periodischen Strukturen

(d) Dispersion in periodischen Strukturen

(e) Beispiel eines Speicherring-Beschleunigers

## 7. Störungen in der Strahldynamik

(a) Quadrupol-Feldstörungen, Resonanzen, Stoppbänder

(b) Chromatische Effekte in Kreisbeschleunigern

## 8. Beschleunigung geladener Teilchen

(a) Longitudinale Teilchenbewegung

(b) Longitudinaler Phasenraum

## 9. Synchrotron-Strahlung

(a) Physikalische Grundlagen

(b) Kohärente Abstrahlung

(c) Wiggler und Undulatoren

## 10. Teilchstrahlparameter

(a) Allgemeine Parameter (Energie, Zeitstruktur, Strom, Dimensionen)

(b) Dämpfung, Dämpfungspartitionen

(c) Teilchenverteilung im Phasenraum

(d) Strahlemittanz und Wiggler-Magnete

## 11. Strahllebensdauer

(a) Beiträge zur Strahllebensdauer

## 12. Kollektive Phänomene

(a) Linear Raumladungseffekte

(b) Strahl-Strahl-Effekte

(c) Wake-Felder (Kielwasser-Effekte)

(d) Strahlinstabilitäten

13. Strahlemittanz

- (a) Strahlemittanz in Speicherringen
- (b) Optimale Emittanz

14. Strahlkühlung

- (a) Strahltemperatur
- (b) Stochastische Kühlung
- (c) Elektronkühlung
- (d) Ionisationskühlung
- (e) Laserkühlung

15. Existierende, zukünftige und alternative Beschleunigerkonzepte

- (a) LEP, Tevatron, PEP-II, KEKB
- (b) LHC
- (c) Linear-Collider: NLC, Tesla, Clic
- (d) Myon-Beschleuniger
- (e) Neutrino-“Beschleuniger”
- (f) Free-Elektron-Laser
- (g) Laser/Teilchenstrahl-Plasma-Beschleuniger

## Einleitung, Motivation

- Untersuchung der Struktur der Materie: Auflösungsvermögen

⇒ Auflösungsvermögen  $\Delta x \leftrightarrow$  Wellenlänge  $\lambda$ :

$$\Delta x \sim \lambda/2$$

- Materiewellenpostulat von de Broglie (1926):

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

⇒ höhere Impulse  $p \rightarrow$  kleinere Strukturen

- Teilchenbeschleuniger liefern Teilchen mit hohen Impulsen  
(i.A. Teilchenenergie; Nicht-relativistisch aber unterschiedlich)

- Beschleunigergrundprinzip: Energiegewinn  $\Delta E$   
beim Durchlaufen eines elektrischen Potentials:

$$\Delta E = e \cdot \Delta U$$

- Höhere Spannungsdifferenz  $\Delta U \rightarrow$  höhere Energie
- Praktische Grenzen: z.B. elektr. Überschlüge, Entladung
- Prinzip anwendbar: elektr. geladene Teilchen mit genügend langer Lebensdauer  
(relativistische Effekte  $\rightarrow$  Beschleunigung kurzlebiger Teilchen, z.B. Myonen)

## Zusammenhang mit anderen Fachgebieten

- Elektro- und Magnetostatik bzw. Elektro- und Magnetodynamik  
d.h. konkrete Lösungen der Maxwell Gleichungen),
- Supraleitung,
- Hochfrequenztechnik,
- (elektromagnetische) Matrizenoptik,
- Resonanztheorie,
- Hamiltonsche Theorie,
- Vielteilchentheorie,
- Chaostheorie.

Unzweifelhaft ist die Physik der Teilchenbeschleuniger vor allem

**angewandte** Elektro- und Magnetodynamik!

## Einsatzgebiete für Beschleuniger

- Kernphysik
  - Elektron-/Proton-Beschleuniger
  - Ionen-Beschleuniger/-Collider
  - Gleichstrom-Teilchenstrahlen (“Stretcher”)
- Hochenergiephysik
  - “Fixed target”-Beschleuniger
  - Speicherring-Beschleuniger/-Collider
  - Linear-Beschleuniger
- Energieerzeugung
  - Inertial Fusion
  - Kernbrennstoffbrüten
  - Fissionsreaktor
- Industrie
  - Radiographie mit Röntgenstrahlen
  - Ionen-Implantation
  - Isotopen-Herstellung/-Trennung
  - Material-Untersuchungen
  - Nahrungsmittel-Sterilisation
  - Elektronen-/Röntgenstrahl-Lithographie
- Synchrotron-Strahlung
  - Grundlegende Atom- und Molekülphysik
  - Festkörperphysik
  - Geowissenschaften
  - Materialwissenschaften
  - Chemie
  - Molekular- und Zell-Biologie
  - Oberflächen-/Grenzflächenphysik
- Kohärente Strahlung
  - Freie-Elektronen-Laser (FEL)
  - Mikroproben
  - Holographie
- Medizin
  - Radiotherapie
  - Digitale Subtraktions-Angiographie
  - minimal invasive Behandlungen mit abstimmbaren FELs



## Höchstenergie-Teilchenbeschleuniger

☐ **viele** Beschleuniger an Forschungslabors. Einige der höchstenergetischen sind:

**momentan laufend:** HERA, Tevatron

**bis vor Kurzem genutzt:** LEP, SLC

**in Bau:** LHC

**in konkreter Planung:** NLC, Tesla

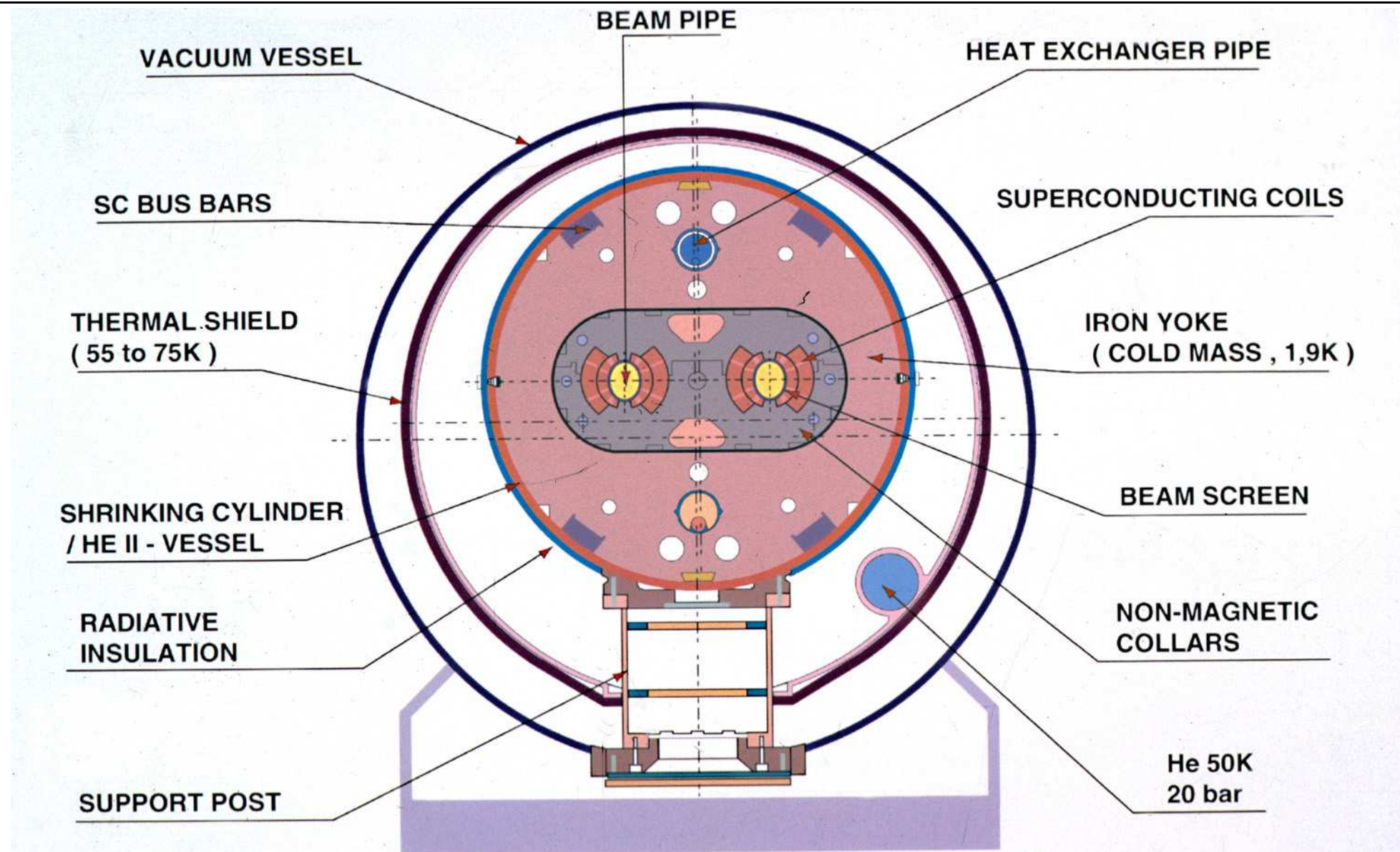








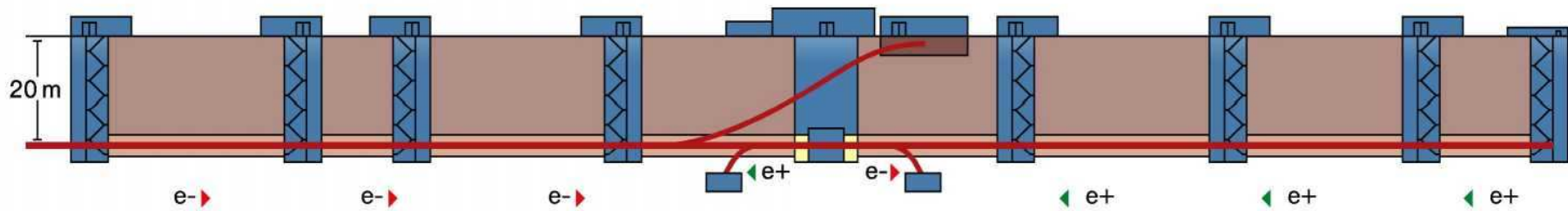
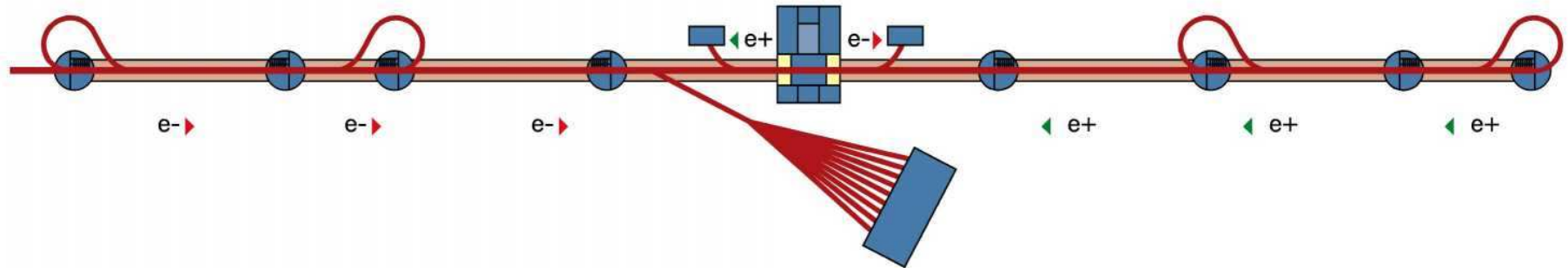
Abbildung 4: LEP-Beschleuniger (Elektron auf Positron) am CERN bei Genf



# Cross Section of LHC Dipole

HE107

Aufsicht



Seitenansicht

Abbildung 6: Tesla-Beschleuniger (Elektron auf Positron)

## Historie

Die geschichtliche Entwicklung birgt drei Linien:

### 1. Gleichspannungsbeschleunigung

- Entdeckung der Teilchenstrahlung: **Kathodenstrahlen**, d.h. Elektronenstrahlen (Plücker 1858)
- . . . und **Kanalstrahlen** (Goldstein 1886): positive Ionenstrahlen
- atomphysikalische Untersuchungen:
  - Anregung von Luftmolekülen durch Kathodenstrahlen (Lenard 1894)
  - Anregung von Atomen durch Elektronbestrahlung: Franck-Hertz-Experiment (1913)
- Kernphysik: Spaltung von Lithium-Kernen durch Proton-Beschuss (Cockcroft und Walton 1932, u.a.)

### 2. *Resonante Beschleunigung*

### 3. *Strahlungstransformatoren*



Die erste Linie entsprang der “natürlichen Forschungsentwicklung”:

- ◇ Bedarf höherer Teilchenenergien und -impulse zur Klärung der Kernstruktur der Materie,
- ◇ v.a.: höher, als aus natürlichen radioaktiven Quellen.

Die zweite & dritte Linie:

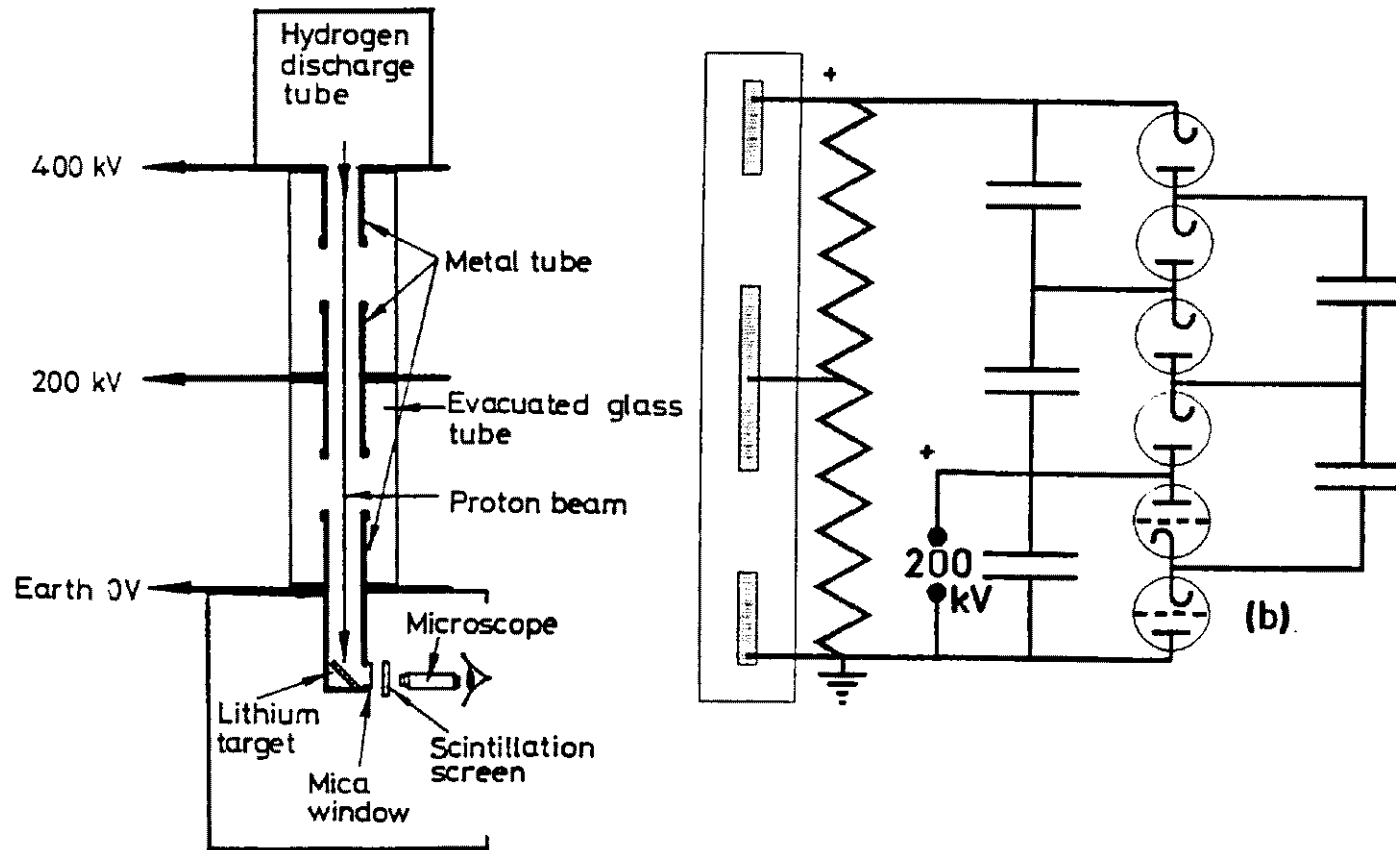
- ◇ anfangs eigenständige Beschleunigerentwicklungen,
- ◇ ersetzen erste Linie, nachdem dort praktikable Grenzen erreicht.

Tabelle 1: Hauptlinie der Beschleunigerentwicklung

1894	Lenard: Elektronstreuung an Gasmolekülen	Gasentladungsrohr <100 keV Elektronen
1913	Franck und Hertz: Anregung von Atomorbitalen durch Elektronenbeschuss	
1906	Rutherford: Streuung von $\alpha$ -Teilchen an Folien	natürliche radioaktive Quellen
1919	Rutherford: Nuklearreaktion induziert mit $\alpha$ -Teilchen	MeV-Energien für Kernstruktur-Untersuchungen vermutet
1928	Gurney und Gamov sagen Tunneleffekt für Kernreaktionen voraus	500 keV Energie könnten genügen
1928	Cockcroft&Walton entwerfen, ermutigt durch Rutherford, einen 800 kV Generator	
1932	Generator erreicht 700 kV, Cockcroft&Walton spalten Lithium-Kern mit 400 keV Protonen	

# Cockcroft-Walton-Beschleuniger

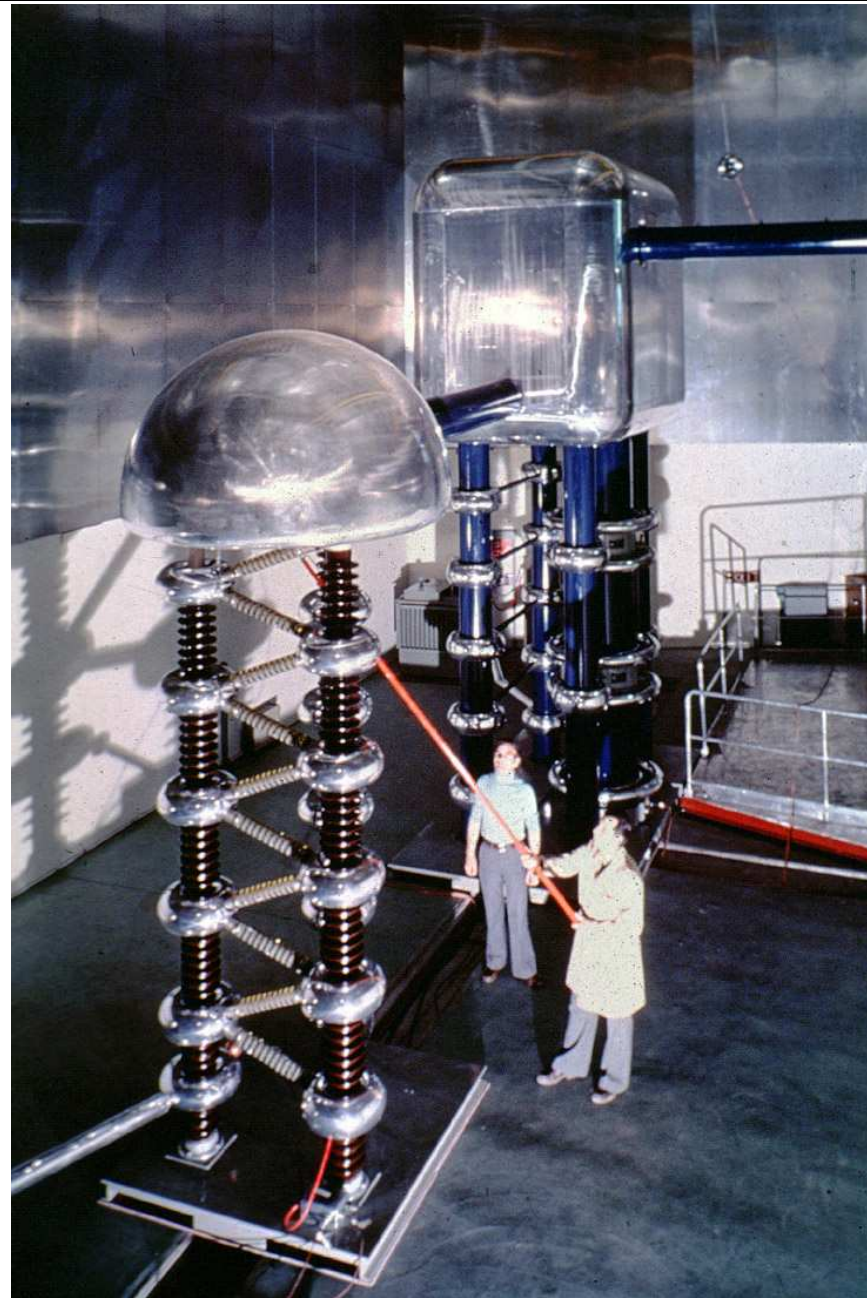
Skizze der Originalapparatur von Cockcroft&Walton:



- ▷ Protonen aus Entladungsrrohr (oberes Ende),
- ▷ Quelle auf 400 kV Potential,
- ▷ Protonen im Vakuumrohr beschleunigt . . .
- ▷ . . . auf Lithium-Target (Erdpotential, unteres Ende),
- ▷ Szintillationsschirm&Mikroskop: Beobachtung der Spaltprodukte auf  ${}^7\text{Li} + \text{p} \rightarrow 2 {}^4\text{He}$

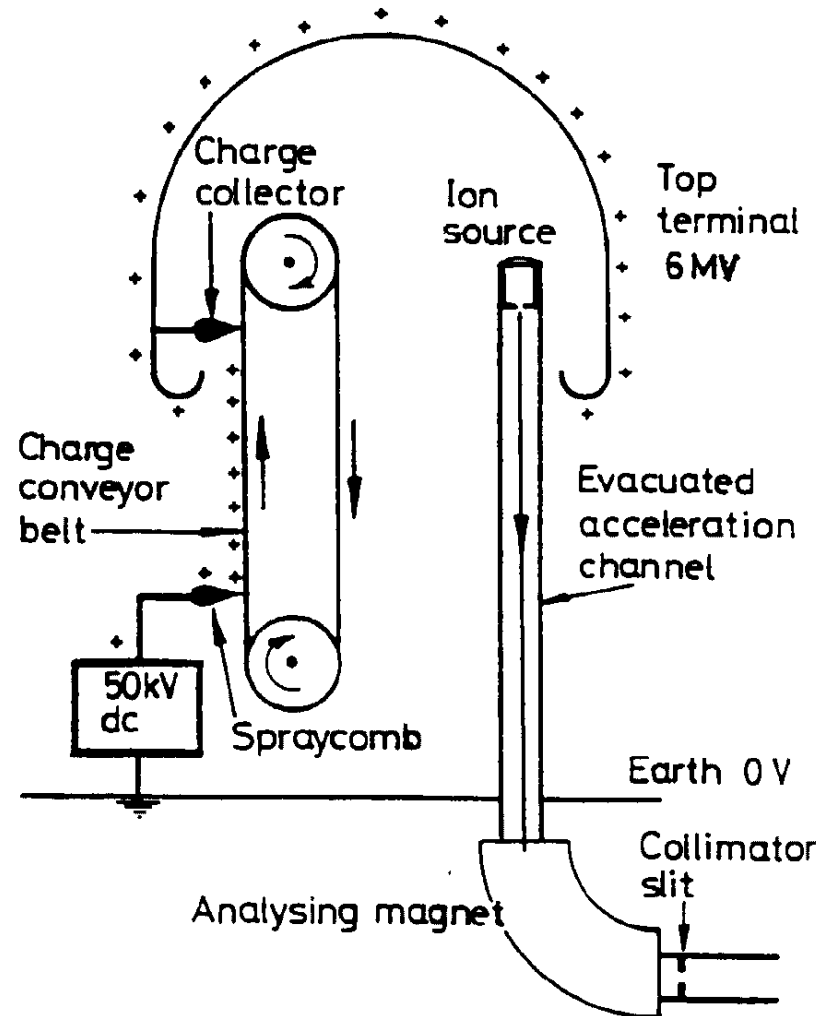
Cockcroft-Walton-Generator (auch: -Kaskade):

- ▷ Design für 800 kV
- ▷ erreichte Maximalspannung  $\sim 700$  kV (wg. HV-Entladungen)
- ▷ Heute als Eingangsbeschleuniger genutzt (hohe Strahlströme)



## van de Graaff-Generator

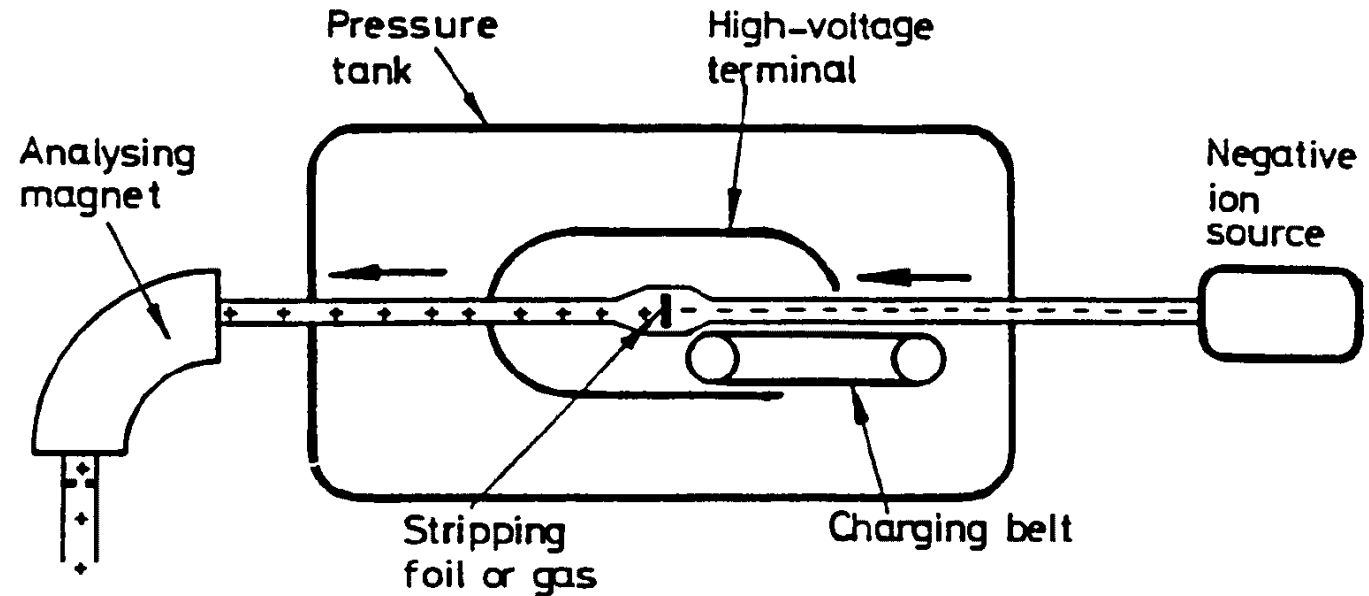
- ▷ Van de Graaff: elektrostatischen Generator (um 1932),
- ▷ Spannung von 1.5 MV,
- ▷ ab 1932 in (kern-)physikalischen Untersuchungen,
- ▷ Höhere Spannungen: van de Graaff-Generator in einem Drucktank (Gas mit hoher Durchschlagsfeldstärke, z.B. Schwefelhexafluorid SF<sub>6</sub>, bei Drücken von 9-10 bar)



## Tandem-van de Graaff-Beschleuniger

Weiterentwicklung: Tandem-Beschleuniger

- ▷ zunächst negativ geladene Ionen beschleunigt,
- ▷ im Zentrum positiv umgeladen (z.B. durch dünne (Stripper-)Folie),
- ▷ erneut volles elektrostatisches Potential zur Beschleunigung



Van de Graaff-Generatoren und Tandem-Beschleuniger:

- + Teilchenstrahlen mit sehr stabiler Energie,
- + sehr geringe Energiestreuung,
- jedoch geringere Strahlströme als Cockcroft-Walton-Kaskaden.





## Zweite Entwicklungslinie

- 1924 Ising schlägt zeitlich variierende Felder zwischen Driftröhren vor: Das Grundprinzip der *resonanten Beschleunigung*, mit dem Energien oberhalb der höchsten Spannung im System erreicht werden können.
- 1928 Wiederöe demonstriert Isings Prinzip mit einem 1 MHz und 25 kV Oszillator bei der Erzeugung von 50 keV Kaliumionen.
- 1928 Lawrence erfindet, inspiriert durch Wideröe und Ising, das Zyklotron.
- 1931 Livingston demonstriert das Zyklotron durch Beschleunigung von Wasserstoffionen auf 80 keV.
- 1932 Lawrence erzeugt mit seinem Zyklotron Protonen mit 1.25 MeV und spaltet damit Atome nur wenige Wochen nach Cockcroft und Walton.

Unterschied zwischen Gleichspannungs- und resonanten Beschleunigern:

- Felder statisch (d.h. konservativ) oder
- Felder zeitabhängig (d.h. nicht-konservativ)

Materiefreie Maxwell-Gleichung für elektrisches Feld:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad (*)$$

wobei

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$\nabla\phi \hat{=}$  statische Felder in Cockcroft-Walton- und van de Graaff-Beschleunigern.

Teilchen gewinnt gemäß Potentialdifferenz Energie auf Weg von (1) nach (2).

Nach Rückkehr zu (1) aber zurück auf Anfangspotential, d.h. kein Energiegewinn auf geschlossenen Wegen!

(Mit Stokesschem Satz:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_a \nabla \times (\nabla\phi) \cdot d\vec{a} = \int_a \text{rot grad } \phi \cdot d\vec{a} = 0 )$$

- Zeitabhängige Felder in (\*):

$$\partial \vec{A} / \partial t$$

- mit  $\vec{B}$  → Faradaysches Gesetz:

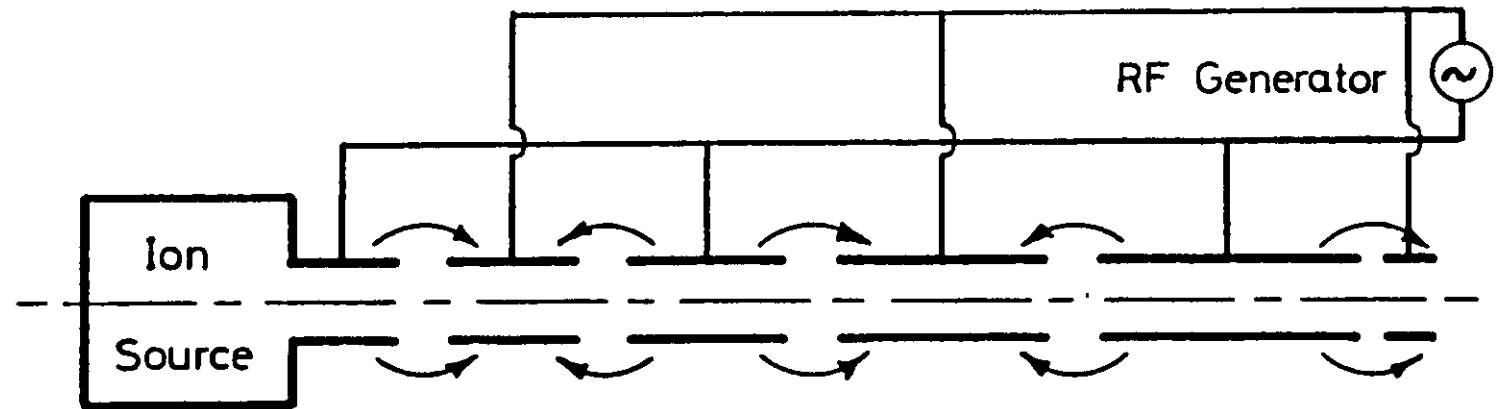
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

⇒ Magnetfeldänderungen ↔ elektrisches Feld

⇒  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{2. \text{ Linie: } } \vec{B} = \text{const. \& } \vec{E}(t) \leftrightarrow \text{Beschleunigung (Ising)} \\ \mathbf{3. \text{ Linie: } } \partial \vec{B} / \partial t \equiv \dot{\vec{B}} = -\text{rot} \vec{E} \leftrightarrow \text{Beschleunigung (Betatron)} \end{array} \right.$

## Isings und Wideröes Linearbeschleuniger

- ▷ lineare Kette von leitenden Driftröhren,
- ▷ an Hochfrequenz angeschlossen,
- ▷ Teilchen entlang Längsachse,



- ▷ Hochfrequenz synchron zum Teilchenflug:  
Teilchen zwischen Driftröhren, wenn beschleunigendes  $\vec{E}$ -Feld, sonst im feldfreien Raum einer Driftröhre
- ▷ Driftröhrenlänge wächst mit Teilchengeschwindigkeit

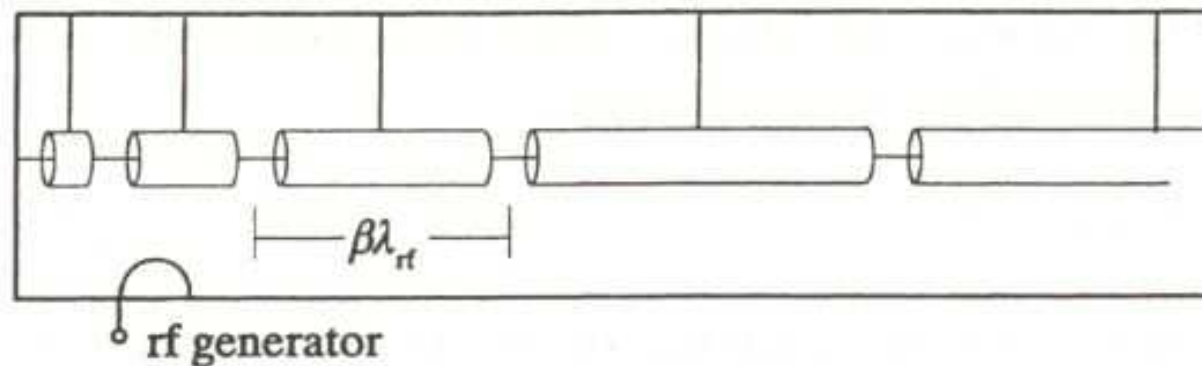
Wideröe hat 1928 den ersten funktionierende Beschleuniger nach Isings Vorschlag gebaut.

Offene Wideröe-Struktur:

- bei niedrigen Frequenzen → unhandlichen Driftröhlängen,
- bei hohen Frequenzen → starke HF-Leistungsverlusten.

⇒ Alvarez-Struktur:

- Driftröhren in einer Struktur eingeschlossen,
- bilden Resonator für die eingekoppelte HF (Cavity).



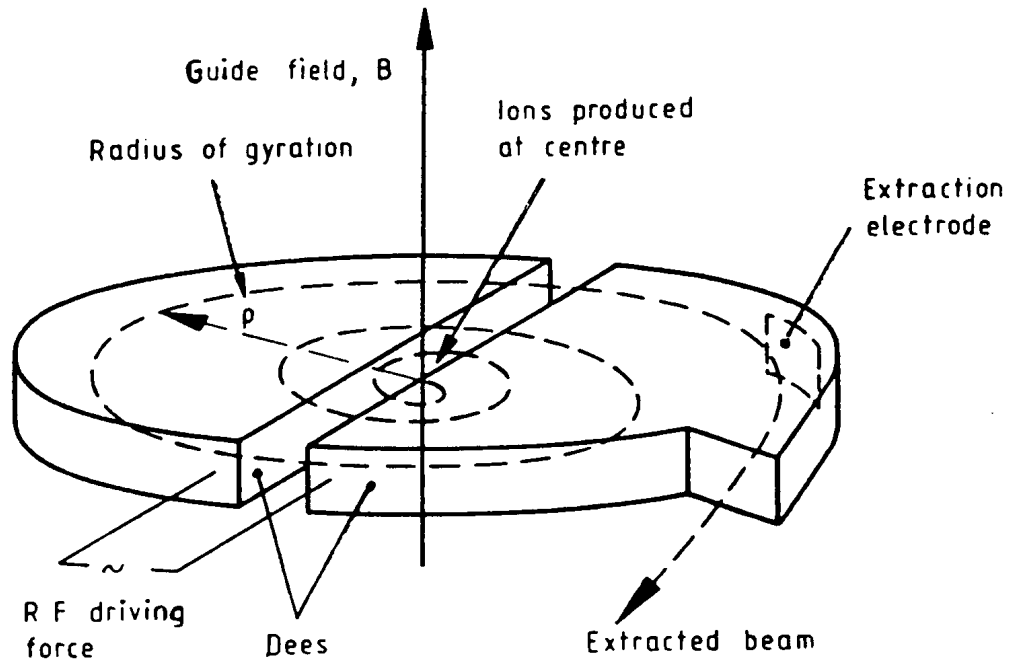
**Fig. 2.6.** Alvarez linac structure (schematic)

→ Heutige Hochenergiebeschleuniger (kreisförmig oder linear) nutzen dieses Prinzip!  
(HF-Frequenzen bis in den GHz-Bereich)

## Zyklotrons

Linearbeschleunigerstruktur (engl. Linear Accelerator, kurz Linac) technisch schwierig

→ Entwicklung einfacher realisierbarer Zyklotrons mit konstanter Frequenz durch Lawrence 1929 :

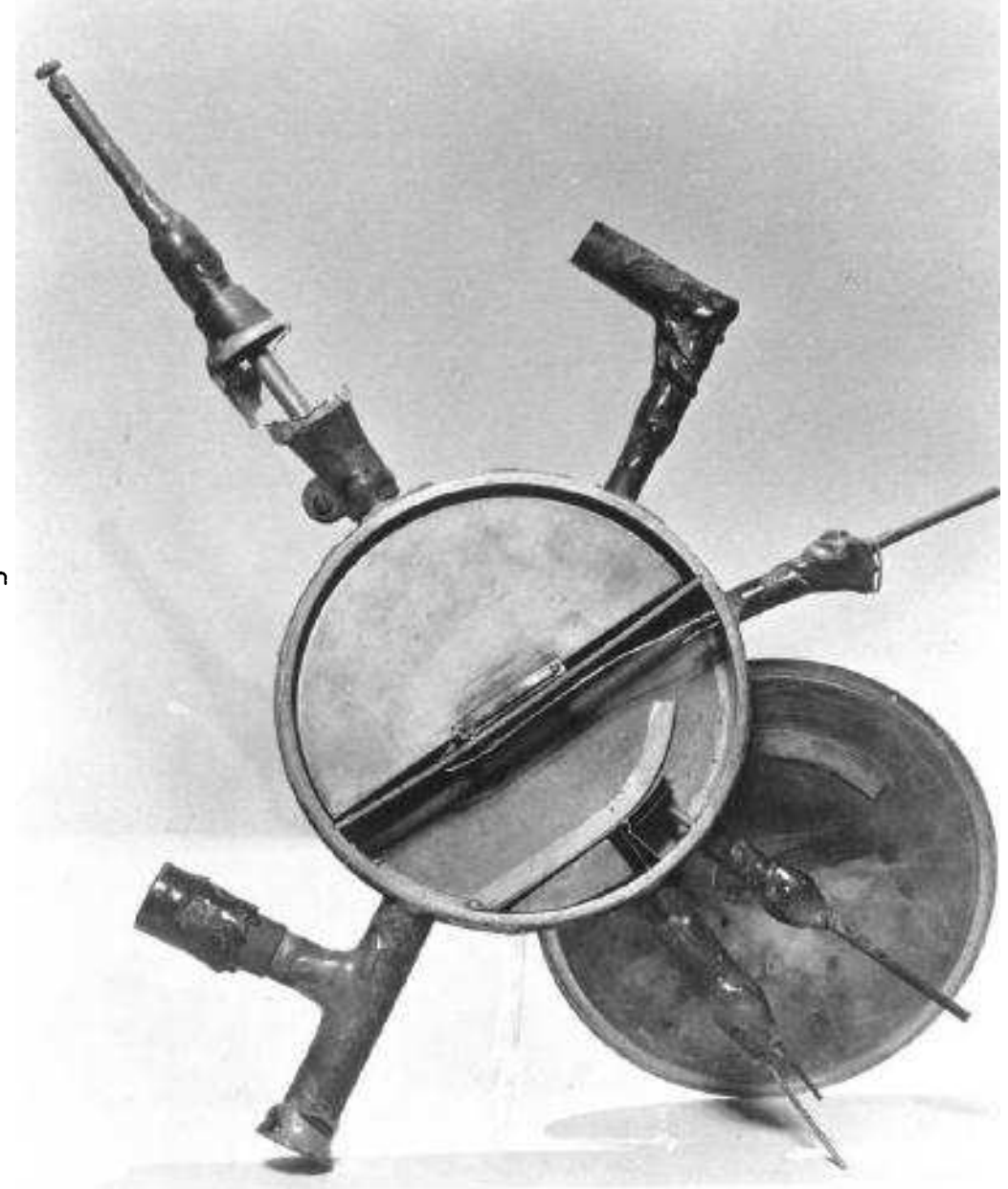
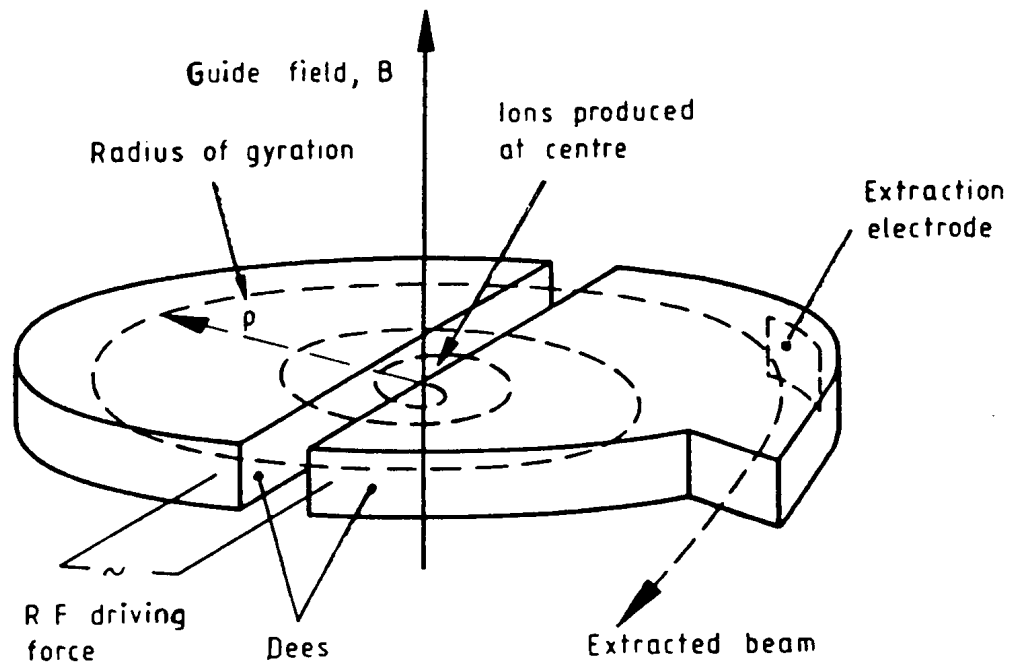


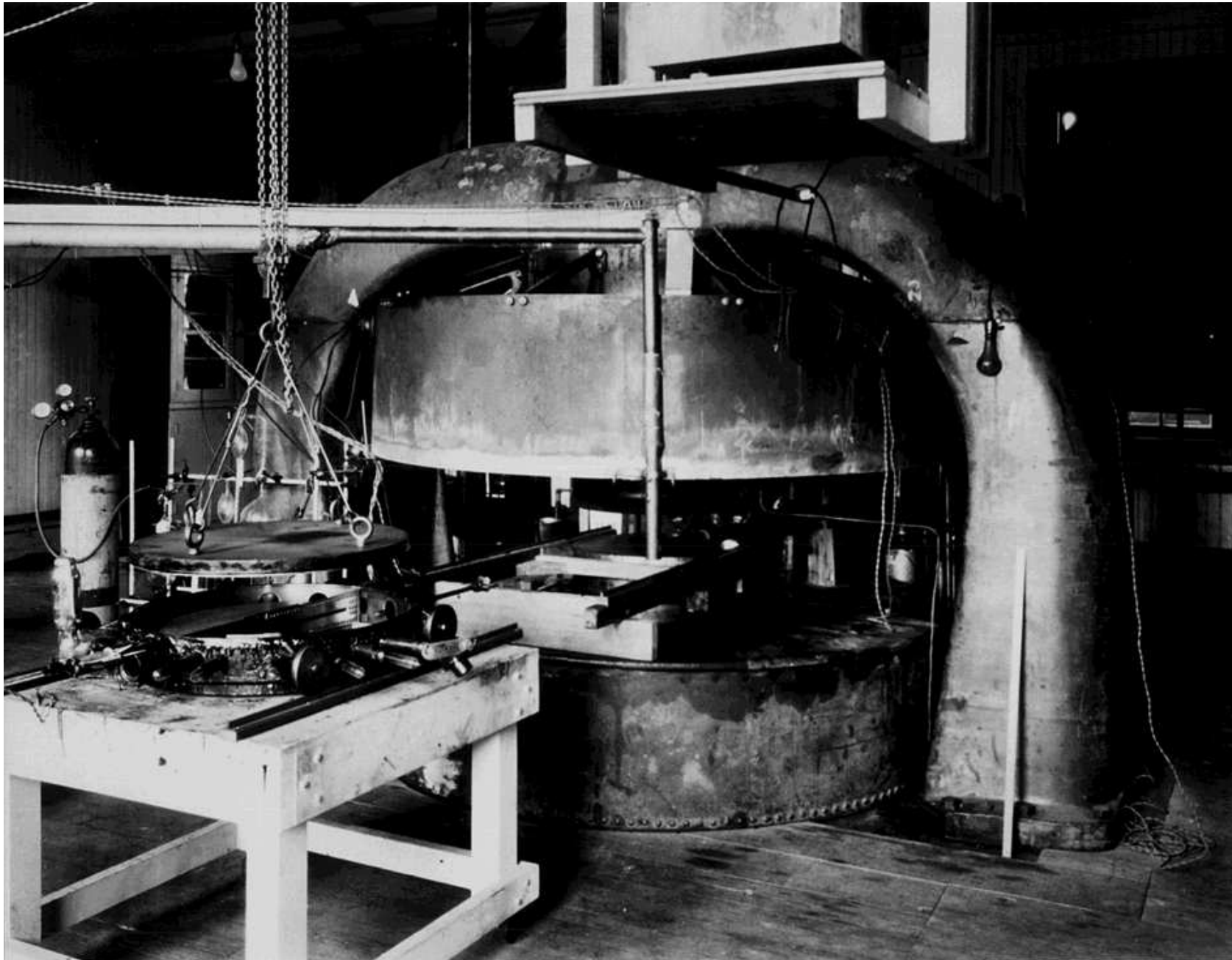
- Livingston: 80 keV Wasserstoff-Ionenstrahl-Zyklotron (1931)
- Lawrence: 1.25 MeV Protonen-Zyklotron (1932, s. Abb.)
- 1939: 20 MeV Protonen aus  $\varnothing$  160 cm Zyklotron (Uni of California)  
( $\approx 2 \times$  höchste Energie aus  $\alpha$ -Zerfall)

- Relativistische Effekte limitierten maximale Energie,

⇒ Synchro- und Isochron-Zyklotrons (variable Frequenz bzw. Magnetfeld)

- heutigen Kreisbeschleuniger: Synchrotron-Prinzip (s.u.)







## Dritte Entwicklungslinie

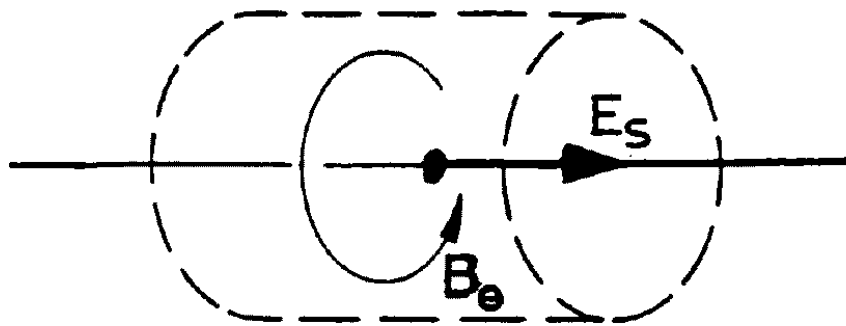
- 1923 Wideröe entwirft & skizziert als Student in seinem Laborbuch das Betatron mit der "1:2"-Regel und fügt 2 Jahre später die radiale Stabilitätsbedingung hinzu (aber er veröffentlicht nicht!),
- 1927 in Aachen baut Wideröe ein Betatronmodell, das nicht funktioniert; Er wendet sich daraufhin Linearbeschleunigern zu,
- 1940 Kerst erfindet das Betatron neu und baut ein lauffähiges 2.2 MeV Elektron-Betatron,
- 1950 Kerst baut das weltgrößte Elektron-Betatron (300 MeV).

Zwei Anwendungsmöglichkeiten des Faradayschen Gesetzes

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \dot{\vec{B}}$$

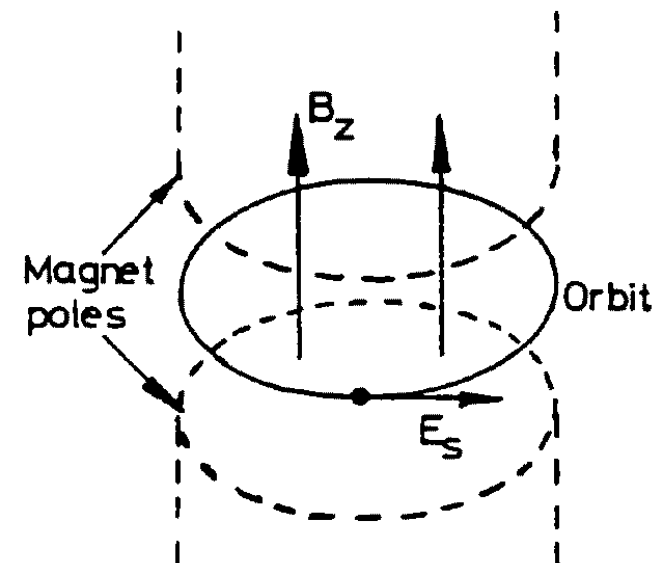
wurden angesprochen (s. Folie 1.27):

- Linearbeschleunigung in Cavities (Ising)



- zirkulares, zeitlich variierendes  $\vec{B}$ -Feld  
→ axiales, beschleunigendes  $\vec{E}$ -Feld

- Zirkularbeschleunigung (Betatron)



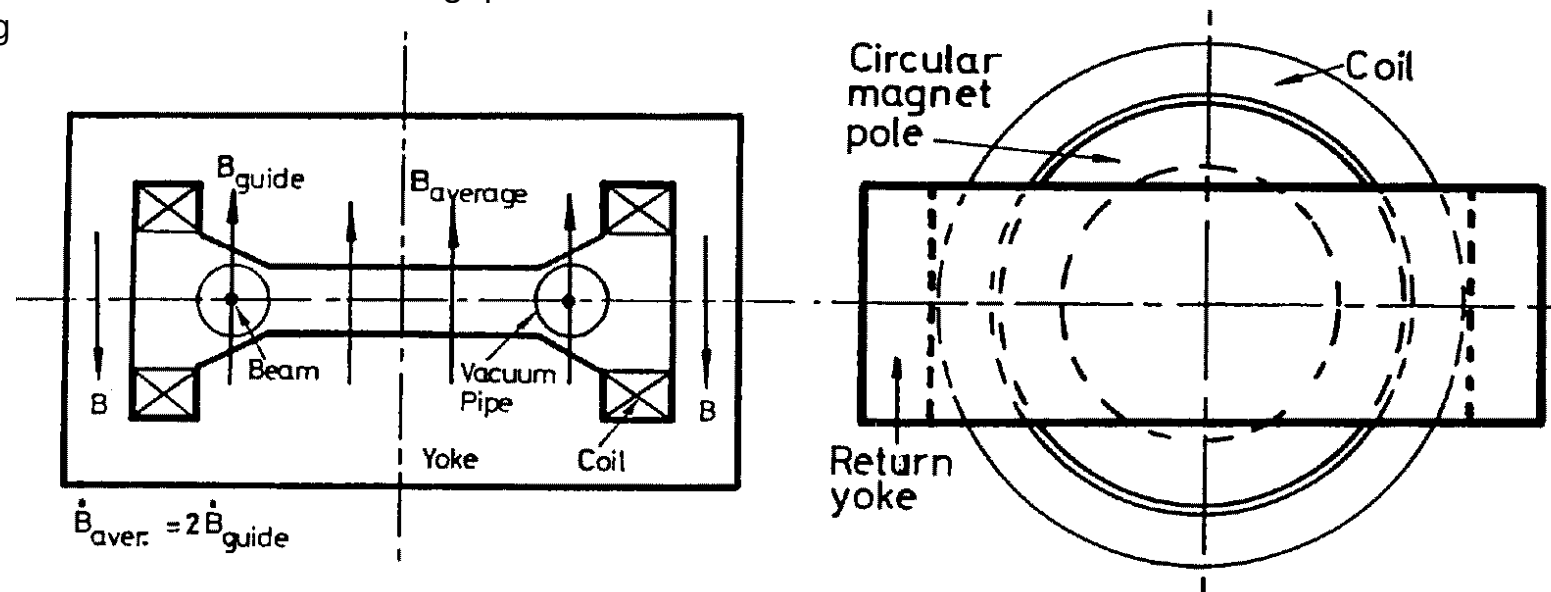
- axiales, zeitlich variierendes  $\vec{B}$ -Feld  
→ zirkulares, beschleunigendes  $\vec{E}$ -Feld

Wideröes Vorschlag: Zirkulare Beschleunigung durch "Strahlungstransformator" bzw. Betatron

## Betatron

Prinzip:

- Teilchenstrom  $\hat{=}$  Sekundärspule in Transformator
- Stabiler Orbit des Teilchenstroms durch angepasste  $\vec{B}$ -Feldzunahme  
→ 1:2-Bedingung



- + Unabhängigkeit von relativistischen Effekten  
→ geeignet für Elektronenbeschleunigung
- + Einfaches, robustes, kostengünstiges Beschleunigungsprinzip  
→ z.B. Einsatz in Krankenhäusern)

- + Fokussierung und Synchronisation der Strahlenergie allein durch Geometrie des Magneten bestimmt
- *Betatron-Oszillationen* der Teilchen um Soll-Orbit große Amplituden!

## Synchrotron-Beschleuniger

Bis 1940 wurden drei Beschleunigungsmechanismen vorgeführt:

- DC-Beschleunigung – HV-Überschläge&Entladungen
- Resonante Beschleunigung – Synchronität zwischen HF & relativist. Teilchen
- Betatron-Mechanismus – Betatron-Oszillationsamplitude

Alle besitzen bestimmte Vorzüge, aber auch Limitierungen in der erreichbaren Energie.

**1944** McMillan und Veksler entdecken das Prinzip der **Phasenstabilität** zwischen Teilchen und HF

**1944** Veksler erfindet das **Synchrotron** ( $R = \text{const.}$ ,  $\vec{B}(t)$ ) mit **schwacher Fokussierung**

(auch: “constant-gradient” Fokussierung)

**1950** Christofilos schlägt die **starke Fokussierung** vor

(auch: “alternating-gradient” (AG) Fokussierung, 1952 von Courant, Livingston, Snyder erstmals veröffentlicht)

Konzept:

- ▷ fokussierende und defokussierende Linsen im Abstand  $d$
- ▷ Brennweiten  $f \equiv f_F = -f_D$

⇒ Gesamtbrennweite  $F$ :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f_D} - \frac{d}{f_F \cdot f_D} = \frac{d}{f^2} \quad \longrightarrow \quad F = f^2/d > 0!$$

### Beispiele für Synchrotrons mit schwacher Fokussierung

1952 Cosmotron 3 GeV Protonen

1949 Elektronen

1955 Bevatron  $\approx 6$  GeV Protonen ( $\rightarrow$  Entdeckung des Antiprotons, ca. 10000 t Fe)

### Beispiele für Synchrotrons mit starker Fokussierung

1954 Cornell 1.1 GeV Elektronen

1954 AG-Synchrotron 1.1 GeV Elektronen (Cornell Uni)

1959 CERN PS (Proton Synchrotron) 26 GeV Protonen (ca. 3600 t Fe)

1972 CERN ISR (Proton-Proton-Collider  $2 \times 26$  GeV)

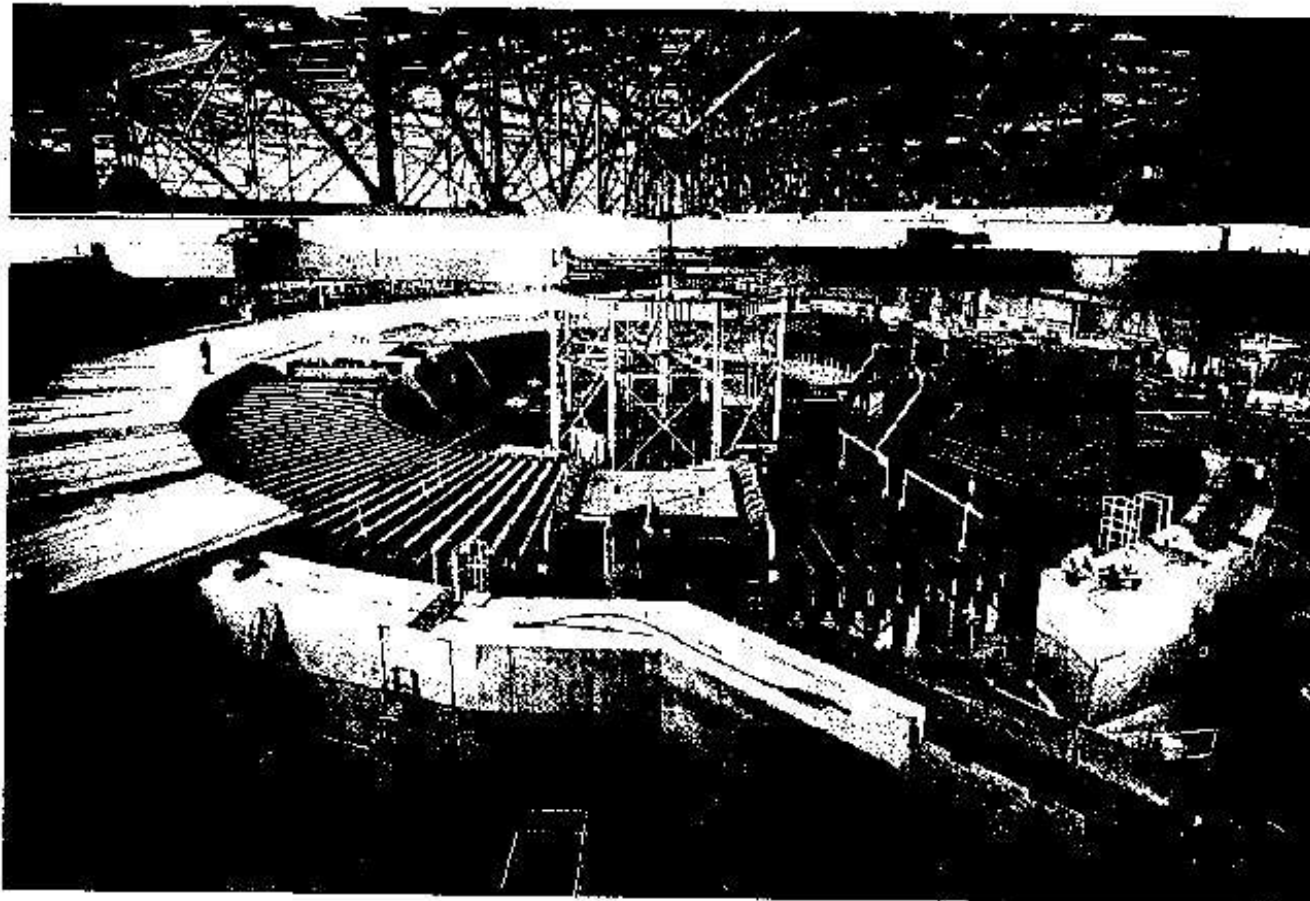
1981 CERN SPS (Proton-Antiproton-Collider bis  $2 \times 450$  GeV)

1987 FNAL Tevatron (Proton-Antiproton-Collider bis  $2 \times 900$  GeV)

1989 CERN LEP (Elektron-Positron-Collider bis  $2 \times 104$  GeV)

2002 FNAL Tevatron (Proton-Antiproton-Collider bis  $2 \times 1000$  GeV)

2007 CERN LHC (Proton-Proton-Collider bis  $2 \times 7000$  GeV)



**4.9** Das Bevatron, ein 6 GeV-Beschleuniger, wurde 1954 am Lawrence Berkeley-Laboratorium in Betrieb genommen. Mit diesem Beschleuniger wurde 1955 das Antiproton entdeckt; er war 1989 immer noch in Betrieb.

weitere (wichtige) Entwicklungen:

- Klystron-HF-Leistungsquelle → bis zu GHz, (Hansen und Gebrüder Varian, 1937)
- Stochastische Kühlung → Akkumulation von Antiprotonen, (van de Meer, 1972)
- Supraleitung für Magnete → höhere (Proton-)Strahlenergie, z.B. Tevatron, HERA
- Supraleitung für Cavities → größere (Elektron-)Beschleunigungsgradienten, z.B. LEP
- “Geographical Transition” → Beschleuniger auch unter Grundbesitz, der nicht zum Labor gehört, z.B. HERA, LEP
- Radiofrequenz-Quadrupol-Beschleuniger (RFQ) (Kapchinsky und Teplyakov, 1970)

## Livingston-Diagramm

- geht auf Livingston zurück,
- $\approx$  exponentielle Zunahme der Beschleunigerenergie mit der Zeit,
- getrennte, aber  $\approx$  parallele Entwicklungslinien für Proton- und Elektron-Beschleuniger,
- belegt erfolgreichen und kontinuierlichen Fortschritt in der Beschleuniger-Technik,
- Energie-“Sättigung” für heutige Zeit angedeutet.

⇒ Neue Beschleunigertechniken harren ihrer Entwicklung!

- Myon-Beschleuniger,
- Plasma-Beschleuniger,
- Laser-Beschleuniger,
- “Drive-beam”-Beschleuniger,
- ...

(NB: Neue Techniken zielen meist auf Steigerung der Beschleunigungs-Gradienten)



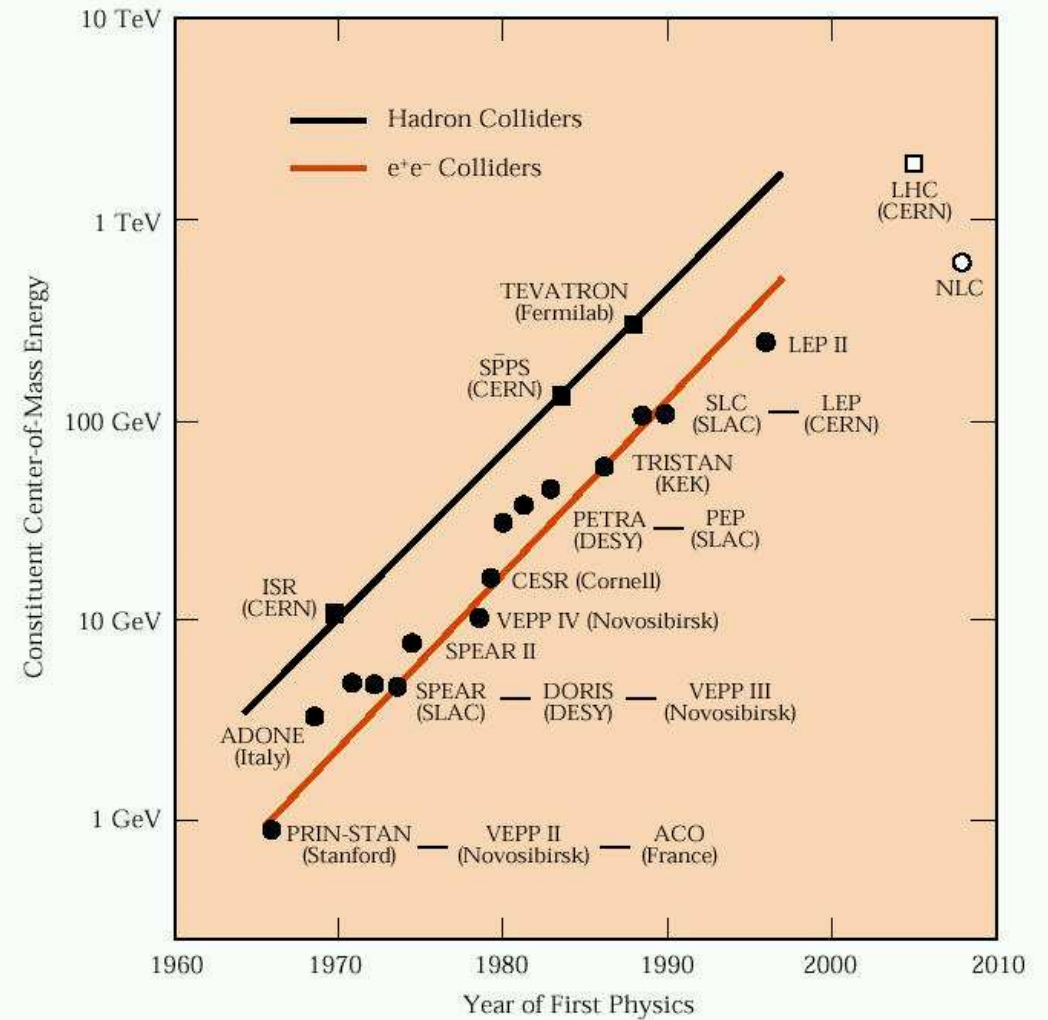
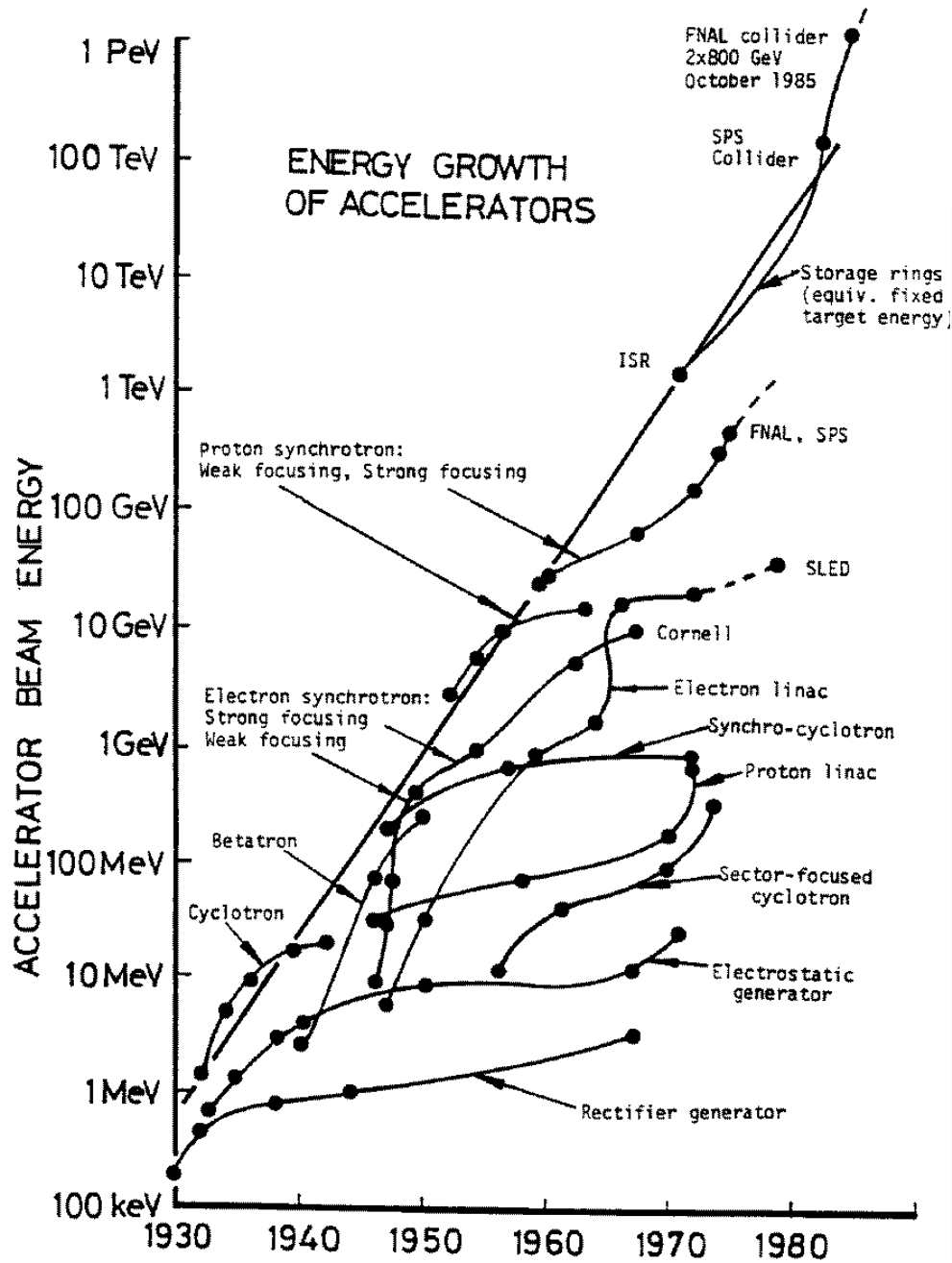


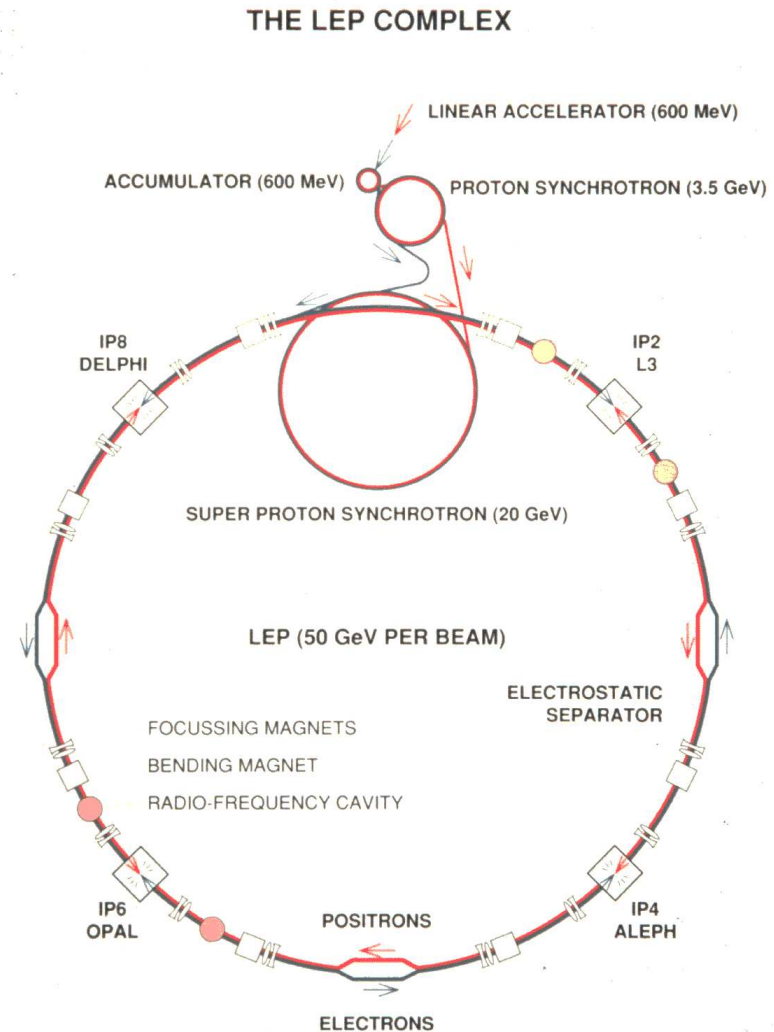
Abbildung 12: Livingston-Diagramm

## Elemente eines Beschleunigers

Grob umfasst ein Beschleuniger folgende Komponenten:

- Teilchenquelle
- Vorbeschleunigerstufe (häufig mit Teilchenquelle kombiniert)
- Injektor in (nächste) (Vor-)Beschleunigerstufe
- Ejektor aus (Vor-)Beschleuniger (für fixed-target Betrieb)

Höchstenergie-Beschleuniger benutzen meist mehrere ( $> 2$ ) Vorbeschleunigerstufen, z.B. für LEP: 4 Vorbeschleuniger + Hauptbeschleuniger



## Lineare Beschleuniger

**Prinzip** (elektrostatischer Beschleuniger):

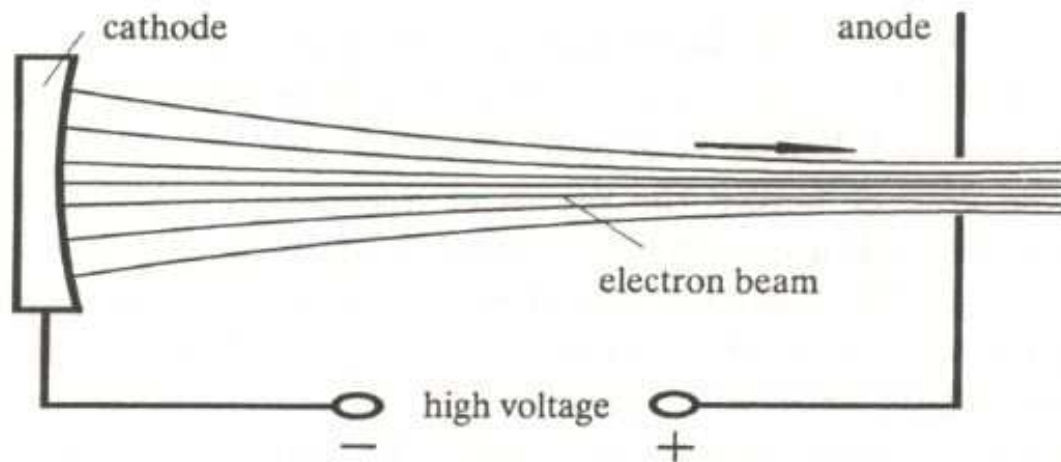


Fig. 2.1. Principle of electrostatic accelerators

- Teilchen mit Ladung  $Ze$  aus Quelle (hier: Kathode) . . .
- . . . durchlaufen Potentialdifferenz  $U \equiv \Delta\phi$  zu einer Lochelektrode (hier: Anode) . . .
- . . . erzielen Energiegewinn  $\Delta E = Ze \cdot U$ .  
(übliche Einheit:  $1 \text{ eV} \approx 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ )

(Nach diesem Prinzip funktionieren auch (Fernseh-) Bildröhren)

- ⇒ höhere Energie  $\leftrightarrow$  höhere Potentialdifferenzen
- Entwicklung von Hochspannungsquellen (HV-Quellen):  
Greinacher-Kaskade, van de Graaff, Tesla-Transformator, Marx-Generator
- Limitierung durch HV-Überschläge und -Entladungen

## HV-Quellen

### Greinacher (1921):

- ▷ Ausgangsspannung nach  $n$  Stufen:

$$U = 2nU_0 - \Delta U - \delta U$$

- ▷ Spannungsabfall unter Laststrom  $I$ :

$$\Delta U = \frac{2\pi I}{\omega C} \cdot \left( \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n \right)$$

- ▷ Brummspannung unter Laststrom  $I$ :

$$\delta U = \frac{2\pi I}{\omega C} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

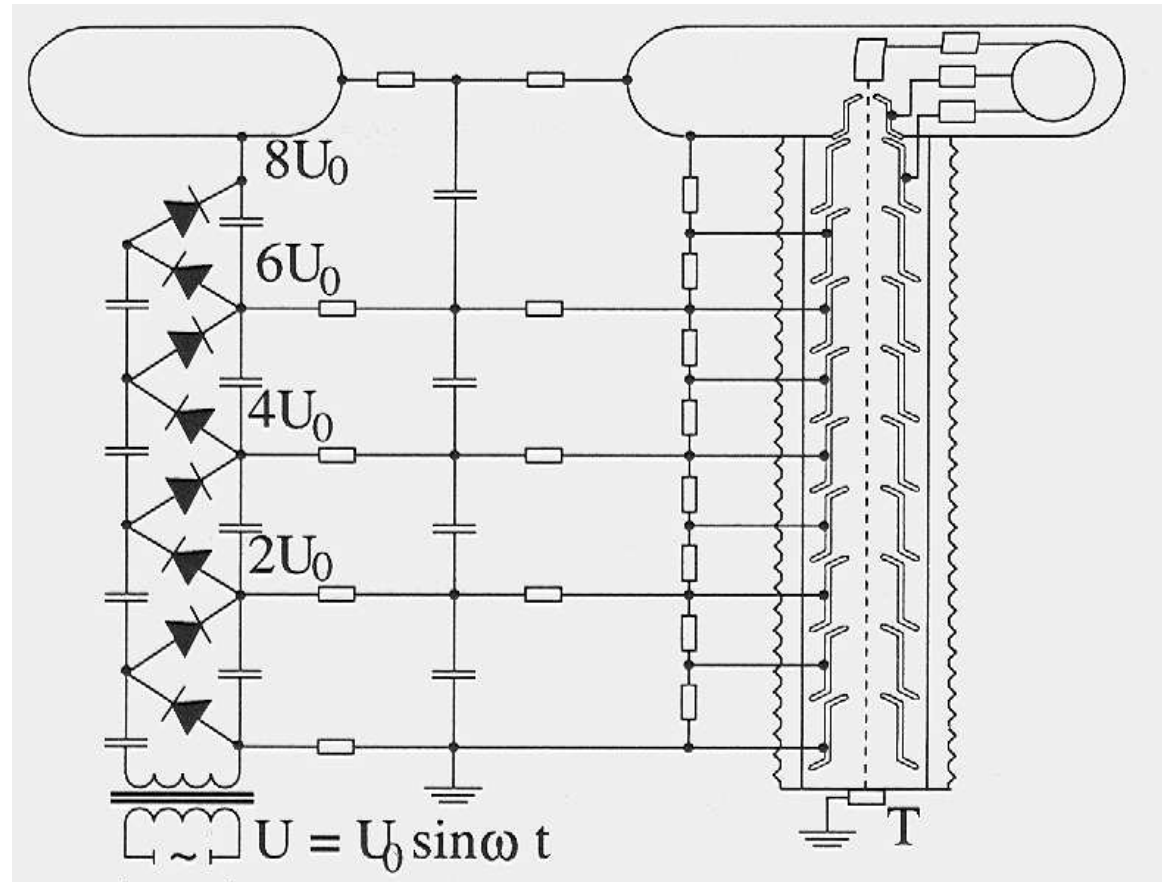
(Für Bildröhren typischerweise  $n = 3$  Stufen)

Typische Werte:

- $C = 1-10$  nF
- $U_0 = 700-1500$  kV
- $\omega = 2\pi \cdot 10$  kHz
- $I_{\max} \approx 100$  mA

⇒ Einsatz für Vorbeschleuniger und Injektoren

(zunehmend durch Quadrupol-Radiofrequenz-Beschleuniger (RFQ-Linacs) ersetzt)

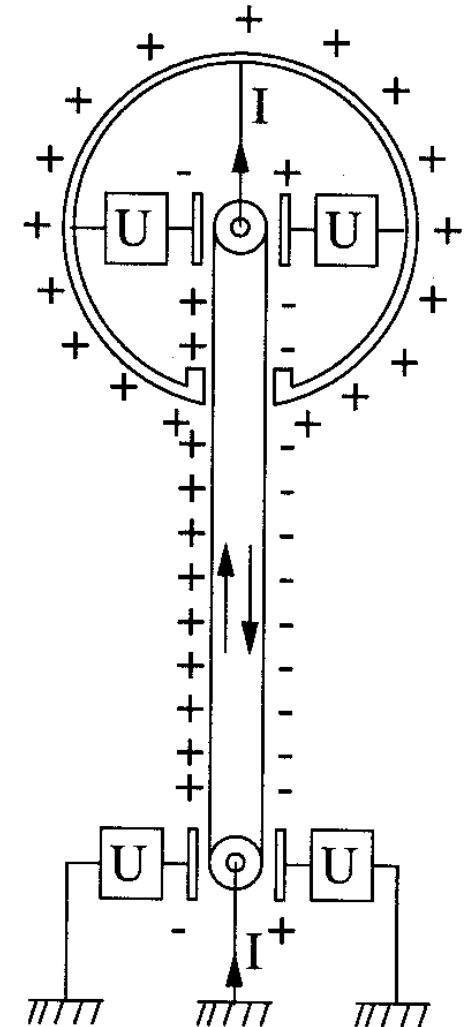
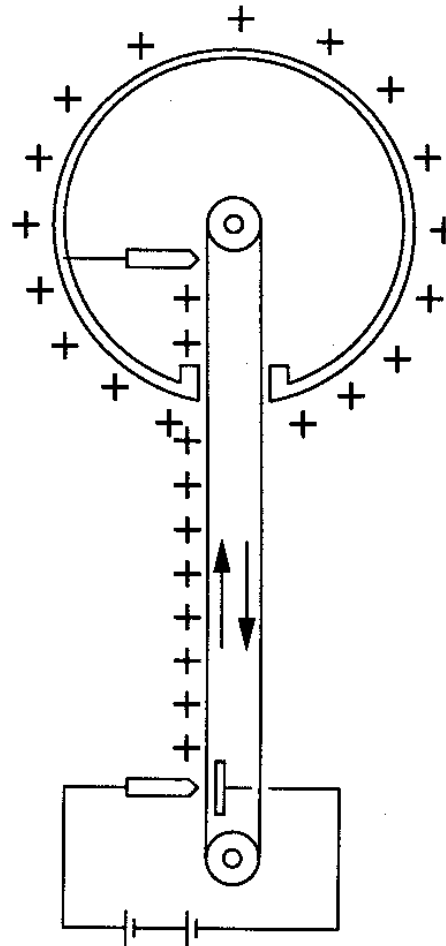


**van de Graaff:**

- ▷ elektrische Ladung  $\delta Q$  auf isoliertes Transportband aufgesprüht
- ▷ innerhalb Hohlraum-Kondensator abgegeben
- ▷ Kapazität eines Kugelkondensators:  

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$$
- ▷ Hochspannung für  $Q = \sum \delta Q$ :  

$$U = Q/C$$
- ▷ Limit: i.W. durch Korona-Entladung
- bis  $\sim 20$  MV, wenn in Drucktank mit isolierendem Gas, z.B. SF<sub>6</sub>, N<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>, gefüllt bei hohem Druck → Pascheneffekt (Isolationsvermögen  $\propto 1/\text{Druck}$ )
- doppelter Ladungstransports durch zusätzliche Influenz-Spannungsquellen



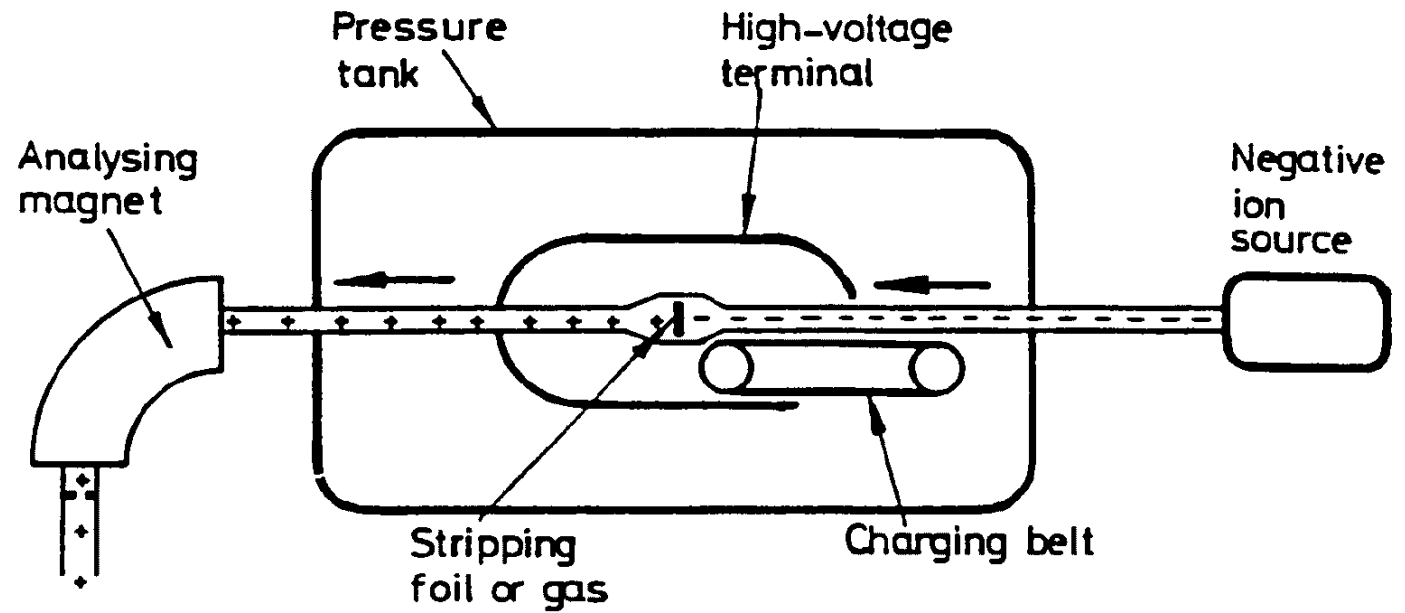
Ausführungen: *Laddertron* (Metallklammern auf Transportband), *Pelletron* (Metallkugeln)



Abbildung 13: 5 MV van de Graaff im Hahn-Meitner-Institut, Berlin

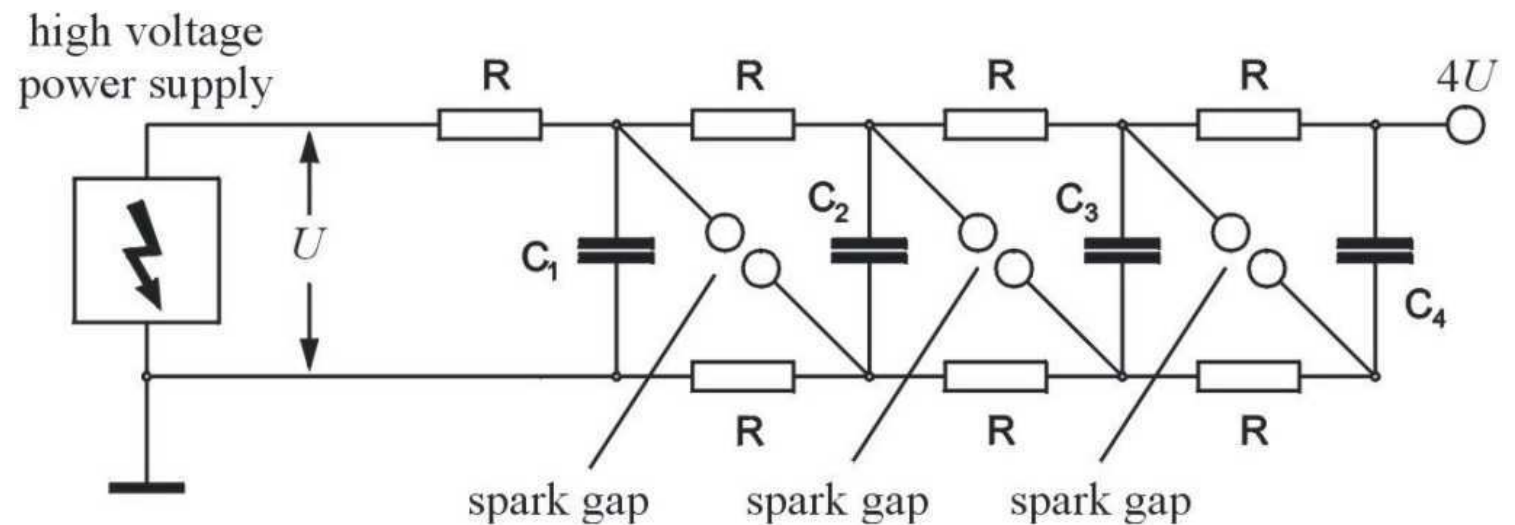
**Tandem-Beschleuniger:**

- ▷ zunächst negativ geladene Ionen beschleunigt,
- ▷ im Zentrum positiv umgeladen (z.B. durch dünne (Stripper-)Folie),
- ▷ erneut volles elektrost. Potential zur Beschleunigung



**Marx-Generator:**

- ▷ zunächst Aufladung parallel-geschalteter Kondensatoren aus HV-Quelle langsam über Widerstände  $R$
  - ▷ Reihenschaltung der Kondensatoren schlagartig über Funkenstrecken
- kurze Spannungspulse ( $\ll 1 \mu\text{s}$ ) bis  $\sim 100 \text{ kV}$



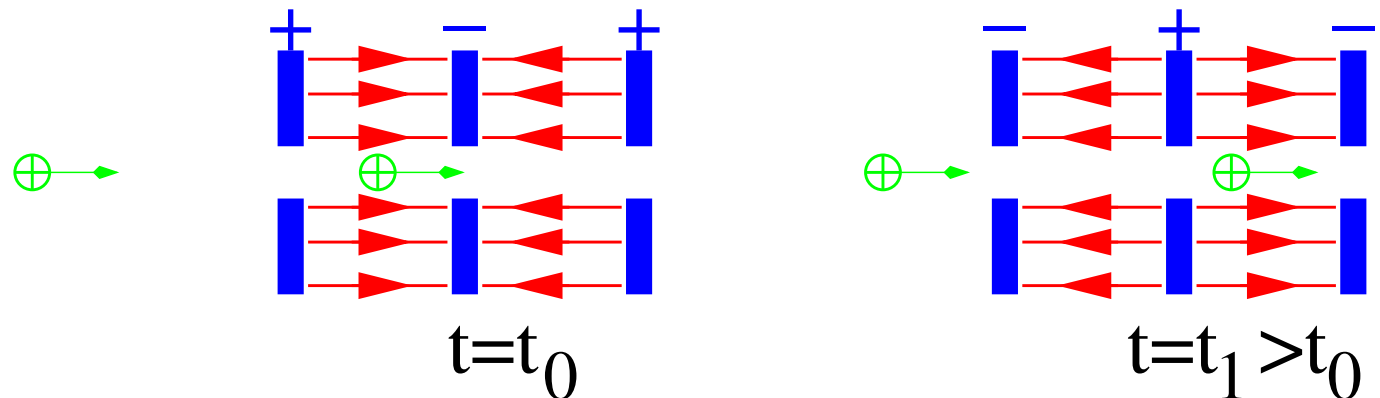
⇒ Einsatz z.B. in gepulsten Quellen, Induktions-Linacs (Beschleunigung mit Induktionsspannung:  $\partial B_\phi / \partial t = -E_z$ )



## Beschleunigung mit HF-Feldern

Beschleunigung erfordert:

- ▷ longitudinales  $\vec{E}$ -Feld
- ▷ richtige Polarität (Synchronität)
- ▷ gebündelte Teilchen im Strahl  
("bunched beam")
- ▷ Bunchlänge  $l \ll \beta\lambda_{\text{RF}}/2$   
( $v = \beta c$ )
- ▷ Bunchabstand  $L_B = n\beta\lambda_{\text{RF}}$ ,  
 $n \in \mathbb{N}$



⇒ Isings Idee (1924), Wideröes Realisierung (1928):

Lineare Kette von Beschleunigungstrecken mit HF-Generator verbunden

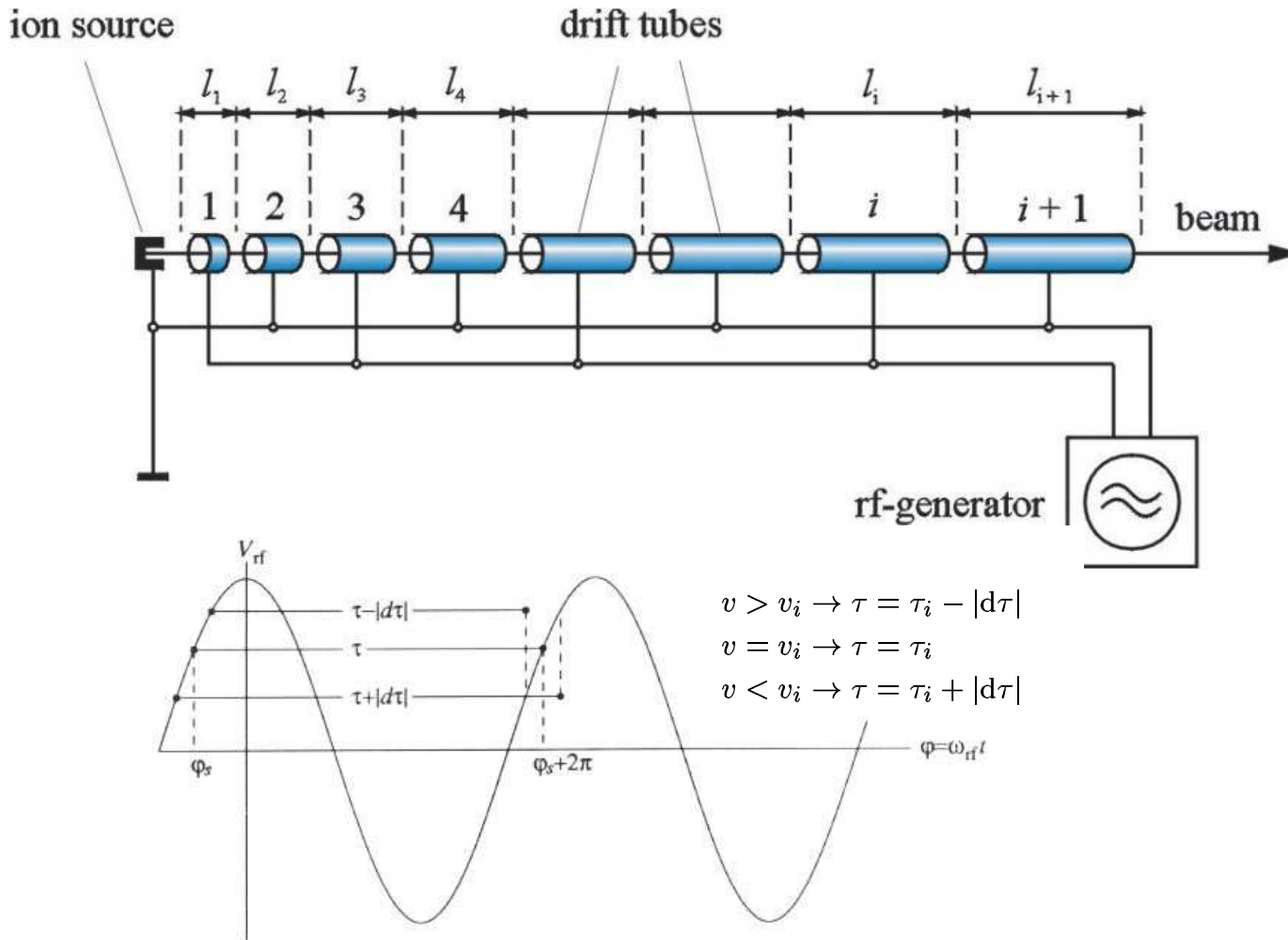


Figure. 9.7 A graphical demonstration of the phase-stability principle in a linac. The effective transition energy is always infinite, since  $\eta_{tr} = 1/\gamma^2 > 0$ .

▷ Referenzphase  $\varphi_s < \pi/2$  und  $\Delta E_{kin} < eU_0 \Rightarrow$  Phasenstabilisierung

$l_i$  und  $\lambda_{RF}$  bestimmen  $\Delta E_{kin} \Rightarrow$  Beschleunigerenergie festgelegt !

- ▷ Driftröhren mit HF verbunden
  - ▷ beschleunigendes  $\vec{E}$ -Feld  $\rightarrow$  Teilchen zwischen Driftröhren
  - ▷ sonst im feldfreien Raum einer Driftröhre
- $\Rightarrow$  Teilchen "surft" auf elektromagnetischer Welle (mit Phase  $\varphi_s$ )

▷ kinetischer Energiegewinn:

$$\Delta E_{kin} = eU_0 \cdot \sin \varphi_s$$

▷ Flugzeit von  $i \rightarrow i + 1$ :

$$\tau_i = l_i/v_i = \frac{1}{2}T_{RF} = \lambda_{RF}/2c$$

▷ kinet. Energie nach  $i$ :

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2}mv_i^2$$

$\Rightarrow$  für  $v \ll c$ :

$$l_i = \frac{\lambda_{RF}}{c} \sqrt{i \cdot \frac{eU_0 \cdot \sin \varphi_s}{2m}} \propto \sqrt{i}$$

$\Rightarrow$  für  $v \sim c$ :  $l_i = \frac{\lambda_{RF}}{2}$

Einige Überlegungen zur offenen Struktur von Wideröes-Linearbeschleuniger:

- Länge der  $i$ ten Driftröhre:  $L_i < l_i = \frac{1}{2}v_i/\nu_{\text{RF}} \propto 1/\nu_{\text{RF}}$

z.B.  $v_i \approx c/2$  und  $\nu_{\text{RF}} = 7 \text{ MHz} \rightarrow l_i \approx 10.7 \text{ m} !$

→ sehr langer Beschleuniger für geringe Frequenzen

→ höhere Frequenzen  $\nu_{\text{RF}} \leftrightarrow$  kürzerer Beschleuniger

- mittlere Abstrahlleistung eines Dipols:  $\bar{P} \propto \nu_{\text{RF}}^4$

→ Abstrahlverluste steigen mit vierter Potenz der Frequenz

→ geringere Frequenzen  $\nu_{\text{RF}} \leftrightarrow$  geringere HF-Verluste

⇒ geschlossene HF-Struktur → HF-Resonatoren (Cavities) in Alvarez-Struktur verhindern Abstrahlverluste

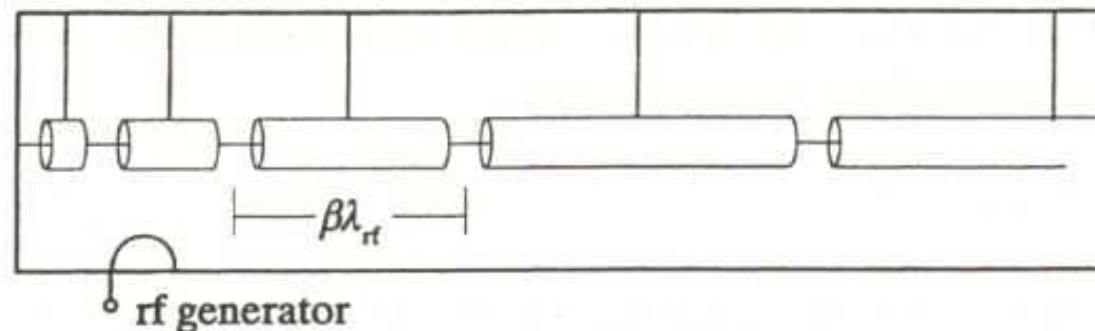


Fig. 2.6. Alvarez linac structure (schematic)

**Einschub zu SI- vs. Gauss-Einheiten** (aus F.K.Kneubühl: Repetitorium der Physik):

## A 2.3.2 Elektromagnetische Gleichungen

Einheiten		SI	el. stat. CGS (esu)	el. magn. CGS (emu)	Gauß
el. Verschiebung	$\vec{D} =$	$\epsilon \epsilon_0 \vec{E}$	$\epsilon \vec{E}$	$\epsilon c^{-2} \vec{E}$	$\epsilon \vec{E}$
magn. Induktion	$\vec{B} =$	$\mu \mu_0 \vec{H}$	$\mu c^{-2} \vec{H}$	$\mu \vec{H}$	$\mu \vec{H}$
Coulomb-Gesetz	$\vec{F} =$	$\frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon \epsilon_0} r^{-3} \vec{r}$	$\frac{Q_1 Q_2}{\epsilon} r^{-3} \vec{r}$	$\frac{Q_1 Q_2}{\epsilon c^{-2}} r^{-3} \vec{r}$	$\frac{Q_1 Q_2}{\epsilon} r^{-3} \vec{r}$
Lorentz-Kraft	$\vec{F} =$	$Q [\vec{v} \times \vec{B}]$	$Q [\vec{v} \times \vec{B}]$	$Q [\vec{v} \times \vec{B}]$	$c^{-1} Q [\vec{v} \times \vec{B}]$
1. Maxwell-Gesetz	$\text{rot } \vec{H} =$	$\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$	$4\pi \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$	$4\pi \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$	$c^{-1} \left( 4\pi \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right)$
Biot-Savart	$d\vec{H} =$	$-\frac{I}{4\pi} \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3}$	$-I \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3}$	$-I \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3}$	$-\frac{I}{c} \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3}$
2. Maxwell-Gesetz	$\text{rot } \vec{E} =$	$-\frac{d\vec{B}}{dt}$	$-\frac{d\vec{B}}{dt}$	$-\frac{d\vec{B}}{dt}$	$-c^{-1} \frac{d\vec{B}}{dt}$
3. Maxwell-Gesetz	$\rho_e =$	$\text{div } \vec{D}$	$\frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{D}$	$\frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{D}$	$\frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{D}$
Energiedichte	$w =$	$\frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H})$	$\frac{1}{8\pi} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H})$	$\frac{1}{8\pi} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H})$	$\frac{1}{8\pi} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H})$
Poynting-Vektor	$\vec{S} =$	$\vec{E} \times \vec{H}$	$\frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$	$\frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$	$\frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$

NB: Gauss-Einheiten in diesem Skript !

## A 2.3.3 Beschreibung des elektrischen Verhaltens der Materie

Einheiten	SI	el. stat. CGS, Gauß
Diel. Verschiebung $\vec{D} =$	$\begin{cases} \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \\ \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{cases}$	$\begin{cases} \epsilon \vec{E} \\ \vec{E} + 4\pi \vec{P} \end{cases}$
Polarisation $\vec{P} =$	$\epsilon_0 \chi_e \vec{E}$	$\chi_e \vec{E}$
Suszeptibilität $\chi_e =$	$\epsilon - 1$	$\frac{\epsilon - 1}{4\pi}$

## A 2.3.4 Beschreibung des magnetischen Verhaltens der Materie

Einheiten	SI	Gauß
Magn. Induktion $\vec{B} =$	$\begin{cases} \mu \mu_0 \vec{H} \\ \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{cases}$	$\begin{cases} \mu \vec{H} \\ \vec{H} + 4\pi \vec{M} \end{cases}$
Magnetisierung $\vec{M} =$	$\chi_m \vec{H}$	$\chi_m \vec{H}$
Suszeptibilität $\chi_m =$	$\mu - 1$	$\frac{\mu - 1}{4\pi}$
Bohrsches Magneton $\mu_B =$	$\frac{e\hbar}{2m_0}$ $0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$	$\frac{e\hbar}{2m_0 c}$ $0,927 \cdot 10^{-20} \text{ erg/Gauß}$

## (kurze) Theorie der HF-Wellenleiter

Ausgangspunkt sind (auch hierfür) die *Maxwellschen Gleichungen* (in Gauss-Einheiten!):

$$\nabla(\varepsilon_r \vec{E}) = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_r} = \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Im Folgenden: Materiefrei  $\rightarrow \varepsilon_r = 1, \mu_r = 1$

Aus  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$  folgt damit die *Laplace-Gleichung* im Vakuum (d.h.  $\rho = 0$ ):

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

mit der Lösung:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Vereinfachung: betrachte nur beschleunigende  $\vec{E}$ -Komponente:

$$E_s(s, t) = E_{0s} \cdot e^{i(\omega t - k_s s)} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 E_s + \frac{\omega^2}{c^2} E_s = 0.$$

fürs azimutale Feld  $E_\theta(\theta, t) = E_{0\theta} \cdot \exp(i(\omega t - n\theta))$ , mit Periodizität  $n$

Trennung des Laplace-Operators  $\Delta \equiv \nabla^2$  in longitudinalen ( $\nabla_s^2 \equiv \partial^2 / \partial s^2$ ) und transversalen ( $\nabla_{\perp}^2$ ) Anteil ergibt (mit  $\nabla_s^2 E_s = -k_s^2 \cdot E_s$ ):

$$\nabla_{\perp}^2 E_s + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_s^2 \right) E_s = 0.$$

Im Folgenden: zylindersymmetrische Wellenleiter  $\rightarrow$  Zylinderkoordinaten  $(r, \theta, s)$

$$\rightarrow \nabla_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial r^2 + (1/r) \partial / \partial r + (1/r^2) \partial^2 / \partial \theta^2.$$

Mit  $(1/r^2) \partial^2 / \partial \theta^2 E_{\theta} = -n^2 / r^2 E_{\theta}$  und mit *Grenzwellenzahl*  $k_c^2 \equiv (\omega/c)^2 - k^2$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} E_s + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} E_s + \left( k_c^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E_s = 0.$$

Lösung dieser DGL durch Bessel-Funktionen 1. ( $J_n$ ) und 2. Art ( $Y_n$ ):

$$E_s = A_J J_n(k_c r) + A_Y Y_n(k_c r),$$

dabei  $A_Y = 0$ , sonst Singularität:  $Y_n(k_c r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\infty$ .

Diese Lösung repräsentiert viele mit den Randbedingungen verträgliche *Moden*  $n$  für die  $\vec{E}$ -Feldkomponente  $E_s$ .

(Analog für  $B_s$ . Die transversalen Komponenten  $(E_r, E_{\theta}, B_r, B_{\theta})$  folgen mit  $\nabla \times \vec{E}$  und  $\nabla \times \vec{B}$ .)

**Moden und deren Klassifikation:****TE-Moden:**  $E_s = 0$  und  $B_s \neq 0$  (auch:  $H$ -Moden)**TM-Moden:**  $E_s \neq 0$  und  $B_s = 0$  (auch:  $E$ -Moden)**NB:** nur TM-Moden zur Teilchenbeschleunigung geeignet, da TE-Moden:  $E_s = 0$ !

Individuelle Moden charakterisiert als  $\text{TM}_{npq}$  nach Periodizität der Welle in :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta : n \\ r : p \\ s : q \end{array} \right.$$
z.B. **TM**<sub>010</sub>:

- keine Periode in azimuthaler Richtung ( $\theta$ )
- einfache Periodizität in  $r$ , d.h. hat einen Knoten in radialer Richtung und zwar an der Wand, wo  $\vec{E}(r, \theta, s) \xrightarrow{r \rightarrow \text{Wand}} 0$
- keine Periode in longitudinaler Richtung ( $s$ )

Die Lösung der Wellengleichung hängt nur von  $r$  ab:  $E_s(r, \theta, s) = E_s(r)$ .



**TM<sub>010</sub>-Welle für zylindersymmetrischen Wellenleiter:**

- Wellenleiter mit Radius  $r = a$

$$\rightarrow E_s(k_c r) \propto J_0(k_c r), H_\theta(k_c r) \propto J_1(k_c r)$$

$$\rightarrow E_s(k_c r) = A_J J_0(k_c r) \xrightarrow{r \rightarrow a} 0$$

$$\rightarrow k_c a \approx 2.405 \quad (1. \text{ Nullstelle von } J_0)$$

- Grenzfrequenz im Wellenleiter:

$$\omega_c = c k_c = c \cdot \frac{2.405}{a}$$

( $k_c^2 > 0 \rightarrow$  keine Wellenausbreitung f.  $\omega < \omega_c$ )

$$\rightarrow k_s^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_c^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$$

$$\rightarrow k_c a \approx 2.405 \quad (1. \text{ Nullstelle von } J_0)$$

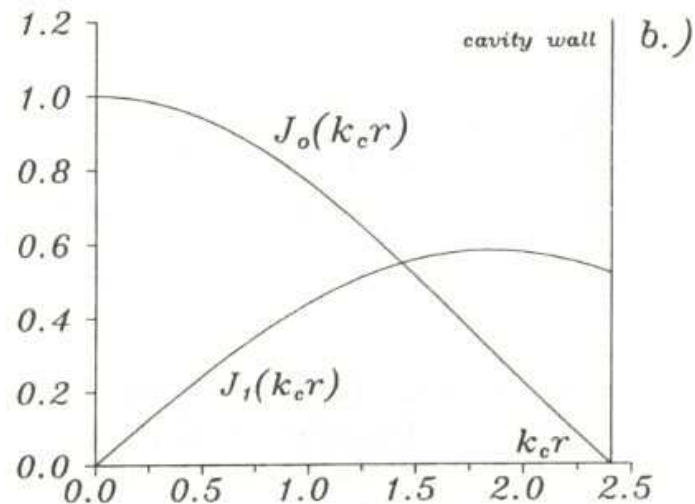
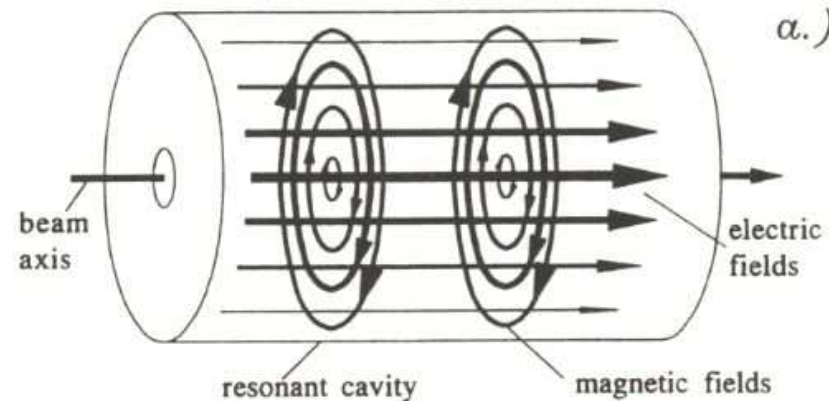
**Phasen-/Gruppengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  und  $v_g$ :**

- Phase  $\psi \equiv \omega t - k_s s = \text{const.}$

$$\rightarrow \dot{\psi} = \omega - k_s v_{\text{ph}} = 0$$

$$\rightarrow v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_s} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} > c \quad !$$

$$\bullet \quad v_g \equiv d\omega/dk = \frac{c^2 k_s}{\omega} = c \cdot \frac{c}{v_{\text{ph}}} < c$$



**Fig. 2.7.** Electromagnetic field pattern for a TM<sub>010</sub> mode in a circular waveguide a.) three dimensional field configuration, b.) radial dependence of fields

**Anmerkungen:**

- $\vec{E}$ -Feldkomponente in Teilchenrichtung erforderlich  
(z.B. keine direkte Beschleunigung mit Laserlicht möglich, da nur TE-Mode))

- für Teilchenbeschleunigung erforderlich:

$$v_{\text{ph}} = v_{\text{particle}} \leq c$$

→ z.B. Schikanen/Blenden im Wellenleiter/  
Cavity, um  $v_{\text{ph}}$  zu verringern

- detaillierte Betrachtung von Wellenleiter (mit/ohne Schikanen) aufwendig  
(Details z.B. in: J.C. Slater: Review of Modern Physics 20, 1948, S.473ff)

- Materialeffekte in Wellenleiter-Betrachtung vernachlässigt

z.B. Skin-Effekt, Oberflächenwiderstände, Impedanzen, Güte des Resonators, Signalreflektion, Anregung höherer Moden durch Rückwirkung von Teilchenstrahl auf Cavity (Higher Order Modes, HOM)

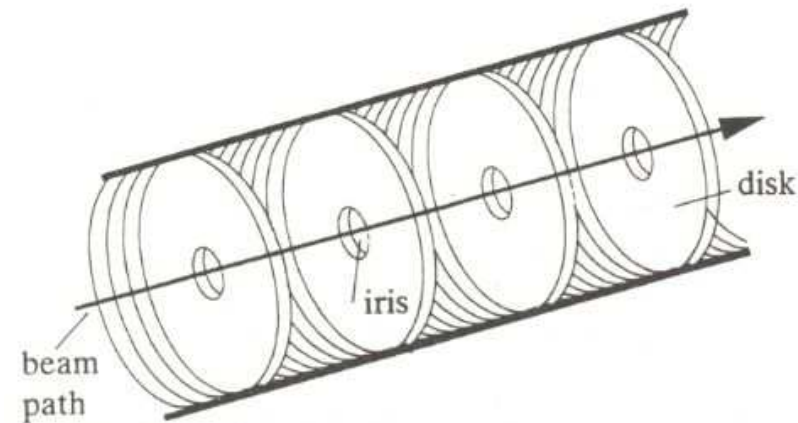
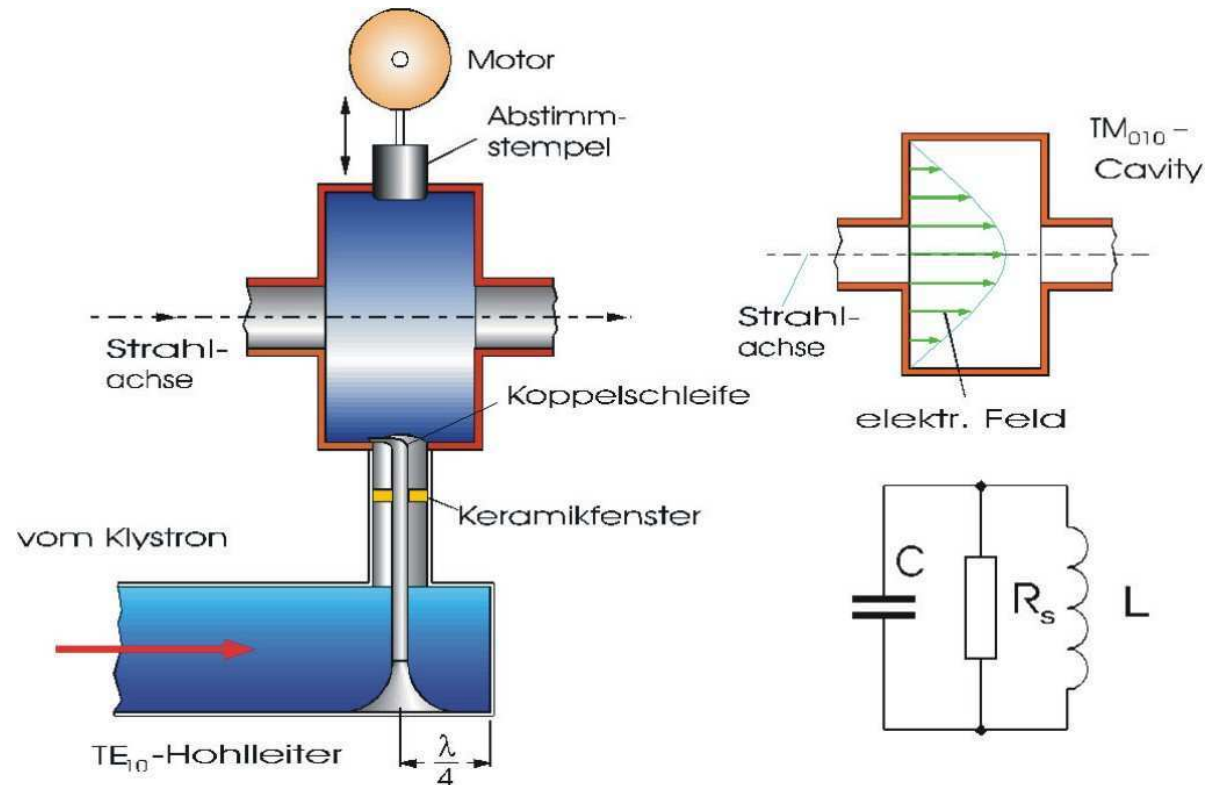


Fig. 2.8. Disk loaded accelerating structure for an electron linear accelerator (schematic)

## Beschleunigungsstrukturen

### Komponenten:

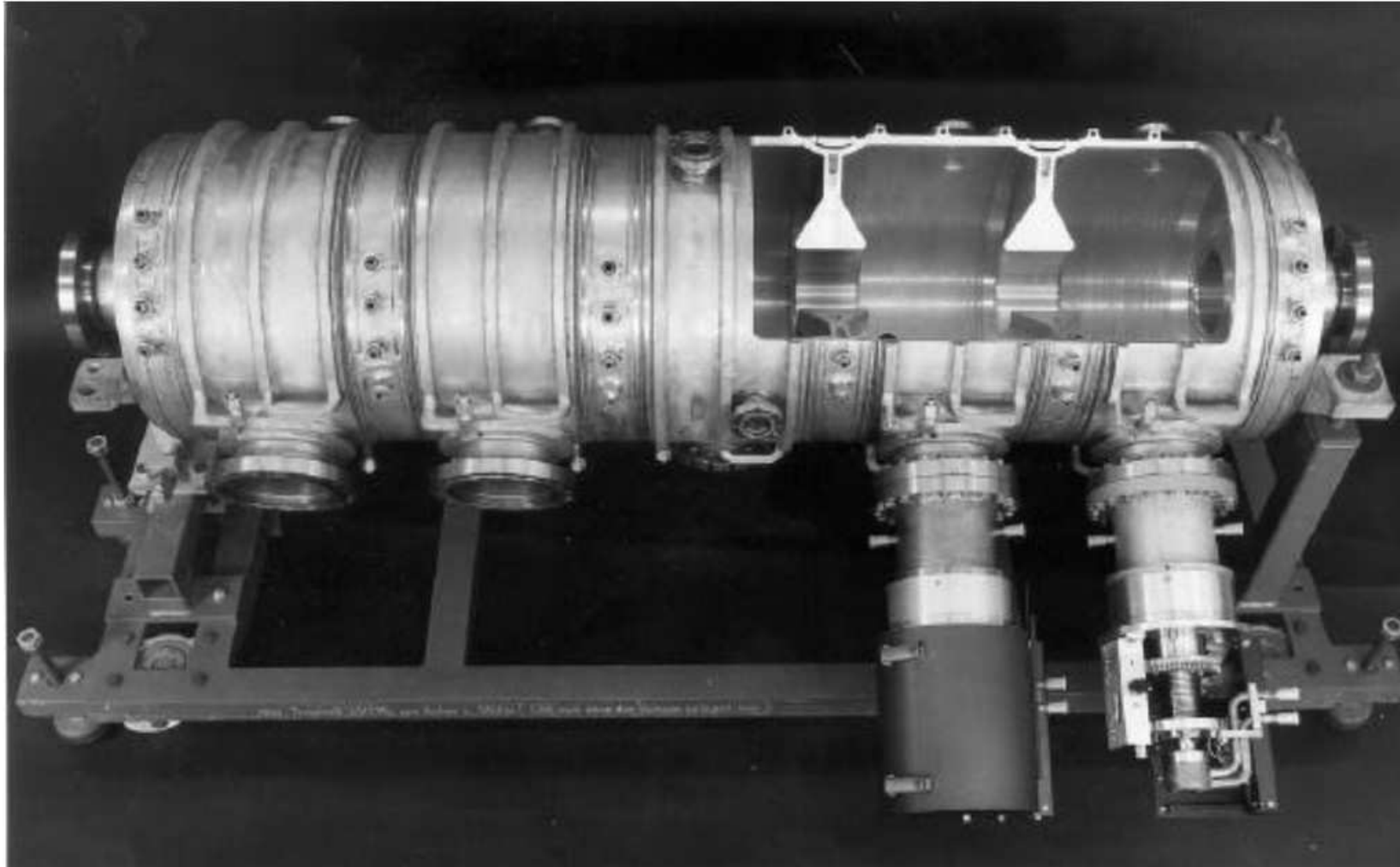
- HF-Leistungsquelle (Klystron)
- Hohlleiter zum Beschleunigungsresonator (Cavity)
- Einkopplung von Hohlleiter in Cavity
- Resonator (ggf. mit Abstimm-Möglichkeit)
- Ersatzschaltbild mit Kapazität  $C$ , Induktivität  $L$  und Shuntimpedanz bei Resonanz  $R_s$



**typ. Daten einer 1-zelligen Cavity:** (DORIS- $e^+e^-$ -Beschleuniger,  $2 \times 5$  GeV, DESY)

- |                    |                                   |                    |                                     |
|--------------------|-----------------------------------|--------------------|-------------------------------------|
| • Resonanzfrequenz | $f_{\text{RF}} = 500 \text{ MHz}$ | • Güte             | $Q = 38\,000$                       |
| • Shuntimpedanz    | $R_s = 3 \text{ M}\Omega$         | • Leistung         | $P_{\text{RF}} = 50 \text{ kW}$     |
| • Impedanz         | $Z = 80 \Omega$                   | • Scheitelspannung | $U_{\text{crest}} = 548 \text{ kV}$ |

typ. mehrzellige Cavity: (PETRA- $e^+e^-$ -Beschleuniger,  $2 \times 23$  GeV, DESY)



NB:  $\vec{E}$ -Felder parallel zu Metalloberflächen  $\longrightarrow$  ohmsche Verluste  $\longrightarrow$  Kühlung erforderlich

Reduktion ohmscher Verluste durch Speicher-Cavity: (LEP- $e^+e^-$ -Beschleuniger,  $2 \times 10^4$  GeV, CERN)

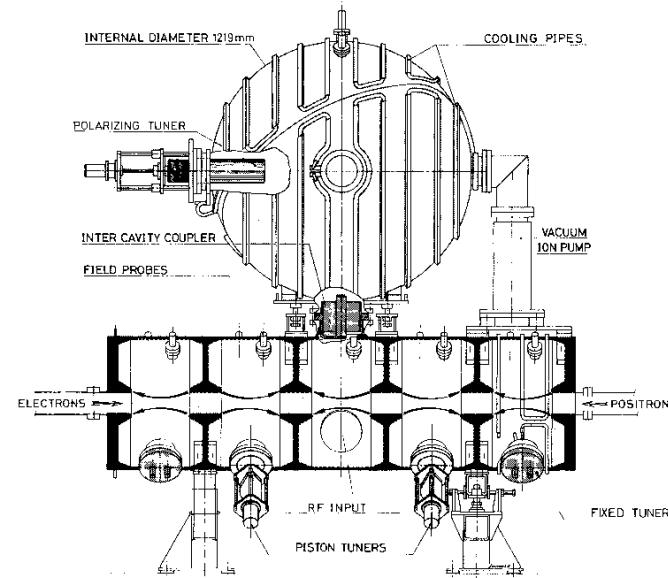
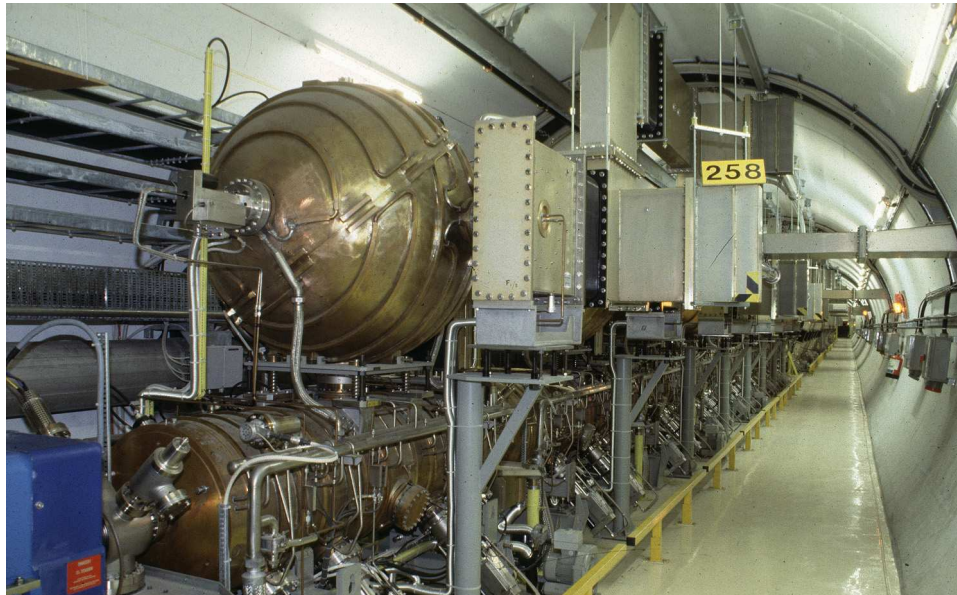


Fig. 34 One unit of the LEP coupled-cavity accelerating structure

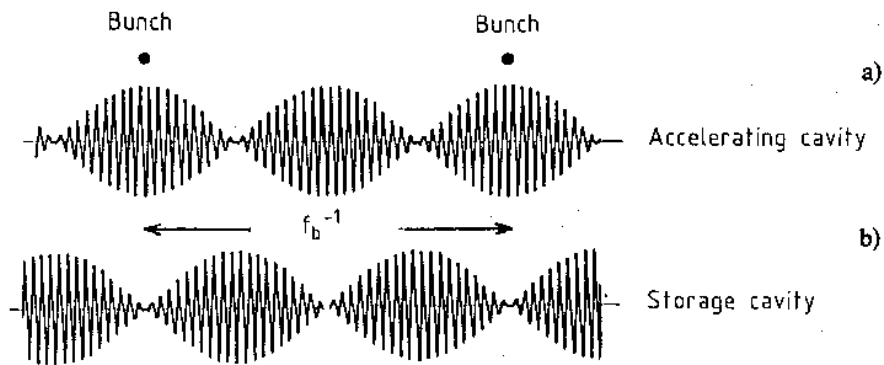
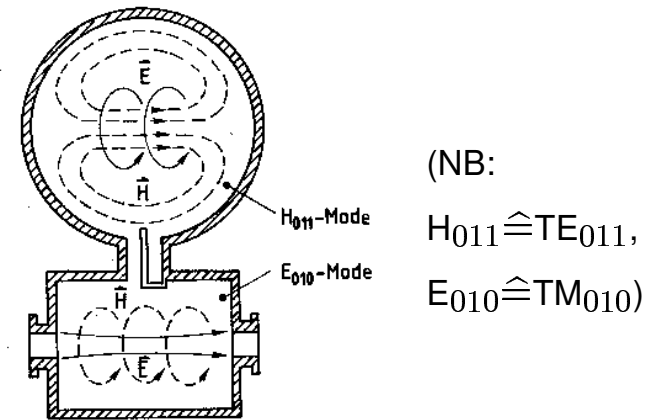


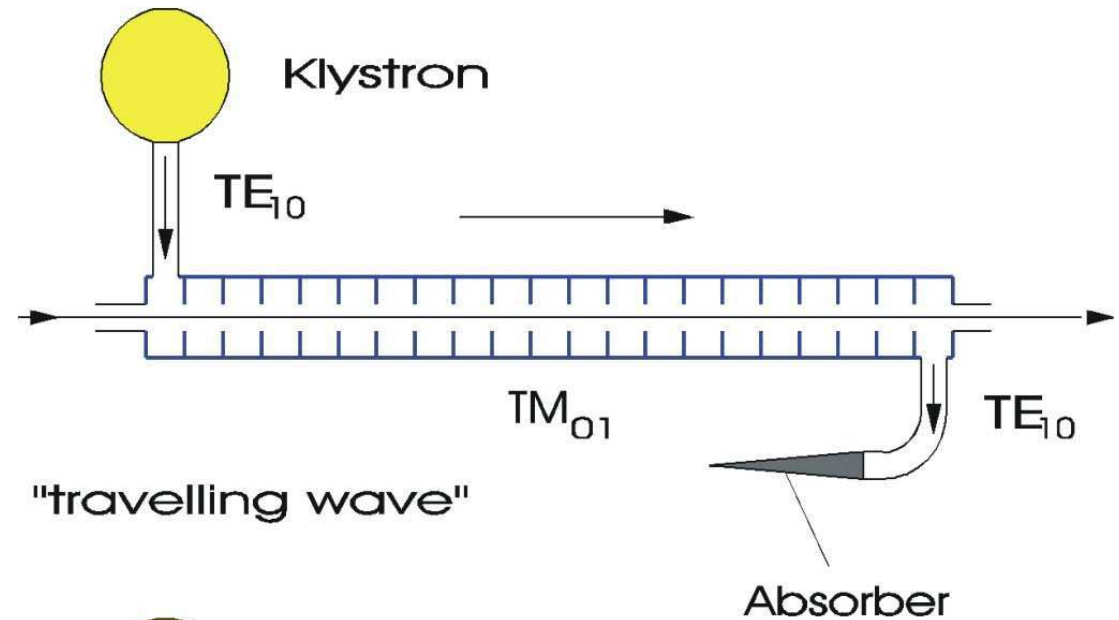
Fig. 26 Modulated RF waveforms for a) accelerating cavity, b) storage cavity



## Betriebsmodi (mehrzelliger) Cavities:

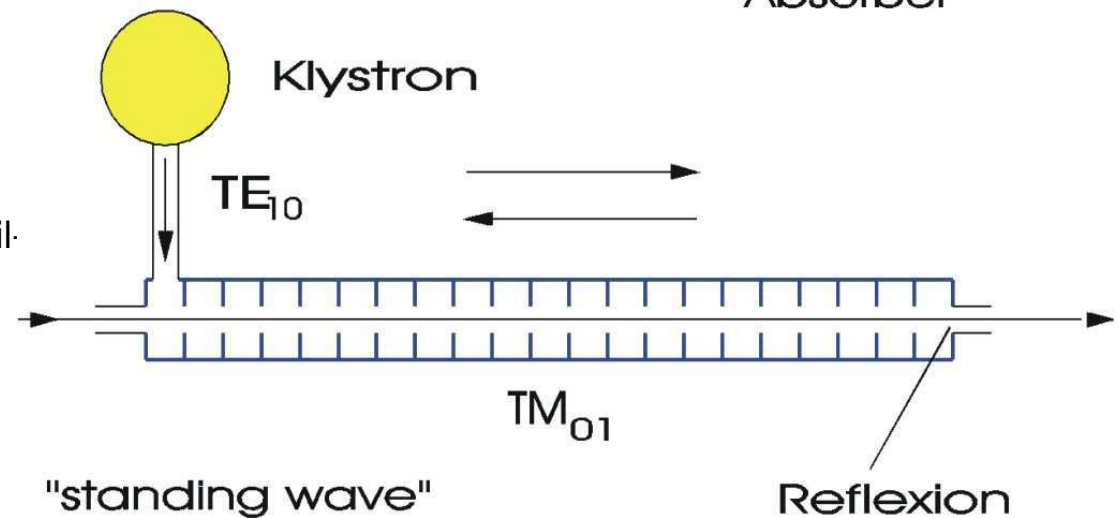
### Laufwellen-Resonator:

- HF-Welle läuft mit Teilchen durch Cavity
- Beschleunigung nur in Laufrichtung
- Einsatz in fixed-target-Beschleunigern
- Höhere Moden automatisch gedämpft



### Stehwellen-Resonator:

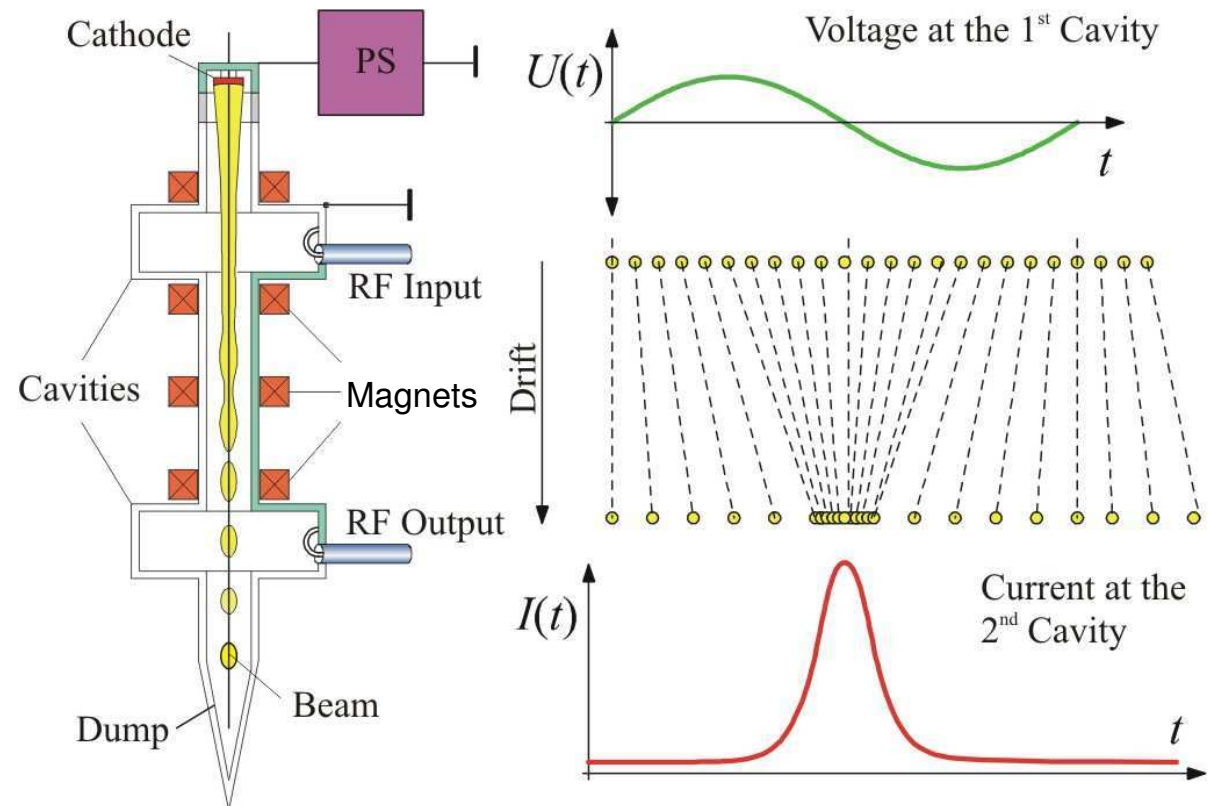
- HF-Welle wird in Cavity reflektiert
- Beschleunigung unterschiedlich geladener Teilchen in einer Cavity
- Einsatz in Collider/Speicherringen
- Dämpfung höherer Moden notwendig



## HF-Leistungsquelle

### i.W.: Klystrons

- ▷ Gleichstrom-Elektronenstrahl
- ▷ Einkopplung von HF
- ▷ Bunching durch Geschwindigkeitsmodulation (s.u.)
- ▷ Magnete zur Strahlführung & -fokussierung
- ▷ Resonatoranregung durch Elektronenbunche
- ▷ Resonatoranregung durch Elektronenbunche
- ▷ Auskopplung der verstärkten HF
- ▷ meist  $>2$  Cavities  $\rightarrow$  höhere Verstärkung und größere Effizienz
- ▷ Betriebsmodi: Dauerstrich oder gepulst



Beispiele für Klystrons: typische Betriebsdaten	Dauerstrich		gepulst	
	LEP: TH2089 (Thomson)	LHC: Spezifikation	SLC: 5045 (SLAC)	TESLA: TH1801 (Thomson)
Frequenz	352 MHz	400.8 MHz	2.87 GHz	1.3 GHz
Pulslänge	cw	cw	3.5 $\mu$ s	1.5 ms
Wiederholrate	cw	cw	120 Hz	5 Hz
Beschleunigungs-Spannung	87 kV	$\leq$ 54 kV	350 kV	117 kV
Strahlstrom	17.1 A	9 A	450 A	131 A
HF-Leistung (Peak)	1 MW	300 kW	65 MW	10 MW
Effizienz	68%	$\geq$ 62%	50%	65%
Verstärkung	40 dB	$\geq$ 37 dB	52 dB	48 dB
Länge	4.75 m			2.5 m

(cw=continuous wave)

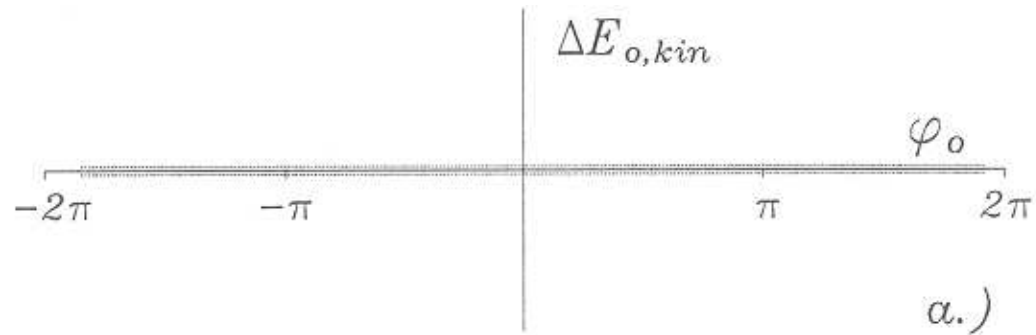
NB: Hohe Peak-Ausgangsleistung nur bei kurzer Pulslänge erreichbar





**Bunching eines Strahl:**

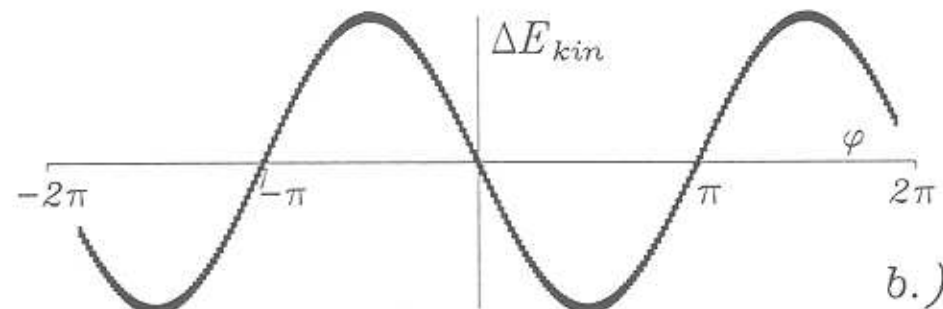
a.) DC-Strahl aus Quelle



b.) Sinusförmiger Energiegewinn in Resonator ( $\beta \ll 1$ ):

$$\Delta E_{kin} = eU_0 \sin \varphi \approx mv \Delta v$$

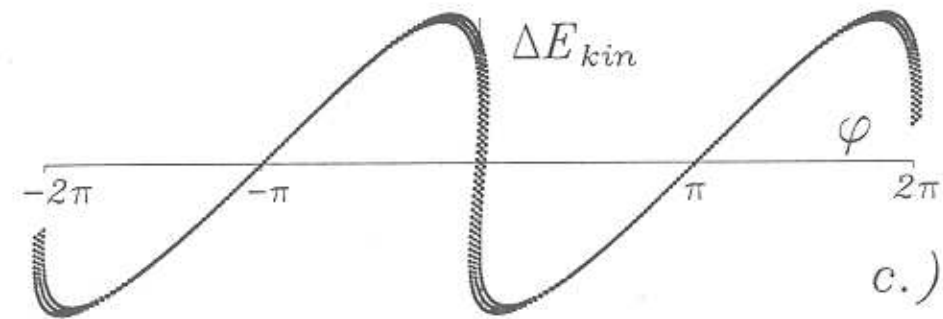
$$\rightarrow \Delta v = \frac{eU_0 \sin \varphi}{mv}$$



c.) Flugzeit  $\Delta t$ :  $\Delta v \cdot \Delta t = \frac{\varphi}{2\pi} \lambda_{RF}$

$\rightarrow$  Flugstrecke  $\Delta l$  für optimales Bunching ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ):

$$\Delta l = v \Delta t \approx \frac{2E_{kin}}{eU_0} \cdot \frac{\lambda_{RF}}{2\pi}$$



# Quadrupol-Radiofrequenz-Beschleuniger (RFQ)

... alternativ zu den elektrost. Linearbeschleunigern; detaillierte Behandlung aufwendig; Funktionsprinzip:

- transversal: 4polige Struktur
- erzeugt fokussierendes Feld
- longitudinal: "wellenförmig" (genauer: hyperbelförmig)
- erzeugt beschleunigendes Feld

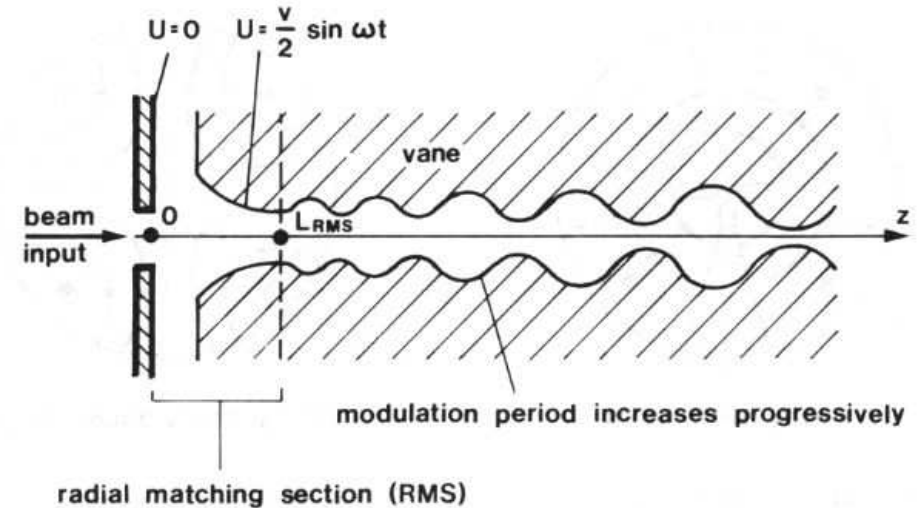
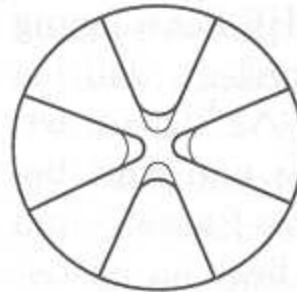
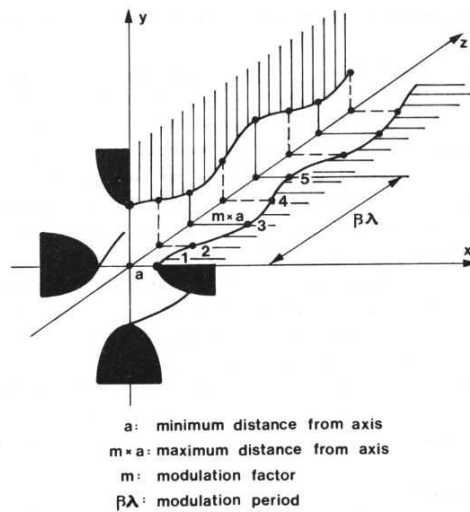


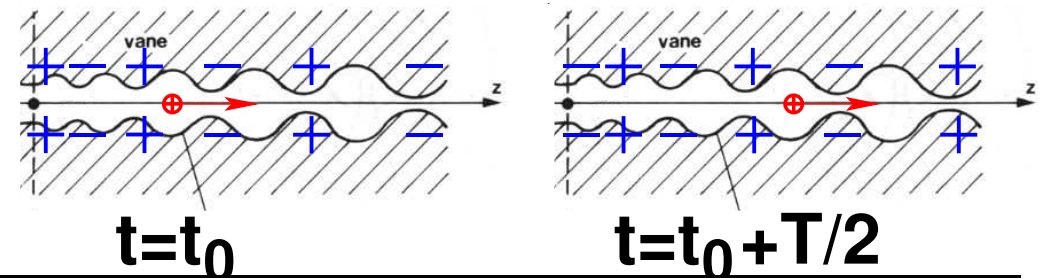
Fig. 10 Typical vane shape in an RFQ



a: minimum distance from axis  
 m\*a: maximum distance from axis  
 m: modulation factor  
 $\beta\lambda$ : modulation period

Fig. 6 Modulation of RFQ electrodes to create longitudinal fields

Prinzip der Beschleunigung:



**Feldstruktur in RFQ:**

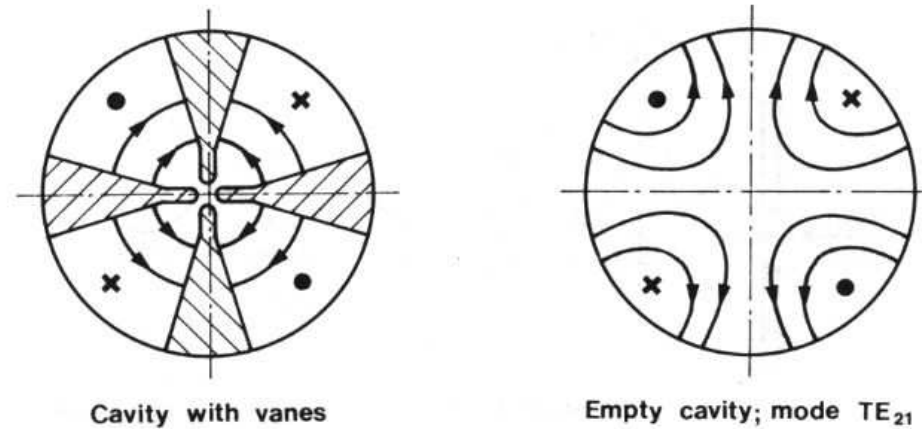
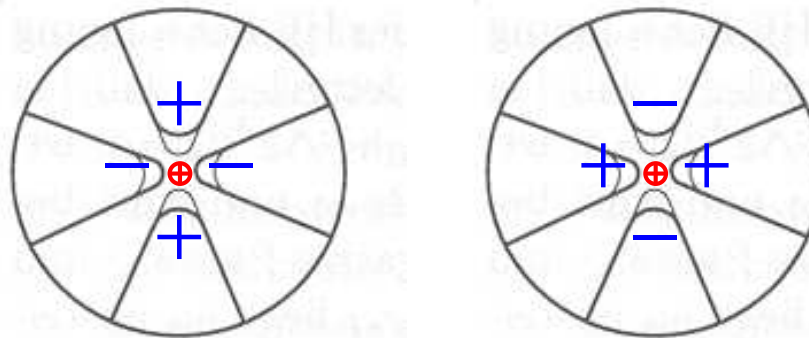


Fig. 11  $TE_{210}$  mode in a four-vane cavity and in an empty cavity

Betriebsmode:  $TE_{210}$  durch Elektroden modifiziert.

Quadrupolfeld wirkt fokussierend:  
(analog FODO-Struktur, s.u.)



### Eigenschaften von RFQs:

- linearer Ionen-Beschleuniger:  $\geq 20$  keV bis 2 MeV
- geringe Injektionsenergie  $\rightarrow$  keine aufwendige Hochspannungsversorgung
- Bunching, Fokussierung, Beschleunigung durch HF
- typ. Länge 1-2 m
- Betriebsfrequenz  $\sim 50$  bis 400 MHz
- Spannung zwischen Vanes  $\sim 100$  kV
- Güte  $Q \sim 10000$
- Impedanz  $Z \equiv U^2/2P \sim 5 \cdot 10^5 \Omega$  (Leistung  $P$ , um Spannung  $U$  zu erreichen)  
NB: Faktor  $1/2$  in Impedanz-Definition Konvention für Linear-Beschleuniger

$\Rightarrow$  RFQ als Ersatz für elektrost. (Ionen-)Beschleuniger

NB: weitere, kompliziertere Strukturen werden für Beschleunigung & Fokussierung benutzt

## Zirkulare/Kreis-Beschleuniger

- ▷ Betatron
  - ▷ Schwache Fokussierung, adiabatische Dämpfung
  - ▷ Mikrotron, Synchro-/Isochron-Zyklotron
  - ▷ Synchrotron
- 
- Limitierte HF-Leistung stimulierte die Entwicklung von zirkularen/Kreis-Beschleuniger:
    - + geringste HF-Felder in Kreis-Beschleunigern effektiv nutzbar  
(Teilchen nutzen wiederholt gleiches HF-Feld)
    - + lokale und kompakte Beschleunigungsstruktur in Kreisbeschleunigern  
↔ langgestreckte Resonatoren in Linearbeschleunigern
    - + in Betatron sogar intrinsische Beschleunigung ( $U_{ind} \propto -\dot{\phi}$ )

Zentrale Relation für Kreisbeschleuniger (in Gauss-Einheiten!):

- Lorentzkraft:

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Für  $\vec{E} = 0$ , homogene  $\vec{B}$ -Feld und Ladung  $q = e$  gilt:

- $$\vec{F} = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = m \left( \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} \right) = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

( $\vec{E} = 0 \rightarrow$  keine Beschleunigung  $\rightarrow \beta = \text{const} \rightarrow \gamma = \text{const}$ )

Mit Geschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  folgt:

- $$\frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} = \gamma m \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma m \vec{\omega} \times \vec{v}$$

( $\vec{E} = 0 \rightarrow$  keine Beschleunigung  $\rightarrow |\vec{\omega}| = \omega = \text{const}$ )

Damit gilt für ein Teilchen, das sich in einer zu  $\vec{B}$  senkrechten Ebene bewegt:

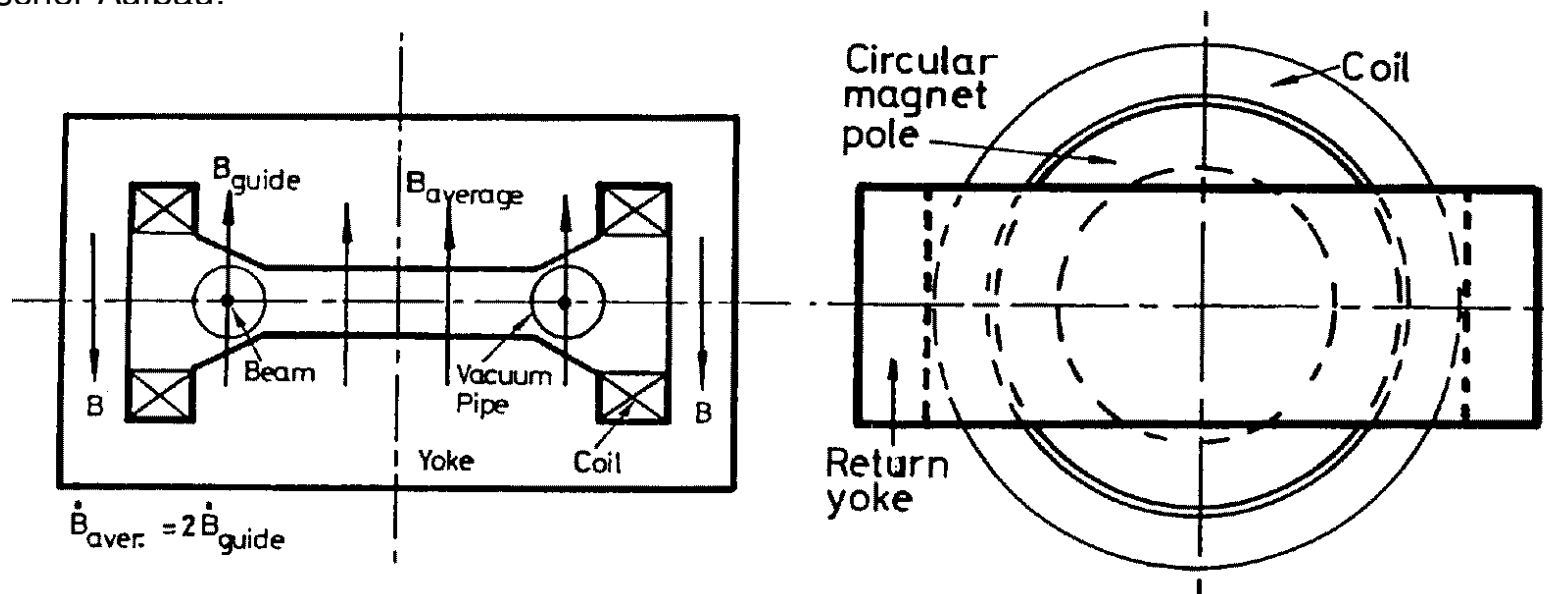
- $$\frac{e}{c} v B = \gamma m \omega v = \gamma m \frac{v^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad p \equiv \beta \gamma m c = \frac{e}{c} B r \quad !$$

in praktischen Einheiten:  $p[\text{GeV}/c] \approx 0.3 \cdot B[\text{T}] \cdot r[\text{m}]$

## Betatron

### Prinzip:

- Teilchenstrom  $\hat{=}$  Sekundärspule in Transformator
- Schematischer Aufbau:



- Beschleunigung durch Induktionsspannung:

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{cdt} \int_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{cdt} \phi_a$$

(magnet. Fluss  $\phi_a$  durch vom Teilchenstrom umschlossene Fläche  $a$ )

- Wideröe: fester Orbitradius des Teilchenstroms  $\rightarrow$   $1/2$ -Bedingung



### Wideröesche $1/2$ -Bedingung:

- Es gilt : 
$$p = \gamma m v = \frac{e}{c} B r$$
- Beschleunigungskraft  $\stackrel{!}{=} \text{azimutales } E\text{-Feld}$   $\longrightarrow F = \frac{dp}{dt} = \frac{e}{c} \left( \frac{dr}{dt} \cdot B + r \cdot \frac{dB}{dt} \right) \stackrel{!}{=} -e E_\varphi$
- konstanter Orbitradius  $r = R: dr/dt = 0$   $\longrightarrow \frac{e}{c} \cdot R \frac{dB}{dt} \stackrel{!}{=} -e E_\varphi$
- $B$ -Feld homogen innerhalb Sollbahnradius  $R$   $\longrightarrow \oint \vec{E} d\vec{s} = \int E_\varphi R d\varphi = 2\pi R E_\varphi$
- mit Induktionsgesetz ( $U_{\text{ind}} = -d\phi/cdt$ )  $\longrightarrow \frac{d\phi}{dt} = 2\pi R^2 \frac{dB(R)}{dt}$  (\*)
- Gesamter Fluss  $\phi = \pi R^2 \bar{B}(R)$   
mit mittlerer magn. Induktion  $\bar{B}$   $\longrightarrow \frac{d\phi}{dt} = \pi R^2 \frac{d\bar{B}(R)}{dt}$  (\*\*)
- $\implies$  Vergleiche (\*) und (\*\*)  $\longrightarrow B(R) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \bar{B}(R)$  ( $1/2$ -Bedingung)

**Betatron-Prinzip:**

- für alle geladenen Teilchen
- für alle Energien

denn  $1/2$ -Bedingung unabhängig davon !

**Betatron-Anwendung:**

- typ. Beschleunigungszyklus  $\rightarrow$
- kin. Energie (Impuls  $p$ , Teilchemasse  $m$ ):

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$$

▷ für Elektronen (typ.  $m_e c \ll p$ ):

$$E_{\text{kin, e}} \approx cp$$

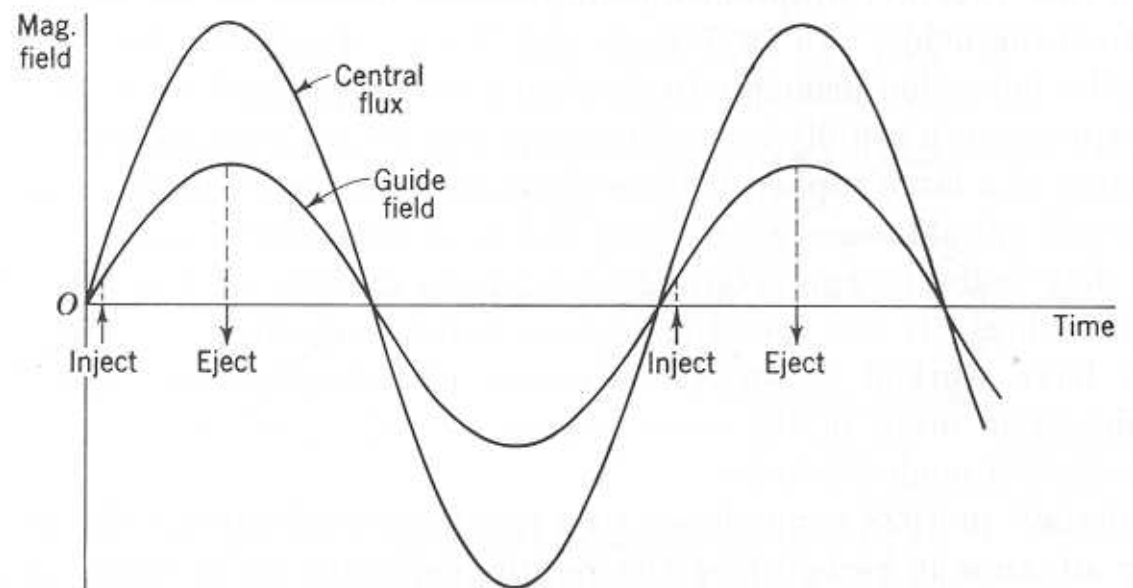
▷ für Protonen (typ.  $m_p c \gg p$ ):

$$E_{\text{kin, p}} \approx p^2 / 2m_p \ll pc = E_{\text{kin, e}}$$

$\Rightarrow$  Elektronbeschleunigung bevorzugt

**Größtes Betatron:** (Kerst 1950)

- $R = 1.23$  m Orbitradius
- maximales  $B$ -Feld:  $B(R) = 0.81$  T
- Magnet-Gesamtgewicht: 350 t
- Elektronenimpuls:  $p = 300$  MeV/ $c$



## Schwache Fokussierung

- $1/2$ -Bedingung  $\longrightarrow$  stabiler Orbitradius  $R$
- $\longrightarrow$  keine Stabilität senkrecht zum Orbit
- $\longrightarrow$  Strahlfokussierung erforderlich!

Betrachte dazu bei Abweichungen vom idealen Orbit (Koordinaten:  $x$  in,  $y \perp$  Orbitebene,  $s$  entlang Orbit)

Zunächst in  $x$  (entspricht radialer Richtung):

- Rückstellkraft  $\longrightarrow$  
$$F_x = \gamma m \frac{v^2}{R} - \frac{e}{c} v B_y(R)$$
- kleine Abweichung  $x$  vom Sollorbit  $\longrightarrow R \rightarrow r = R + x = R \left(1 + \frac{x}{R}\right)$
- Taylorentwicklung bis 1. Ordnung  $\longrightarrow \frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{x}{R}\right)$
- und  $\longrightarrow B_y(r) \approx B_y(R) + \frac{\partial B_y(R)}{\partial x} \cdot x \equiv B_y(R) \cdot \left(1 - n \cdot \frac{x}{R}\right)$
- mit *Feldindex*  $\longrightarrow$  
$$n \equiv -\frac{R}{B_y(R)} \cdot \frac{\partial B_y(R)}{\partial x}$$
 ( $\longrightarrow$  Form der Magnetpole!)

- Rückstellkraft bei Abweichung  $x$   $\longrightarrow F_x \approx \gamma m \frac{v^2}{R} \left(1 - \frac{x}{R}\right) - \frac{e}{c} v B_y(R) \cdot \left(1 - n \cdot \frac{x}{R}\right)$
- für Sollorbit:  $\gamma m v^2 / R \stackrel{!}{=} e v B_y(R) / c$
- $\rightarrow$  Schwingungs-DGL ( $\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0$ )  $\longrightarrow \gamma m \ddot{x} - F_x = \gamma m \cdot \ddot{x} + \gamma m \frac{v^2}{R^2} (1 - n) \cdot x = 0$
- Teilchenorbit bei kleinen Störungen  $\longrightarrow$  Oszillation um Sollorbit: *horizontale Betatron-Schwingung*
- $\rightarrow$  harmon. Schwingung mit Kreisfrequenz  $\longrightarrow \omega_x = \frac{v}{R} \sqrt{1 - n} \equiv \omega_0 \sqrt{1 - n}$  *horizontale Betatron-Frequenz!*
- $\implies$  *Stabilitätsbedingung* für Orbit (horizontaler Orbit in  $x$ )  $\longrightarrow n < 1$  !

Abweichungen vom idealen Orbit in  $y$ :

- Bewegungs-DGL :

$$\gamma m \cdot \ddot{y} = \frac{e}{c} v B_x(R)$$

- aus  $\nabla \times \vec{B} = -\partial \vec{E} / \partial t$

$$\longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

(mit Feldindex  $n$ )

$$\longrightarrow B_x = \int \frac{\partial B_x}{\partial y} dy = - \int n \frac{B_y(R)}{R} dy = -n \frac{B_y(R)}{R} y \quad (*)$$

- (mit Sollorbit:  $\gamma m v^2 / R \stackrel{!}{=} e v B_y(R) / c$ )

$$\longrightarrow \gamma m \cdot \ddot{y} + \gamma m \frac{v^2}{R^2} n \cdot y = 0$$

- Teilchenorbit bei kleinen Störungen

→ Oszillation um Sollorbit: *vertikale Betatron-Schwingung*

- harmon. Schwingung mit Kreisfrequenz

$$\longrightarrow \omega_y = \frac{v}{R} \sqrt{n} \equiv \omega_0 \sqrt{n} \quad \text{vertikale Betatron-Frequenz !}$$

- ⇒ *Stabilitätsbedingung* für Orbit

(vertikaler Orbit in  $y$ )

$$\longrightarrow n > 0 \quad !$$

⇒ schwache Fokussierung:

$$0 < n < 1$$

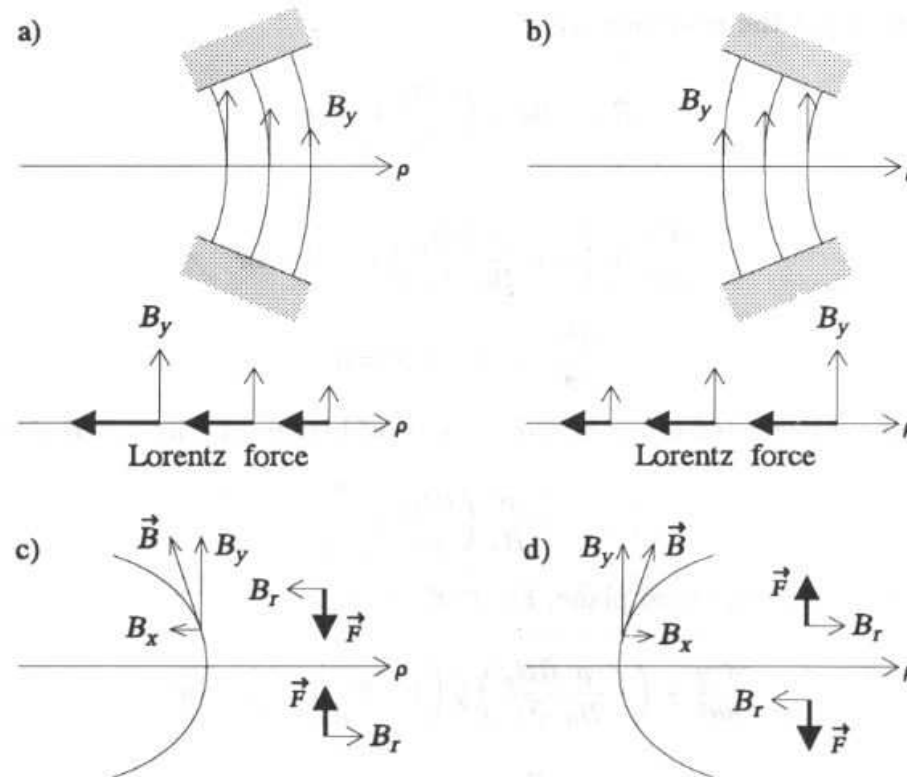
!

Steenbeck-Stabilitätskriterium

Aber:

Fokussierung  
in vertikaler  
Richtung, De-  
fokussierung  
in horizontaler  
Ebene

⇐



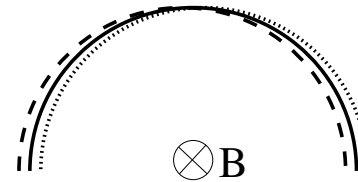
⇒

Fokussierung  
in horizontaler  
Ebene, De-  
fokussierung  
in vertikaler  
Richtung

Figure. 2.2 Forces for a positive particle coming out of the page: a) Radial defocusing force from radially opening poles. b) Radial focusing gradient from radially closing poles. c) Vertical defocusing forces from radially opening poles. d) Vertical focusing forces from radially closing poles.

**Geometrische Fokussierung:**

$p = eBR/c \longrightarrow$  Alle Orbits mit Radius  $R$ :



$\longrightarrow$  Fokussierung

(Sollorbit: durchgezogen;  $r > R$  (gestrichelt) und  $r < R$  (punktiert)  $\rightarrow$  auf Sollorbit abgelenkt)

$\implies$  Geometrische Fokussierung kompensiert (schwache) horizontale Defokussierung für vertikale Fokussierung

**Tune der Betatron-Oszillationen:**

entspricht Anzahl der Oszillationen je Umlauf

- horizontaler Tune :

$$Q_x \equiv \frac{\omega_x}{\omega_0} = \sqrt{1 - n}$$

- vertikaler Tune :

$$Q_y \equiv \frac{\omega_y}{\omega_0} = \sqrt{n}$$

Betatron-Oszillationen und Tunes sind charakteristische Eigenschaften eines Kreisbeschleunigers !

(nicht nur für Betatrons)

## adiabatische Dämpfung

In (vertikalen&horizontalen) Oszillationen vernachlässigt: Effekt der Beschleunigung

Dazu nochmals:

- Bewegungs-DGL in  $y$  ( $p = \gamma m v_y$ ):

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \cdot \dot{y}) = \frac{e}{c} v B_x(R)$$

- Beschleunigung  $\hat{=} \dot{\gamma} \neq 0$   
( $\omega_0 = v/R$  für Sollorbit)

$$\longrightarrow \gamma m c^2 \cdot \ddot{y} + \dot{\gamma} \cdot m c^2 \dot{y} = e c \omega_0 R B_x(R)$$

- mit  $B_x$  aus (\*) (Folie 3.8) und  
Energiegewinn  $\dot{E} \equiv m c^2 \cdot \dot{\gamma}$

$$\longrightarrow \ddot{y} + \left( \frac{\dot{E}}{E} \right) \dot{y} + n \omega_0^2 \cdot y = 0 \quad (**)$$

- (\*\*\*) ist DGL eines gedämpften harmonischen Oszillators  $\longrightarrow y(t) = y_0 \cdot e^{-\alpha_y t} \cos \omega t$  mit  $\omega \approx \omega_0 \sqrt{n}$

- Dämpfungskonstante

$$\longrightarrow \alpha_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{E}}{E} \right) \hat{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right)$$

$\implies$  Beschleunigung führt zur Dämpfung der vertikalen Betatron-Oszillation!



**Charakterisierung der Dämpfung:**

- techn. erreichbar  $\dot{E}/E \ll 1$   $\longrightarrow$  Dämpfungszeit  $\tau_y = 1/a_y \gg 2\pi/\omega$  Oszillationsperiode
- $\longrightarrow$  Einhüllende der Oszillation:  
 $y_{\max}(t) = y_0 \cdot e^{-\alpha_y t}$   $\longrightarrow$   $dy_{\max} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{E}}{E} \right) y_{\max} \cdot dt$
- $\longrightarrow$  mit Startenergie  $E_0$ , Endenergie  $E$   $\longrightarrow$   $\boxed{\frac{y_{\max}}{y_{0,\max}} \equiv \frac{y_{\max}(E)}{y_{\max}(E_0)} = \sqrt{\frac{E_0}{E}}}$  *adiabatische Dämpfung!*
- analog auch für horizontale Oszillation!

**Bedeutung der Dämpfung:**

- reduziert Phasenraum des Strahls  $\longrightarrow \epsilon_u \propto \frac{1}{E}$  mit  $u = x$  oder  $y$  und  $s = v \cdot t$  entlang Orbit  
 (so gen. *Emittanz*:  $\epsilon_u \equiv u_{\max} \cdot u'_{\max}$   
 $\equiv u_{\max} \cdot \frac{du_{\max}}{ds}$ )
- Effektivere Dämpfung durch  $\longrightarrow$  *Synchrotronstrahlung* ( $\longrightarrow$  Abschnitt 9)  
 (für Elektronenstrahlen)

## Mikrotron

### Prinzipielle Konzepte der Kreisbeschleuniger:

1. *Betatron*: Beschleunigung durch Induktionsspannung  $U_{\text{ind}} = -d\phi/cdt$

→ intrinsisch erzeugt durch veränderliche magnetische Induktion  $B \equiv |\vec{B}(t)| \longrightarrow E_{\varphi} \propto R \cdot \dot{B}$

2. externe Beschleunigung durch HF-Feld

→ *Mikrotron*:  $B = \text{const.}$ ,

→ *Zyklotron*:  $B = \text{const.}$  oder  $B \propto p/R$ ,

→ *Synchrotron*:  $B \propto p/R$ .

**Mikrotron-Konzept:**

- $B = \text{const} \rightarrow \text{Radius } r \propto \text{Impuls } p$
- Phasenverschiebung je Umlauf zwischen Teilchen und HF:  $\Delta\phi = j \cdot 2\pi, j \in \mathbb{N}$

- Zeit für ersten Umlauf:

$$t_1 = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\gamma mc}{qB} = \frac{2\pi E_1}{qBc} \stackrel{!}{=} k \cdot T_{\text{RF}}$$

- Zunahme Umlaufzeit bei Energiegewinn  $\Delta E$ :

$$\Delta t = \frac{2\pi\Delta E}{qBc} \stackrel{!}{=} j \cdot T_{\text{RF}}$$

$\rightarrow$  Synchronitätsbedingung ( $E_{\text{inj}} \equiv E_1 - \Delta E$ ):

$$\Delta E = \frac{j}{k-j} \cdot E_{\text{inj}}$$

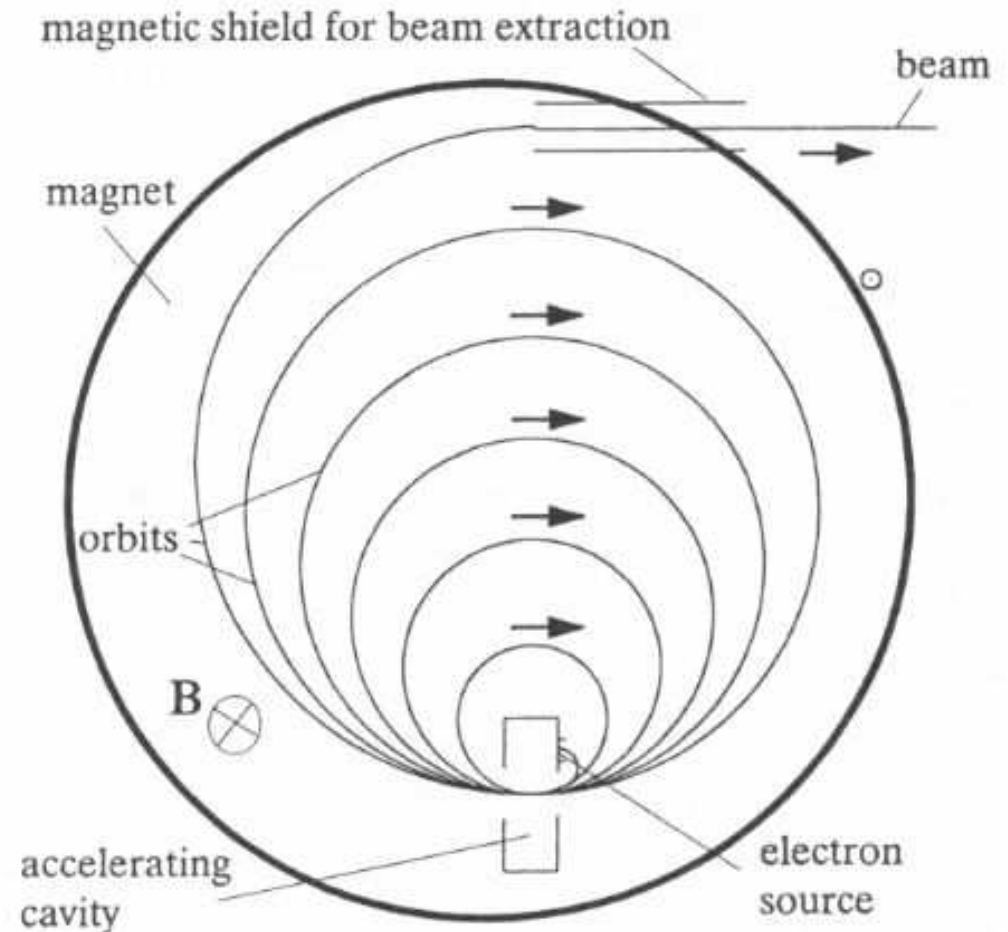
- Erster Umlauf:

$$E_1 = E_{\text{inj}} + \Delta E > \Delta E \quad \rightarrow \quad k > j$$

- z.B.  $\Delta E$  für  $k = 2, j = 1$ :

$$\Delta E = E_{\text{inj}} \rightarrow \Delta\gamma = E_{\text{inj}}/mc^2 \approx 1 \quad !$$

(bedeutet z.B.  $\Delta E \approx 1 \text{ GeV}$  für Protonen)



**Fig. 3.2.** The principle of a microtron accelerator (schematic)

$\Rightarrow$  Mikrotron nur für leichte Teilchen, i.W. Elektronen !

### Rennbahn-Mikrotron: (engl. racetrack microtron)

- vermeidet Limitierungen des Mikrotrons (z.B. Magnet- $\varnothing \propto E^2$ )
- eingesetzt für Elektronen
- einfachere Synchronitätsbedingung (Länge  $l, k \gg 2, j \in \mathbb{N}$ ):

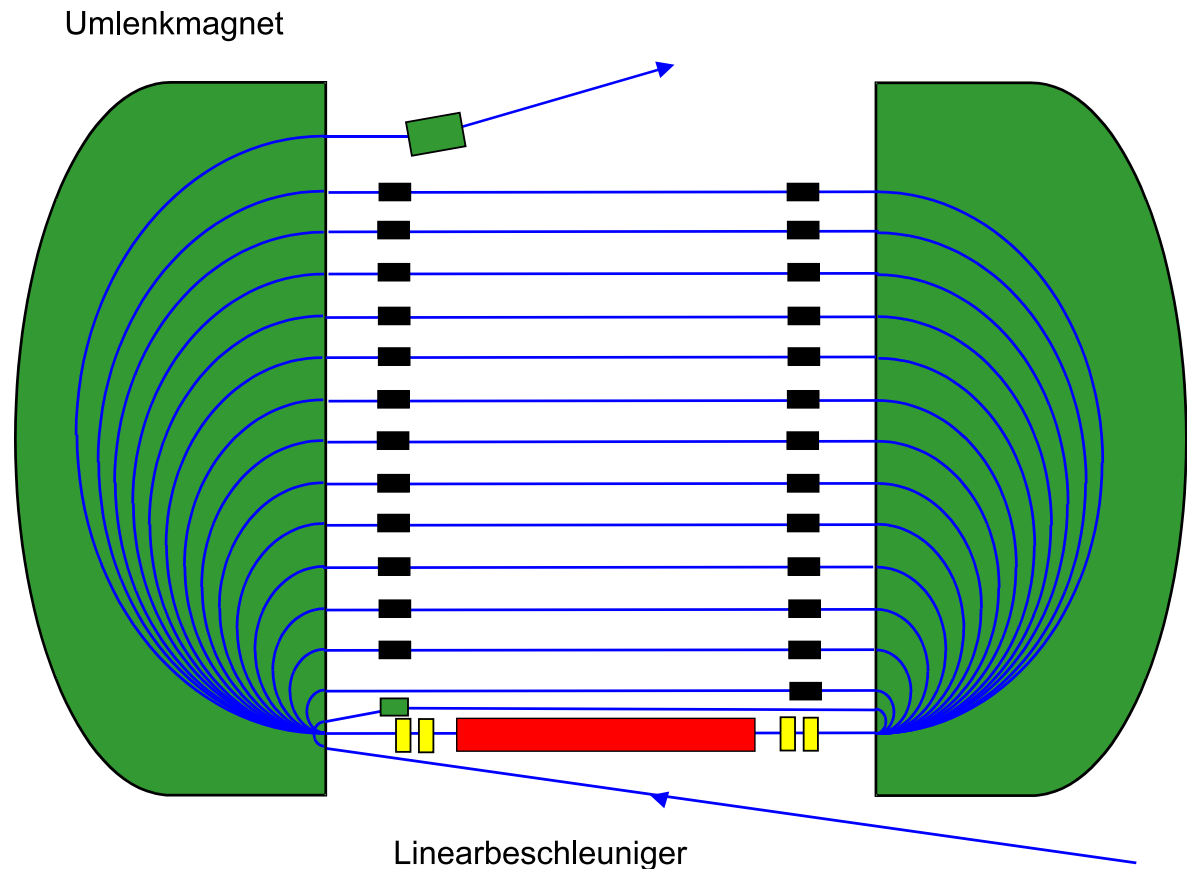
$$t_1 = \frac{2\pi E_1}{qBc} + \frac{2l}{c} \stackrel{!}{=} k \cdot T_{\text{RF}}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi \Delta E}{qBc} \stackrel{!}{=} j \cdot T_{\text{RF}}$$

$$\rightarrow \Delta E = j \cdot \frac{qBc}{2\pi} \cdot T_{\text{RF}}$$

$$\rightarrow \Delta E = \frac{E_{\text{inj}}}{\left(\frac{k-j}{j} - \frac{2l}{jT_{\text{RF}}c}\right)}$$

$$\rightarrow \Delta E \ll E_{\text{inj}} \quad \text{für } k \gg 2 \text{ und z.B. } j = 1$$



*Prinzip des Rennbahn-Mikrotrons: Der Elektronenstrahl mit niedriger Energie (blau gezeichnet) tritt in den linken Umlenkmagneten (grün) ein, wird im homogenen Magnetfeld um 180° umgelenkt, läuft parallel zum Linearbeschleuniger (rot) und tritt in den rechten Ablenkmagneten ein. Nach nochmaliger Umlenkung um 180° läuft er durch den Beschleuniger, erfährt dort einen Energiegewinn und wird aufgrund seiner jetzt höheren Energie auf einer Bahn mit größerem Ablenkradius geführt. Das Spiel wiederholt sich  $x$  mal. Nach  $x$  Umläufen verlässt der Elektronenstrahl das Mikrotron mit dem  $x$ -fachen Energiegewinn.*

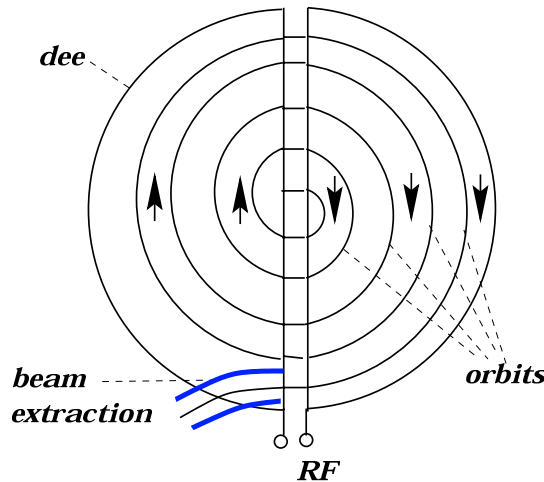
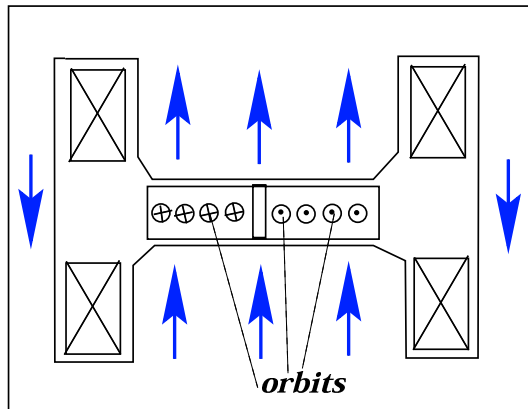
Daten zu MAMI:

- Injektionsenergie  
 $E_{inj} = 179.7 \text{ MeV}$
- Ejektionsenergie  
 $E_{ej} = 855.0 \text{ MeV}$
- Magnetfeld 1.28 T
- Linac-Länge 8.87 m
- Energiegewinn/Umlauf  
 $\Delta E = 7.5 \text{ MeV}$



*Dritte Stufe von MAMI: Das weltweit größte Mikrotron. Das Gewicht der beiden Ulenkmagnete (grün) beträgt jeweils 450 Tonnen. Der Linearbeschleuniger (auf der rechten Seite) wird von den Elektronen 90 mal durchlaufen. Er besteht aus 5 Sektionen, die jeweils mit einer eigenen Hochfrequenzversorgung mit einer Leistung von 50 000 Watt ausgestattet sind.*

# Zyklotron



• Mit

$$p = Ze/c \cdot B \cdot r$$

und

$$p \equiv \gamma m v = \gamma m c \cdot \beta$$

→ Umlauf-/Zyklotron-/Lamorffrequenz:

$$\omega(\gamma) = \frac{v}{r} = \frac{Ze}{\gamma m c} \cdot B$$

NB:  $\omega \propto Z/m \cdot B$

→ Radius der Bahn:

$$r(\beta) = \frac{\gamma m c}{Ze} \cdot \frac{\beta}{B} = \frac{m c}{Ze \cdot B} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

• Für nicht-relativistische Teilchen ( $\gamma \approx 1$  bzw.  $\beta \ll 1$ ) gilt:

▷  $B = \text{const.}$

▷  $\omega = \text{const.}$

▷  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = Z^2 e^2 B^2 R^2 / 2 m c^2$

• Für relativistische Teilchen ( $\gamma \gg 1$  bzw.  $\beta \approx 1$ ) gilt:

▷  $\omega = \omega(\gamma) \propto B[r(t)]/\gamma(t) \rightarrow$  Syncho-Zyklotron

▷  $\omega = \omega(\gamma) \propto B[r(t)]/\gamma(t) \equiv \text{const} \rightarrow$  Isochron-Zyklotron

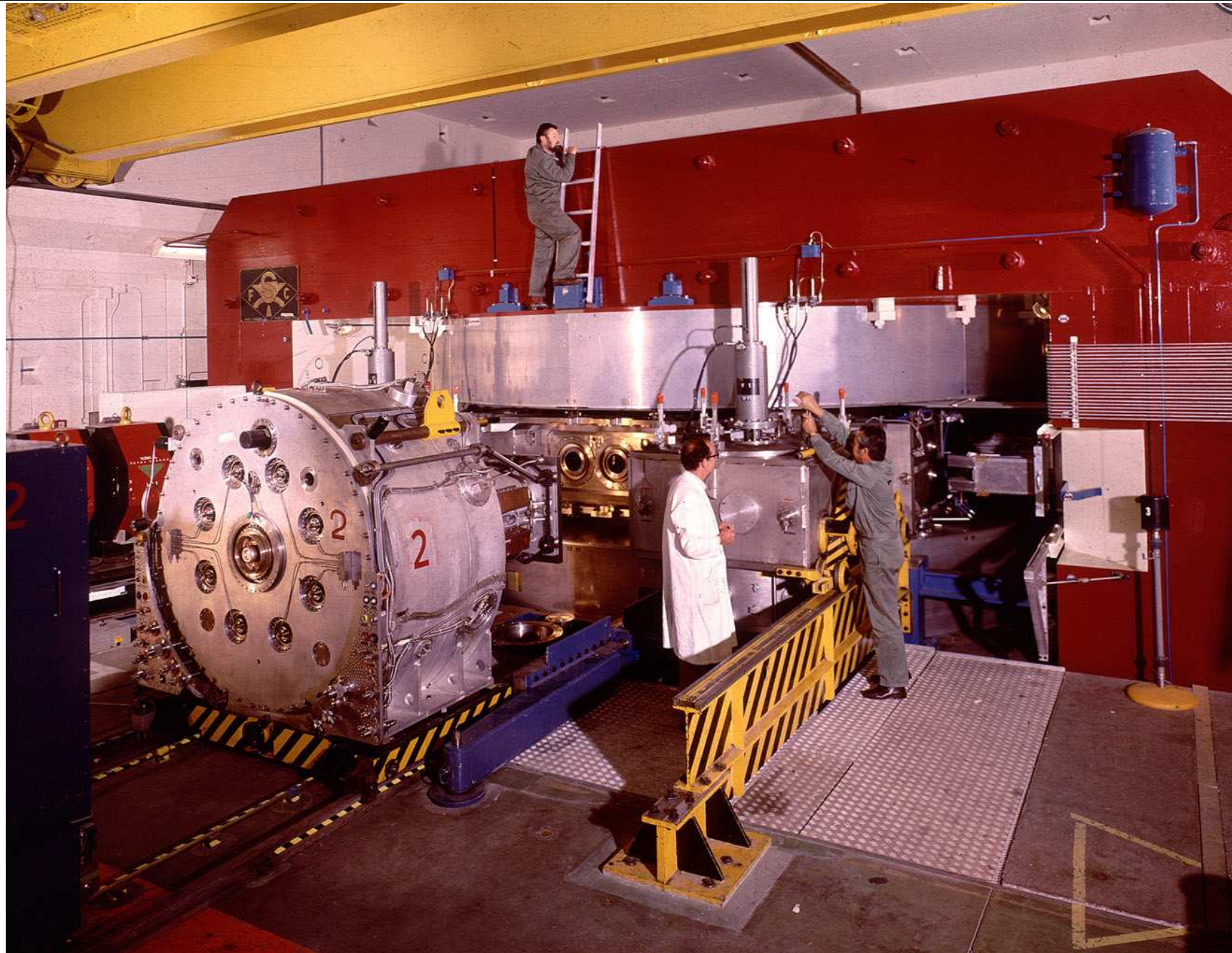
## Synchro- und Isochron-Zyklotron

### Zyklotron:

- beschränkt auf nicht-relativistische Energien, da  $f_{\text{RF}} = \omega/2\pi = \text{const.}$
- variable HF → relativistische Energien
- kontinuierlicher Teilchenstrahl → gebündelte Teilchen
- longitudinale *Phasenstabilität*: Teilchenbündel  $\leftrightarrow$  HF → Phasenfokussierung (Veksler und McMillan)

### ⇒ Synchro-Zyklotron:

- $f_{\text{RF}} = f_{\text{RF}}(\gamma) = ZeB/2\pi\gamma mc$
- $B = \text{const.}$
- Synchronität durch  $f_{\text{RF}}(t) \propto 1/\gamma(t)$  → Syncho-Zyklotron
- mit  $\gamma(t)$  aus  $E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2$  und  $p = ZeBr/c$ :  $ZeBrc = \sqrt{E_{\text{kin}} \cdot (E_{\text{kin}} + 2mc^2)}$
- hohe Endenergie  $\leftrightarrow$  viele Umläufe → schwache Fokussierung erforderlich
- effektive horizontale&vertikale Fokussierung (vgl. Folie 3.6): Feldindex  $n = 1/2$  →  $B_y(r) \propto 1/\sqrt{r}$
- $B \neq \text{const}$  →  $f_{\text{RF}} \propto \frac{B[r(t)]}{\gamma(t)}$





**Isochron-Zyklotron:**

- Frequenzmodulation im Synchro-Zyklotron technisch aufwendig
- und unterschiedlich für verschiedene Teilchen ( $f_{\text{RF}} \propto B/\gamma m$ )
- Vereinfachung durch (L.H.Thomas, 1938):  $f_{\text{RF}} \propto \frac{B(r(t))}{\gamma(t)} = \text{const.}$   $\longrightarrow$  Isochronität von  $B(t)$  und  $\gamma(t)$
- Beibehaltung der Fokussierung erfordert:  $\frac{\partial B_y(r, \varphi)}{\partial \varphi} \neq 0$

$\rightarrow$  damit *schwache* durch *starke Fokussierung* ersetzt (folgt später)

$\rightarrow$  Fokussierung entlang der Teilchentrajektorie

$\rightarrow$  Synchronität nur noch im Mittel je Umlauf gewährleistet, sodass  $\frac{1}{2\pi} \oint B_y(r(t), \varphi) \cdot d\varphi \propto \gamma(t)$

**Eigenschaften:**

- *starke Fokussierung* erlaubt Rückkehr zu festem  $f_{\text{RF}}$
- Isochron-Zyklotron liefert kontinuierlichen Strahl mit Mikrobunch-Struktur (gemäß RF)

# Synchrotron

- Praktische Limitierung von Zyklotrons durch notwendigen Magnet-Ø
- höhere Energie möglich falls  $R = \text{const.}$
- zentraler Magnetbereich nicht benötigt
- kleinere Magnete entlang des Orbits einsetzbar

- Designkriterium:  $\frac{1}{R} = \frac{eB}{pc} = \text{const.}$   
 →  $B \propto p = \gamma mv$

- Synchronitätsbedingung:  $f_{\text{RF}} = \frac{ZeB}{2\pi\gamma mc}$

→ Umlauffrequenz:  $f_{\text{rev}} \propto v/c \equiv \beta$

▷ relativistisch:  $\beta \approx 1 \rightarrow f_{\text{rev}}(t) \approx \text{const.}$

▷ nicht-relativ.:  $\beta < 1 \rightarrow f_{\text{rev}}(t) \propto \beta(t)$

- Aufrechterhalten der Synchronität: (Umlauf  $\leftrightarrow$  HF)

→  $f_{\text{RF}} = h \cdot f_{\text{rev}}$  mit *harmonischer Zahl*  $h \in \mathbb{N}$   
 (engl.: *harmonic number*)

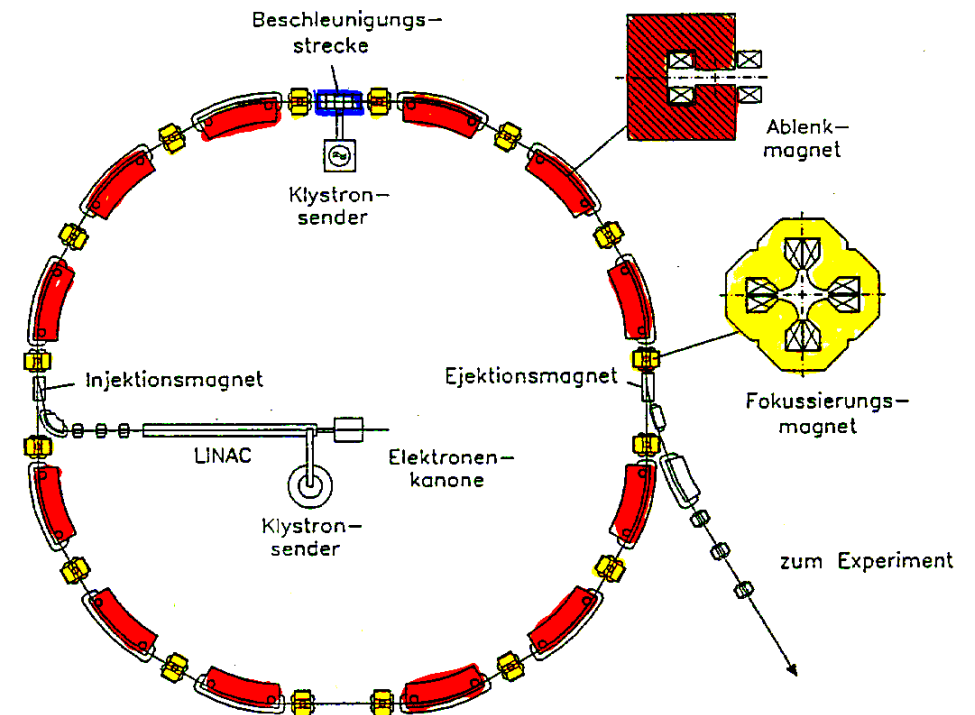


Fig. 1.16 Prinzipieller Aufbau eines modernen Synchrotrons. Die Bahn wird durch Ablenkmagnete mit homogenem Feld festgelegt, während die Fokussierung des Strahls durch gesonderte Magnete besorgt wird. Die Beschleunigung geschieht durch eine oder mehrere kurze HF-Strukturen. Die Teilchen werden von einem Vorbeschleuniger (Linac oder Microtron) geliefert.

Synchrotron-Prinzip mit FODO-Struktur, Injektion und Ejektion

## Zusammenfassung

- $p = eBr/c$  (in Gauss-Einheiten!)
- $1/2$ -Bedingung für stabiles Orbit im Betatron
- Betatron-Schwingung, schwache Fokussierung und Steenbeck-Kriterium, adiabatische Dämpfung
- Grundlegende Prinzipien der Kreisbeschleuniger beschrieben durch nur zwei Relationen:

$$\frac{1}{r} = \frac{eB_y}{\gamma m c^2 \beta}$$

und

$$f_{\text{RF}} = \frac{eB_y}{2\pi\gamma m c} \cdot h$$

Übersicht der Kreisbeschleuniger:

Prinzip	Energie $\gamma$	Geschwindigkeit $v$	Orbit $r$	Feld $B$	Frequenz $f_{\text{RF}}$	Teilchenfluss
Zyklotron	1	variabel	$\propto v$	const.	const.	const. <sup>a</sup>
Synchro-Zyklotron	var.	var.	$\propto p$	$B(r)$	$\propto \frac{B(r)}{\gamma(t)}$	gepulst
Isochron-Zyklotron	var.	var.	$r = f(p)$	$B(r, \varphi)$	const.	const. <sup>a</sup>
Proton/Ion-Synchrotron	var.	var.	$R$	$\propto p(t)$	$\propto v(t)$	gepulst
Elektron-Synchrotron	var.	var.	$R$	$\propto p(t)$	const.	gepulst

<sup>a</sup>kontinuierlicher Strahl, jedoch HF moduliert

## Geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern

- Geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern
  1. Lorentzkraft
  2. Grundlagen zur Optik von Strahlen geladener Teilchen
  3. Multipolfeld-Entwicklung für Magnete
  4. Bewegungsgleichung der Teilchenstrahldynamik
  5. Generelle Lösungen der Bewegungsgleichung

Kraft auf geladene Teilchen in elmagn. Felder: **Lorentzkraft** (in Gauss-Einheiten!)

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$$

dabei gilt:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \gamma mc \dot{\vec{\beta}} + \dot{\gamma} mc \vec{\beta} = \gamma mc \dot{\vec{\beta}} + \gamma^3 \beta \dot{\beta} \cdot mc \vec{\beta}$$

In diesem Abschnitt sei der Fall betrachtet, dass  $\vec{F} \perp \vec{\beta} \rightarrow \dot{\beta} = |\dot{\vec{\beta}}| = 0$ , also (Beschleunigung nur senkrecht):

$$\vec{F}_{\perp} = \dot{\vec{p}}_{\perp} = \gamma mc \dot{\vec{\beta}}_{\perp}$$

## Grundlagen zur Teilchstrahl-Optik

**Teilchenablenkung** in elektrischen und/oder magnetischen Feldern:

$$\vec{F}_\perp = \gamma mc \dot{\vec{\beta}}_\perp = e\vec{E}_\perp + \frac{e}{c} [\vec{v}_\parallel \times \vec{B}_\perp]$$

(Lorentz-)Kraft  $\vec{F}_\perp$  muss Zentrifugalkraft  $\vec{F}_Z = \gamma m v^2 \frac{\vec{R}}{R^2} = p v \frac{\vec{R}}{R^2}$  kompensieren (Ablenkradius  $R$ , Impuls  $p$ ):

- $|\vec{F}_\perp| \stackrel{!}{=} |\vec{F}_Z| \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{pv = eR|\vec{E}_\perp|} \text{ mit } \textit{elektrischer Steifheit:} \quad R \cdot |\vec{E}_\perp| \\ \boxed{pc = eR|\vec{B}_\perp|} \text{ mit } \textit{magnetischer Steifheit:} \quad R \cdot |\vec{B}_\perp| \end{array} \right.$

Größenordnung der *Steifigkeit* im relativistischen Fall  $v \approx c$  (in praktischen Einheiten):

$$\left. \begin{array}{l} \diamond p [\text{GeV}/c] \approx E [\text{GV}/\text{m}] \cdot R [\text{m}] \\ \diamond p [\text{GeV}/c] \approx 0.3 \cdot B [\text{T}] \cdot R [\text{m}] \end{array} \right\} \longrightarrow 1 \text{ Tm} \Leftrightarrow 300 \text{ MV!}$$

→ enorme elektrische Felder für Teilchenablenkung notwendig

→ Anwendung nur nicht-relativistisch

oder in Spezialfällen (z.B. elektrostatische Separatoren z.B. in  $e^+e^-$ -Speicherringen)

→ Teilchenablenkung in Beschleunigern zumeist durch Ablenkmagnete

**Koordinatensystem** zur Beschreibung der Teilchenbewegung in elektrischen und/oder magnetischen Feldern:

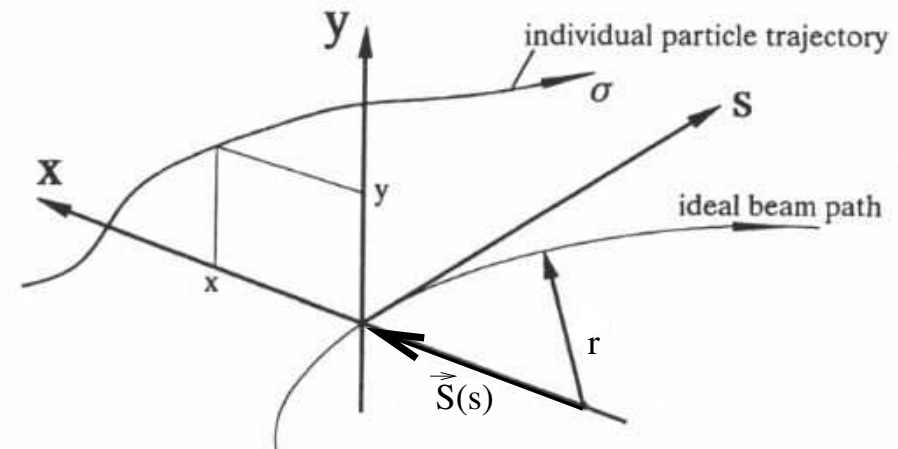


Fig. 4.1. Coordinate system

- Bewegung entlang Sollorbit: mitbewegtes rechtwinkliges Koordinatensystem  $(x, y, s)$  mit Zeit  $t \equiv s/v_s$
- individueller Weg eines Teilchens:  $\sigma$  (statt  $s$ ) mit Zeit  $\tau \equiv \sigma/v_\sigma$
- Ursprungsvektor  $\vec{S}(s) \Rightarrow$  Krümmungsvektor  $\vec{\kappa} \equiv -\frac{d^2\vec{S}(s)}{ds^2} \longrightarrow \vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y) = (-x'', -y'')$  (\*\*  
\*)  
(Krümmungsradius  $r \equiv 1/\kappa$ ,  $x'' \equiv d^2x/ds^2$ , dito  $y''$  und betrachte Kreisbahn z.B.:  $S_x(s) = \sqrt{r^2 - s^2} \approx r - s^2/r$ )
- $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = e\vec{v} \times \vec{B} \longrightarrow -ev_\sigma B_y = \frac{dp_x}{d\tau} \approx p \frac{dx'}{d\tau} \approx \beta c p x''$  mit  $p_x \approx px'$  und  $ds \approx d\sigma = \beta c d\tau$ .  
(lineare Näherung:  $p_x \equiv \gamma m v_x = \gamma m dx/d\tau \approx \gamma m \beta c \cdot x'$ ,  
da i.A.  $x', y' \ll 1 \longrightarrow p_s = p\sqrt{1 - x'^2 - y'^2} \approx p$ )

$$\rightarrow x'' \approx -\frac{e v_\sigma}{p \beta c} B_y \stackrel{v_\sigma \equiv \beta c}{=} -\frac{e}{p} B_y, \quad \text{analog: } y'' \approx \frac{e}{p} B_x$$

# Fokussierung von Teilchenstrahlen

zur Erinnerung: **Magnetfeldberechnung:**

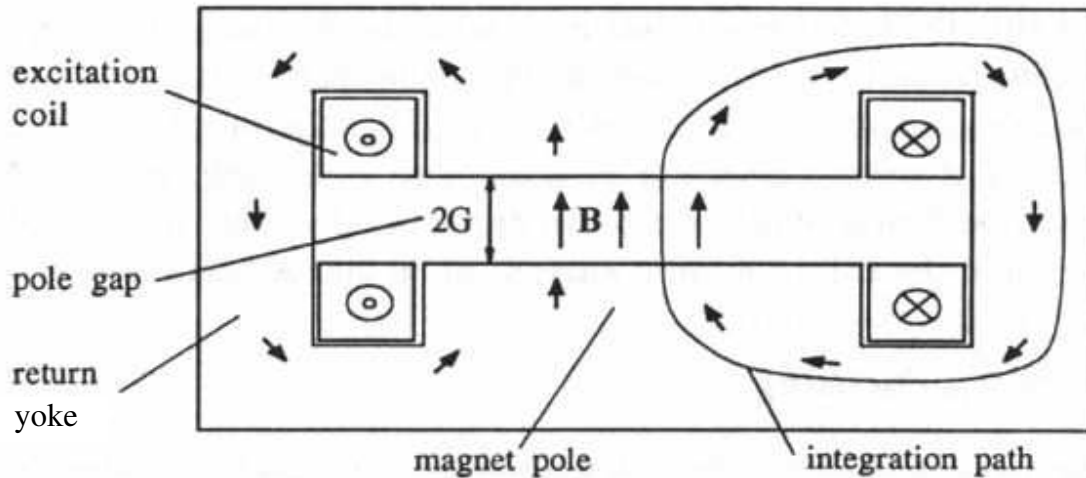


Fig. 4.3. Cross section of a dipole magnet (schematic)

- elektr. Strom  $I$  in Spulen  $\rightarrow$  magn. Induktion  $\vec{B}$
- magn. Fluss durch Spalt  $2G$  und Rückflussjoch
- Maxwell Gleichung:  $\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_r} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$   
(Permeabilität im Rückflussjoch  $\mu_r$ , Stromdichte  $\vec{j}$ )

$\rightarrow$  mit Stokesschem Satz ( $n$  Windungen):

$$2GB_{\perp} + \int_{\text{Joch}} \frac{\vec{B}}{\mu_r} d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} nI$$

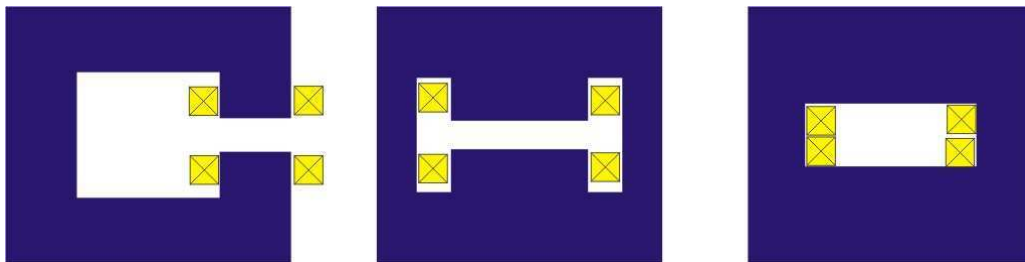
- für  $\mu_r \gg 1 \rightarrow \int_{\text{Joch}} \frac{\vec{B}}{\mu_r} d\vec{s} \ll 1$

$\rightarrow$  Näherungsformel für Spulenstrom:

$$nI [\text{kA}] \approx 8 \cdot B_{\perp} [\text{T}] \cdot G [\text{cm}]$$

z.B.:  $B_{\perp} = 1 \text{ T}$ ,  $2G = 10 \text{ cm} \rightarrow nI = 40 \text{ kA}$

## Dipolmagnet-Bauformen:



C-Magnet

H-Magnet

Fensterrahmen-M.

**Fokussierung durch Magnetlinsen:**

- analog zur geometrischen Optik, jedoch Magnet- statt Glaslinsen

→ Sammel-, Zerstreulinse, Brennweite, -punkt, ...

- Sammellinse: Ablenkwinkel  $\alpha$  Abstand von optischer Achse:  $\alpha = -r/f$

- magnetische Sammellinse ( $f \gg l$ ):

$$\alpha = -\frac{l}{\rho - \delta\rho} \approx -\frac{l}{\rho} = -\frac{e}{\beta E} B_\varphi l$$

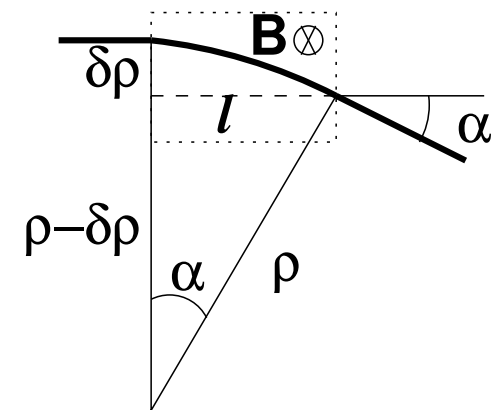
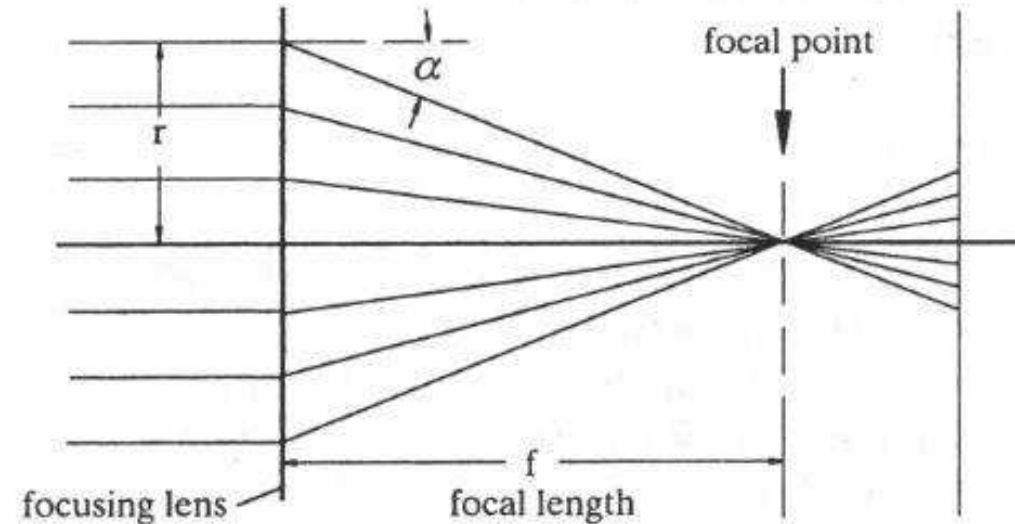
azimutales Magnetfeld  $B_\varphi$ , Weglänge  $l$  in  $B_\varphi$ -Feld,

Teilchenenergie  $E = pc/\beta$ , für  $f \leq l$ :  $B_\varphi l \rightarrow \int B_\varphi ds$

- $\alpha \propto r \rightarrow B_\varphi = gr$  mit Feldgradient  $g = dB_\varphi/dr$   
 $\rightarrow \alpha = -\frac{e}{\beta E} grl$

→ Fokussierungsvermögen:  $k = \frac{e}{cp} g = \frac{e}{\beta E} g$   
 ( $\hat{=}$  Brechkraft)  
 $k[\text{m}^{-2}] \approx 0.3 \cdot \frac{g[\text{T/m}]}{\beta E[\text{GeV}]}$

⇒ Brennweite:  $f^{-1} = kl$





**Strahlführungs- und Fokussierungsmagnete:**

- Dipol (Spalthöhe  $2G$  und  $nI$  Ampèrewindungen):

$$B = \frac{4\pi nI}{c 2G}$$

→ homogenes Ablenkkfeld zwischen Polschuhen

$$p = eBR/c$$

$B_\varphi = 0 \rightarrow$  keine Fokussierung

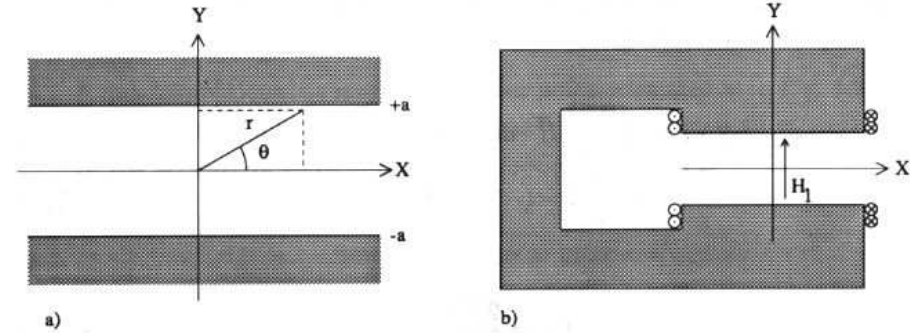


Figure. 4.1 a) Pole profile for a "dipole" magnet. b) Dipole magnet with coils and dipole field.

- Quadrupol (Apertur  $a$ ):

leiterfreier Bereich hat skalares Potential

$$V(x, y) = -gxy$$

→  $\vec{B} \equiv -\nabla V$

$$\rightarrow \begin{cases} B_x = gy \\ B_y = gx \end{cases}$$

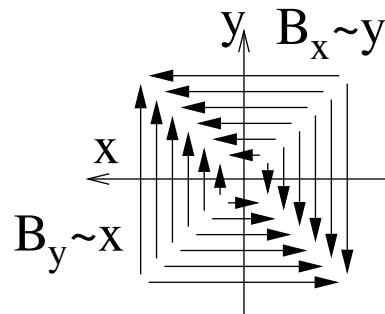


Figure. 4.2 a) Pole-face profile of equation  $xy = a^2/2$ . b) Quadrupole magnet with coils.

→ Fokussierung, aber nur in einer Ebene !

(z.B. für  $e^+$ : Fokussierung in  $x$ , Defokussierung in  $y$ )

## Fokussierung/Defokussierung mit Quadrupol

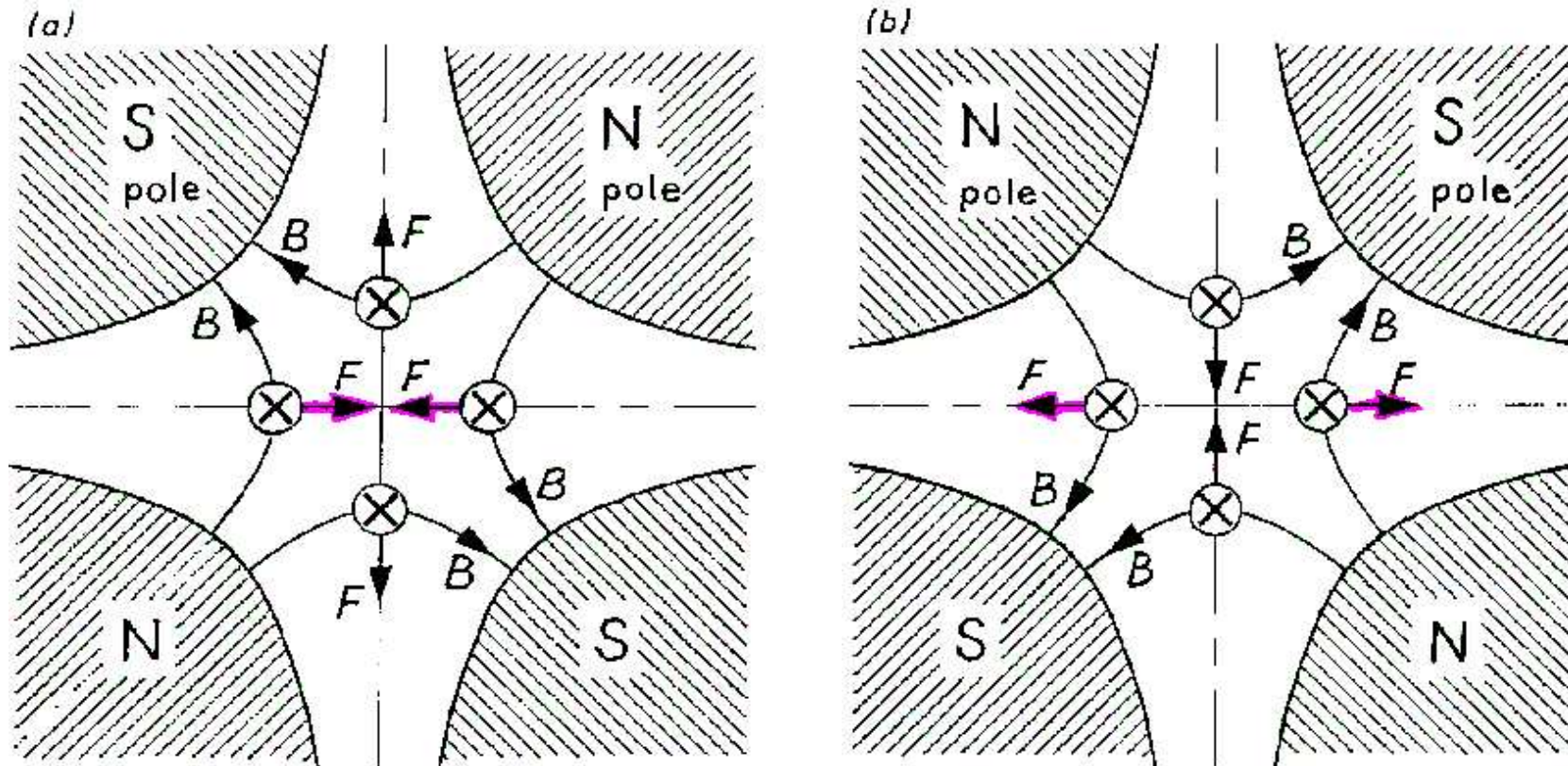


Figure 3.1. Fields and forces inside a quadrupole. (a) Focusing or F-type quadrupole, (b) defocusing or D-type quadrupole (drawn for positive particles entering the paper).

(Darstellung der Kräfte  $F$  für positiv geladenes Teilchen  $\otimes$ , das in Papierebene eintritt)

## Multipolfeld-Entwicklung

Systematisierung der Magnetfeldformen:

In ladungsfreien Bereichen  $\rightarrow$  skalares Potential  $V(x, y, z)$  zur Magnetfeld-Beschreibung  $\rightarrow \vec{B} = \nabla V$

Damit gilt:

- ladungsfreie Laplace-Gleichung:

$$0 = \nabla \vec{B} = \nabla^2 V \equiv \Delta V$$

in Zylinderkoordinaten explizit

$$\rightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \equiv 0$$

- Lösung: Taylorreihe um Sollbahn  $r = 0$   
( $n > 0$  sonst Singularität für  $r \rightarrow 0$ )

$$V(r, \varphi, z) = -\frac{cp}{e} \sum_{n>0} \frac{1}{n!} \cdot A_n(z) r^n e^{in\varphi} \quad (\star)$$

- ... in Laplace-Gleichung (Vereinfachung:  
keine  $z$ -Abhängigkeit  $\rightarrow$  2-dim. transvers. Felder)

$$\rightarrow \sum_n \left[ \frac{n(n-1) + n - n^2}{r^2} \right] \cdot \frac{1}{n!} \cdot A_n(z) r^n e^{in\varphi} = 0$$

für alle  $\varphi$ ,  $A_n$  und  $r > 0$ , da  $\forall n: n(n-1) + n - n^2 = 0$

- elmagn. Felder aus Potentialen  $V_e$  bzw.  $V_m$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{E} &= -\frac{cp}{e} \nabla V_e(r, \varphi) \\ \vec{B} &= -\frac{cp}{e} \nabla V_m(r, \varphi) \end{cases}$$

**Explizite Lösungen** aus der allgemeinen Lösung (★) sind komplexwertig,

d.h.  $\exists$  zwei unabhängige Lösungen ( $\text{Re } V$  und  $\text{Im } V$ ) zur gleichen Laplace-Gleichung.

Für die ersten drei Multipole sind die expliziten Lösungen (komplexwertig und als  $\text{Re} + \text{Im}$ ):

$$\begin{aligned} \text{Dipol} \quad n = 1 \quad & -\frac{e}{cp} \cdot V_1 = A_1 r e^{i\varphi} = A_1(x + iy) \\ & \longrightarrow -\frac{e}{cp} \cdot V_1 = -\kappa_y x + \kappa_x y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Quadrupol} \quad n = 2 \quad & -\frac{e}{cp} \cdot V_2 = \frac{1}{2} A_2 r^2 e^{2i\varphi} = \frac{1}{2} A_2 (x + iy)^2 \\ & \longrightarrow -\frac{e}{cp} \cdot V_2 = -\frac{1}{2} \underline{k} (x^2 - y^2) + kxy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sextupol} \quad n = 3 \quad & -\frac{e}{cp} \cdot V_3 = \frac{1}{6} A_3 r^3 e^{3i\varphi} = \frac{1}{6} A_3 (x + iy)^3 \\ & \longrightarrow -\frac{e}{cp} \cdot V_3 = -\frac{1}{6} \underline{m} (x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{6} m (3x^2y - y^3) \end{aligned}$$

usw. usf. Dabei sind  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\underline{k}$ ,  $k$ ,  $\underline{m}$ ,  $m$ , etc. so gen. *Multipolstärken*.

( $n = 4$ : Oktupol mit  $\underline{r}$ ,  $r$  [NB:  $r$  ist hier Multipolstärke, nicht Radius!];

$n = 5$ : Dekapol mit  $\underline{d}$ ,  $d$ , ...)

Die **Magnetfelder**  $\vec{B}$  folgen aus  $\nabla V = (\partial V/\partial x, \partial V/\partial y) = (B_x, B_y)$ ,  
wobei für Anwendungen unterschieden werden:

aufrechte Multipole

Äquipotentialflächen aus  $V \stackrel{!}{=} \text{const.}$

gedrehte Multipole ( $\Phi_n = \pi/2n$ )

Dipol  
( $\Phi=0^\circ$ )

$$\frac{e}{cp} B_x = 0$$

$$\frac{e}{cp} B_y = \kappa_x$$

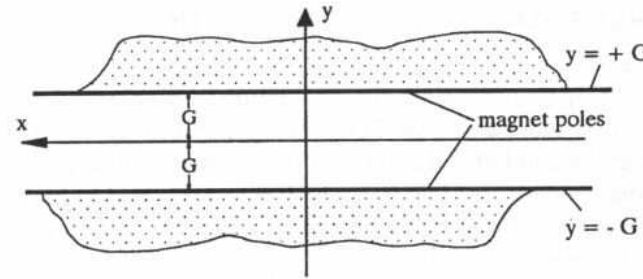


Fig. 4.7. Pole contour for a horizontally deflecting dipole magnet

$$\frac{e}{cp} B_x = -\kappa_y$$

$$\frac{e}{cp} B_y = 0$$

Dipol  
( $\Phi=90^\circ$ )

Quadrupol  
( $\Phi=0^\circ$ )

$$\frac{e}{cp} B_x = ky$$

$$\frac{e}{cp} B_y = kx$$

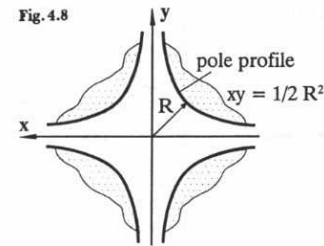


Fig. 4.8. Pole shape of an upright quadrupole magnet

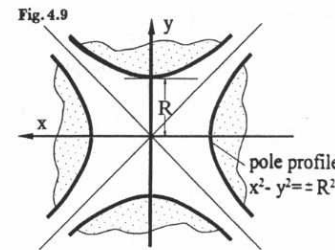


Fig. 4.9. Pole shape of a rotated quadrupole magnet

$$\frac{e}{cp} B_x = -kx$$

$$\frac{e}{cp} B_y = +ky$$

Quadrupol  
( $\Phi=45^\circ$ )

Sextupol  
( $\Phi=0^\circ$ )

$$\frac{e}{cp} B_x = mxy$$

$$\frac{e}{cp} B_y = \frac{1}{2}m(x^2 - y^2)$$

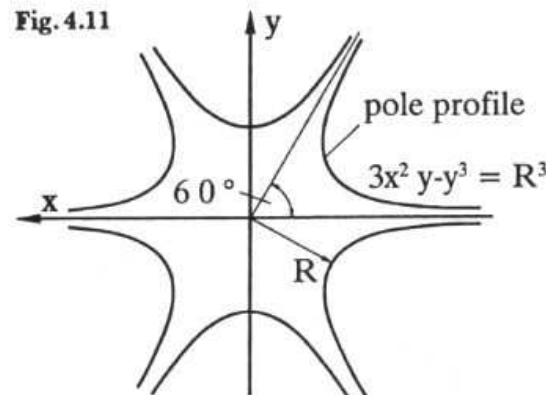


Fig. 4.11. Pole profile for an upright sextupole

$$\frac{e}{cp} B_x = -\frac{1}{2}m(x^2 - y^2)$$

$$\frac{e}{cp} B_y = +mxy$$

Sextupol  
( $\Phi=30^\circ$ )

aufrechte Multipole

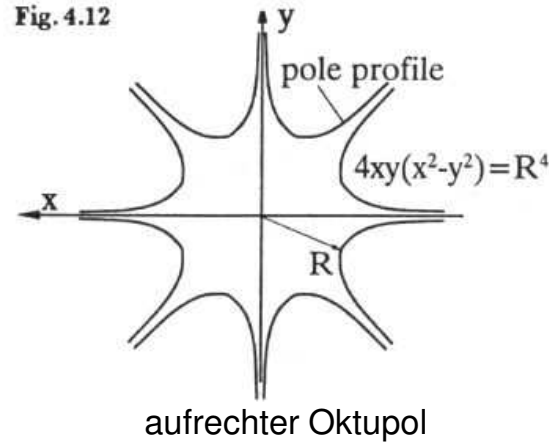
Äquipotentialflächen aus  $V \stackrel{!}{=} \text{const.}$

gedrehte Multipole ( $\Phi_n = \pi/2n$ )

Oktupol  
( $\Phi=0^\circ$ )

$$\frac{e}{cp} B_x = \frac{1}{6} r (3x^2 y - y^3)$$

$$\frac{e}{cp} B_y = \frac{1}{6} r (x^3 - 3xy^2)$$



$$\frac{e}{cp} B_x = -\frac{1}{6} \underline{r} (x^3 - 3xy^2)$$

$$\frac{e}{cp} B_y = +\frac{1}{6} \underline{r} (3x^2 y - y^3)$$

Oktupol  
( $\Phi=22.5^\circ$ )

Dekapol  
( $\Phi=0^\circ$ )

$$\frac{e}{cp} B_x = \frac{1}{6} d (x^3 y - xy^3)$$

$$\frac{e}{cp} B_y = \frac{1}{24} d (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)$$

$$\frac{e}{cp} B_x = -\frac{1}{24} \underline{d} (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)$$

$$\frac{e}{cp} B_y = -\frac{1}{6} \underline{d} (x^3 y - xy^3)$$

Dekapol  
( $\Phi=18.0^\circ$ )

NB: Die Multipolstärken (für die aufrechten) Multipole sind durch

$$s_n [m^{-n}] = \frac{e}{cp} \left. \frac{\partial^{n-1} B_y}{\partial x^{n-1}} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

gegeben, also:

$$s_1 = \kappa_x \equiv 1/\rho, s_2 = k, s_3 = m, s_4 = r, s_5 = d, \text{ usw.}$$

(Für gedrehte Multipole:  $B_y \rightarrow B_x$  und  $x \rightarrow y$  sowie  $s_n \rightarrow -\underline{s}_n = \kappa_y, \underline{k}, \underline{m}, \underline{r}, \underline{d}, \text{ usw.}$ )

**Realisierung reiner Multipolfelder:**

Zur Erinnerung:

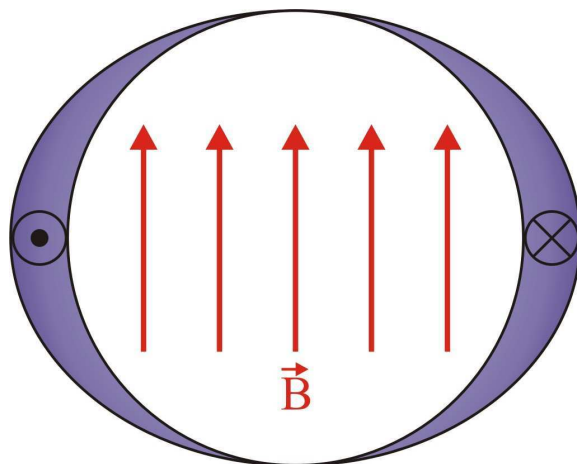
Es gilt:

- $\vec{B} = \nabla V \rightarrow B_\varphi = (1/r) \cdot (\partial V / \partial \varphi)$
- $V_n \propto r^n e^{in\varphi}$
- $I \propto B$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \vec{B} = \nabla V \rightarrow B_\varphi = (1/r) \cdot (\partial V / \partial \varphi) \\ \bullet V_n \propto r^n e^{in\varphi} \\ \bullet I \propto B \end{array} \right\} \rightarrow I_n(r, \varphi) \propto r^{n-1} \cos n\varphi$$

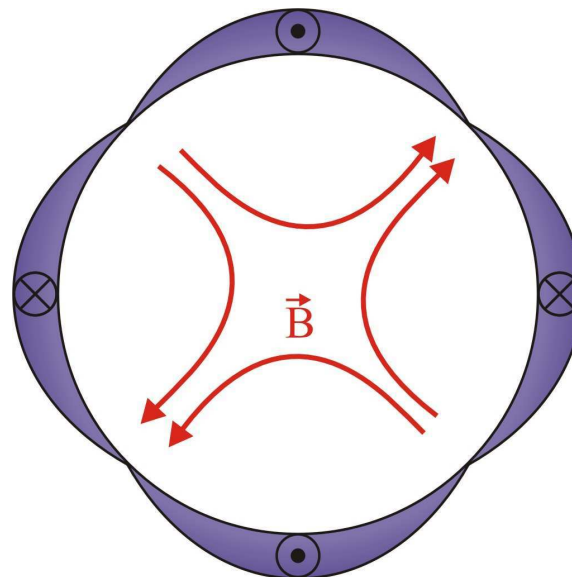
**Dipol**

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \cos \varphi$$



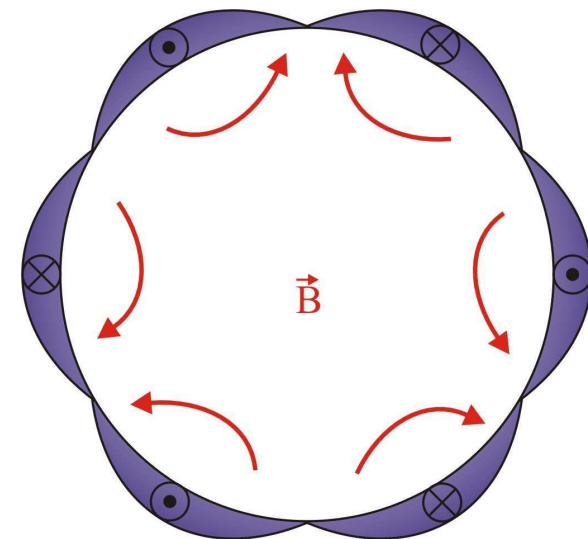
**Quadrupol**

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \cos 2\varphi$$

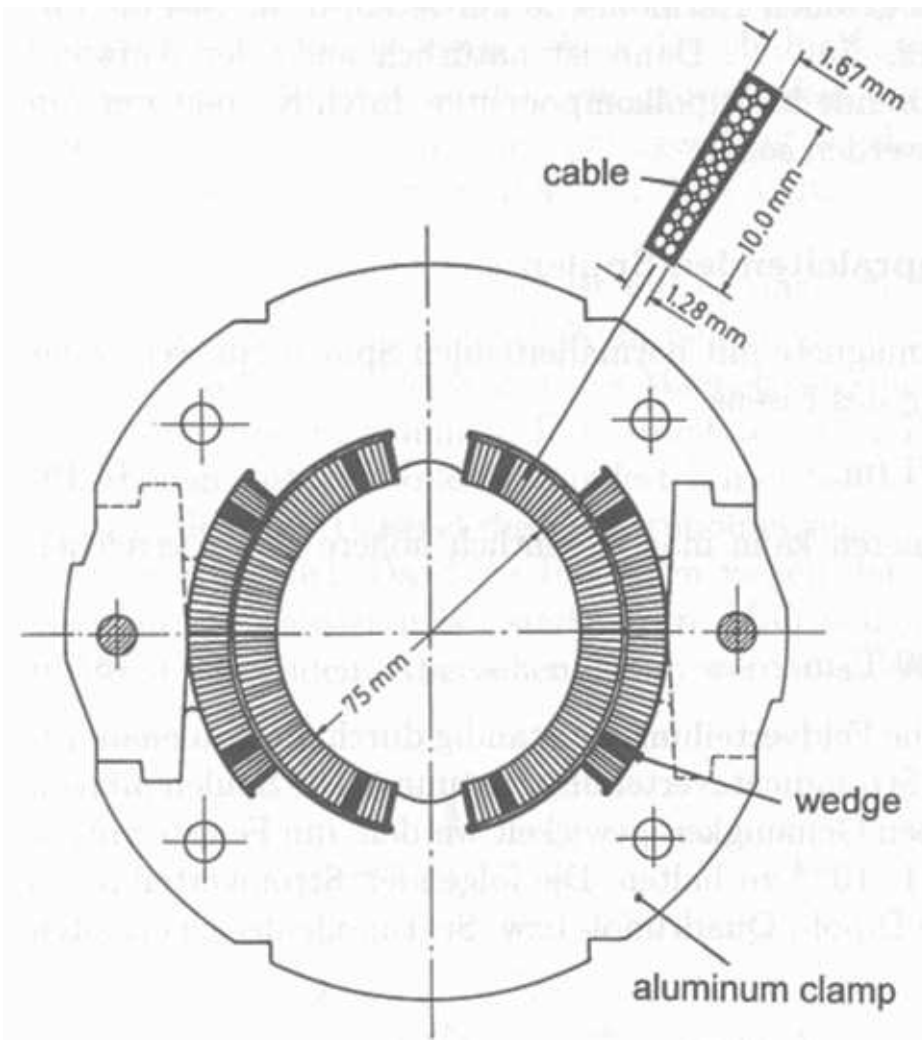


**Sextupol**

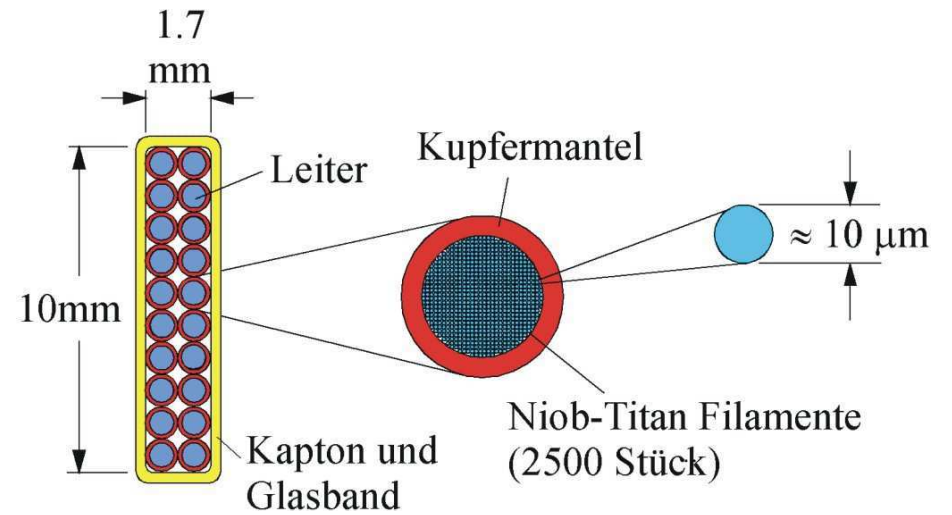
$$I(\varphi) = I_0 \cdot \cos 3\varphi$$



Beispiel: supraleitender HERA-Dipol



Aufbau des supraleitenden Kabels



genauso auch (2x) in LHC-Dipol (schematisch):

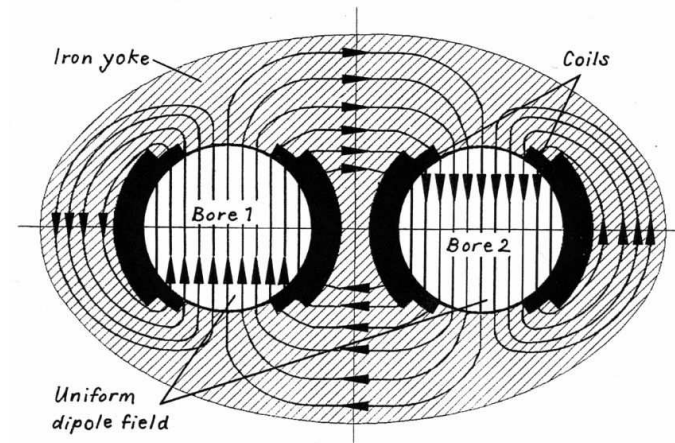


Figure 5B. Flux pattern in a twin-bore magnet.

Verteilung der Kabel approximiert  $\cos \varphi$ -Verteilung für Gesamtstrom  $I(\varphi)$



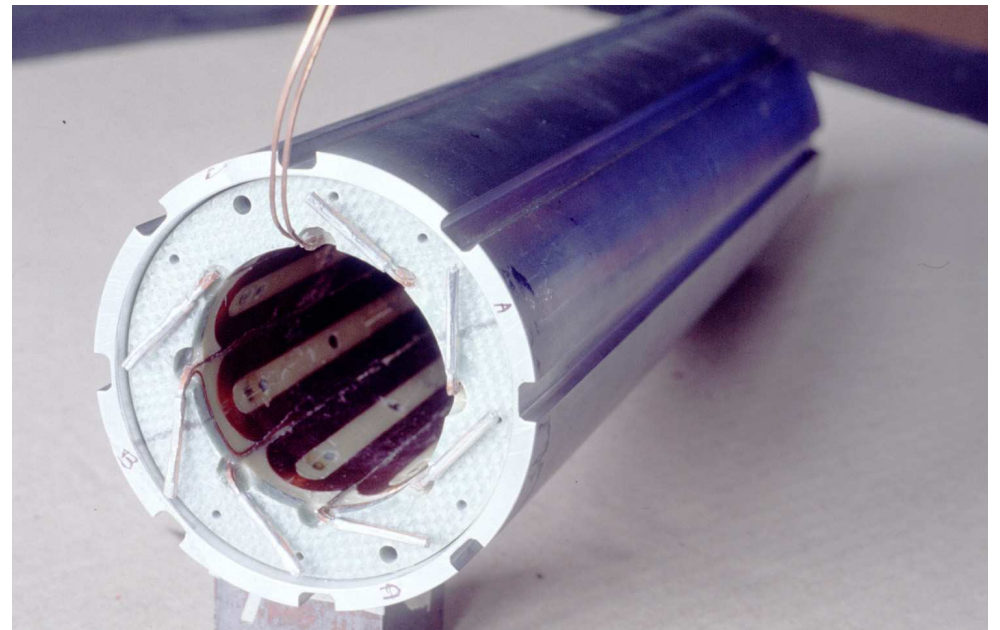
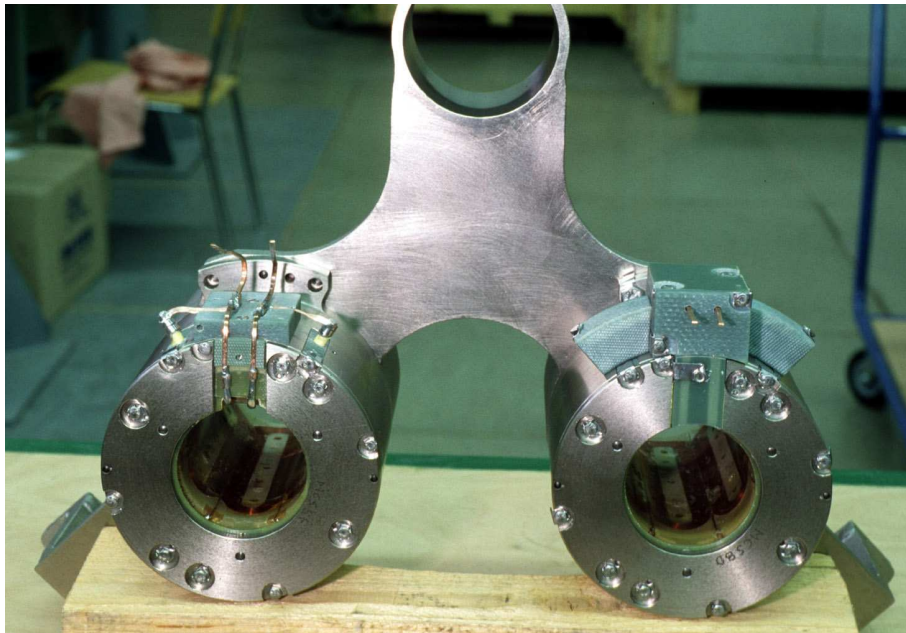
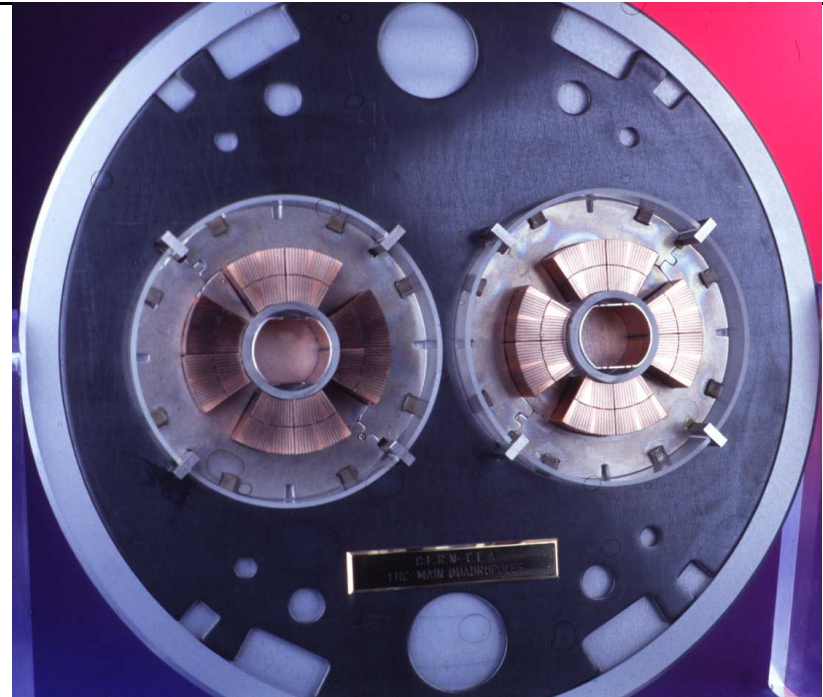
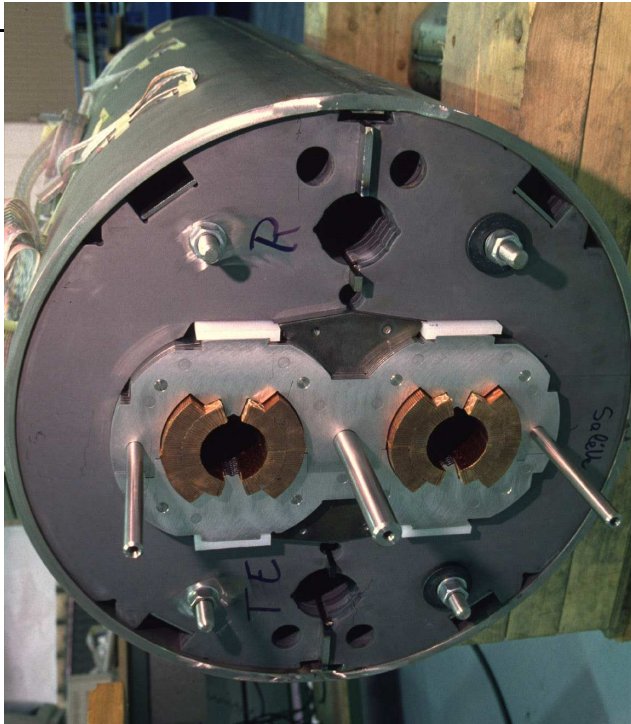


Abbildung 17: LHC-Magnete (von l.o. nach r.u.): supraleitender Dipol, supraleitender Quadrupol, Sextupol, einzelner Oktupol

**Kombination von Multipol-Magneten:**

(so gen. "combined function"-Magnete)

Beispiel: Polschuhform für horizontal fokussierende Ablenk-Magneten

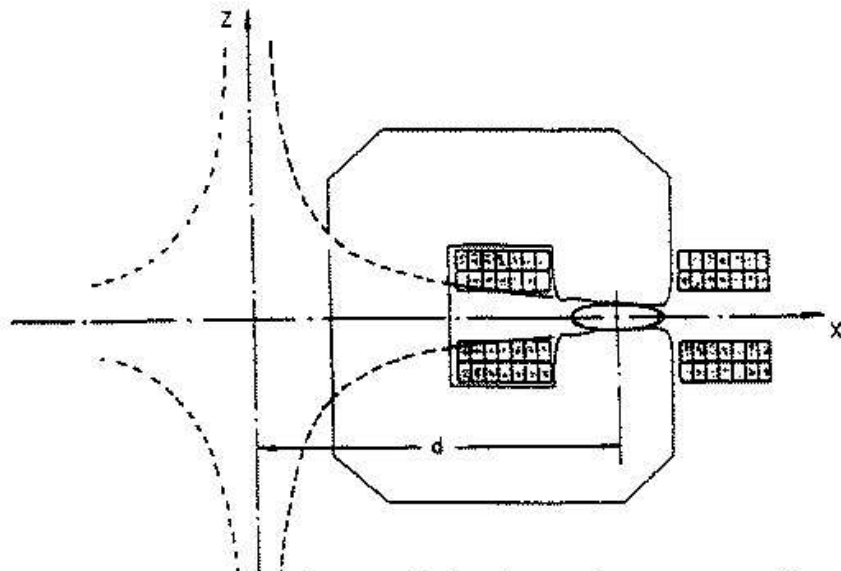
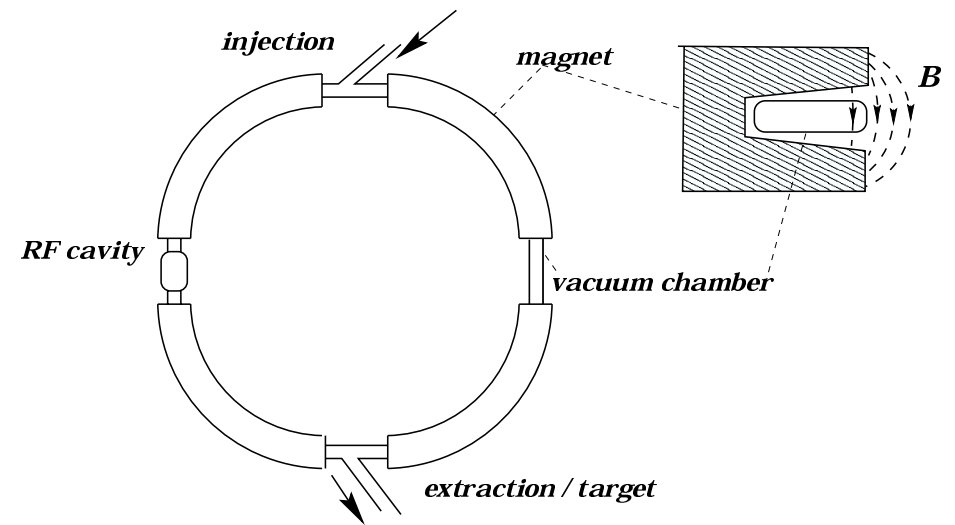


Figure 11: Cross-section of a horizontally focusing synchrotron magnet (from K. Steffen, Orsay lectures [4]).

... eingesetzt in "combined function"-Synchrotron:



NB: Im Gegensatz zu "combined function"-Beschleuniger, bei denen in den Magneten fokussierende und ablenkende Wirkung vereint sind, gibt es "separated function"-Maschinen (FODO), wo Dipol-Ablenkmagnete und Quadrupol-Fokussierungsmagnete separiert sind.

# Bewegungsgleichung für Teilchenstrahlen

Magnete und deren Felder:

- Dipole: : Teilchenführung entlang vorgegebenem Weg  $\longrightarrow$  Sollorbit oder Referenztrajektorie
- Quadrupole: : Fokussierung der Teilchen auf Sollorbit  $\longrightarrow$  geometrische Orbitkorrektur
- Sextupole: : Chromatizitätskorrektur  $\longrightarrow$  impulsabhängige Orbitkorrektur
- Oktupole u.a. : Korrekturen von Effekten höherer Ordnung  $\longrightarrow$

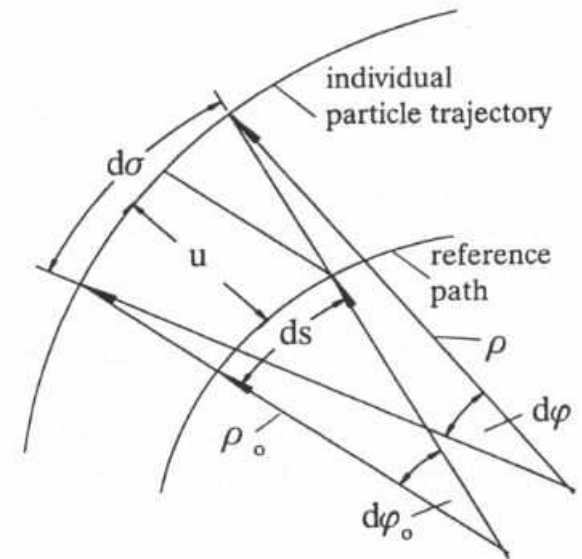
Kombination aller Elemente  $\longrightarrow$  Bewegungsgleichung im *mitbewegten Koordinatensystem* (vgl. Folie 4.3) in linearer Näherung ( $\rho \approx \rho_0 + u, d\varphi \approx d\varphi_0$ ):

- Weg bei Ablenkung auf Sollorbit,  $\longrightarrow ds = \rho_0 d\varphi_0$   
d.h. Kreisbahn mit Radius  $\rho_0 \equiv 1/\kappa_0$
- Weg auf Istorbit, Radius  $\rho \equiv 1/\kappa$   $\longrightarrow d\sigma = \rho d\varphi \approx (\rho_0 + u)d\varphi_0$
- mit Abstand  $u$  zwischen Ist- & Sollorbit  $\longrightarrow d\sigma \approx (1 + \kappa_0 u)ds = \frac{1}{\kappa}d\varphi$
- mit  $\begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix}$  von Folie 4.3

$$\rightarrow u'' = -(\kappa - \kappa_0) = -\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi_0}{ds}\right) \longrightarrow \boxed{u'' = -(1 + \kappa_0 u)\kappa + \kappa_0} \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

(NB: Ableitung bzgl.  $s$ , da i.A.  $u' \ll 1$  also  
*paraxiale Strahlen* !)

Bewegungs-Gl. für Sollimpuls



Berücksichtigung von **Abweichungen vom Sollimpuls**

Hierfür explizite Ablenkung in horizontaler Ebene, (De-)Fokussierung in horizontaler/vertikaler Ebene:

- Lorentzkraft = Zentrifugalkraft  $\rightarrow \kappa_x \equiv \frac{1}{\rho_x} = \frac{e}{cp} B_y, \quad \kappa_y \equiv \frac{1}{\rho_y} = -\frac{e}{cp} B_x$

- mit Multipol-Entwicklung für  $B_{x,y}$  (vgl. Folie 4.6)  $\rightarrow \begin{cases} \frac{e}{cp} B_y = \kappa_0 + kx + \frac{1}{2}m(x^2 - y^2) + \dots \\ \frac{e}{cp} B_x = \quad + ky + m xy + \dots \end{cases}$   
(Dipol:  $\kappa_0$ , Quadrupol:  $k$ , Sextupol:  $m, \dots$ )

- Impulsabweichung  $p = p_0(1 + \delta)$   $\rightarrow \frac{e}{cp} = \frac{e}{cp_0(1 + \delta)} \approx \frac{e}{cp_0}(1 - \delta + \dots)$

$\implies$  Bewegungs-Gl. in  $x, y$  aus (\*) (Folie 4.16)  
mit  $\kappa \equiv \kappa_x$

$$\begin{aligned} x'' + (\kappa_0^2 + k)x &= \delta\kappa_0 + \delta x (\kappa_0^2 + k) + \dots \\ y'' - k y &= -\delta y k + \dots \end{aligned}$$

- $\delta = 0$   
also keine Impulsabweichung

$$\begin{aligned} x'' + (\kappa_0^2 + k)x &= 0 \\ y'' - k y &= 0 \end{aligned}$$

$\implies \kappa_0^2$  in (...) wirkt fokussierend wie  $k$  vom Quadrupol  
so gen. *schwache Fokussierung* durch Dipol!

## Generelle Lösung der Bewegungs-Gleichung

Struktur der homogenen Bewegungs-DGL:  $u'' + Ku = 0$ ,

dabei ist  $K \equiv k + \kappa_x^2$  bzw.  $K \equiv -k + \kappa_y^2$ .

Hauptlösungen sind:

für $K > 0$ :	$S(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s)$	und	$C(s) = \cos(\sqrt{K}s) \equiv S'(s)$
für $K < 0$ :	$S(s) = \frac{1}{\sqrt{ K }} \sinh(\sqrt{ K }s)$	und	$C(s) = \cosh(\sqrt{ K }s) \equiv S'(s)$

mit Anfangswerten:

{	$S(0) = 0,$	$C(0) = 1,$
	$S'(0) = \frac{dS}{ds} = 1,$	$C'(0) = \frac{dC}{ds} = 0.$

Sie werden auch als "sinus-" und "cosinus-artige"-Lösungen bezeichnet.

Alle Linearkombinationen  $u(s)$  ( $u'(s)$ ) von  $C(s)$  und  $S(s)$  ( $C'(s)$  und  $S'(s)$ ) sind Lösungen der DGL !

In Matrixschreibweise:  $\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix}$  mit  $W(s) \equiv \begin{vmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{vmatrix} = 1$

- [...] ist die *Transformationsmatrix* eines Strahltransportelements (feldfreies gerades Stück, Dipol, Quadrupol, ...)
- $u(s)$  und  $u'(s)$ : *Ablage* eines Teilchens vom Sollorbit und die *Änderungsgeschwindigkeit* ( $u = x, y$ ).
- $W(s)$  ist die *Wronski-Determinante*,  $W(s) = 1$  für dissipationsfreie Systeme (d.h. kein Energiegewinn/-verlust)

**Matrixoptik für Teilchenstrahlen** ist weitestgehend analog zur **paraxialen Lichtoptik**:

- achsenparallele Trajektorien ( $u'_0 = 0$ )

→ erhalten Steigung  $u'(s) = C'(s)u_0$

- Brennweite:  $f = -u_0/u'(s) = -1/C'(s)$

- Brennpunkt:  $u(s_f) \stackrel{!}{=} 0$

→ cos-artige Lösung:  $C(s_f) = 0$

- Punkt-zu-Punkt-Abbildung ist möglich:

Objekt  $H_0$  bei  $s = s_0$

sin-artigen Lösung hat Nullpunkt:  $S(s_0) = 0$

→ abgebildet auf  $H_i$  mit Nullpunkt

$S(s_0 + s_i) = 0$  bei  $s = s_0 + s_i$

- Phasenvorschub durch solche Abbildung:

+180° (da  $u'(s_0) = -u'(s_0 + s_i)$   
und  $u(s_0) = -u(s_0 + s_i)$ )

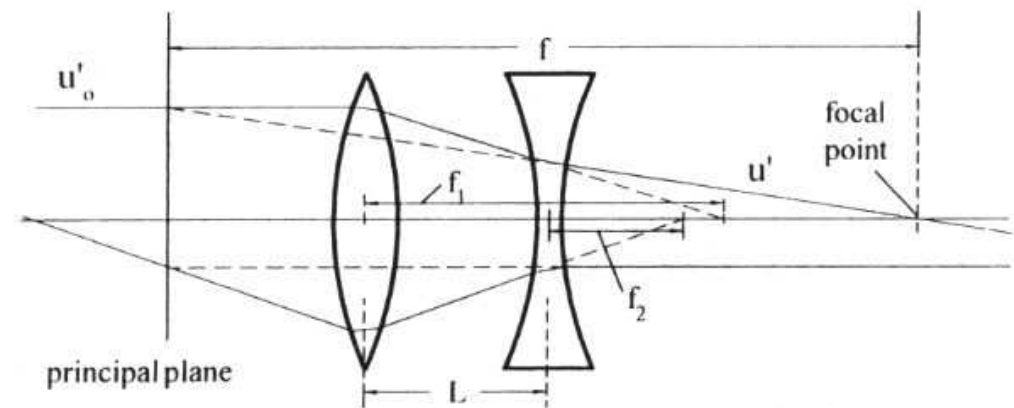


Fig. 4.14. Focusing in a quadrupole doublet

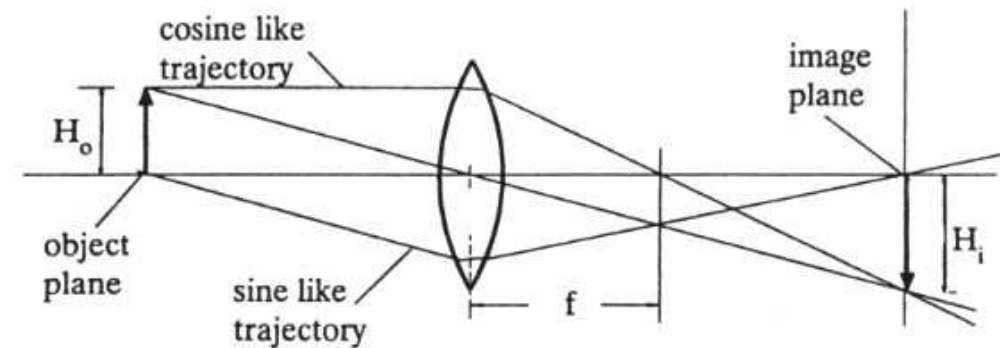


Fig. 4.15. Point to point imaging

**Dispersion:**

Die Bewegungs-DGL von 4.17 enthält Impulsabhängigkeiten von der allgemeinen Form ( $K(s) = \pm 1/\rho_0^2(s) + k$ ):

$$u'' + K(s)u = \frac{1}{\rho_0(s)}\delta$$

Man erhält als allgemeine Lösung 
$$\begin{cases} u(s) = aC(s) + bS(s) + \delta D(s) \\ u'(s) = aC'(s) + bS'(s) + \delta D'(s) \end{cases},$$

wobei für die Dispersionsfunktion  $D(s)$  gilt (Rechnung z.B. in H.Wiedermann: Particle Accelerator Physics I):

$$D(s) = \int_0^s \frac{1}{\rho_0(s)} [S(s)C(\tilde{s}) - C(s)S(\tilde{s})] d\tilde{s}$$

Man kann die Matrizen nun leicht zur Berücksichtigung der Dispersion verallgemeinern:

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) & D(s) \\ C'(s) & S'(s) & D'(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \\ \delta \end{pmatrix}$$

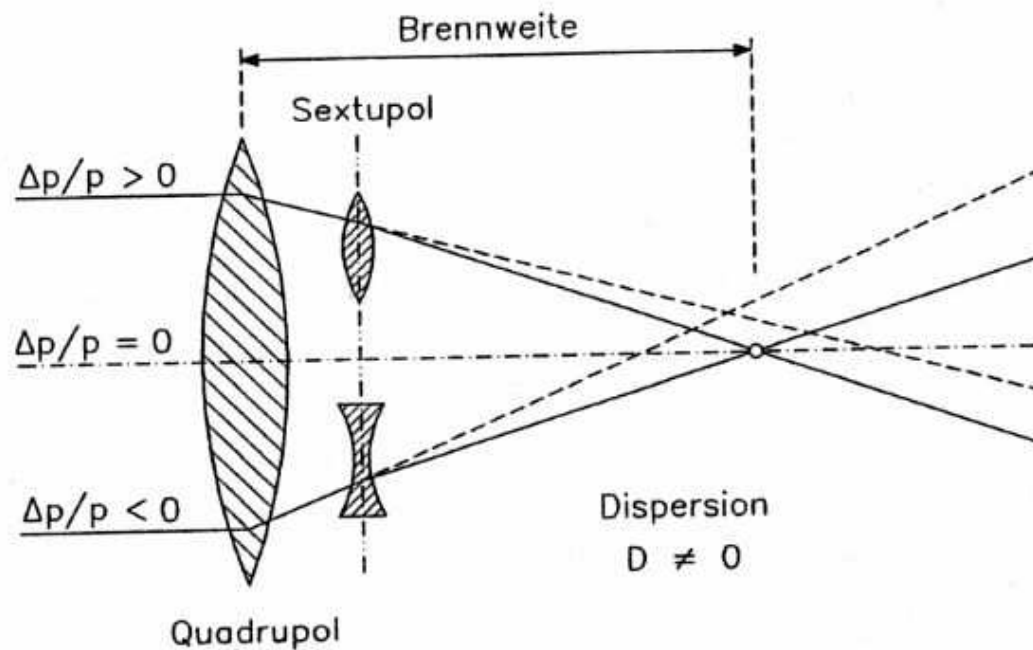
Dispersion: Korrektur durch **Sextupol-Magnete**:

Dispersion führt zu *Chromatizität*, d.h. die Fokussierung eines Quadrupols hängt vom Teilchenimpuls bzw. von der Abweichung  $\delta$  vom Sollimpuls  $p_0$  ab:

Korrektur der Chromatizität: *Achromate* (=achromatische Kombination von Quadrupolen) oder *Sextupole*

**Funktionsprinzip:**

**Chromatizität der Strahloptik und ihre Kompensation**



**Gestrichelt:** Teilchentrajektorie ohne Chromatizitätskorrektur

**Durchgezogen:** dito mit Korrektur durch Sextupol

(NB:  $\Delta p/p$  in Abbildung entspricht  $\delta$  in diesem Skript.)

**Fig. 3.41** Prinzip der Kompensation der durch Quadrupolmagnete hervorgerufenen Chromatizität durch Sextupole



## Lineare Strahldynamik

- Lineare Strahldynamik
  1. Matrizen-Formalismus
  2. Teilchenstrahlen und Phasenraum: Emittanz und Liouville-Theorem
  3. Betatron Funktion und Strahleinhüllende
  4. Weglänge und "Momentum compaction"

Die vollständigen Bewegungsgleichungen haben die Form

$$u'' + K(s)u = c_0(s) + c_1(s)u + c_2(s)u^2 + \dots,$$

sind also nicht-linear!

Hinzu kommt die  $s$ -Abhängigkeit der Koeffizienten  $K(s)$  und  $c_i(s)$  ( $i=0,1, \dots$ ), wenn mehrere Strahlelemente (feldfreie Driftstrecken, Dipole, Quadrupole, etc.) hintereinander aufgestellt werden.

Allgemeine Lösungen zu finden, führt schnell zu unüberwindbaren mathematischen Problemen.

- Konstruktion eines Beschleunigers, sodass  $c_i(s) \ll 1$  v.a. für  $i \geq 1$
- nicht-lineare Terme nur kleine Störungen
- Störungstheoretische Behandlung

## Matrizen-Formalismus

In linearer Näherung, d.h.  $u'' + K(s)u = 0$ , repräsentiert  $K(s)$  die Anordnung der Magnete im Beschleuniger, das so gen. *Magnet-Gitter* (engl.: "magnet lattice" oder kurz "lattice").

Man unterscheidet:

- "separated function lattice" bei getrennten Dipolen und Quadrupolen im Gitter
- "combined function lattice" bei in einem Magneten integrierten Dipolen und Quadrupolen

Zur weiteren Vereinfachung:

- Ablenkung nur in  $x$ -Ebene
- lineare magnetische Felder:

Dipol (Feldstärke  $B_{0y}$ ), Quadrupol (Gradient  $k$ )  $\rightarrow$

$$\begin{cases} B_x = ky \\ B_y = B_{0y} + kx \end{cases}$$

$\rightarrow$  Bewegungsgleichung der *linearen Strahldynamik*:

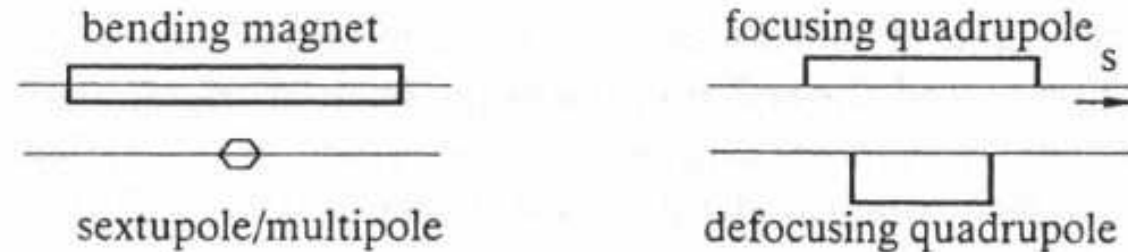
$$\begin{cases} x'' + \left(\frac{1}{\rho_0^2} + k_0\right) x = 0 \\ y'' - k_0 y = 0 \end{cases} \quad (**)$$

- Integration:  $\begin{cases} \int y'' ds = y' - y'_0 \equiv \alpha \\ \int k_0 y ds \approx k_0 y \Delta s \end{cases} \rightarrow$  Brennweiten:  
(Ablenkwinkel  $\alpha$ )

$$\begin{cases} \frac{1}{f_x} = k_0 \Delta s = \frac{e}{cp} \frac{\partial B_y}{\partial x} \Delta s \\ \frac{1}{f_y} = -k_0 \Delta s = -\frac{e}{cp} \frac{\partial B_x}{\partial y} \Delta s \end{cases}$$

**Nomenklatur:**

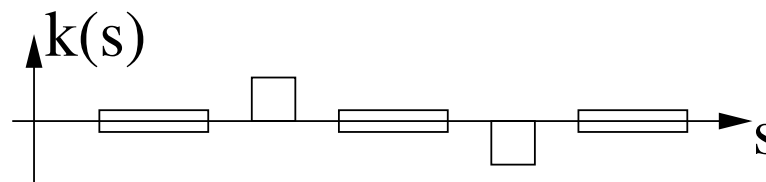
- Magnete repräsentiert durch Rechtecke entlang  $s$ -Achse
- Länge der Rechteck  $\hat{=}$  geom. Länge der Magnete

**Fig. 5.1.** Symbols for magnets in lattice design

- Dipole: Rechteck um  $s$ -Achse zentriert
- horizon. fokus. Quadrupol: positives Rechteck
- horizon. defokus. Quadrupol: negatives Rechteck
- vertikal fokus. Quadrupol: negatives Rechteck
- vertikal defokus. Quadrupol: positives Rechteck

wobei die Höhe der Rechtecke bei den Quadrupolen die (De-)Fokussierungsstärke bezeichnet.

z.B. typisches Magnet-Gitter:



**NB:** Diese Form entspricht dem “*hard edge*”-Modell von Magneten, bei dem Effekte am Rand eines Magneten vernachlässigt werden.

## “Soft edge”-Effekte

Randeffekte realer Magnete, so gen. “soft edge”-Effekte können mit dem “hard edge”-Modell approximiert werden:

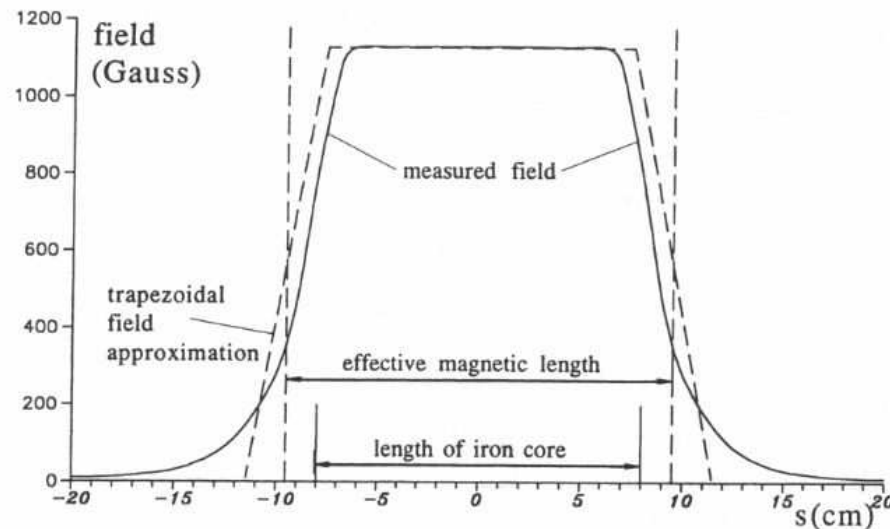


Fig. 5.6. Field profile in a real quadrupole with a bore radius of  $R = 3$  cm and an iron length of  $l_{\text{iron}} = 15.9$  cm

Dabei ist die effektive magnetische Länge  $l_{\text{eff}}$  eines Quadrupols um etwa den Radius  $R$  der Apertur des Eisenkerns größer als die wirkliche Länge des Magnet-eisens  $l_{\text{Fe}}$ , also

$$l_{\text{eff}} \approx l_{\text{Fe}} + R$$

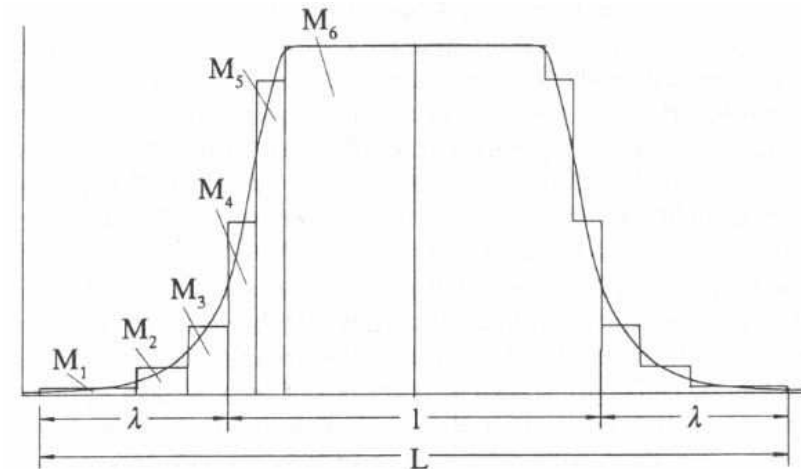


Fig. 5.7. Decomposition of an actual quadrupole field profile into segments of hard edge quadrupoles

Der Randbereich eines realen Quadrupols wird durch viele Quadrupolscheiben mit angepasster Stärke approximiert. Die gesamte Transformationsmatrix ist dann das Produkt aller Einzelmatrizen  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Kleinere Korrekturen aufgrund der Diskretisierung im idealisierten “hard edge”-Modell können erforderlich sein.

### Matrix-Formulierung in lineare Strahl-Dynamik:

Zur Erinnerung: Die linearen Bewegungs-DGL (\*\*) von 5.2 werden durch Linearkombinationen der "sinus-" ( $S(s) = \sin(\sqrt{K}s)/\sqrt{|K|}$ ) und "cosinus-artigen"-Lösungen ( $C(s) = \cos(\sqrt{K}s)$ ) (s. 4.18) gelöst, die durch  $2 \times 2$ -Matrizen beschrieben wurden:

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_x(s) & S_x(s) \\ C'_x(s) & S'_x(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(s_0) \\ y'(s_0) \end{pmatrix}$$

Fasst man die Komponenten von  $x$ - und  $y$ -Ebene zusammen, kann man  $4 \times 4$ -Matrizen benutzen:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_x(s) & S_x(s) & 0 & 0 \\ C'_x(s) & S'_x(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_y(s) & S_y(s) \\ 0 & 0 & C'_y(s) & S'_y(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(s_0) \\ x'(s_0) \\ y(s_0) \\ y'(s_0) \end{pmatrix}$$

Prinzipiell möglich sind auch Kopplungen zwischen  $x$ ,  $x'$  und  $y$ ,  $y'$ , also Kopplungen zwischen Bewegungen in horizontaler und vertikaler Ebene. Solche Kopplungen treten in realen Beschleunigern tatsächlich auf, sollen aber zur Vereinfachung im Folgenden vernachlässigt werden.

**Transportmatrizen** von Strahltransportelementen:

Mit  $\Omega \equiv \sqrt{|K|}s$  und für  $\vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}$  gilt:

- Feldfreie Driftstrecke  
( $K=0$ )

$$M_{\text{Drift}} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dipol  
( $K=0, \rho>0$ )

$$M_{\text{Dipol}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- horizontal fokus. Quadrupol  
( $K<0$ )

$$M_{\text{QF}} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin \Omega & 0 & 0 \\ -\sqrt{|K|} \sin \Omega & \cos \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \Omega & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \Omega \\ 0 & 0 & \sqrt{|K|} \sinh \Omega & \cosh \Omega \end{bmatrix}$$

- vertikal fokus. Quadrupol  
( $K>0$ )

$$M_{\text{QD}} = \begin{bmatrix} \cosh \Omega & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \Omega & 0 & 0 \\ \sqrt{|K|} \sinh \Omega & \cosh \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin \Omega \\ 0 & 0 & -\sqrt{|K|} \sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix}$$

**6 × 6-Repräsentation:**

Die vollständige Beschreibung der Strahldynamik erfordert neben den transversalen Komponenten  $x$  und  $y$  auch die Dispersion. Die Matrix-Formulierung kann leicht dafür erweitert werden:

(NB: Dispersion nur in horizontaler Ebene)

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \\ s \\ \delta(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_x(s) & S_x(s) & 0 & 0 & 0 & D_x(s) \\ C'_x(s) & S'_x(s) & 0 & 0 & 0 & D'_x(s) \\ 0 & 0 & C_y(s) & S_y(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C'_y(s) & S'_y(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & D_s(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(s_0) \\ x'(s_0) \\ y(s_0) \\ y'(s_0) \\ s_0 \\ \delta(s_0) \end{pmatrix}$$

- Z.B. für feldfreie Driftstrecke der Länge  $L$ :

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \\ s \\ \delta(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L/\gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(s_0) \\ x'(s_0) \\ y(s_0) \\ y'(s_0) \\ s_0 \\ \delta(s_0) \end{pmatrix}$$

$D_s(s)$  folgt mit  $\Delta v/v_0 = \Delta\beta/\beta = (\partial\beta/\partial p)\Delta p/\beta$  aus:

$$s - s_0 = (v - v_0) \cdot t = (v - v_0) \cdot \frac{L}{v_0} = \frac{\Delta v}{v_0} L = \frac{\Delta p}{\beta \cdot (\partial p/\partial \beta)} L = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p} L = \frac{L}{\gamma^2} \delta$$

**“Dünne Linsen”-Näherung**

- Matrizen-Formalismus ermöglicht einfache Berechnung von Sollorbits

... ist bei komplexen System jedoch mühsam zu berechnen (viele Matrixmultiplikationen)

→ wird daher meist auf Computer ausgeführt

- für grobe analytische Abschätzungen:

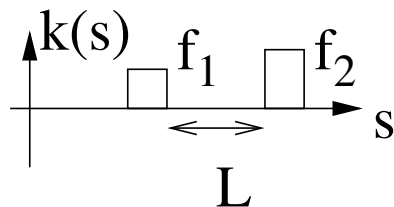
Näherung mit *dünnen Linsen*, d.h. Brennweite  $f \gg \ell$  Länge des Quadrupols:

$$\ell \rightarrow 0, \text{ sodass } f^{-1} = +k_0 \ell = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \Omega = \sqrt{K} s = \sqrt{k_0} \ell \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} 0$$

→ Abbildungsmatrix des Quadrupols in fokussierender Ebene:

$$\begin{bmatrix} \cos \Omega & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \Omega \\ -\sqrt{K} \sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{wobei } f^{-1} = k_0 \ell \lesseqgtr 0 \text{ in de-/fokussierender Ebene}$$

- Anwendungsbeispiel *Quadrupol-Dublett*:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - L/f_1 & L \\ -1/f^* & 1 - L/f_2 \end{bmatrix}$



mit Gesamtbrennweite (vgl. geom. Optik):

$$\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}$$



## Symmetrisches und umgekehrtes Magnet-Gitter

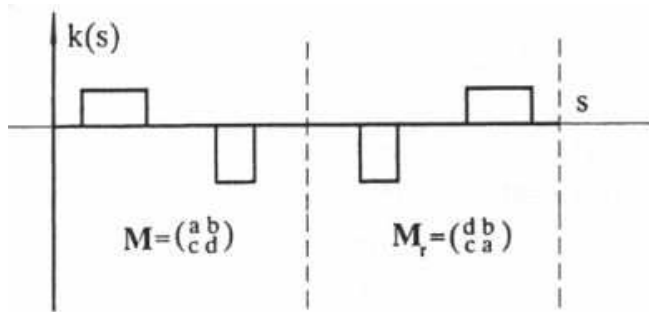


Fig. 5.4. Reversed lattice

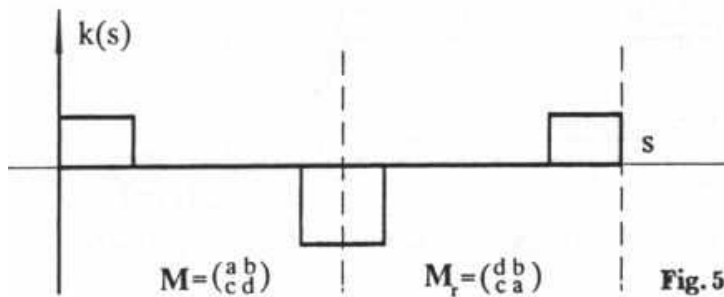


Fig. 5.5. Symmetric quadrupole triplet

- Für fokus.+defokus. Quadrupol-Dublett mit  $f_1 = -f_2 \equiv f$  gilt:

$$\frac{1}{f^*} = +\frac{L}{f^2} > 0!$$

- ▷ Fokussierung in horiz.&vert. Ebene
- ▷ nur in "Dünne Linsen"-Näherung horiz. & vert. Brennweiten gleich (allg. keine Kommutativität der Matrixmultiplikation).
- Für symmetrische Magnet-Gitter (wie abgebildet) findet man einfache Relationen zwischen den Transformationsmatrizen  $M$  und  $M_r$  für die umgekehrte Quadrupol-Anordnung

- Für symmetrische Quadrupol-Triplets (s.o.) ergibt sich mit  $f_1 = -f_2 \equiv f$  die Transformationsmatrix:

$$M_{tr} = M_r \cdot M = \begin{bmatrix} 1 - 2L^2/f^2 & 2L(1 + L/f) \\ -2(1 - L/f)L/f^2 & 1 - 2L^2/f^2 \end{bmatrix}$$

- Solche symmetrische Triplets fokussieren in horiz.&vert. Ebene, falls  $f > L$
- Solche Triplets sind grundlegende Designelemente u.a. in Kreisbeschleunigern (FODO-Zelle)

## Sektormagnet vs. Rechteckmagnet

Dipolmagnete im Kreisbeschleuniger sollten eigentlich so gen. *Sektormagnete* sein.

- Für Sektormagnete (Länge  $\ell$ ) gilt die Abbildungsmatrix:

$$M_{\text{Sektor}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\ell}{\rho} & \rho \sin \frac{\ell}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{\ell}{\rho} & \cos \frac{\ell}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

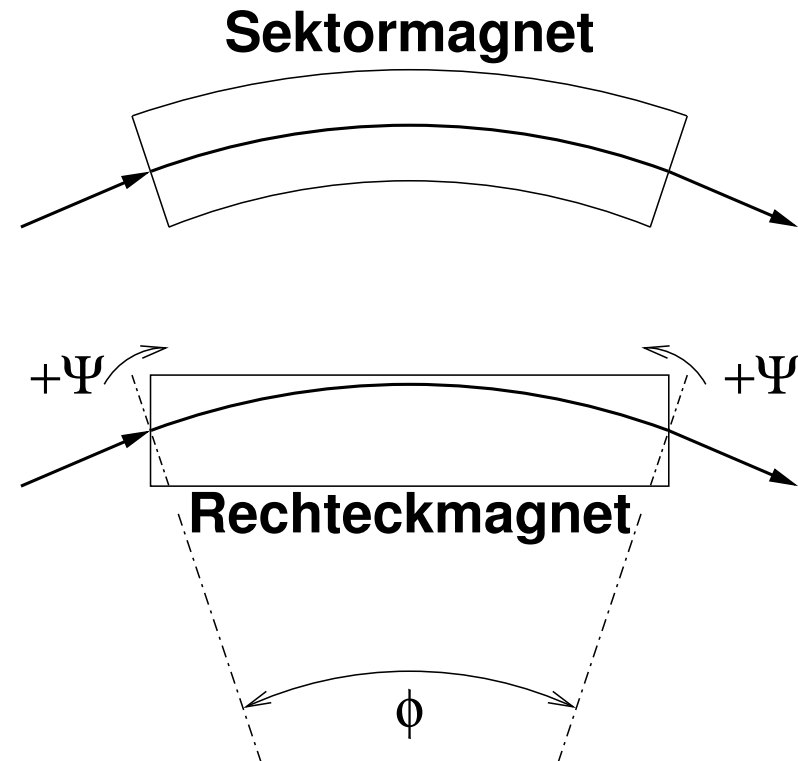
- ▷  $-(1/\rho) \sin(\ell/\rho)$  entspricht einer Brennweite  $-1/f$
- Fokussierung in horizontaler Ebene (geometr. Fokussierung)
- ▷ untere, rechte  $2 \times 2$ -Blockmatrix entspricht einfachem Strahltransport in vertikaler Ebene

- Für Rechteckmagnete gilt die Abbildungsmatrix:

$$M_{\text{Rechteck}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \sin \frac{\ell}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\ell}{f} & \ell \\ 0 & 0 & \frac{\ell}{f^2} - \frac{2}{f} & 1 - \frac{\ell}{f} \end{bmatrix}$$

mit  $\psi = \phi/2 = \frac{1}{2}(\ell/\rho)$

- ▷  $-1/(\ell/f^2 - 2/f)$  entspricht einer Brennweite
- Fokussierung in vertikaler Ebene
- ▷ obere, linke  $2 \times 2$ -Blockmatrix entspricht einfachem Strahltransport in horizontaler Ebene



## Emittanz und Liouville-Theorem

Jedes Teilchen im Beschleuniger wird durch 6 Größen charakterisiert:

$$(x, p_x, y, p_y, \sigma, E)$$

Mit Sollimpuls  $p_0$  sind:  $p_x \approx x' \cdot p_0$ ,  $p_y \approx y' \cdot p_0$  die transversalen Impulskomponenten,  $\sigma$  die Koordinate entlang der Teilchentrajektorie,  $E$  die Teilchenenergie (alternativ auch Gesamtimpuls oder Abweichung von Sollenergie).

Werden viele Teilchen betrachtet, die ein Ensemble, Teilchenpaket oder Teilchen**bunch** darstellen, wird jedes einzelne der Teilchen durch ein 6-Tupel charakterisiert.

Statt die Bewegung einzelner Teilchen, betrachtet man die Bewegung des Ensembles. Alle Teilchen des Ensembles weisen ungefähr gleiche Werte der Größen im 6-Tupel auf, besetzen also ähnliche Zustände im 6-dimensionalen Phasenraum.

In linearer Strahloptik, mit entkoppelter horizontaler und vertikaler Ebene, genügt es, nur den 2-dimensionalen Phasenraum zu betrachten.

Beschreibung des Ensembles durch statistische Größen: Mittelwert, Streuung (Varianz)

Die Linie konstanter Phasenraumdichte ist eine Ellipse mit minimaler und maximaler Varianz als Halbachsen.

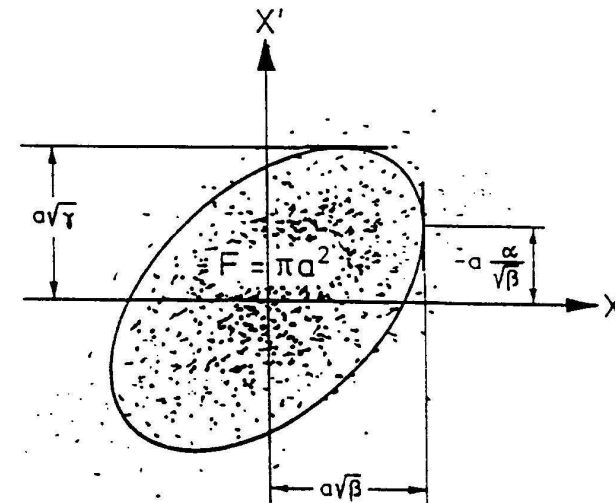
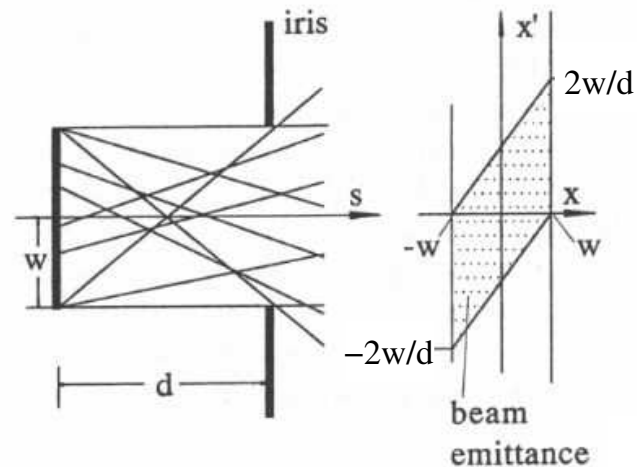
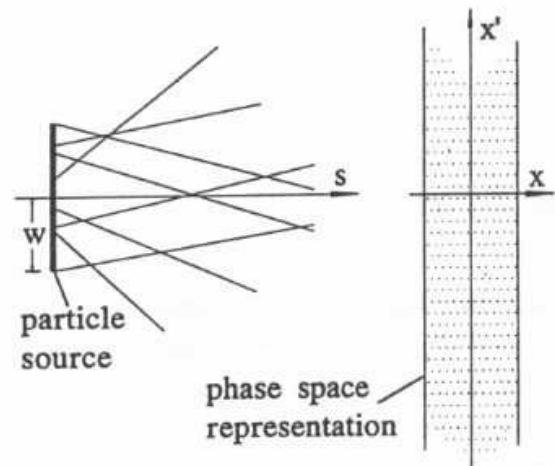


Figure 32: A particle beam is often reasonably well described by a two dimensional Gaussian distribution in phase space. The lines of constant phase-space density are then ellipses. Since the phase-space density decreases only slowly with amplitude, the phase-space area containing *all* particles might be hard to determine (experimentally as well as theoretically). Also, it is not the quantity relevant for most of the applications. Therefore, the emittance is defined as  $1/\pi$  times the phase-space area containing a certain fraction of the particles (e.g. 90 %).

## Bedeutung des Phasenraums und der Emittanz



- Teilchen aus einer diffusen Quelle der Größe  $2w$  besitzen
  - beliebige  $x$  zwischen  $-w$  und  $+w$
  - beliebige  $x'$  zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$
  - ▷ Phasenraum: in  $x'$  unendliches Rechteck mit Breite  $2w$
  - alle Teilchen innerhalb des Rechtecks
  - Fläche des erlaubten Phasenraums:  $\infty$
- ... diffuse Quelle mit Blende der Größe  $2w$  besitzen
  - beliebige  $x$  zwischen  $-w$  und  $+w$
  - beliebige  $x'$  zwischen  $-2w/d$  und  $+2w/d$
  - ▷ Phasenraum: Parallelogramm
  - alle Teilchen innerhalb des Parallelogramms
  - Fläche des erlaubten Phasenraums:
 
$$2 \cdot \frac{1}{2} (2w \cdot 2\frac{w}{d}) = 4w^2/d$$
  - Fläche im Phasenraum  $\propto$  (Strahl-)Emittanz der Quelle

## Phasenraum-Ellipse, Emittanz und Twiss-Parameter

Teilchenensemble (in einer Ebene) i.A. durch  
2-dimensionale Gaußkurve beschreibbar

$$V(x, x') \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \text{cor})} \left[ \frac{x^2}{\overline{x^2}} - 2\text{cor} \cdot \frac{x \cdot x'}{\sqrt{\overline{x^2}}\sqrt{\overline{x'^2}}} + \frac{x'^2}{\overline{x'^2}} \right] \right\}$$

mit Korrelationskoeffizient  $\text{cor} \equiv \overline{xx'}/\sqrt{\overline{x^2} \cdot \overline{x'^2}}$ , wobei  $\overline{x^2} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$  für alle Teilchen  $i$  und  $\overline{x} = 0$ ,  $\overline{x'} = 0$  (d.h. Mittelwerte = 0).

Die Phasenraum-Ellipse ist damit durch die so gen. *Twiss-Parameter*  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gegeben:

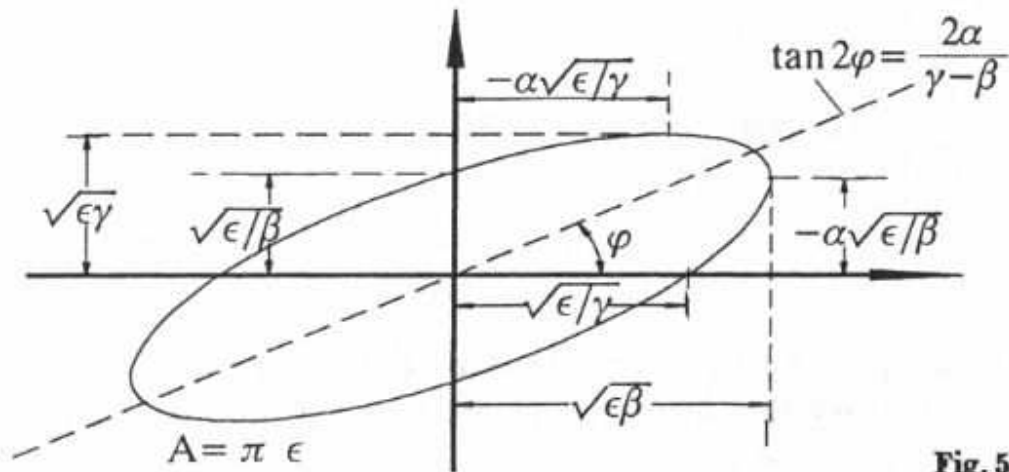


Fig. 5.22.

- $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2}} \equiv \sqrt{\beta\epsilon}$
- $\sigma_{x'} = \sqrt{\overline{x'^2}} \equiv \sqrt{\gamma\epsilon}$
- $\text{cor} \cdot \sigma_x \sigma_{x'} = \overline{xx'} \equiv -\alpha\epsilon$
- $\tan 2\varphi = (2\text{cor} \cdot \overline{xx'}) / (\sqrt{\overline{x^2}} - \sqrt{\overline{x'^2}})$
- $\epsilon = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2$       Emittanz ( $e^-$ -Strahlen!)
- NB: in Literatur häufig Emittanz auch als  $\pi\epsilon$  definiert
- $A = \pi\epsilon$       Ellipsenfläche

- $\sqrt{\beta}$       ist die r.m.s.-Streuung der Strahleinhüllenden (pro Einheit der Emittanz)
- $\sqrt{\gamma}$       ist die r.m.s.-Streuung der Strahldivergenz (pro Einheit der Emittanz)
- $\alpha$       ist proportional zur Korrelation zwischen  $x$  und  $x'$
- Außerdem:  $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$ , da neben  $\epsilon$  zwei weitere Parameter zur Beschreibung der Ellipse genügen

Das **Liouville Theorem** besagt:

“Unter Einwirkung konservativer Kräfte bleibt die Teilchendichte im Phasenraum konstant.”

Die Konsequenz ist: Strahlelemente (feldfreie Driftstrecken, Quadrupole, etc.) deformieren zwar die Phasenraum-Ellipse, ändern aber die Fläche der Ellipse nicht.

Insbesondere ist damit  $\varepsilon$  unabhängig von  $s$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \\ &= \gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x'_0 + \beta_0 x_0'^2\end{aligned}$$

wobei 
$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix}$$

⇒ Transformationsmatrix :

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & (S'C + SC') & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

für Twiss-Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$ .

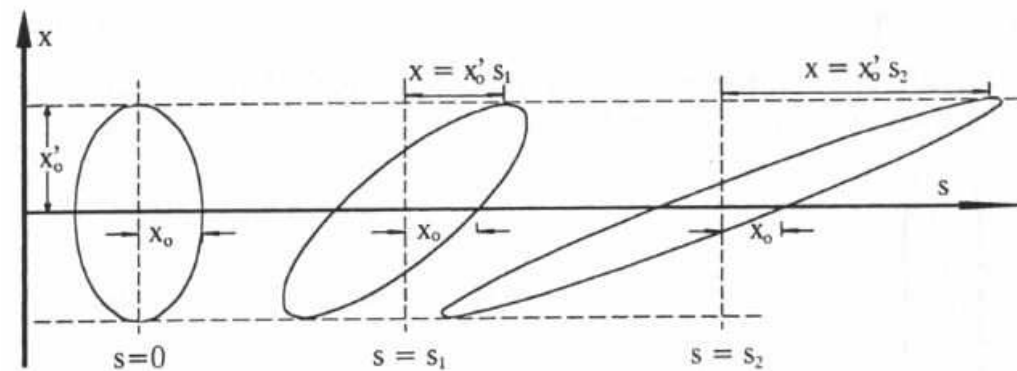


Fig. 5.23. Transformation of a phase space ellipse at different locations along a drift section

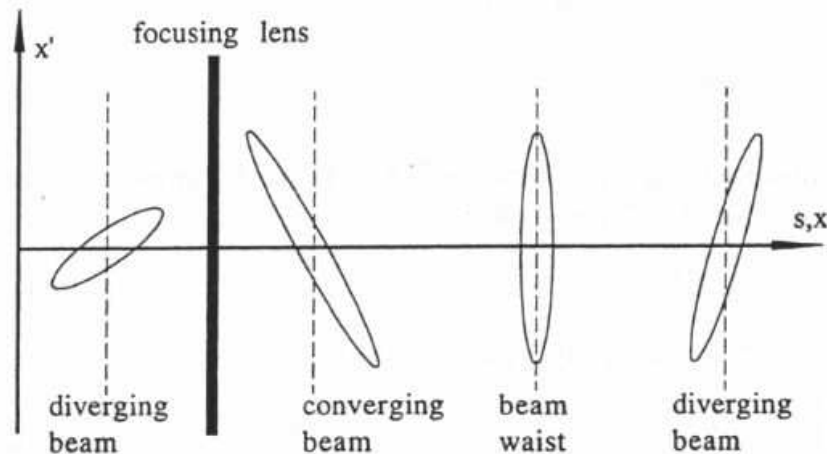


Fig. 5.24. Transformation of a phase ellipse due to a focusing quadrupole. The phase ellipse is shown at different locations along a drift space downstream from the quadrupole.

**“Beam waist”:**

Es gilt allgemein die Twiss-Parameter-Transformationsmatrix für eine Driftstrecke der Länge  $\ell$  (d.h.  $C = 1, C' = 0, S = \ell, S' = 1$ ):

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 1 & -\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Da  $\alpha$  die Korrelation zwischen  $x$  und  $x'$  angibt, also die Neigung der Phasenraumellipse, folgt als Bedingung für den Ort  $s_w$  der Strahltaile (engl.: “beam waist”):

$$\alpha(s_w) = 0$$

Damit folgt aus obiger Transformationsmatrix die Relation für den Ort der Strahltaile:

$$\ell = s_w - s_0 = \alpha_0 / \gamma_0$$

Für negatives bzw. positives Vorzeichen von  $\alpha_0$  liegt die Strahltaile vor (d.h.  $s_0 < s_w$ ) bzw. hinter  $s_w$

Mit Kenntnis der Transformationen der Phasenraum-Ellipse kann die Emittanz eines Strahls bestimmt werden:

- Strahlquerschnitt  $\sigma_x = \sqrt{x^2}$ : direkter Messung zugänglich (z.B. mit Fluoreszenzschirm)
  - Strahldivergenz  $\sigma_{x'} = \sqrt{x'^2}$ : keiner direkten Messung zugänglich
- Messung des Strahlquerschnitts an drei verschiedenen Stellen und bei unterschiedlicher Fokussierung
- Twiss-Parameter-Transformationsmatrix liefert Relationen für Strahlquerschnitte an allen drei Stellen
- Berechnung der Strahlparameter (Querschnitt  $\sqrt{x^2}$ , Divergenz  $\sqrt{x'^2}$ , Korrelation  $\sqrt{xx'}$ ) am Referenzpunkt
- Berechnung der Strahlemittanz aus ( $\sigma_{xx'}^2 \equiv \text{cor} \cdot \sigma_x \sigma_{x'}$ ):

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xx'}^2 \\ \sigma_{xx'}^2 & \sigma_{x'}^2 \end{bmatrix} = \varepsilon \cdot \det \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{bmatrix} = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_{x'}^2 - \sigma_{xx'}^4}$$

## Betatron-Funktion und Strahleinhülle

Um genauere Einsicht in die charakteristischen Eigenschaften der Teilchentrajektorien zu gewinnen, wird im Folgenden eine analytische Lösung der Bewegungsgleichung

$$u'' + K(s)u = 0$$

diskutiert.  $u$  ist die horizontale ( $x$ ) oder vertikale ( $y$ ) Koordinate,  $K(s)$  die Magnetanordnung im Beschleuniger.

Lösungsansatz:

$$u(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)} \cdot \cos[\psi(s) - \psi_0],$$

wobei  $\varepsilon$  und  $\psi_0$  Integrationskonstanten sind.

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert zwei Bedingungen, damit die Lösung für alle  $\psi \equiv \psi(s)$  gilt ( $\beta \equiv \beta(s)$ ):

$$\frac{1}{2}(\beta\beta'' - \frac{1}{2}\beta'^2) - \beta^2\psi'^2 + \beta^2K = 0$$

$$\beta'\psi' + \beta\psi'' = (\beta\psi')' = 0.$$

Zweite Bedingung: mit Normierung  $\beta\psi' = 1$  folgt die *Phasenfunktion*:

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{\beta(\tilde{s})} + \psi_0.$$

Eingesetzt in die erste Bedingungsgleichung folgt:

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + \beta^2K = 1$$

und mit  $\alpha \equiv -\frac{1}{2}\beta'$  und  $\gamma \equiv (1 + \alpha^2)/\beta$ :

$$\beta'' + 2K\beta - 2\gamma = 0$$



**Courant-Snyder-Invariante:**

Eliminiert man  $\psi - \psi_0$  aus

$$u(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta} \cos(\psi - \psi_0) \quad \text{und} \quad u'(s) = -\sqrt{\varepsilon/\beta} \cdot \alpha \cos(\psi - \psi_0) - \sqrt{\varepsilon/\beta} \cdot \sin(\psi - \psi_0)$$

so ergibt sich die so gen. *Courant-Snyder-Invariante*:

$$\gamma u^2 + 2\alpha u u' + \beta u'^2 = \varepsilon$$

oder

$$\frac{1}{\beta} \left( u^2 + (\alpha u + \beta u')^2 \right) = \varepsilon$$

wobei  $\alpha \equiv -\frac{1}{2} \beta'$  und  $\gamma \equiv (1 + \alpha^2)/\beta$ .

Dies ist die Gleichung der Phasenraum-Ellipse, womit die Bedeutung der Parameter  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  und  $\varepsilon$  festgelegt ist.

Man nennt  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  und die Phasenfunktion  $\psi$  auch *Betatron-Funktionen* oder *Gitter-Funktionen*.

Der Term  $\cos[\psi(s) - \psi_0]$  aus dem Lösungsansatz beschreibt (quasi-periodische) Oszillationen (mit veränderlicher Amplitude und Frequenz), die *Betatron-Oszillationen* genannt werden.

NB:

Die Strahlemittanz  $\varepsilon$  taucht im Amplitudenfaktor der Lösung für ein einzelnes Teilchen auf. D.h., ein Teilchen, welches mit Amplitude  $\sqrt{\varepsilon}$  entlang der Ellipse läuft, definiert die Emittanz für den Teil des gesamten Strahls, der von dieser Ellipse umschlossen wird, also für alle Teilchen, deren Trajektorien die Bedingung

$$\gamma u^2 + 2\alpha u u' + \beta u'^2 \leq \varepsilon$$

erfüllen.

**Strahleinhüllende:**

Um den Teilchenstrahl als Ganzes zu beschreiben, wird durch den Amplitudenfaktor in der allg. Lösung die *Strahleinhüllende* definiert:

$$E(s) = \pm \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)}$$

Die Strahleinhüllende gibt die maximale/minimale Amplitude an, die ein Teilchen annehmen kann, welches im Phasenraum auf der Strahlellipse läuft.

Die Strahleinhüllende ist durch Strahlemittanz  $\varepsilon$  und Betatron-Funktion  $\beta(s)$  bestimmt.

Die Strahlemittanz ist eine Konstante der Bewegung (wg. Liouville-Theorem). Man kann sie als transversale “Temperatur” des Strahls auffassen.

Die Betatron-Funktion reflektiert die externen Kräfte durch die fokussierenden Magnete. Durch das Arrangement der Quadrupolmagnete können spezifische Strahleigenschaften, wie geringer oder großer Strahlquerschnitt an bestimmten Punkten, erzielt werden.

### Betatron-Funktion in Driftstrecke:

Experimente in Kollidern stehen typischerweise in geraden Driftstrecken. Genau am Wechselwirkungspunkt im Experiment soll der Strahlquerschnitt am kleinsten werden, also die Strahltaile auftreten.

Mit der Twiss-Parameter-Transformationsmatrix (vgl. Folie 5.15) kann der Verlauf der Betatron-Funktion um den Wechselwirkungspunkt bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2\ell & \ell^2 \\ 0 & 1 & -\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Aus der obigen Transformationsmatrix folgt:

- $\beta(s) = \beta_0 - 2\alpha_0 s + \gamma_0 s^2$
- $\alpha(s) = \alpha_0 - \gamma_0 s$
- Für Strahltaile (beam waist):  $\alpha(s_w) = 0$

$$\rightarrow \beta(s - s_w) = \beta_w + \frac{(s - s_w)^2}{\beta_w}$$

- Optimales  $\beta_{w,opt}$  für Driftstrecke der Länge  $\pm L$ :

$$\bullet \frac{d\beta}{d\beta_w} = 0 \rightarrow \beta_{w,opt} = L = \beta(0)$$

$$\rightarrow \beta(\pm L) = 2\beta_{w,opt} = 2L$$

NB: Üblicherweise bezeichnet man die Betatron-Funktion am Wechselwirkungspunkt eines Experiments mit  $\beta^*$ .

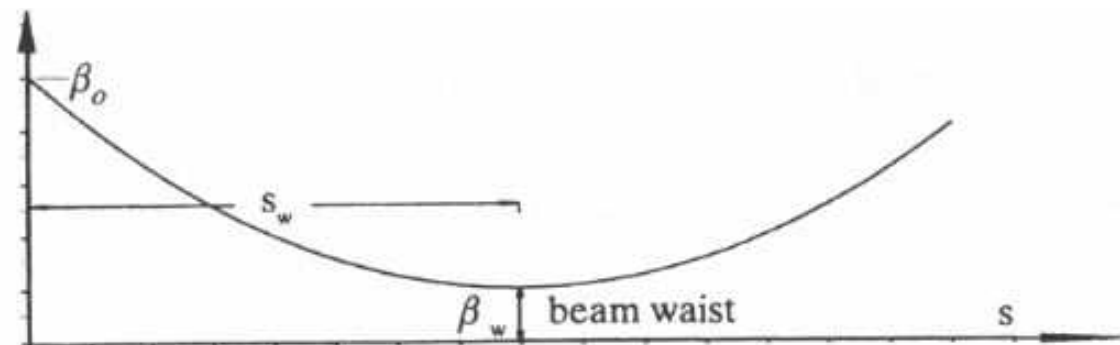


Fig. 5.25. Betatron function in a drift space

## Weglänge und "Momentum compaction"

Die bisherige Betrachtung hat wiederum dispersive Effekte vernachlässigt. Tatsächlich wirkt sich, in linearer Strahldynamik, Dispersion  $D(s)$  auf die Weglänge  $L$  eines Teilchens durch einen Ablenk dipol ( $\kappa = 1/\rho$ ) aus:

$$L = \int (1 + \kappa x) ds.$$

Dabei ist  $x = D(s)\delta$  die horizontale Abweichung von der Sollbahn bei relativer Impulsabweichung  $\delta = \Delta p/p$ .

Die Abweichung  $\Delta L$  von der Soll-Weglänge  $L_0 = \int ds$  ist 
$$\Delta L = \delta \cdot \int \frac{D(s)}{\rho(s)} ds$$

und wird beschrieben durch den "momentum compaction"-Faktor:

$$\alpha_c \equiv \frac{\Delta L/L_0}{\Delta p/p} = \frac{\Delta L/L_0}{\delta} \quad \rightarrow \quad \alpha_c = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \frac{D(s)}{\rho(s)} ds = \left\langle \frac{D(s)}{\rho(s)} \right\rangle$$

Die Flugzeit eines Teilchens der Geschwindigkeit  $v$  für die Strecke  $L$  ist:  $\tau = L/v \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta v}{v}$

Mit  $\Delta L/L = \alpha_c \delta$  und  $p = \gamma m v$

$\rightarrow dv/v = 1/\gamma^2 dp/p$  folgt (NB:  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ):

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = - \left( \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c \right) \frac{dp}{p} \equiv -\eta_c \frac{dp}{p},$$

mit "Momentum compaction":

$$\eta_c = \gamma^{-2} - \alpha_c$$

$\rightarrow$  Kreisbeschleuniger: geänderte Umlauffrequenz  $\omega_r$ :

$$\frac{d\omega_r}{\omega_r} = - \frac{d\tau_r}{\tau_r} = \eta_c \frac{dp}{p}$$

und Übergangsenergie bei  $\eta_c = 0$ :

$$\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}$$

(engl. transition energy)

## Periodische Fokussierungssysteme

- Periodische Fokussierungssysteme
  1. FODO-Struktur
  2. Betatron-Bewegung in periodischen Strukturen
  3. Strahldynamik in geschlossenen periodischen Strukturen
  4. Dispersion in periodischen Strukturen
  5. Beispiel eines Speicherring-Beschleunigers

# FODO-Struktur

Zur Erinnerung: In Betatron schwache Fokussierung durch  $B$ -Feldgradient mit Feldindex  $n$

Problem: geringe rücktreibende Kraft  $\rightarrow$  große Betatron-Oszillationsamplitude  $\rightarrow$  große Apertur

Lösung: *starke Fokussierung* oder *alternierende Gradienten-Fokussierung* (kurz: AG-Fokussierung)

Analogon aus der Optik:

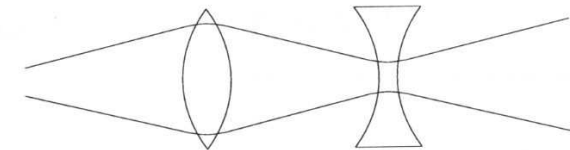
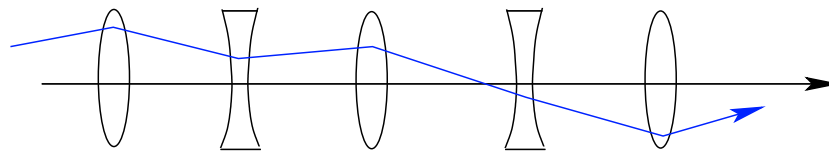


Figure. 5.1 System made of a pair of converging-diverging lenses (doublet).

Abwechselnde Abfolge von Sammell- und Zerstreuungslinsen mit gleichen  $|f|$   $\rightarrow$  Fokussierung!

Für Teilchenstrahlen entspricht dies (QF=horiz. fok. Quadrupol, QD=horiz. defok. Quadrupol):

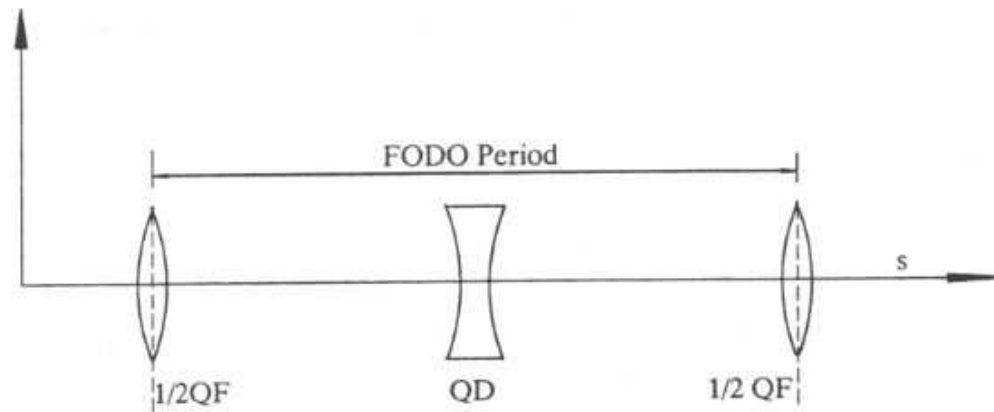
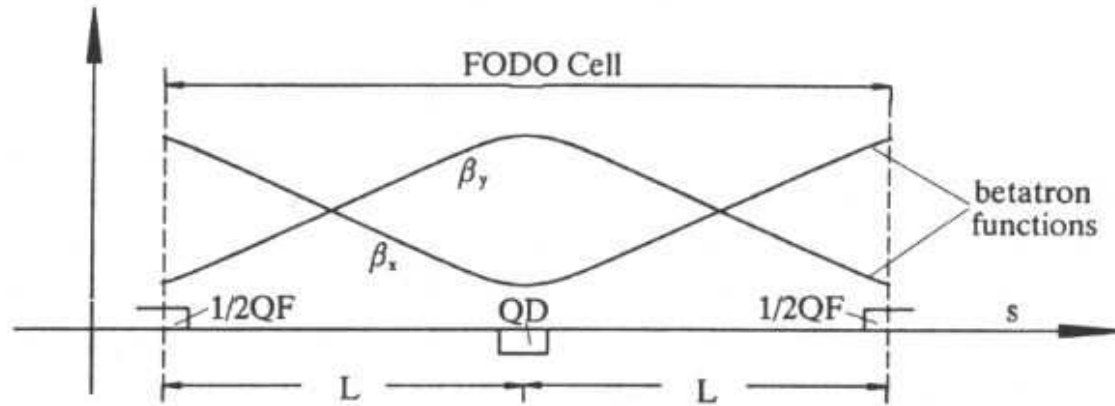


Fig. 6.1. FODO - lattice (QF:focusing quadrupole; QD: defocusing quadrupole)



**FODO-Parameter:**

Betrachte Magnetabfolge:  $\frac{1}{2}QF + \text{Driftstrecke } L + 2 \cdot \frac{1}{2}QD + \text{Driftstrecke } L + \frac{1}{2}QF$



**Fig. 6.2. Periodic betatron functions in a FODO channel**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{f_D} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2L^2/f^2 & 2L \cdot (1 + L/f) \\ -1/f^* & 1 - 2L^2/f^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix}$$

wobei  $f_F = -f_D \equiv f$  und  $1/f^* = 2 \cdot (1 - L/f) \cdot (L/f^2)$

Mit der Transformationsmatrix für die Twiss-Parameter (s. Folie 5.14  $\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & (S'C + SC') & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$ ) folgt

für  $\beta_0 = \beta$ ,  $\alpha_0 = 0$  und  $\gamma_0 = (1 + \alpha_0^2)/\beta_0 = 1/\beta \rightarrow$

$$\beta = \left(1 - 2 \cdot \frac{L^2}{f^2}\right)^2 \cdot \beta + 4L^2 \cdot \left(1 + \frac{L}{f}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta} \quad (\ddagger)$$

Dabei ist  $f > 0$  und  $\beta$  der Wert der Betatron-Funktion im Zentrum des QF-Quadrupols.

**FODO-Parameter** (fortgesetzt):

Lösung von (†) ergibt mit *FODO-Parameter*  $\kappa \equiv \frac{f}{L} > 1$  die Amplitude der Betatron-Fkt. im Zentrum des

- QF-Quadrupols  $\rightarrow \beta^+ = L \cdot \frac{\frac{f}{L} \cdot (\frac{f}{L} + 1)}{\sqrt{\frac{f^2}{L^2} - 1}} \equiv L \cdot \frac{\kappa \cdot (\kappa + 1)}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}$
- QD-Quadrupols  $\rightarrow \beta^- = L \cdot \frac{\frac{f}{L} \cdot (\frac{f}{L} - 1)}{\sqrt{\frac{f^2}{L^2} - 1}} \equiv L \cdot \frac{\kappa \cdot (\kappa - 1)}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}$  (wg.  $f \rightarrow -f$   
bzw.  $\kappa \rightarrow -\kappa$ )

Lösungen gelten für horizontale & vertikale Ebene der jeweils fokussierenden bzw. defokussierenden Quadrupole:

$$\text{QF } (f > 0): \beta_x = \beta^+, \beta_y = \beta^-; \quad \text{QD } (f < 0): \beta_x = \beta^-, \beta_y = \beta^+$$

Für periodische Systeme wichtig: Anschlussbedingung für Betatron-Fkt. von FODO- zu FODO-Zelle !

$\rightarrow \beta^+$  und  $\beta^-$ -Formeln beschreiben jedes periodische Gitter, wenn Anschlussbedingung am Anfang & Ende erfüllt

**Apertur:** für runden Strahl durch  $\beta_x + \beta_y$  bestimmt für flachen Strahl (z.B.  $\beta_x \gg \beta_y$ )

- optimaler FODO-Parameter:  $d(\beta_x + \beta_y)/d\kappa = 0$
- optimaler FODO-Parameter:  $d\beta_x/d\kappa = 0$

$$\rightarrow \kappa_{\text{opt}} = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \kappa_{\text{opt}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$\text{NB: } \beta^\pm \propto L \rightarrow \text{max. Strahldurchmesser in FODO} \propto \sqrt{L}$$



**Betatron-Phase in FODO-Zelle:**

Der Strahltransport wurde durch (vgl. 5.14, 5.16)  $\begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{bmatrix}$  beschrieben.

Mit der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung erhält  $u(s)$  für  $\alpha = \alpha_0 = 0$  und  $\beta = \beta_0$  die Form

$$\boxed{u(s) = u_0 \cos \Phi(s) + u'_0 \beta \sin \Phi(s)} \quad \xrightarrow{\Phi = \int ds/\beta} \quad \boxed{u'(s) = -u_0 \frac{1}{\beta} \sin \Phi(s) + u'_0 \cos \Phi(s)}$$

Also ist  $\begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \beta \sin \Phi \\ -\frac{1}{\beta} \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 - 2L^2/f^2 & 2L \cdot (1 + L/f) \\ -1/f^* & 1 - 2L^2/f^2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \boxed{\cos \Phi = 1 - 2L^2/f^2 = 1 - \frac{2}{\kappa^2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\kappa}} \quad \rightarrow \quad \kappa = f/L > 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{f > L} \quad !$$

d.h. Brennweite eines halben Quadrupols muss größer als der Abstand zum nächsten Quadrupol sein!

**Apertur:** für runden Strahl durch  $\beta_x + \beta_y$  bestimmt

für flachen Strahl (z.B.  $\beta_x \gg \beta_y$ )

- optimaler FODO-Parameter:  $d(\beta_x + \beta_y)/d\kappa = 0$

- optimaler FODO-Parameter:  $d\beta_x/d\kappa = 0$

$$\rightarrow \kappa_{\text{opt}} = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \Phi_{\text{opt}} = 90^\circ$$

$$\rightarrow \kappa_{\text{opt}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad \rightarrow \quad \Phi_{\text{opt}} \approx 76.345^\circ$$

→ Phasenvorschub  $\Phi_{\text{opt}}$  je FODO-Zelle erlaubt kleinste Apertur

## Betatron-Bewegung in periodischen Strukturen

Wenn der Teilchenstrahl in einem kreisförmigen Beschleuniger eine periodische Magnetstruktur immer wieder durchläuft, wird die Frage der Langzeitstabilität bedeutsam.

Eine Strahltransportmatrix  $M = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix}$  ergibt mit  $\det(M - \lambda \text{Id}) = 0$  die Eigenwerte

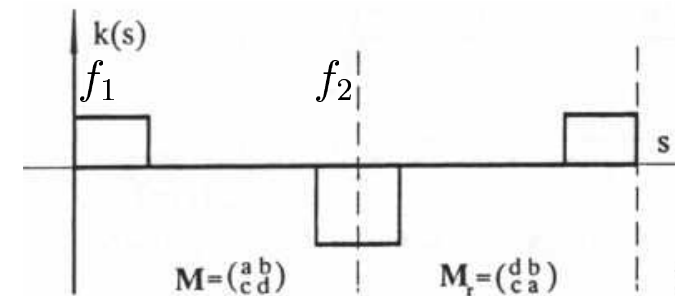
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(C + S') \pm \sqrt{\frac{1}{4}(C + S')^2 - 1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}(C + S')^2 \leq 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{Tr}(M) = |C + S'| \leq 2}$$

Für ein Quadrupoltriplett (vgl. Folie 5.9) gilt die Transportmatrix:

$$M_{tr} = M_r \cdot M = \begin{bmatrix} 1 - 2L/f^* & 2L(1 - L/f_2) \\ -2/f^* \cdot (1 - L/f_1) & 1 - 2L/f^* \end{bmatrix}$$

Dabei beschreibt  $M = \begin{bmatrix} 1 - L/f_1 & L \\ -1/f^* & 1 - L/f_2 \end{bmatrix}$  das Quadrupol-Dublett

(vgl. 5.8) mit  $\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}$ .



⇒ Stabilitätskriterium:

$$\boxed{\text{Tr}(M_{tr}) = \left| 2 - \frac{4L}{f^*} \right| \leq 2} \quad \rightarrow \quad \boxed{0 \leq \frac{L}{f^*} \leq 1}$$

## Stabilitäts- bzw. “Necktie”-Diagramm

Stabilitätskriterium:

$$0 \leq \frac{L}{f^*} \leq 1$$

Mit  $u \equiv L/f_1$ ,  $v \equiv L/f_2$  und  $\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2} \rightarrow 0 \leq u + v - uv \leq 1$

Daraus ergibt sich das Stabilitätsdiagramm:

$(|u| \leq 1$  und  $|v| \leq 1$  und  $|v| \leq |u|/(|u| - 1)$  und  
(mit  $u \leftrightarrow v$ )  $|v| \geq |u|/(|u| + 1)$ )

Aufgrund der Form:

“Necktie”- oder “Krawatten”-Diagramm

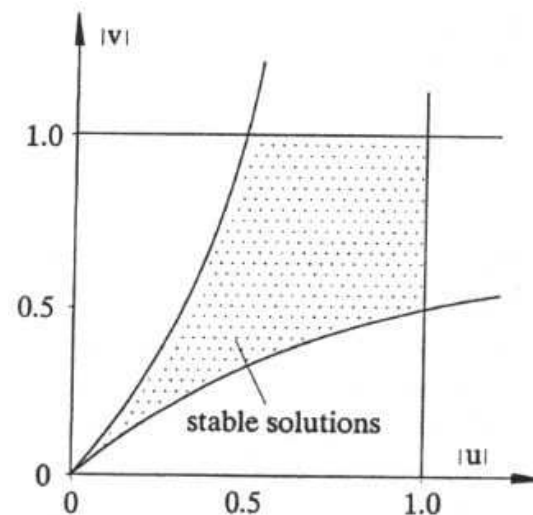


Fig. 6.5. Necktie diagram in thin lens approximation

Diese Form gilt für die “Dünne Linsen”-Approximation, also  $f \gg \ell$ .

Betrachtung der ungenäherten Transportmatrixen zeigt i.W. das gleiche Bild, Begrenzungen des Stabilitätsdiagramms sind jedoch leicht gekrümmt.

## Reale Beispiele für Beschleuniger mit periodischen Magnetstrukturen:

Table 6.1. FODO cell parameters

example	# 1	# 2	# 3	# 4
energy, $E(\text{GeV})$	10	50	4	20,000
half cell length, $L(\text{m})$	6.0	2.6	3.6	114.25
quadrupole length, $\ell_q(\text{m})$	0.705	1.243	0.15	3.64
bending radius, $\rho(\text{m})$	27.12	279.38	152.8	10,087
bending magnet length, $\ell_b(\text{m})$	3.550	2.486	2.50	99.24
phase advance per cell, $\psi$	101.4	108.0	135.0	90.0
quadrupole strength <sup>†</sup> , $k(\text{m}^{-2})$	0.183	0.250	1.711	0.002
lattice type* (FODO)	sf	cf	sf	sf

<sup>†</sup> these parameters will be determined in problem 6.1

\* sf: separated function; cf: combined function lattice.

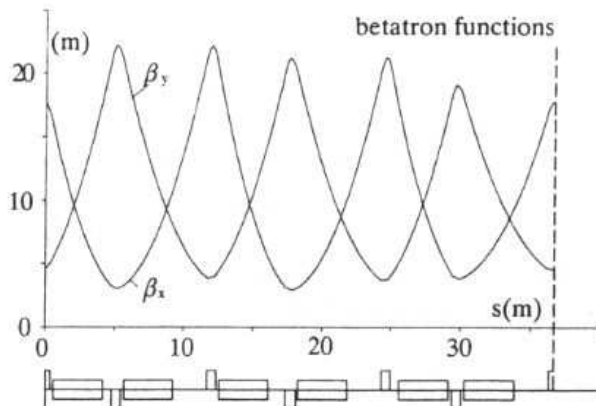


Fig. 6.6. FODO lattice for one octant of a synchrotron [6.2,3] (example #1 in Table 6.1)

$$\dagger k = 1/f\ell_q, f = L\kappa, 1/\kappa = \sin(\Psi/2) \rightarrow k = \sin(\Psi/2)/L\ell_q$$

### #1 DORIS-Synchrotron ( $e^+e^-$ )

- Unteres Bild: FODO-Struktur und Betatron-Funktionen  $\beta_x$  und  $\beta_y$
- NB: Kleine Abweichungen von regelmäßiger FODO-Struktur

→ Platz für andere Strahlkomponenten (z.B. Sextupole, etc.)

→ nur kleine Störungen in periodischer Betatron-Funktion

### #2 Strahltransport mit geringer Krümmung vom SLC-Linearbeschleuniger ( $e^+e^-$ ) zur Kollisionszone

### #3 FODO-Struktur mit sehr geringer Emittanz für theoretische Studien der Strahlstabilität

### #4 FODO-Struktur des SSC-pp-Colliders (nie realisiert)

## Strahldynamik in geschlossenen periodischen Strukturen

Nochmals sei die Bewegungs-DGL betrachtet (s. Folie 5.16)  
und die Periodizität mit Länge  $L_p$  der Magnetstrukturen beachtet:

$$\begin{aligned} u'' + K(s) \cdot u &= 0 \\ K(s) &= K(s + L_p) \end{aligned}$$

Wg. der Periodizität von  $K(s)$  heisst diese Bewegungs-DGL: *Hillsche Bewegungs-Differentialgleichung*  
(Hill war Astronom im 19. Jahrhundert und hat die Bewegung von Teilchen in periodischen Feldern untersucht.)

Lösungen der Hillschen-DGL haben Eigenschaften, die durch die *Floquet-Theoreme* beschrieben werden:

- Lösungen sind quasiperiodisch
- $\mu$  ist ein charakteristischer Koeffizient:  
 $\cos \mu \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(M_{s \rightarrow s+L_p})$
- zwei unabhängige Lösungen:  
 $u_1(s) = w(s) \cdot \exp(i\mu s/L_p),$   
 $u_2(s) = w^*(s) \cdot \exp(-i\mu s/L_p),$
- Spur der Transportmatrix unabhängig von  $s$ :  
 $\text{Tr}(M_{s \rightarrow s+L_p}) \neq f(s)$
- $w^*(s)$  ist komplex-konjugiert zu  $w(s)$ .  
Strahldynamik: Nur reelle  $w(s)$ , d.h.  $w^*(s) = w(s)$
- $\det(M_{s \rightarrow s+L_p}) = 1$
- $w$  ist eindeutig und periodisch:  $w(s + L_p) = w(s)$
- Stabilitätskriterium ist erfüllt:  
 $\frac{1}{2} \text{Tr}(M_{s \rightarrow s+L_p}) < 1$

Vergleich mit Lösung  $u(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)} \cdot \cos[\psi(s) - \psi_0]$  (s. Folie 5.16)  $\rightarrow \mu = \psi, w(s) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\beta(s)}$

**Transportmatrix für vollständigen Umlauf:**

Allg. Lösung für Hillsche Bewegungs-DGL:

$$u(s) = a\sqrt{\beta} \cos \psi + b\sqrt{\beta} \sin \psi$$

Aus Startwerte bei  $s = 0$ :  $\left( \begin{array}{l} \psi = 0, \quad \beta = \beta_0, \quad \alpha = \alpha_0, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0 \end{array} \right) \rightarrow a = \frac{u_0}{\sqrt{\beta_0}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\beta_0} u'_0 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{\beta_0}} u_0$

Mit  $\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix}$  und  $\alpha = -\beta'/2$ ,  $\psi' = 1/\beta$  folgt:

$$\begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \psi + \alpha_0 \sin \psi) & \sqrt{\beta\beta_0} \sin \psi \\ \frac{\alpha_0 - \alpha}{\sqrt{\beta\beta_0}} \cos \psi - \frac{1 + \alpha\alpha_0}{\sqrt{\beta\beta_0}} \sin \psi & \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \psi - \alpha \sin \psi) \end{bmatrix}$$

Ausserdem *Betatron-Tune*:

$$Q_{x,y} \equiv \frac{\psi(\text{Umlauf})}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta_{x,y}(s)}$$

Von Bedeutung:  
nicht-integer Anteil  
→ Resonanzen

⇒ Vollständiger Umlauf (zur Vereinfachung:  $\beta'_0 = -2\alpha_0 = 0$ ) →  $\psi = 2\pi \cdot Q$ ,  $\beta = \beta_0$

$$M_{\text{Umlauf}} = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi Q & \beta_0 \sin 2\pi Q \\ -\frac{1}{\beta_0} \sin 2\pi Q & \cos 2\pi Q \end{bmatrix}$$

mit  $\det M_{\text{Umlauf}} = 1$  und  
 $\text{Tr} M_{\text{Umlauf}} = 2 \cos 2\pi Q$ .

## Dispersion in periodischen Strukturen

Bisher:

- nur Teilchenstrahlen mit Sollenergie/-impuls → keine chromatischen Effekte

Chromatische Effekte:

- Berücksichtigung der Dipole (zur Vereinfachung bleiben Dipol-Endfeldeffekte unberücksichtigt)
- Dispersion  $\propto$  Energie-/Impulsstreuung im Strahl (in linearer Näherung)
- Beschreibung der Dispersion durch Matrixformalismus:

Abweichung  $u_\delta, u'_\delta$  vom Sollorbit durch Impulsabweichung  $\delta$  aus Transformationsmatrix

$$\rightarrow \begin{bmatrix} u(s) \\ u'(s) \\ \delta \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \\ \delta \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} u(s_0) = 0 \\ u'(s_0) = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} u_\delta(s) = D(s) \cdot \delta \\ u'_\delta(s) = D'(s) \cdot \delta \end{cases}$$

→ Mit Betatron-Oszillationsamplituden  $u(s_0), u'(s_0) = 0$  und  $\delta = 1$

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} D(s_0) \\ D'(s_0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Dispersion-Transformationsmatrizen:**

- Z.B. für Sektormagnet der Länge  $L$ :  $M_{\text{Sektor}} = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{L}{\rho} & \rho \sin \frac{L}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{L}{\rho} & \cos \frac{L}{\rho} \end{bmatrix}$

- Dispersionsrelation (vgl. Folie 4.20):  $D(s) = \int_0^s \frac{1}{\rho(\tilde{s})} [S(\tilde{s})C(\tilde{s}) - C(\tilde{s})S(\tilde{s})] d\tilde{s}$  und  $\rho(L) = \rho_0 = \text{const.}$

$$\rightarrow \begin{cases} D(L) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^L \left[ \rho_0 \sin \frac{L}{\rho_0} \cos \frac{\tilde{s}}{\rho_0} - \cos \frac{L}{\rho_0} \cdot \rho_0 \sin \frac{\tilde{s}}{\rho_0} \right] d\tilde{s} = \rho_0 \left( 1 - \cos \frac{L}{\rho_0} \right) \\ D'(L) = \dots = \sin \frac{L}{\rho_0} \end{cases}$$

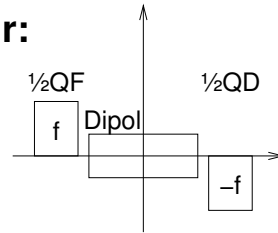
- mit Näherung  $L \ll \rho_0$  (nur Terme linear in  $1/\rho_0$ )

$$\rightarrow M_{\text{Sektor}} = \begin{bmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{L}{\rho_0} & \rho_0 \sin \frac{L}{\rho_0} & \rho_0 (1 - \cos \frac{L}{\rho_0}) \\ -\frac{1}{\rho_0} \sin \frac{L}{\rho_0} & \cos \frac{L}{\rho_0} & \sin \frac{L}{\rho_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L \ll \rho_0} \begin{bmatrix} 1 & L & L^2/2\rho_0 \\ 0 & 1 & L/\rho_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**Dispersion in FODO-Struktur:**

Betrachte FODO-Zelle aus



mit Annahme: FODO-Zelllänge  $L \approx$  Dipollänge

Dafür gilt:

$$M_{1/2\text{FODO}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1/2\text{QD} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & L & L^2/2\rho_0 \\ 0 & 1 & L/\rho_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} 1/2\text{QF} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & = & \begin{bmatrix} 1 - L/f & L & L^2/2\rho_0 \\ -L^2/f & 1 + L/f & L/\rho_0 \cdot (1 + L/2f) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Gesucht: • Periodische Lösung für Dispersionsfunktion ( $\hat{=}$  Anschlussbedingung)

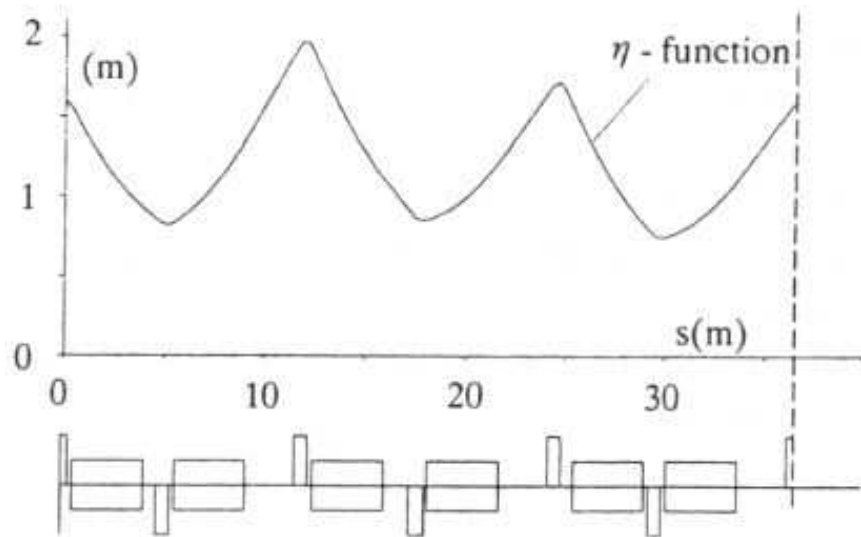
(**NB:** Dispersionsfunktion  $D(s)$  i.A. nicht-periodisch; periodische Dispersionsfunktion  $\eta(s)$ )

▷ im Zentrum der FODO-Zelle: Dispersion(von links) = Dispersion(von rechts)

→ Dispersionsfunktion bei  $\eta(s = 0)$  symmetrisch →  $\eta' = 0$  im Zentrum der FODO-Zelle

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \eta^- \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} M_{1/2\text{FODO}} \cdot \begin{bmatrix} \eta^+ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \eta^- = \left(1 - \frac{L}{f}\right) \eta^+ + \frac{L^2}{2\rho_0} \\ 0 = -\frac{L}{f^2} \eta^+ + \frac{L}{\rho_0} \cdot \left(1 + \frac{L}{2f}\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \text{Dispersionsfkt. } \eta^+ \text{ bei} \\ 1/2\text{QF und } \eta^- \text{ bei } 1/2\text{QD:} \end{matrix} \begin{cases} \eta^+ = \frac{f^2}{\rho_0} \left(1 + \frac{L}{2f}\right) = \frac{L^2}{2\rho_0} \kappa (2\kappa + 1) \\ \eta^- = \frac{f^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{L}{2f}\right) = \frac{L^2}{2\rho_0} \kappa (2\kappa - 1) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{mit FODO-Para-} \\ \text{meter } \kappa = f/L \end{matrix}$$

**Beispiel für Dispersionsfunktion:**DORIS- $e^+e^-$ -Beschleuniger am DESY**Fig. 6.9.** Dispersion function in FODO cells (example #1 in Tab. 6.1)

- $\kappa = 1/\sin(\Psi/2) \stackrel{\Psi=101.4^\circ}{\approx} 1.29$

- $L = 6$  m

- $\rho_0 \approx 27.12$  m

$$\rightarrow \eta^+ = \frac{L^2}{2\rho_0} \kappa (2\kappa + 1) \approx 3.07 \text{ m}$$

$$\rightarrow \eta^- = \frac{L^2}{2\rho_0} \kappa (2\kappa - 1) \approx 1.36 \text{ m}$$

**NB:** leicht unsymmetrische Magnetanordnung  $\rightarrow$  kleinere  $\eta$

## Achromatische Magnetanordnungen zur Aufhebung der Dispersion:

Ähnlich wie bei hochwertigen Kameraobjektiven kann durch geschickte Anordnung von Ablenk-, Fokus.- und Defokus.-Magneten eine dispersionsfreie Strahlablenkung erreicht werden. (NB: Innerhalb der Anordnung kann Dispersion auftreten, außerhalb verschwindet  $\eta$ )

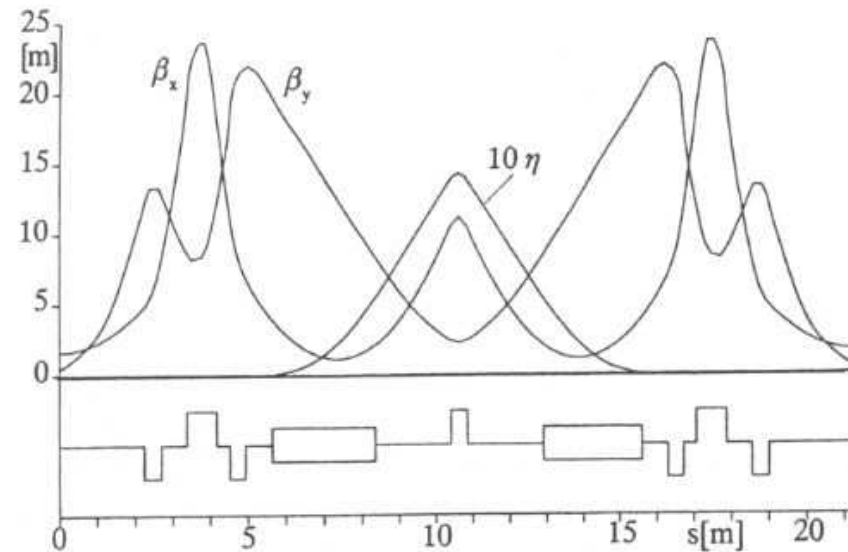


Fig. 5.28. Double bend achromat [5.12]

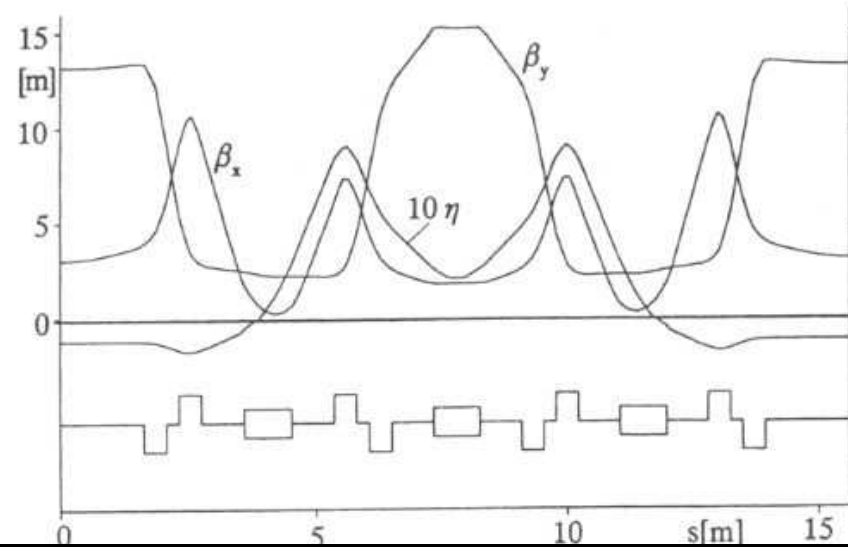


Fig. 5.29. Triple bend achromat [5.13]

**Dispersion bei vollständigem Umlauf:**

Transformation der Dispersionsfunktion bei vollständigem Umlauf bedeutet:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M_{\text{Umlauf}} \cdot \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left( M_{\text{Umlauf}}^{2 \times 2} \right) & D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit  $\det M_{\text{Umlauf}}^{2 \times 2} = CS' - C'S = 1$  und  $\text{Tr} M_{\text{Umlauf}}^{2 \times 2} = C + S' = 2 \cos 2\pi Q$  (vgl. Folie 6.10)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\eta = \frac{(1 - S)D + SD'}{2 - (C + S')} = \frac{(1 - S)D + SD'}{4 \sin^2 \pi Q}} \quad \text{und} \quad \boxed{\eta' = \frac{C'D + (1 - C)D'}{4 \sin^2 \pi Q}}$$

**Beachte:** Integerwerte für Tune  $Q$  vermeiden!

**Transformation der Dispersionsfunktion:**

Kenntnis von  $\eta_0$  und  $\eta'_0$  an einem Punkt  $s_0$  im Beschleunigerring

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} \eta(s) \\ \eta'(s) \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M_{s_0 \rightarrow s} \cdot \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta'_0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \text{für beliebigen Ort } s$$

## Beispiel eines Speicherring-Beschleunigers

Ein Quadrant eines 3.5 GeV-Synchrotron-Rings

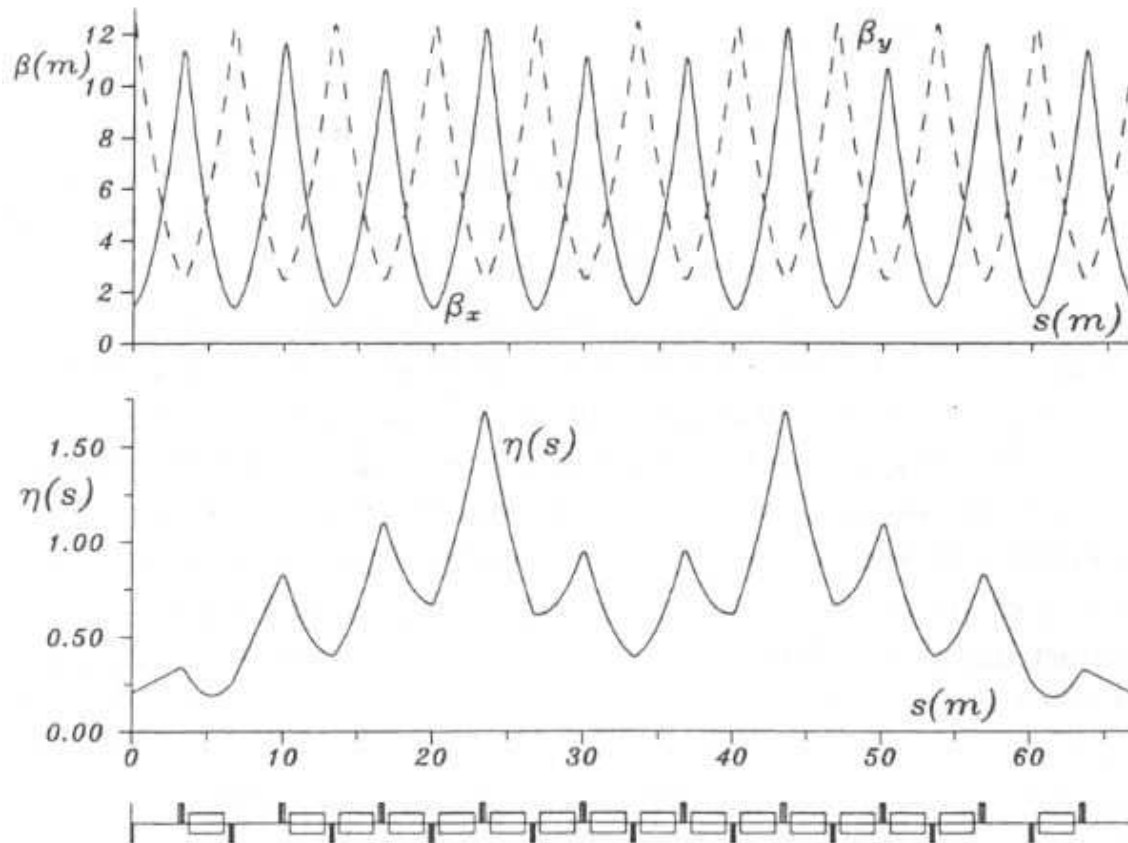


Fig. 6.11. Typical FODO lattice for a separated function synchrotron

Drei unterschiedliche Grundstrukturen:

- 7 FODO-Halbzellen
  - 2 Halbzellen (ohne Dipole) zur Anpassung der Dispersionsfunktion  $\eta$
  - 1 Halbzelle für die Installation weitere Beschleunigerelementen
- ▷ Gesamte Struktur benutzt gleichartige FODO-Zellen mit nur QF und QD Quadrupolen
- ▷ Betatron-Funktionen insensitive auf Vorhandensein oder Fehlen von Dipol-Magneten
- ▷ Auslassen von Dipol-Magneten → gerade Stücke (z.B. für Strahldiagnostik, Injektion-/Extraktionsmagnete, Experimente)

Für die Konstruktion eines Beschleunigers aus FODO-Strukturen ist zu beachten:

- Anpassung zwischen FODO-Strukturen erfordert:

$$(\beta_x, \beta'_x, \beta_y, \beta'_y, \eta, \eta')_1 = (\beta_x, \beta'_x, \beta_y, \beta'_y, \eta, \eta')_2$$

- ▷ Phasenraumellipse am Ende von Struktur<sub>1</sub>  $\longleftrightarrow$  Akzeptanz-Phasenraumellipse am Anfang von Struktur<sub>2</sub>  
(bei gegenläufigen Teilchenstrahlen gleiche Bedingung für beide Richtungen)

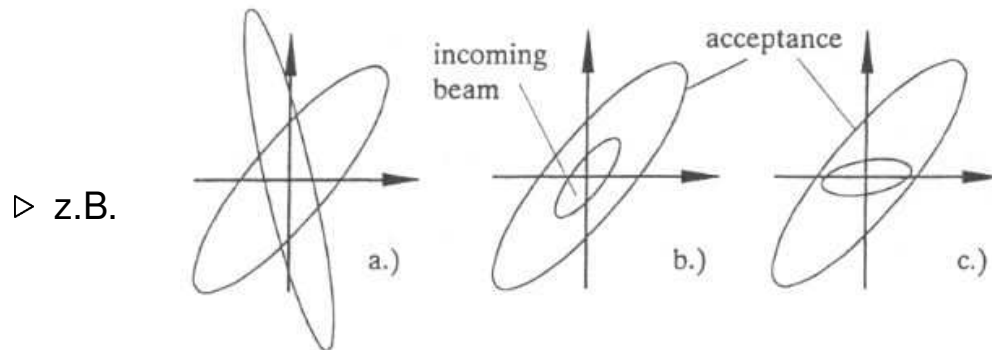


Fig. 6.12. Matching conditions in phase space; a) mismatch, b) perfect match, c) efficient match

- Protonen&Ionen benötigen perfekte Anpassung (Teilbild b)
- Elektronen&Positronen: volle Akzeptanz der Emittanz, neue Phasenraumellipse schnell durch Synchrotronstrahlungs-Dämpfung erreicht (Teilbild c)
- aber Randbedingungen durch:
  - Strahlkollisionsorte mit kleinem  $\beta^*$  ( $\rightarrow$  Strahlgröße) und verschwindender Dispersion  $\eta$  ( $\rightarrow$  Energiestreuung)
  - gerade Stücke für Hochfrequenz-Resonatoren, Injektions-/Extraktions-Magnete, Strahl-Diagnostik (z.B. Strahlpositionsmonitore, etc.)

- Anpassungs- wie Randbedingungen erfordern gezielte Beeinflussung der Strahlparameter
- ▷ z.B. Dispersions-Anpassung in einem Emittanz-Dämpfungsring, mit Zielvorgabe  $\eta, \eta' = 0$

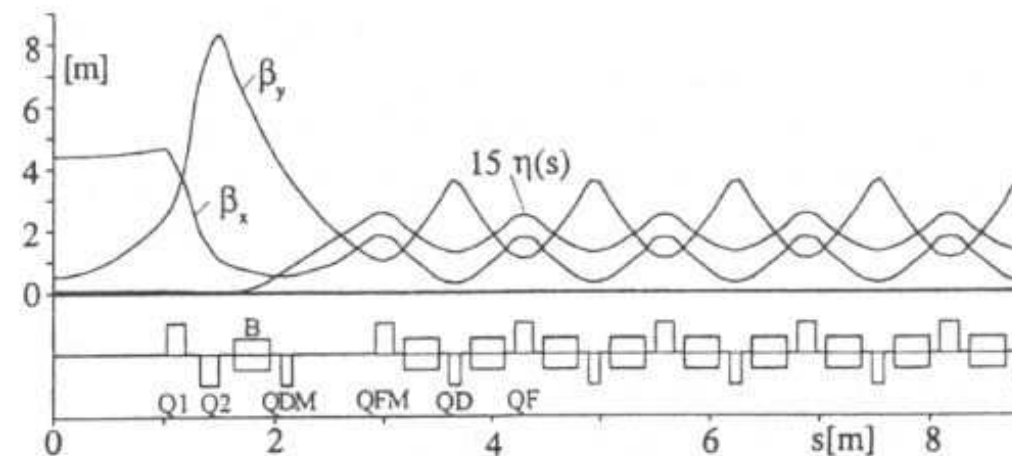


Fig. 6.13. Lattice for a 1.2 GeV low emittance damping ring

- gleichförmige Oszillation der Dispersion  $\eta$  in FODO-Strukturen aufgrund perfekter Dispersions-Anpassung
- ▷ Dispersions-Anpassung beeinflusst Betatron-Funktionen (v.a.  $\beta_y$ )
- Besondere Anpassung für Betatron-Funktion erforderlich
- ▷ Dispersionsfreier Abschnitt mit  $\eta = 0, \eta' = 0$  durch *QDM* und *QFM*
- Betatron-Funktionen in dispersionsfreiem Abschnitt durch separate Quadrupole ( $Q_1, Q_2$ ) anpassen
- Minimierung der vertikalen Betatron-Funktion  $\beta_y$  am Kollisionspunkt ( $s = 0$ )

**“Insertions”:**

Für Kollisionpunkte werden gerade Stücke benötigt:

- “Magnet Free Insertion” durch Auslassen von Dipol-Magneten
  - “Low Beta Insertion” an Collider
    - ▷ lange gerade Stücke (meist > Dipollänge) für Experimente erforderlich
    - zusätzliche Quadrupole zur Minimierung von  $\beta^*$  und  $\eta$  am Kollisionpunkt
    - große Werte der Betatron-Funktion in geraden Stücken (Aperturgröße)
- (gerades Stück:  $\beta(s) = \beta^* + L_{ins}^2/\beta^*$ )

Tevatron-pp̄-Beschleuniger:

$$\beta^* = 0.35 \text{ m}; \beta_{max} = 1254 \text{ m}; \text{Betatron tunes } Q_{x,y} = .585, .575$$

$$\beta^* = 0.35\text{m}; \beta_{max} = 1254\text{m}; Q_{x,y} = .585, .575$$

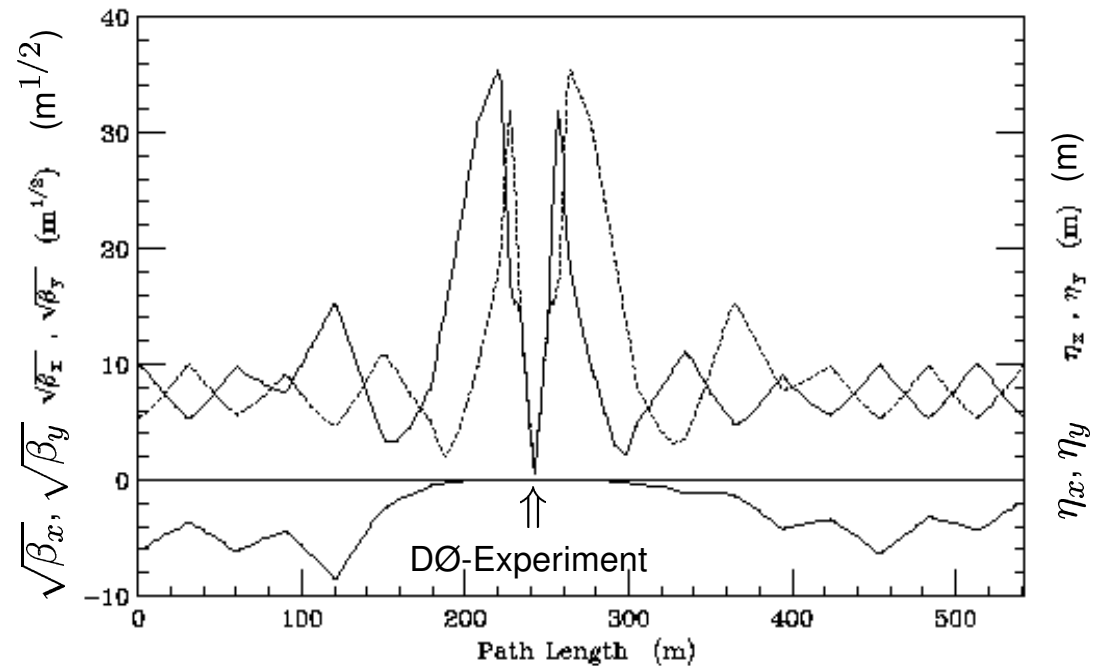
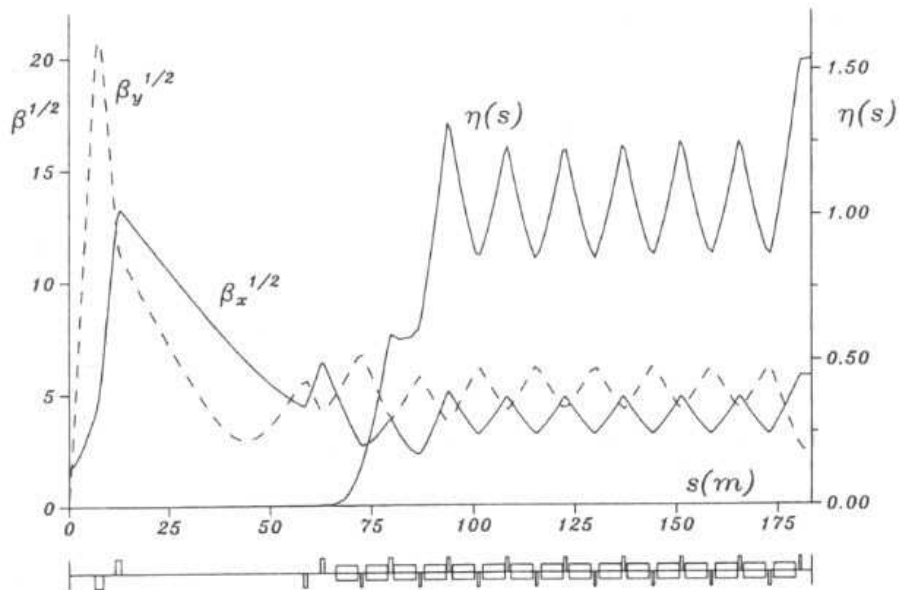


Figure 6.14. Lattice functions at B0 and D0 for the Dispersionless IR Solution a) with out the low beta squeeze (lattice JJ01) and b) with the low beta squeeze (lattice JJ15C.)



**Magnetstruktur im PEP-Beschleuniger:**



**Fig. 6.19.** Lattice functions in the PEP storage ring for one half of six symmetric superperiods. The collision point and low beta section is at  $s = 0$  and the arc sections consist of FODO cells.

**Table 6.2.** PEP lattice parameters

energy, $E(\text{GeV})$	15.0	beam current, $I(\text{mA})$	100
circumference, $C(\text{m})$	2200	superperiodicity,	6
beam emittance, $\epsilon_x(\text{mm mrad})$	0.125	energy spread, $\sigma_E/E_0$	0.0010
tunes, $\nu_x/\nu_y$	21.25/18.19	beta function at IP, $\beta_{x,y}^*(\text{m})$	3.00/0.11
nat. chromaticity, $\xi_{ox}/\xi_{oy}$	-36.21/-99.47	momentum compaction factor,	0.00257
energy loss/turn, $U_0(\text{MeV})$	26.98	radiation power, $P_s(\text{MW})$	2.698
accelerating voltage, $V_{rf}(\text{MV})$	39.43	synchrotron tune, $\nu_s$	0.0451
FODO parameters:			
cell length, $L(\text{m})$	14.4	phase/cell, $\psi_x/\psi_y(\text{deg})$	56.016/31.925
bending radius, $\rho(\text{m})$	165.5	acceptance, $A_x/A_y(\text{mm-mrad})$	29.88/11.01

- PEP=Positron Electron Project (am SLAC)
- Hälfte einer von 6 symmetrischen Struktur-Superperioden dargestellt
- Magnetfreier Bereich von 20 m
- Betatron-Funktion-Designwert am Kollisionspunkt:  
 $\beta_y^* \approx 5 \text{ cm}$
- Kollisionsbereich  $\rightarrow$  Übergangsbereich zur Betatron- und Dispersions-Anpassung
- Am Symmetriepunkt im Bogen: kurzes magnetfreies Stück für Strahldiagnostik und -manipulation
- FODO-Gitter wurde aus Kostengründen nicht perfekt angepasst (Zahl der unabhängigen Stromversorgungen)

## Addendum zu: Periodische Fokussierungssysteme

Die Begriffe *Betatron-Funktion*, *Dispersion* und *Emittanz* spielen in der Beschleunigerpraxis eine wichtige Rolle. Letztlich geht aus den transversalen Betatron-Funktionen und den zugehörigen Emittanzen eine für die Experimente am Beschleuniger unverzichtbare Größe hervor: *Luminosität*.

Die Luminosität (sinngemäß etwa: Leuchtstärke) ist die Proportionalitätskonstante, die den (theoretisch berechneten) Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  einer Reaktion mit der im Experiment beobachtbaren Reaktionsrate  $\dot{N}$  verknüpft.

Im Vorgriff auf Abschnitt 10 soll im Folgenden kurz der Begriff der Luminosität und die Messung von Luminosität durch Bestimmung der Betatron-Funktion und der Emittanz am Beispiel des Proton-Antiproton-Beschleunigers Tevatron wie auch des Proton-Proton-Beschleunigers LHC vorgestellt werden:

1. Luminosität
2. Messung der Luminosität am Beschleuniger

Neben diesen Methoden, die Luminosität aus den Beschleuniger-Parametern zu bestimmen, werden zusätzlich spezielle Detektoren in den großen Experimenten eingesetzt. Diese Detektoren messen die Reaktionsrate von besonders gut bekannten oder berechenbaren Reaktionen, sodass aus Rate und Wirkungsquerschnitt die Luminosität auf alternative Weise mitunter wesentlich genauer als aus den Beschleuniger-Parametern ermittelt werden kann.

# Luminosität

• Ereignisrate:  $\dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma$

$\sigma$ : Wirkungsquerschnitt

$\mathcal{L}$ : Luminosität

• Luminosität:

$$\mathcal{L} = f \frac{n_1 n_2}{4\pi \sigma_x \sigma_y}$$

$f$ : Kollisionsfrequenz

$n_i$ : Teilchenzahl in kollidierenden Paketen

$\sigma_u$ : horiz./vert. Strahlgröße (Ellipsenhauptachse  $u = x, y$ )

$\varepsilon = \pi u u'$ : Emittanz (Fläche der Phasenraumellipse)

• Strahlgröße:

$$\sigma_u = \sqrt{\varepsilon_u \beta_u^* / \pi}$$

$\beta_u^* = u / u'$ : Betatronamplitude am Ww-Punkt

( $u'$ : Winkel bzgl. Strahlachse)

• Phasenraumellipse:

Gaussprofil der Teilchenstrahls

(hier um Winkel  $\varphi$  gedreht dargestellt, wobei  $\tan 2\varphi = 2\alpha / (\gamma - \beta)$ ).

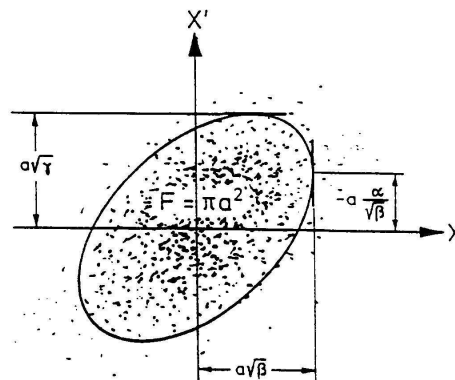
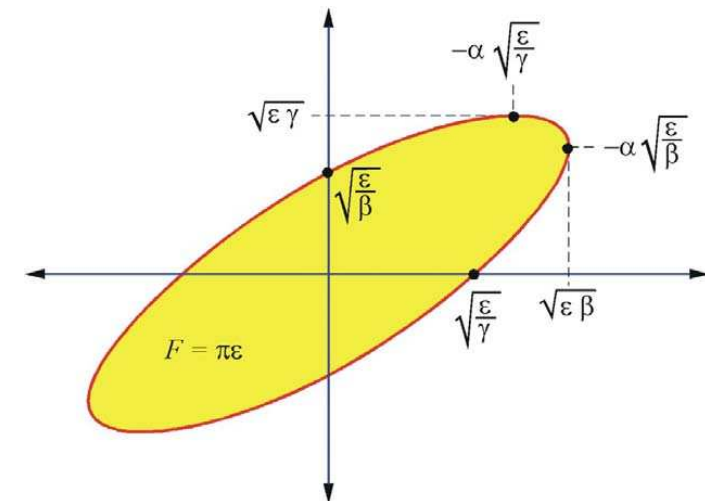
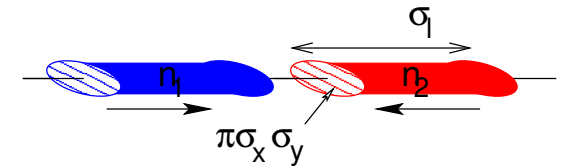


Figure 32: A particle beam is often reasonably well described by a two dimensional Gaussian distribution in phase space. The lines of constant phase-space density are then ellipses. Since the phase-space density decreases slowly with amplitude, the phase-space area containing all particles might be hard to determine (experimentally as well as theoretically). Also, it is not the quantity relevant for most of the applications. Therefore, the emittance is defined as  $1/\pi$  times the phase-space area containing a certain fraction of the particles (e.g. 90 %).



### Luminosität an (Anti-)Protonbeschleunigern:

$$\mathcal{L} = f \frac{n_1 n_2}{4\sqrt{\beta_x^* \varepsilon_x \beta_y^* \varepsilon_y}}$$

Vereinfachung: runde Teilchenstrahlen, d.h.  $\beta^* \equiv \beta_x^* = \beta_y^*$ ,  $\varepsilon \equiv \varepsilon_x = \varepsilon_y \longrightarrow \sigma_x \sigma_y = \beta^* \varepsilon$

Jedoch: Unterscheidung für Protonen (p) und Antiprotonen ( $\bar{p}$ )  $\rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_p + \varepsilon_{\bar{p}})$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = f \frac{n_p n_{\bar{p}}}{2\beta^* \cdot (\varepsilon_p + \varepsilon_{\bar{p}})} \cdot H(\sigma_l/\beta^*)$$

“Hourglass“-Faktor  $H(\sigma_l/\beta^*)$  trägt Bunchlänge (Gaussprofil mit  $\sigma_l$ ) Rechnung

Weitere Ersetzungen für praktische Berechnung:

- $f \cdot n_p n_{\bar{p}} = f_{\text{rev}} B \cdot N_p N_{\bar{p}}$  mit Umlauffrequenz  $f_{\text{rev}}$ , Anzahl der Bunche  $B$  und Zahl der Teilchen je Bunch  $N_i$
- $\varepsilon_{i,N95} = (6\beta_r \gamma_r) \cdot \varepsilon_i$  mit relativistischem Lorentz- $\beta$  und  $-\gamma$  als so gen. 95% normierte Emittanz für  $i = p, \bar{p}$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = f_{\text{rev}} B \cdot \frac{N_p N_{\bar{p}} \cdot (6\beta_r \gamma_r)}{2\beta^* \cdot (\varepsilon_{p,N95} + \varepsilon_{\bar{p},N95})} \cdot H(\sigma_l/\beta^*) \cdot 10^{25} / \text{cm}^2 \text{s}$$

mit  $f_{\text{rev}}$  in kHz,  $\beta^*$  in cm,  $N_{p,\bar{p}}$  in  $10^9$  und  $\varepsilon_{i,N95}$  in mm·mrad

**Beispiel Tevatron:**

Zielwerte im Run II für 2003:

$$\mathcal{L} = f_{\text{rev}} B \cdot \frac{N_p N_{\bar{p}} \cdot (6\beta_r \gamma_r)}{2\beta^* \cdot (\varepsilon_{p,N95} + \varepsilon_{\bar{p},N95})} \cdot H(\sigma_l/\beta^*) \cdot 10^{25} / \text{cm}^2 \text{s}$$

Parameter	Wert	Einheiten
Umlauffrequenz $f_{\text{rev}}$	47.7	kHz
Bunchanzahl $B \times B$	$36 \times 36$	
Protonen/Bunch	240	$10^9$
Antiprotonen/Bunch	31	$10^9$
Strahlenergie	980	GeV
$\rightarrow \beta_r \gamma_r \approx 980/m_{\text{Proton}}$	1045	
$\beta^*$ am Ww.-Punkt	35	cm
Proton-Emittanz $\varepsilon_{N95}$	$20\pi$	mm·mrad
Antiproton-Emittanz $\varepsilon_{N95}$	$15\pi$	mm·mrad
Bunchlänge $\sigma_l$	0.54	m
$\rightarrow$ "Hourglass"-Faktor $H$	0.6 ... 0.7	
$\Rightarrow$ <b>Typ. Luminosität <math>\mathcal{L}</math></b>	<b><math>6.6 \cdot 10^{31}</math></b>	<b><math>\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}</math></b>
Integrierte Luminosität	12	$\text{pb}^{-1}/\text{Woche}$
(ca. 33% Effizienz wg. Füll- & Beschleunigungszeiten, Intensitätsabnahme $\propto e^{-t/15\text{h}}$ , etc.)		

## Messung der Luminosität am Beschleuniger

Die genaue Messung der Luminosität bzw. der zur Berechnung erforderlichen Parameter ist in der Praxis schwierig! Insbesondere weil die Luminosität für die Kollisionen am Wechselwirkungspunkt, wo neben dem Detektor kein Platz für Strahlungsmessgeräte bleibt, gesucht ist.

Typische Methode für Beschleuniger  $i = p, \bar{p}$ :

- Messung von Strahlströmen  $I_i = N_i \cdot e \cdot f_{\text{rev}}$  (Elementarladung  $e$ )
- Messung der Strahlgrößen  $\sigma_{x,y,l}$

→ am Ort der Messung (i.A.  $\neq$  Ww.-Punkt!) gilt: 
$$\mathcal{L} = \frac{I_p \cdot I_{\bar{p}}}{4\pi f_{\text{rev}} B e^2 \sigma_x \sigma_y}$$

→ Berechnung von  $\beta$  und  $\varepsilon_{i,N95}$  am Ort der Messung

- Umrechnung von  $\beta$  auf  $\beta^*$  (am Ww.-Pkt.) mithilfe der Abbildungsmatrizen für Ablenk- und Fokussierungsmagnete

→ am Ww.-Punkt: 
$$\mathcal{L} = \frac{I_p \cdot I_{\bar{p}} \cdot (6\beta_r \gamma_r)}{2f_{\text{rev}} B e^2 \cdot \beta^* \cdot (\varepsilon_{p,N95} + \varepsilon_{\bar{p},N95})} \cdot H(\sigma_l / \beta^*)$$

- Überwachung der Frontalkollision der Strahlen durch Strahlpositionsmonitore (BPM) nahe den Experimenten

Erreichbare Genauigkeit: ca. 5-10%

## Illustration der Luminositätsbestimmung am Tevatron:

### 1. Strahlstrom-Messung

**Sample Bunch Display (SBD)** misst für jeden Bunch den Spiegelstrom, den der Bunch induziert

(Spiegelstrom  $\propto$  Strom im Bunch), hohe Zeitauflösung  $\rightarrow$  Bunchlänge  $\sigma_l$

**DC-Strahlstromtrafo (DCCT)** bestimmt die gesamte Intensität aller Bunche

( $\sum$  Bunchströme)

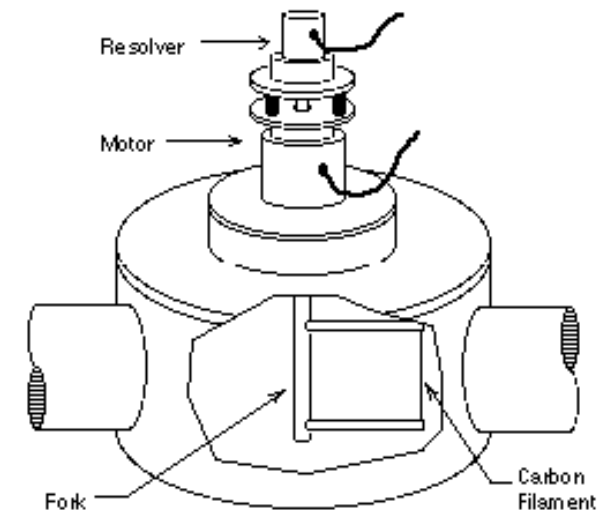
### 2. Messung der Strahlgrößen $\sigma_{x,y}$ :

**Flying Wires**  $33\mu\text{m}$  Kohlefasern horizontal/vertikal durch Strahl (mit 5 m/s)

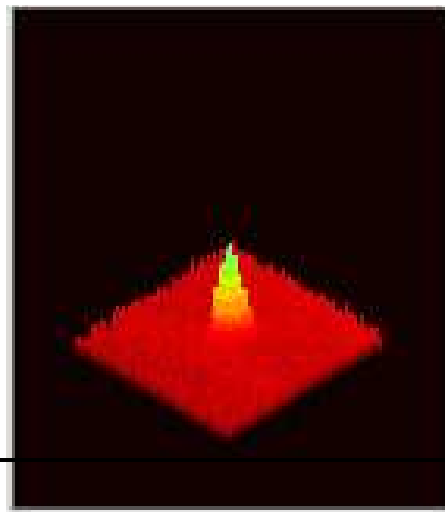
bewegt + Nachweis von Pionen aus Wechselwirkungen

**Synchrotronlicht** mit 400 nm aus (Anti-)Proton-Ablenkung in supraleitenden

Dipolen ( $\approx 4\text{ T}$ ) mittels Teleskop, Microchannel-Verstärker und CID-Kamera (Charge-Injection-Device)



Protonen



Antiprotonen



3. Transfer der berechneten  $\beta$  mittels Abbildungsmatrizen für Ablenk- und Fokussierungsmagnete

$$\beta^* = 0.35\text{m}; \beta_{\text{max}} = 1254\text{m}; Q_{x,y} = .585, .575$$

$$\beta^* = 0.35 \text{ m}; \beta_{\text{max}} = 1254 \text{ m}; \text{Betatron tunes } Q_{x,y} = .585, .575$$

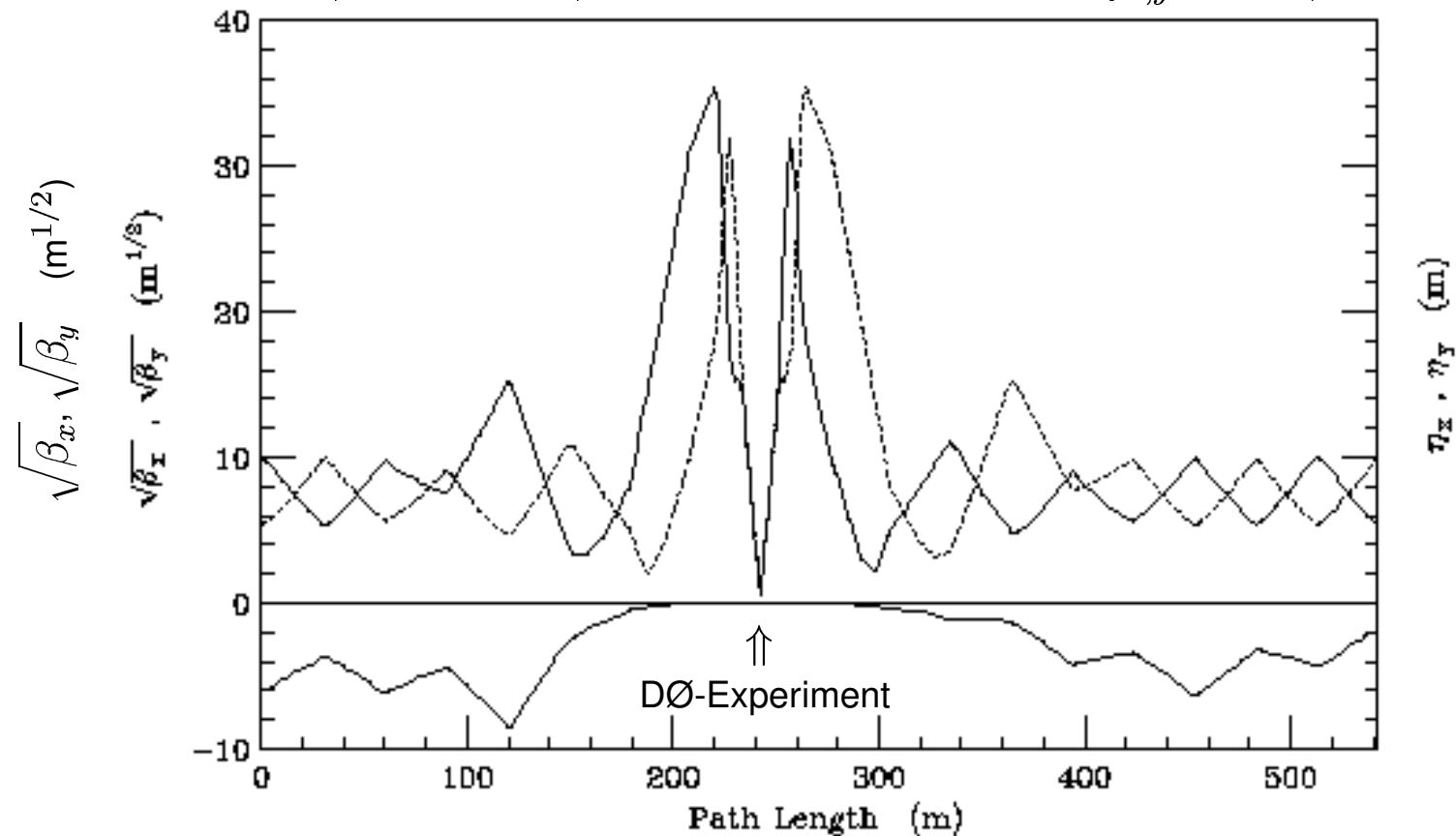


Figure 6.14. Lattice functions at B0 and D0 for the Dispersionless IR Solution a) with out the low beta squeeze (lattice JJ01) and b) with the low beta squeeze (lattice JJ15C.)



## Resultate der Luminositätsbestimmung am Tevatron:

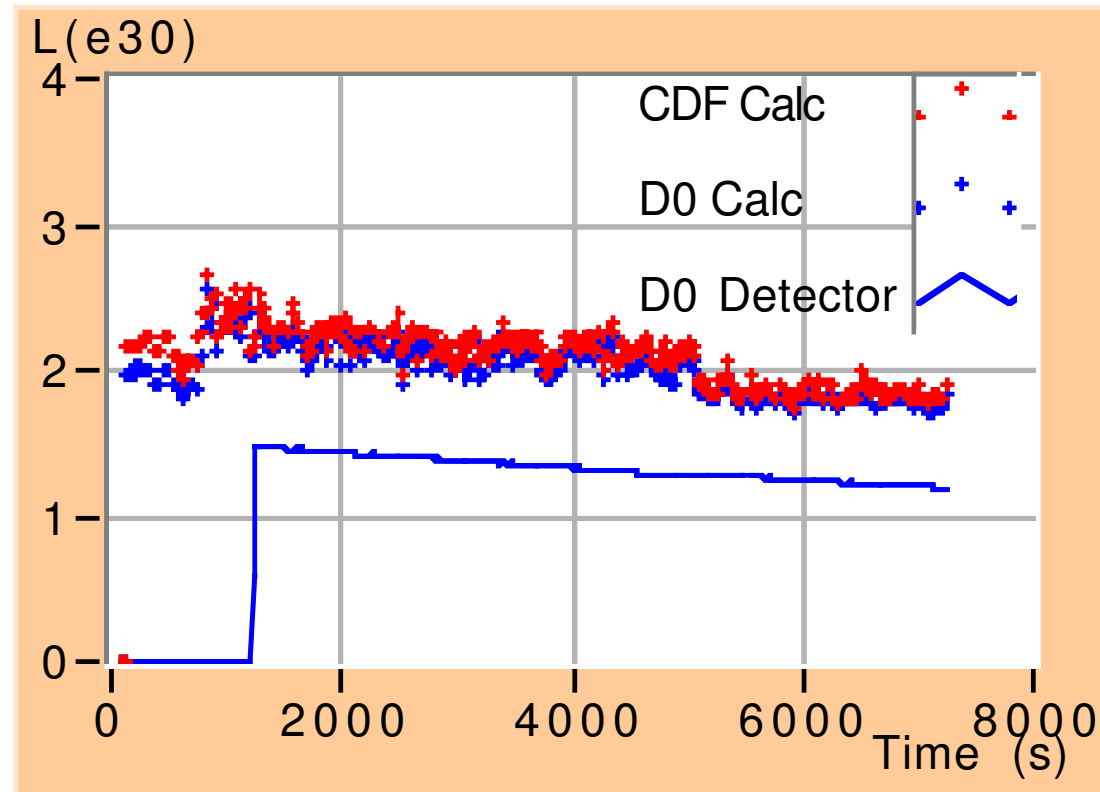


Figure: Operation of Luminometer. The upper traces are those calculated by the on-line program “Luminometer”. The lower trace is the D0 Detector Luminosity . See text

(große Unsicherheiten aus Abbildungsmatrizen der Magnete)

## Luminositätsmessung bei LHC

- Strahlstrom-Messung:

**Fast Beam Transformers (FBCT)** Messung der Protonenzahl in jedem der 2835 Bunche (1% Genauigkeit)

**DC Current Transformers (BCTDC)** gesamter Strahlstrom von  $\approx 0.5$  A (Genauigkeit:  $1\mu\text{A} \cong 5 \cdot 10^8$  Protonen)

- transversale Strahlgröße ( $\sigma_x, \sigma_y$ ):

**Wire Scanners** analog "Flying Wire", Genauigkeit  $4\mu\text{m}$ , limitiert auf  $< 200$  Bunche (wg. Belastung durch Strahl)

→ für absolute Kalibration folgender Methoden:

**Restgas** in Vakuumröhre, durch Protonen zur Lumineszenz angeregt → Leuchtspur des Strahl → transversale Strahldimensionen

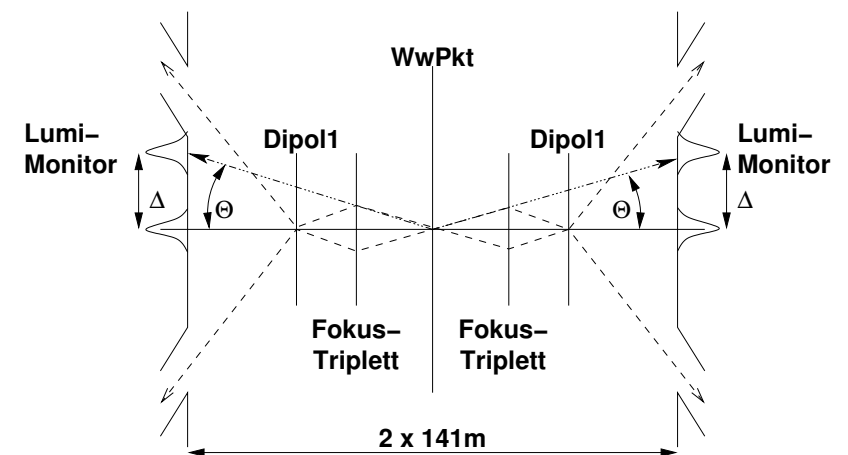
**Synchrotronlicht** aus supraleitenden Dipolen neben Ww.-Punkten (noch optional)

- longitudinales Strahlprofil ( $\sigma_l$ ):

**Synchrotronlicht** mit zeitaufgelöster ( $< 50$  ps) Messung des Photonenflusses → long. Strahlprofil

- Luminositätsmonitore um Wechselwirkungspunkten

- in  $\pm 141$  m Abstand vom Ww.-Punkt
- Detektoren für neutrale Teilchen (i.W. Neutronen, Photonen) hinter ca. 30 cm Kupferabschirmung wg. 170 MGy/Jahr
- Teilchenflussmessung  $\leftrightarrow$  Reaktionsrate  $\leftrightarrow$  Luminosität
- Messung des Strahlkreuzungswinkels  $2\Theta$  auf  $< 10\mu\text{rad}$ .  
( $\mathcal{L} = I^2 / 4\pi f_{\text{rev}} B e^2 \sigma_x \sigma_y \tan \Theta$ )



## Störungen in der Strahldynamik

- Störungen in der Strahldynamik
  1. Dipol-Feldstörungen
  2. Quadrupol-Feldstörungen, Resonanzen, Stoppbänder
  3. Chromatizität

## Feldstörungen

Bisher Idealisierung durch

- perfekte Magnete,
- perfekt ausgerichtet (aligniert),
- perfekt senkrechte Ausrichtung von Quadrupolen,
- keine Feldabweichungen,
- keine Erdbewegungen.

Reale Situation durch

- Magnete mit (kleinen) Abweichungen vom Ideal,
- Ausrichtung bestenfalls auf  $\sim 100 \mu\text{m}$  genau,
- geringfügige Verdrehung der Quadrupole,
- Feldabweichungen & -fehler (Stromversorgung, etc.),
- Erdbewegung (Drift, Zivilisation, Gezeiten, Jahreszeiten, etc.).

Konsequenzen aus Abweichungen bei Ausrichtung

Z.B.: für Teilchen auf Sollorbit, d.h. Betatron-Oszillationen um  $x = 0$ ,

- perfekter Quadrupol:  $V(x, y) = gxy$
- reines Quadrupolfeld
- horizontale Verschiebung des Quadrupols um  $\delta x$ :  

$$V(x, y) \rightarrow V(x + \delta x, y) = g \cdot (x + \delta x) \cdot y = V(x, y) + (\delta x g) \cdot y$$
- Dipolfeldkomponente  $(\delta x g) \cdot y$  zusätzlich zu Quadrupolfeld

⇒ Ausrichtungsfehler → Multipol-Feldfehler

## Dipol-Feldstörungen und "Closed Orbit"

Zur Erinnerung: Bewegungs-DGL für Teilchen mit relativer Impulsabweichung  $\delta$ :  $u'' + K(s) \cdot u = \delta/\rho_0(s)$

Dipol-Feldfehler  $\Delta B/B \Leftrightarrow \Delta p/p \equiv \delta$  Impulsabweichung ( $pc = eB\rho$ )

→ Bewegungs-DGL unter Dipol-Feldfehler  $F(s)$ :

$$u'' + K(s) \cdot u = F(s)$$

$F(s)$  unabhängig von Koordinaten  $(x, y)$  und Impulsfehler  $\delta$   
 $F(s)$  periodisch, jedoch nicht mit Periode der Magnetzelle  
 $F(s)$ : max. Periode = ein Umlauf  $\mathcal{C}$  ( $\hat{=} 1$  Dipol-Feldfehler)

Allg. Lösung:  $u(s) = u_0 C(s) + u'_0 S(s) + \mathcal{F}(s)$  und  $\mathcal{F}(s) = \int_0^s F(\sigma) [S(s)C(\sigma) - S(\sigma)C(s)] d\sigma$

(vgl. Dispersionsrelation Folie 4.20)

$u(s)$  erfüllen Periodizitätsbedingung für vollständigen Umlauf  $\mathcal{C}$ :

$$u(s_0 + \mathcal{C}) = u(s_0) \quad \text{und} \quad u'(s_0 + \mathcal{C}) = u'(s_0)$$

⇒  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bestimmungsbedingungen} \\ \text{für } u_0, u'_0: \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} u_0 C(s_0 + \mathcal{C}) + u'_0 S(s_0 + \mathcal{C}) + \mathcal{F}(s_0 + \mathcal{C}) &= u_0 C(s_0) + u'_0 S(s_0) + \mathcal{F}(s_0) \\ u_0 C'(s_0 + \mathcal{C}) + u'_0 S'(s_0 + \mathcal{C}) + \mathcal{F}'(s_0 + \mathcal{C}) &= u_0 C'(s_0) + u'_0 S'(s_0) + \mathcal{F}'(s_0) \end{aligned}$$

Wähle Startbedingungen für  $s_0$ , z.B.:

$$S'(s_0) = C(s_0) = 1, S(s_0) = C'(s_0) = 0, \mathcal{F}(s_0) = 0, \mathcal{F}'(s_0) = 0$$

nach einiger Rechnung und mit  $C_1 \equiv C(s_0 + \mathcal{C})$ ,

$S_1 \equiv S(s_0 + \mathcal{C}), \mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}(s_0 + \mathcal{C})$

$$\rightarrow u_0 = \frac{S_1 \cdot \mathcal{F}'_1 - (S'_1 - 1) \cdot \mathcal{F}_1}{(C_1 - 1) \cdot (S'_1 - 1) - C'_1 \cdot S_1}$$

**Lösung der Bewegungs-DGL mit Dipol-Feldstörungen (fortgesetzt):**

Betrachte Nenner von  $u_0 = \frac{S_1 \cdot \mathcal{F}'_1 - (S'_1 - 1) \cdot \mathcal{F}_1}{(C_1 - 1) \cdot (S'_1 - 1) - C'_1 \cdot S_1}$  mit Transportmatrix  $M_{\text{Umlauf}}$  für vollständigen Umlauf (s. 6.10)

$$\text{Nenner: } 1 + (C_1 S'_1 - S_1 C'_1) - (C_1 + S'_1) = 1 + \underbrace{\det M_{\text{Umlauf}}}_{=1} - \underbrace{\text{Tr } M_{\text{Umlauf}}}_{=2 \cos(2\pi Q)} = 4 \sin^2(\pi Q)$$

$$\text{Zähler: mit } \mathcal{F}(s) = \int_0^s F(\sigma) [S(s)C(\sigma) - S(\sigma)C(s)] d\sigma$$

$$\text{und } C_1 \equiv C(s_0 + \mathcal{C}) = \cos 2\pi Q + \alpha_0 \sin 2\pi Q \text{ und } S_1 \equiv S(s_0 + \mathcal{C}) = \beta_0 \sin 2\pi Q$$

folgt nach längerer Rechnung ( $\psi(s) = Q\varphi(s)$  und Betatronphase  $\varphi$ )

$$S_1 \cdot \mathcal{F}'_1 - (S'_1 - 1) \cdot \mathcal{F}_1 = 2\sqrt{\beta_0} \sin \pi Q \int_{s_0}^{s_0 + \mathcal{C}} \sqrt{\beta(\sigma)} F(\sigma) \cos(\psi(\sigma) - \psi_0 - \pi Q) d\sigma$$

"Closed Orbit" bzw. Referenzorbit

}  $\Rightarrow$

$$u_0(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi Q} \oint \sqrt{\beta(\sigma)} F(\sigma) \cos(|\psi(\sigma) - \psi(s)| - \pi Q) d\sigma$$

(NB: in dieser Darstellung unabhängig vom Startpunkt  $s$  der Integration)

Mit  $F(\sigma) = \frac{1}{\rho(\sigma)} \cdot \delta$  (NB:  $u(s) = D(s)\delta$ ) folgt die "Closed Orbit"-Dispersion:

$$D(s) \equiv \eta(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi Q} \oint \frac{\sqrt{\beta(\sigma)}}{\rho(\sigma)} \cos(|\psi(\sigma) - \psi(s)| - \pi Q) d\sigma$$

**Effekte durch Dipol-Feldstörung:**

Vereinfachung: Nur ein Feldfehler bei  $s_k$  im gesamten Magnetgitter, d.h.  $F(\sigma) = \theta_k \delta(\sigma - s_k)$

→ Kick (Winkelablenkung) im Orbit:  $\theta_k = \oint_s^{s+C} F(\sigma) d\sigma$

→ Referenzorbit für :

$s < s_k \rightarrow s + C$ : Kick bei  $\varphi(s_k)$

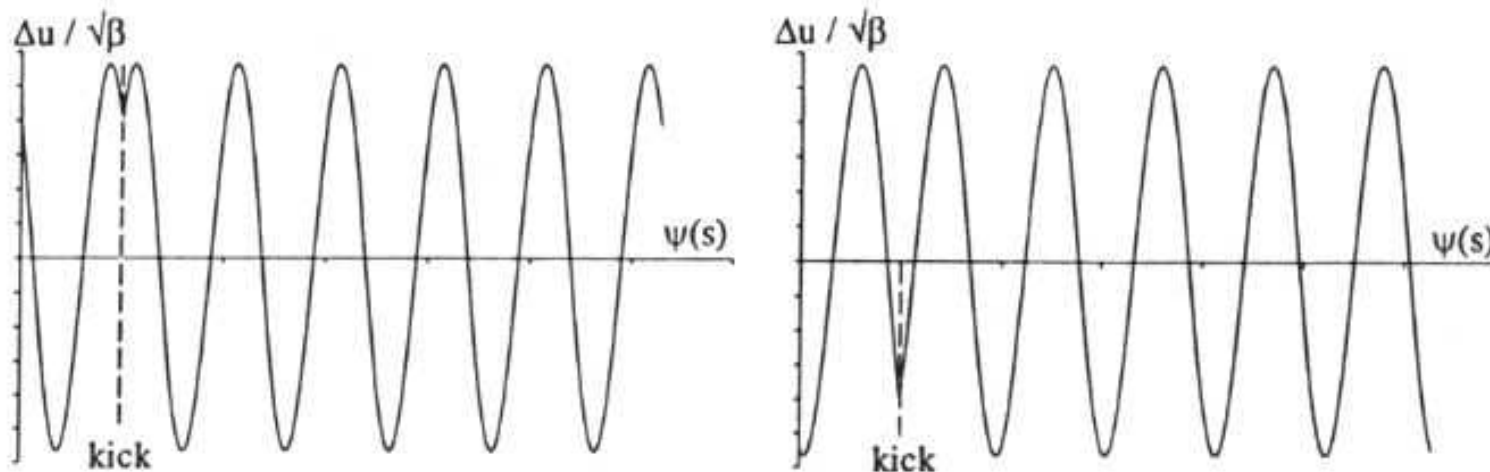
$s > s_k \rightarrow s + C$ : Kick bei  $2\pi - \varphi(s_k)$

$$u_0(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\beta(s)\beta(s_k)} \theta_k \frac{\cos Q [\pi - \varphi(s_k) + \varphi(s)]}{\sin \pi Q} \quad u_0(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\beta(s)\beta(s_k)} \theta_k \frac{\cos Q [\pi - \varphi(s) + \varphi(s_k)]}{\sin \pi Q}$$

→ Symmetrie um Ort des Feldfehlers bei  $s_k$  mit Orbit:  $u_0(s_k) = \frac{1}{2} \beta(s_k) \theta_k \cot \pi Q$

Störung bei  $\text{mod}(Q, 1) > 0$

Störung bei  $\text{mod}(Q, 1) < 0$



**Fig. 7.3.** Distorted orbit due to a single dipole kick for a tune just above an integer (left) and for a tune below an integer (right)

## Orbitstörung und -korrektur

- gezielte Orbitstörung durch kurzen Dipol
- + Messung des Strahlposition am Ort der Störung:  $u_0(s_k)$
- + Bestimmung des Tunes  $Q$   
(Fourieranalyse der Strahloszillationen, gemessen mit Elektrode nahe Strahl)
- Betatron-Amplitude  $\beta(s_k)$  aus:  
$$u_0(s_k) = \frac{1}{2}\beta(s_k)\theta_k \cot \pi Q$$
- Beispiel: PEP-Beschleuniger mit Streuung der Magnetausrichtung von 0.05 mm in  $x$  und  $y$  (Fig. 7.2)
- Korrektur von Orbitstörungen durch drei bis vier Korrekturdipole
- erzeugen Strahlstörung entgegengesetzt zur Orbitstörung im Bereich der Korrekturmagnete
- Reduktion der Orbitstörungen
- starke harmonische Oszillation nahe der Betatron-Resonanz eliminiert ! (Fig. 7.4)

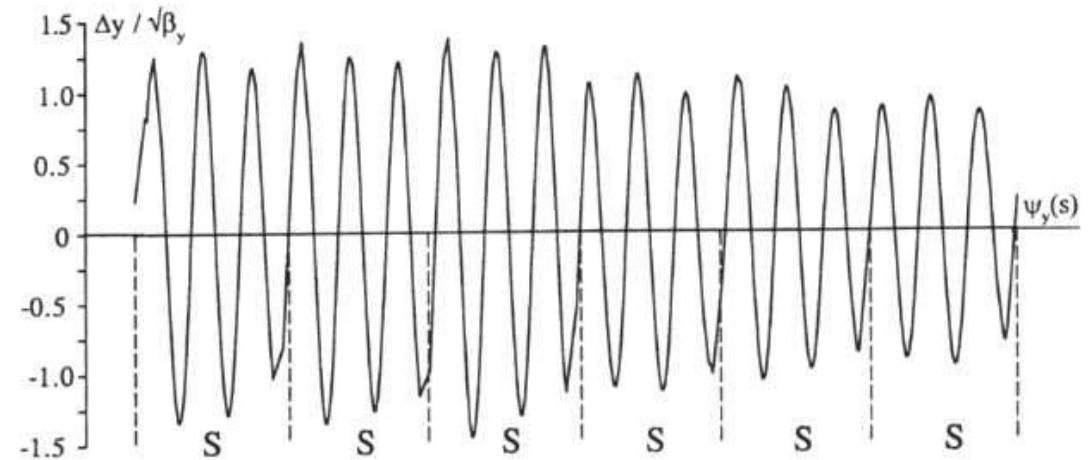


Fig. 7.2. Closed orbit distortion of Fig. 7.1 in normalized coordinates as a function of the betatron phase  $\varphi$

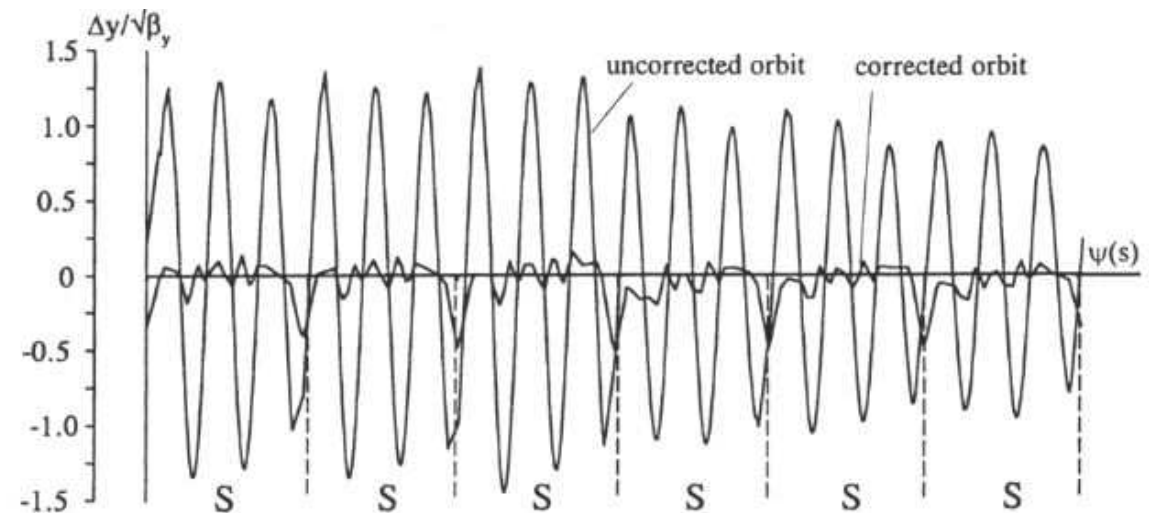
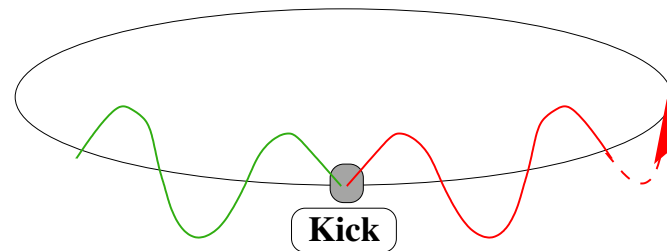


Fig. 7.4. Orbit of Fig. 7.2 before and after correction.



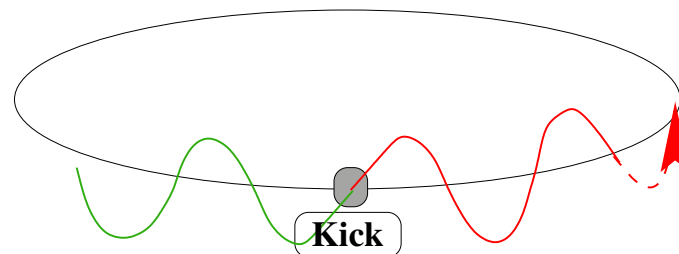
## Dipol-Feldstörungen und Betatron-Tune

**■**  $Q = N + 0.5$



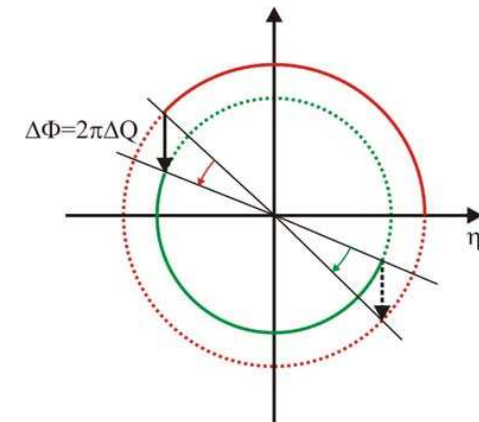
*the perturbation cancels  
after each turn*

**■**  $Q = N$



*the perturbation adds up*

- Betatron-Tune halbzahlig
- Orbit nach Umlauf um Referenzorbit gespiegelt
- erneute Störung kompensiert vorausgegangene

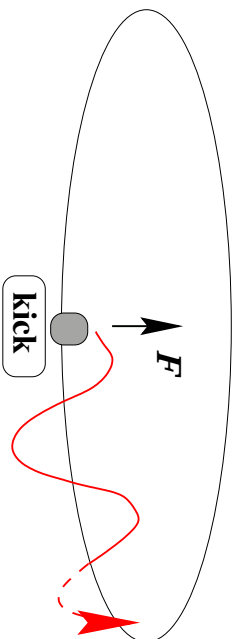


- Betatron-Tune ganzzahlig
- Orbit nach Umlauf in gleicher Phase
- erneute Störung addiert sich zu vorausgegangener

## Quadrupol-Feldstörungen, Resonanzen, Stoppbänder

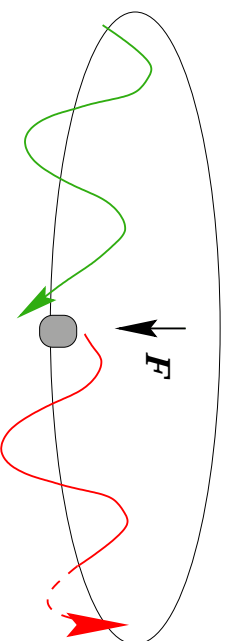
■  $Q = N + 0.5$

**1. Turn:  $x > 0$**



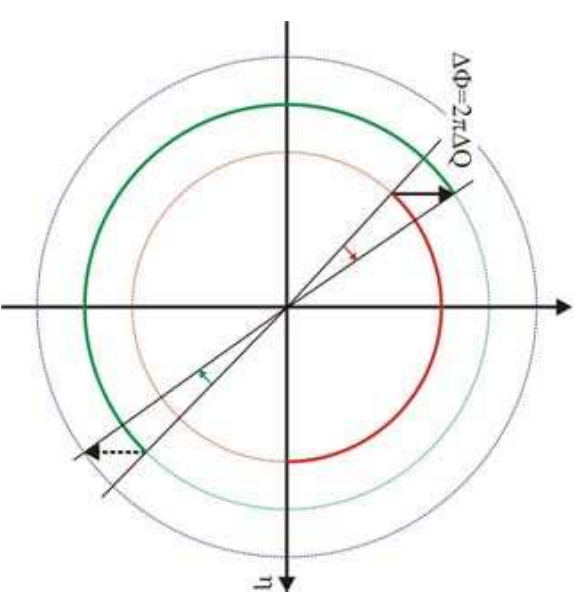
→ **amplitude increase**

**2. Turn:  $x < 0$**



→ **amplitude increase**

- Betatron-Tune halbzahlig
- Orbitkick  $\propto$  Strahloffset im Quadrupol
- erneute Störung addiert sich zu voraus-  
gegangener



für Quadrupolfehler  $k + \Delta k$  gilt:  
(Rechnung z.B. in H.Wiedemann)

$$\Delta\beta(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin 2\pi Q} \oint \beta(\sigma) \Delta k(\sigma) \cos(2|\psi(\sigma) - \psi(s)| - 2\pi Q) d\sigma$$

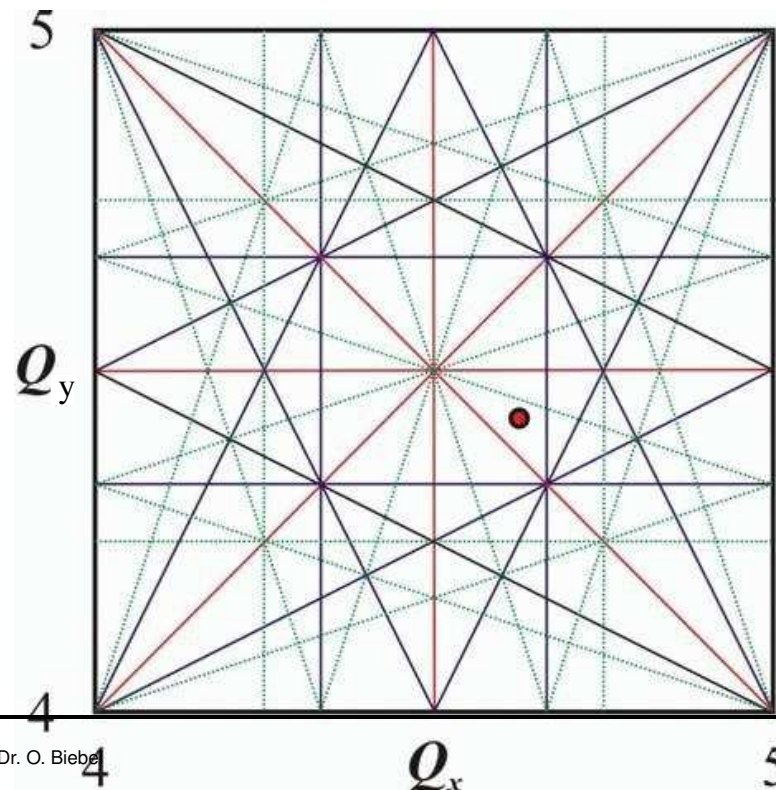
Halbzahlige Tunes führen zur Modulation der Betatron-Amplitude, so gen. "betatron beating"

### Feldstörungen und Resonanzen

Generell gilt:

	Resonanztyp	treibender Multipol
	Ganzzahlige (integer) Resonanz: $Q = n$	Dipol-Feldfehler
	Halbzahlige Resonanz: $2 \cdot Q = n$	Quadrupol-Feldfehler
	Drittelzahlige Resonanz: $3 \cdot Q = n$	Sextupol-Feldfehler
	$1/k$ -zahlige Resonanz: $k \cdot Q = n$	$2k$ -pol-Feldfehler

→ Betatron-Tunes, die zu Resonanzen führen, müssen (in  $x$  und  $y$ ) vermieden werden !



- Kopplung der Betatron-Oszillationen in  $x$ - und  $y$ -Ebene
  - Resonanzkriterium:  $k \cdot Q_x + l \cdot Q_y = i \cdot N$
  - $|k| + |l|$  ist Ordnung der Resonanz
  - Resonanzdiagramm mit Linien für alle  $k, l, i \in \mathbb{Z}$
  - $N$  ist Superperiode des Magnetgitters (d.i. Anzahl gleichartiger Zellen im Magnetgitter)
  - Diagramm ( $N = 1$ ): Resonanzlinien  $|k| + |l| \leq 4$
  - Punkt: Tune für Beschleunigungsphase
- (Diagramm für ELSA-Beschleuniger, 3.5 GeV  $e^-$ , Uni Bonn)

### Superperiode $N$

Stabilitätsbereiche zwischen Resonanzen

$\propto$  Superperiode oder Symmetrie  $N$

d.h. große  $N \rightarrow$  größere Arbeitsbereiche !

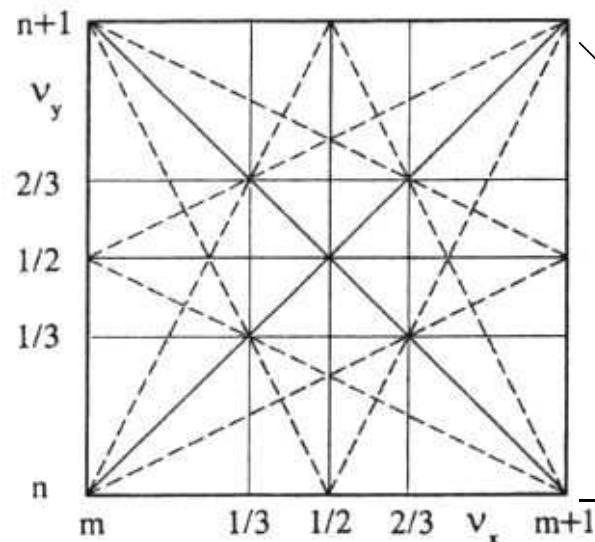


Fig. 7.5. Resonance diagram for a ring with superperiodicity one,  $N = 1$

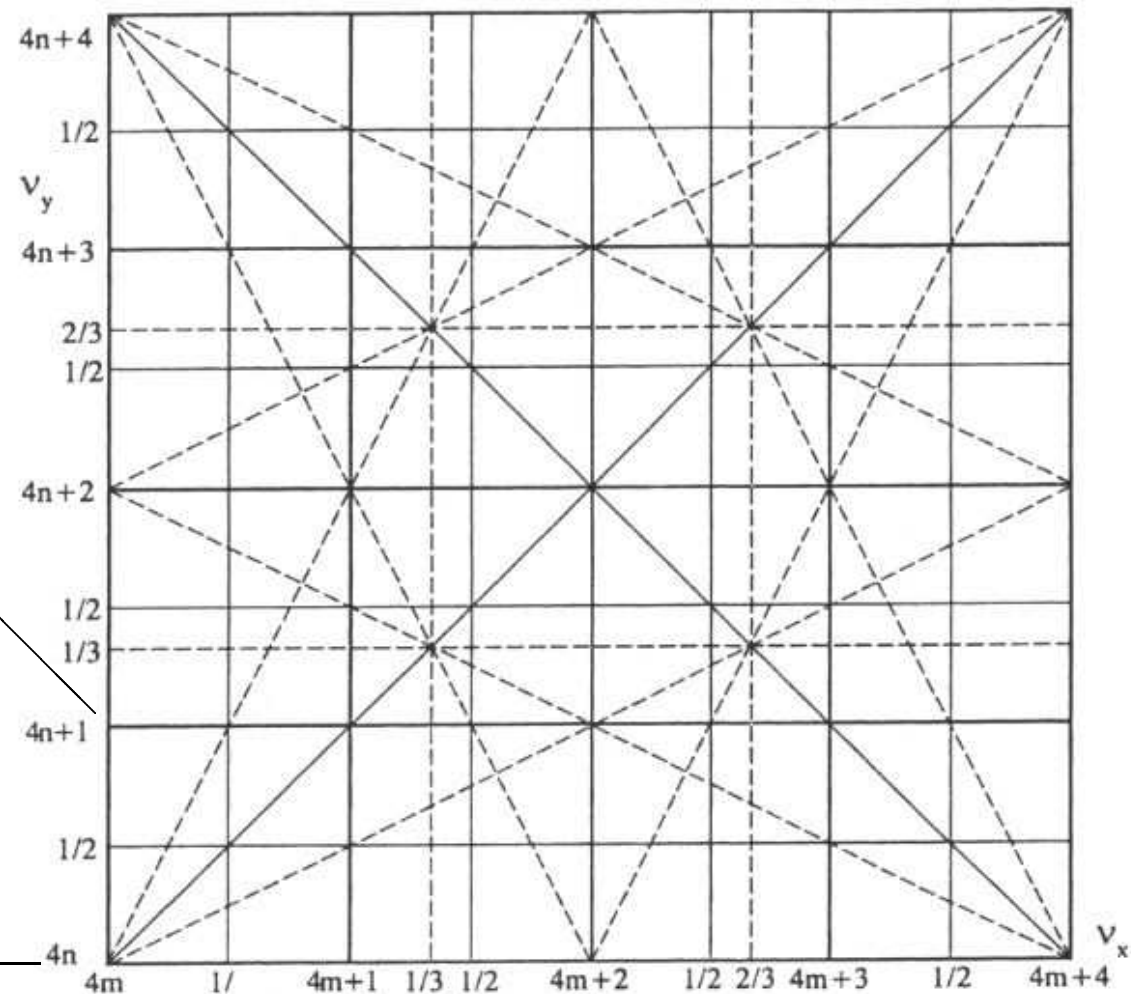


Fig. 7.6. Resonance diagram for a ring with superperiodicity four,  $N = 4$

### Stoppbänder:

Magnetfehler haben unterschiedliche Auswirkungen:

Dipolfehler → große Orbitkorrekturen nahe ganzzahligen Tunes  $Q$ :  $u_0 \propto 1/\sin(\pi Q)$

Quadrupolfehler → Modulation der Betatron-Amplitude (vgl. Folie 7.8):  $\Delta\beta \propto 1/\sin(2\pi Q)$

→ und zusätzlich zu *Tune-Verschiebung*  $\Delta Q$ :  $\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(s) \Delta k(s) ds$

→ aus  $\cos 2\pi(Q + \Delta Q) = \cos 2\pi Q + Q \int_0^{2\pi} \beta^2(\chi) F(\chi) \cos(Q\chi) \sin Q(2\pi - \chi) d\chi$  (\*\*)  
(Rechnung in H.Wiedemann)

Sextupolfehler → ...  $\dots \propto 1/\sin(3\pi Q)$

- Resonanz für ganz-, halb-, drittel-, ...-zahlige Betatron-Tunes  $Q$

→ i.A. Strahlverlust (Strahlgröße > Apertur)

→ Resonanzen = Stoppllinien

- in Umgebungsnähe von ganz-, halb-, drittel-, ...-zahlige Betatron-Tunes  $Q$

→ i.A. Strahlverlust (mathematisch: keine Lösung für  $\cos 2\pi(Q + \Delta Q)$  in (\*\*)) falls  $\cos(2\pi Q) + \int d\chi > 1$ )

intuitiv:  $u_0, \Delta\beta, \dots$  werden groß bereits nahe der Resonanz

→ Stoppbänder um Resonanzlinien !

## Chromatizität

- Quadrupole fokussieren Teilchen mit  $\delta \equiv \Delta p/p \neq 0$  unterschiedlich

→ Betatron-Tune-Verschiebung: so gen. *Chromatizität*  $\xi$

$$\Delta Q_{x,y} = \xi_{x,y} \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$$

- *natürliche Chromatizität* des Beschleunigers: Quadrupolstärke  $k$  skaliert mit Impuls:  $\Delta k = -k \frac{\Delta p}{p_0}$

→ Tune-Verschiebung (wie für Quadrupol-Feldfehler):

$$\Delta Q_{x,y} = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_{x,y}(s) \Delta k(s) ds = - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int \beta_{x,y}(s) k_{x,y}(s) ds}_{\xi_{x,y}} \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$$

→ natürliche Chromatizität:

$$\xi_{x,y} = - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int \beta_{x,y}(s) k_{x,y}(s) ds}_{\xi_{x,y}}$$

- ▷  $\xi$  ist immer negativ für lineare Magnetgitter (linear  $\hat{=}$  nur Dipole&Quadrupole), da Fokussierung für höher energetische Teilchen ( $\delta > 0$ ) geringer
- ▷  $\xi$  ist i.A. groß, z.B. für HERA-ep-Beschleuniger:  $\xi \approx -60$

**Chromatizität** (fortgesetzt):

Beispiel: natürliche Chromatizität einer FODO-Zelle:  $\xi_x = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x k ds$

In der Näherung dünner Linsen:

▷  $\beta = \beta^+$  bzw.  $\beta^-$  im Zentrum des fokus. bzw. defokus. Quadrupols

▷  $k = k^+$  bzw.  $-k = k^-$  als Quadrupolstärke

$$\left. \vphantom{\int} \right\} \rightarrow \xi_x = -\frac{1}{4\pi} \left( \beta^+ \int k^+ ds + \beta^- \int k^- ds \right) = -\frac{\beta^+ - \beta^-}{4\pi} \int k ds$$

▷  $\beta^\pm = L\kappa(\kappa \pm 1)/\sqrt{\kappa^2 - 1}$  mit  $\kappa \equiv f/L$  (vgl. 6.4)

▷  $\int k ds = f^{-1} = 1/(\kappa L)$

▷  $\sin(\Psi/2) = 1/\kappa$  (vgl. Folie 6.5)

$$\left. \vphantom{\int} \right\} \rightarrow \xi_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = -\frac{1}{2\pi} \tan(\Psi_x/2)$$

→ Natürl. Chromatizität je 90°-FODO-Zelle:  $-1/2\pi$   
 ( $1/2\pi$  je Zelle wenig, aber  $\sum$  über viele Zellen wird groß)

Messung der natürl. Chromatizität:

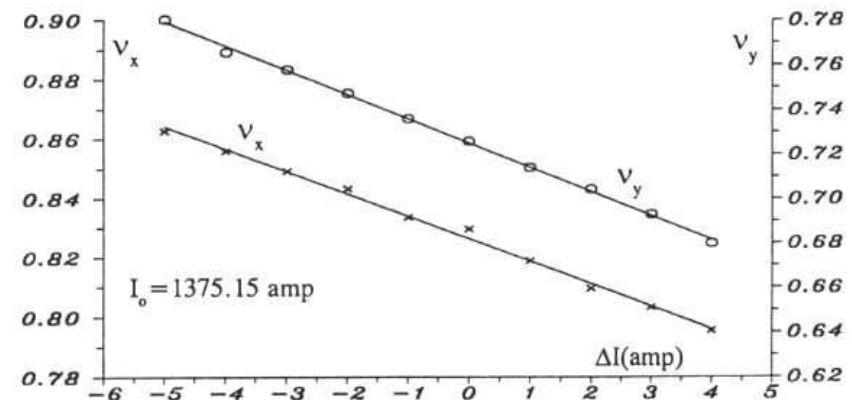


Fig.7.9. Experimental determination of the natural chromaticity in a storage ring by measuring the tunes as a function of the excitation current  $I = I_0 + \Delta I$  in the bending magnets.

( $\nu_{x,y}$  in Abb.  $\hat{=}$  Betatron-Tune  $Q_{x,y}$ ,

Steigung der Geraden  $\hat{=}$  natürl. Chromatizität  $\xi_{x,y}$ )

**Chromatizität** (fortgesetzt):

- $\xi \gg 1$ : d.h. selbst für  $\delta \approx 10^{-3} \rightarrow \Delta Q \approx 1$
- Tune-Streuung erreicht Stoppband → Strahlverlust
- + so gen. “*head-tail*”-Instabilität (wg. Nichtlinearität)
- Korrektur der natürlichen Chromatizität: Sextupole
- *Chromatizität* durch Sextupole:

Teilchenstrahl auf Dispersionsorbit in Sextupol

$$\frac{e}{pc} \vec{B} = mxy\vec{e}_x + \frac{1}{2}m(x^2 - y^2)\vec{e}_y \quad (\text{nicht-linear!})$$

→ horizontale Verschiebung  $x = D \cdot \delta = D \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$

→ Dispersionsabhängigkeit:

$$k_x = \frac{e}{pc} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial x} = m \cdot x = m \cdot D \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$k_y = \frac{e}{pc} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial y} = m \cdot y = m \cdot D \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$$

- Chromatizität (=  $\sum$  natürliche+Sextupol-Chromatizität):

$$\xi_{x,y} = -\frac{1}{4\pi} \int [k_{x,y}(s) - m(s)D(s)] \cdot \beta_{x,y}(s) ds$$

- ▷ Orte für Chromatizitätskorrektur (vgl. Fig.35):
- ◇ nahe Quadrupole, damit  $\Delta Q \ll 1$  bleibt
- ◇ wo Referenzorbit-Dispersion  $D(s) \neq 0$

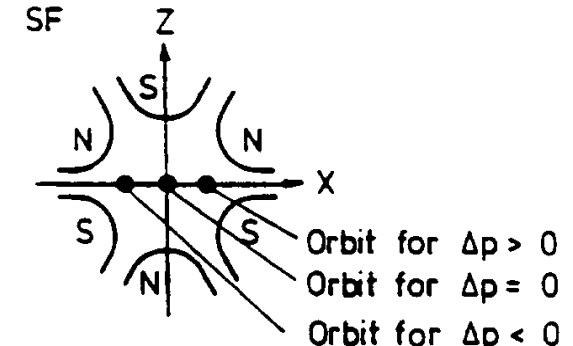
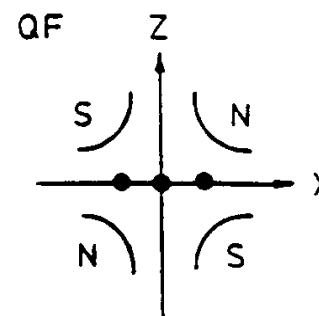
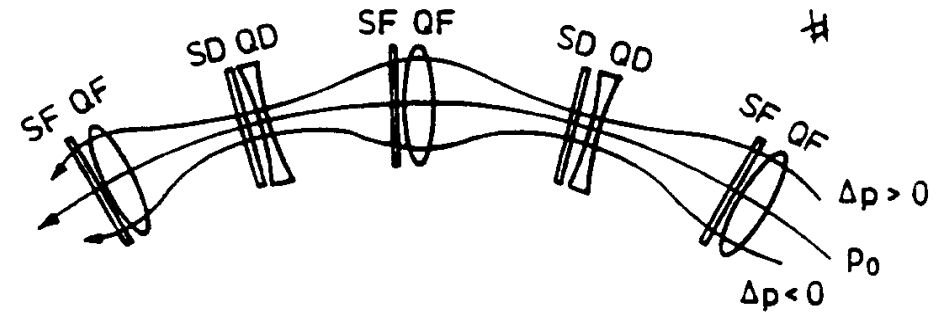
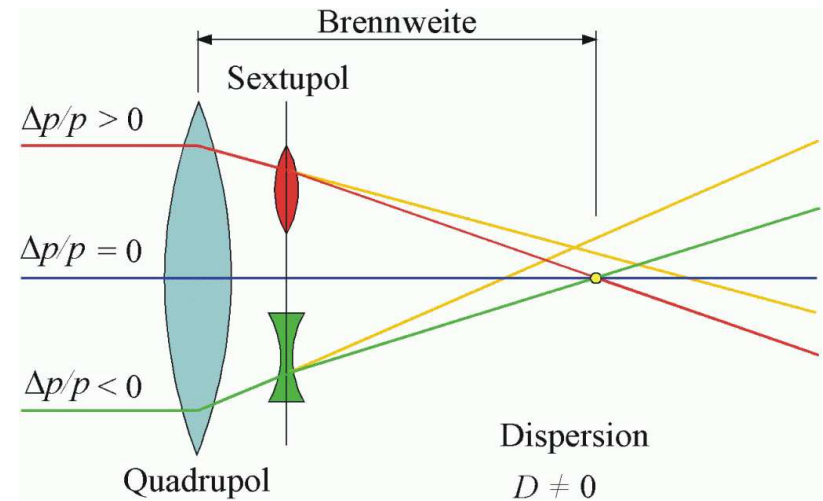


Figure 35: Dispersion trajectory in a sextupole magnet

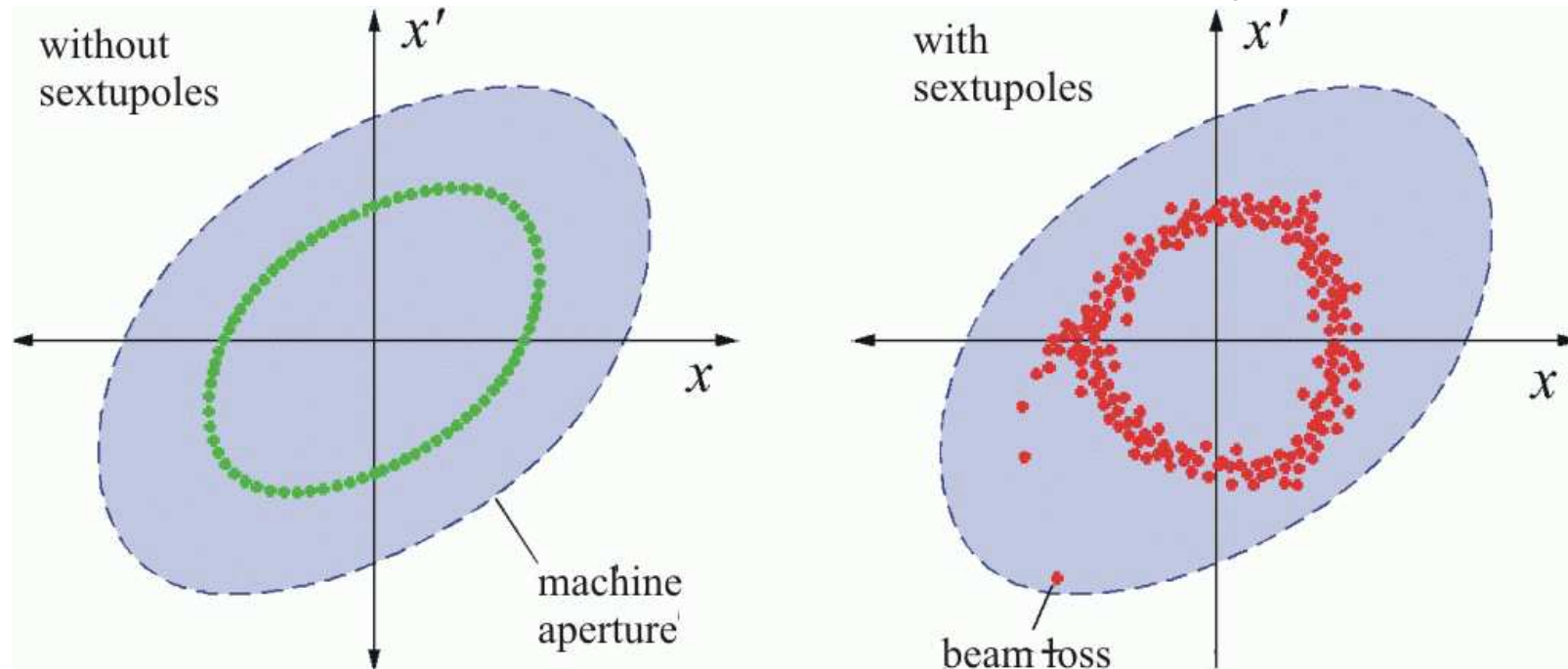


## Chromatizität und dynamische Apertur:

Problem der Chromatizitätskorrektur durch Sextupole:

- Nicht-Linearitäten, da  $\frac{e}{pc}\vec{B} = mxy\vec{e}_x + \frac{1}{2}m(x^2 - y^2)\vec{e}_y$

→ Chromatizitätskorrektur beeinflusst Strahlstabilität und maximale erforderliche Apertur (dynamische Apertur)



→ Sextupole erzeugen nicht-lineare Resonanzen mit

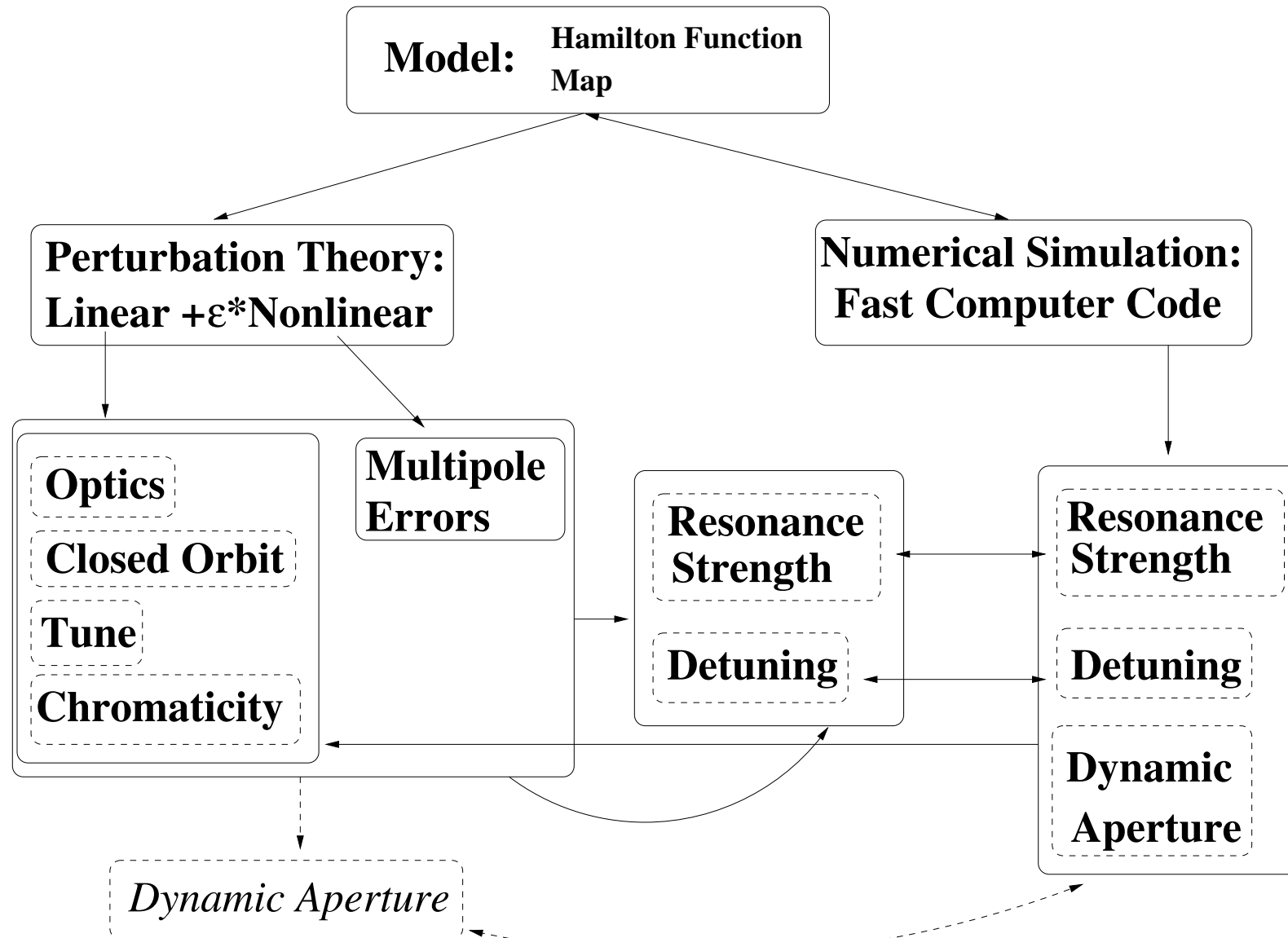
- ▷ wachsenden Oszillationsamplituden
- ▷ Detuning mit Amplitudenzunahme

• Untersuchung der Langzeitstabilität: Kombination von

- ◇ klassische Mechanik
- ◇ Chaostheorie

⇒ Behandlung nicht-linearer Beschleuniger mittels Computer-Modell

**Modell eines nicht-linearen Beschleunigers:** (Hamilton Funktion: Bewegung der Teilchen im Beschleuniger)



## Beschleunigung geladener Teilchen

- Beschleunigung geladener Teilchen
  1. Longitudinale Teilchenbewegung und Phasenraum

# Longitudinale Teilchenbewegung und Phasenraum

- Geladene Teilchen in einem (Kreis-)Beschleuniger
  - Beschleunigt beim wiederholten Durchlaufen eines Hochfrequenz-Resonators (Cavity)
- Teilchen müssen beschleunigendes Feld zur festen *Synchronphase*  $\psi_s = \omega t - ks = \text{const.}$  erreichen (Resonator-Kreisfrequenz  $\omega$ )
- *Synchronitätsbedingung*  $\dot{\psi}_s = \omega - k\beta c = 0$  (Teilchengeschwindigkeit  $ds/dt = \beta c$ )
- $\omega_1 = k_1\beta c$  erfüllt Synchronitätsbedingung (erste harmonische)
- ebenso  $\omega_h = h\omega_1$  und  $k_h = hk_1$  mit ganzzahliger *harmonischer Zahl*  $h$

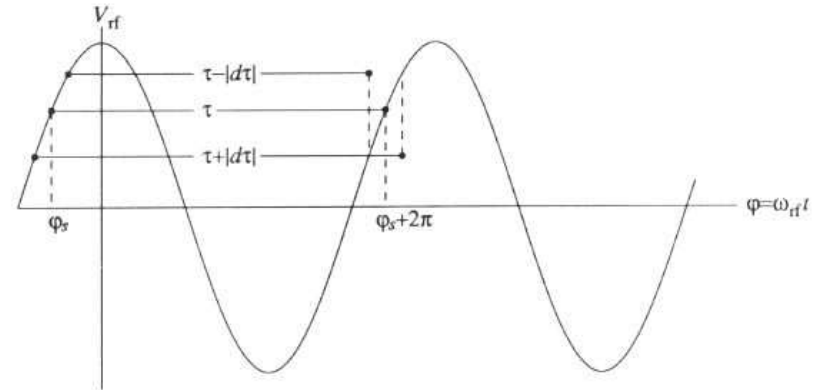


Figure. 9.7 A graphical demonstration of the phase-stability principle in a linac. The effective transition energy is always infinite, since  $\eta_{tr} = 1/\gamma^2 > 0$ .

Allgemeiner:

- Viele Teilchen mit ggf. unterschiedlichen Energien → Dispersion → Wellenzahl  $k$  nicht für alle Teilchen gleich

→  $\Delta\dot{\psi} = -\Delta(k\beta c) = -ck\Delta\beta - \beta c \frac{\partial k}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \Delta t$  (#)  $\Delta\psi \equiv \psi - \psi_s, k = k_h = h \frac{2\pi}{L_0}$ , Abstand  $L_0$  zw. Resonatoren, bzw.  $k \hat{=} h \cdot \omega_r / \beta c$  mit Umlauffreq.  $\omega_r$  im Kreisbeschleuniger

◇  $\left. \frac{\partial k}{\partial p} \right|_{s_0} = \left. \frac{\partial k}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial p} \right|_{s_0} = - \left. \frac{k_h}{L_0} \frac{\partial L}{\partial p} \right|_{s_0} = - \frac{k_h}{p_0} \alpha_c$  und "Momentum compaction"-Faktor  $\alpha_c \equiv \frac{\Delta L / L_0}{\Delta p / p_0}$

(Einschub von Folie 5.20)

**Weglänge und “Momentum compaction”:**

In linearer Betrachtung der transversalen Strahldynamik wirkt sich Dispersion  $D(s)$  auf die Weglänge  $L$  eines Teilchens (z.B. durch einen Ablenktdipol,  $\kappa = 1/\rho$ ) aus:

$$\text{(vgl. Folie 4.16)} \quad d\sigma \approx (1 + \kappa_0 u) ds \quad \rightarrow \quad L = \int (1 + \kappa x) ds.$$

Dabei ist  $x = D(s)\delta$  die horizontale Abweichung von der Sollbahn bei relativer Impulsabweichung  $\delta = \Delta p/p$ .

Die Abweichung  $\Delta L$  von der Soll-Weglänge  $L_0 = \int ds$  ist 
$$\Delta L = \delta \cdot \int \frac{D(s)}{\rho(s)} ds$$

und wird beschrieben durch den “momentum compaction”-Faktor:

$$\alpha_c \equiv \frac{\Delta L/L_0}{\Delta p/p} = \frac{\Delta L/L_0}{\delta} \quad \rightarrow \quad \alpha_c = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \frac{D(s)}{\rho(s)} ds = \left\langle \frac{D(s)}{\rho(s)} \right\rangle$$

NB: “momentum compaction”-Faktor  $\alpha_c$  nimmt nur in Ablenkabschnitten zu, d.h.  $\rho \neq 0 \rightarrow$  Linearbeschleuniger:  $\alpha_c = 0!$

Die Flugzeit eines Teilchens der Geschwindigkeit  $v$  für die Strecke  $L$  ist:  $\tau = L/v \rightarrow \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta v}{v}$

Mit  $\Delta L/L = \alpha_c \delta$  und  $p = \gamma m v$   
 $\rightarrow dv/v = 1/\gamma^2 dp/p$  folgt (NB:  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mit } \Delta L/L = \alpha_c \delta \text{ und } p = \gamma m v \\ \rightarrow dv/v = 1/\gamma^2 dp/p \text{ folgt (NB: } \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}\text{):} \end{array} \right\} \frac{\Delta\tau}{\tau} = - \left( \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c \right) \frac{dp}{p} \equiv -\eta_c \frac{dp}{p},$$

mit “Momentum compaction”:  $\eta_c = \gamma^{-2} - \alpha_c \rightarrow$  Kreisbeschleuniger: geänderte Umlauffreq.  $\omega_r = \frac{2\pi}{\tau_r}$ :

und Übergangsenergie bei  $\eta_c = 0$ :  $\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}$

$$\frac{d\omega_r}{\omega_r} = - \frac{d\tau_r}{\tau_r} = \eta_c \frac{dp}{p}$$

(engl. transition energy)

### Longitudinale Bewegungs-Differentialgleichung

Aus  $\dot{\Delta\psi}$  (s. Folie 8.2) folgt

mit  $(\partial p / \partial t) \Delta t = \Delta p$  und  $mc\gamma^3 \Delta\beta = \Delta p$

$$\dot{\Delta\psi} = -\beta c k_h (\gamma^{-2} - \alpha_c) \frac{\Delta p c}{p c} = -\beta c k_h \eta_c \frac{\Delta p c}{p c}$$

NB:  $\gamma^{-2}$  beschreibt die Energieabhängigkeit der Flugzeit zwischen Beschleunigungsstrukturen; auch in Linearbeschleunigern

Differentiation von  $\dot{\psi}$  liefert die longitudinale Bewegungs-DGL im Potential der Hochfrequenzfelder:

$$\ddot{\Delta\psi} + \frac{\beta c k_h \eta_c}{p_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta p c = 0 \quad ,$$

wobei  $\beta, k_h, \eta_c$  langsam variieren, daher als konstant betrachtet werden können.

(Langsame  $\hat{=}$  adiabatische Änderung externer Parameter  $\rightarrow$  Ehrenfest-Theorem erlaubt Bestimmung der Wirkung auf Strahl)

Energiegewinne/-verluste sind z.B. bei einem Umlauf:

$$(\Delta E)_{\text{rev}} = e \cdot U(\psi) - W(E) = eU_0 \sin \psi - W(E) \quad ,$$

wobei  $U_0 \sin \psi$  die Beschleunigungsspannung bei Phase  $\psi$  und  $W(E)$  Strahlungsverluste durch Synchrotronstrahlung (s. Abschnitt 9) bezeichnen.

Nach einem Umlauf ist  $\frac{\partial}{\partial t} \Delta p c = \beta \frac{\partial}{\partial t} \Delta E = \beta (\Delta E)_{\text{rev}} / T_0$  mit und  $p c = \beta E$ , Umlaufzeit  $T_0$

und die longitudinale Bewegungs-DGL um  $\Delta\psi = \psi - \psi_s$  lautet:

$$\frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} + \frac{\beta c k_h \eta_c}{E_0} \frac{d}{dt} \Delta E = 0 \xrightarrow{\text{Umlauf}} \frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} + \frac{\beta c k_h \eta_c}{T_0 E_0} \cdot \left[ eU_0 \sin(\psi_s + \Delta\psi) - W(E) \right] = 0 \quad (\#)$$

## Lösungen der longitudinalen Bewegungs-DGL mit kleiner Amplitude

Im Falle kleiner Oszillationen kann  $\Delta E$  (s. Folie 8.4) in einer Taylorreihe (mit  $\sin \psi \approx \psi$ ) entwickelt werden

$$\frac{d}{dt} \Delta E = \frac{\Delta E}{T_0} \approx \frac{1}{T_0} \left\{ eU(\psi_s) + e \left. \frac{dU}{d\psi} \right|_{\psi_s} \cdot \Delta\psi - W(E) - \left. \frac{dW}{dE} \right|_{E_0} \cdot \Delta E \right\},$$

wobei  $\Delta E/E_0 = -\Delta\psi/\beta c k_h \eta_c$  gilt (vgl. Folie 8.4).

Eingesetzt in die longitudinale Bewegungs-DGL folgt mit der Gleichgewichtsbedingung  $eU(\psi_s) = W(E)$ :

$$\frac{d^2 \Delta\psi}{dt^2} + 2 \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{2T_0} \frac{dW(E_0)}{dE} \right)}_{\equiv \alpha_S} \cdot \frac{d\Delta\psi}{dt} + \underbrace{\left( \frac{\beta c k_h \eta_c}{T_0 E_0} \cdot eU_0 \cos \psi_s \right)}_{\equiv \Omega_S^2} \cdot \Delta\psi = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\ddot{\psi} + 2\alpha_S \Delta\dot{\psi} + \Omega_S^2 \Delta\psi = 0$$

wobei  $\alpha_S$  eine Dämpfung (z.B. durch Synchrotronstrahlung) beschreibt und  $\Omega_S$  die *Synchrotron-Frequenz* ist.

- Teilchen führen eine *longitudinale Oszillation* mit Frequenz  $\Omega_S$  um Sollphase aus.
- Diese Schwingung wird gedämpft ( $\alpha_S > 0$ ) oder verstärkt ( $\alpha_S < 0$ ).

### Synchrotron-Oszillationen kleiner Amplitude

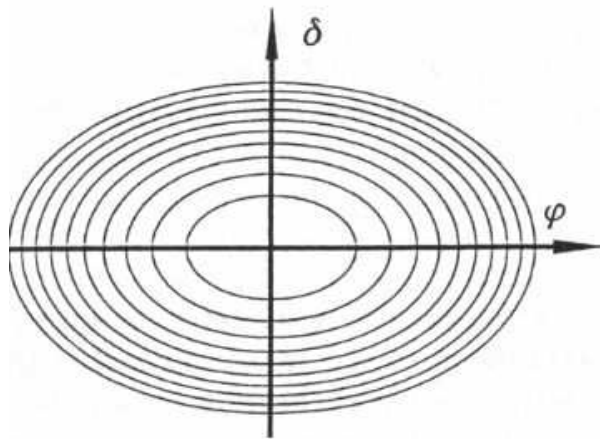


Fig. 8.3. Synchrotron oscillations in phase space for stable motion  $\Omega^2 > 0$  and small amplitudes  $\hat{\varphi} \ll 1$

Ohne Dämpfung gilt:  
 (mit  $\varphi \equiv \Delta\psi$ ,  $k_h = 2\pi h/L_0 = h\omega_r/\beta c$ ,  $\omega_r = 2\pi/T_0$ )

$$\ddot{\varphi} + \Omega_S^2 \varphi = 0$$

mit  $\Omega_S^2 = \omega_r^2 \frac{h\eta_c e U_0 \cos \psi_s}{2\pi \beta^2 E_0}$ .

→ Synchrotron-Tune

$$Q_S \equiv \frac{\Omega_S}{\omega_r}$$

(NB: i.A.  $Q_S \ll Q_{x,y}$ )

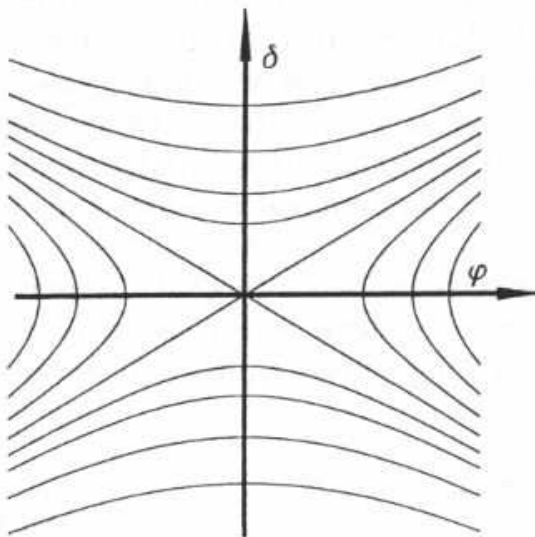


Fig. 8.4. Synchrotron oscillation in phase space for unstable motion  $\Omega^2 < 0$

- Schwingung um Sollphase  $\psi_s$ :

- ▷ in Phasenabweichung:

(Startphase  $\chi_i$  für Teilchen  $i$ )

$$\varphi \equiv \Delta\psi = \hat{\varphi} \cos(\Omega_S t + \chi_i)$$

- ▷ und in Impulsabweichung:

(s. Folie 8.4 mit  $\beta c k_h = h\omega_r$ )

$$\delta = \frac{\Delta p c}{p_0 c} = \frac{-\dot{\varphi}}{h\omega_r \eta_c} \propto \sin(\Omega_S t + \chi_i)$$

→ Stabile Synchrotron-Oszill. f.  $\Omega_S^2 > 0$ :  
 Ellipsen (Fig. 8.3)

→ Instabile Bewegung für  $\Omega_S^2 < 0$ :  
 Hyperbeln (Fig. 8.4)

NB:  $\Omega_S^2 \propto \eta_c \cos \psi_s \gtrless 0$ ,  $\eta_c = \gamma^{-2} - \alpha_c$

→ Übergangsenergie  $\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}$ , vgl. 5.20

- Stabile Oszill.:  $\eta_c \cos \psi_s > 0$

- ▷  $0 < \psi_s < \frac{\pi}{2}$  für  $\gamma < \gamma_t$

- ▷  $\frac{\pi}{2} < \psi_s < \pi$  für  $\gamma > \gamma_t$

⇒ Phasensprung bei  $\gamma = \gamma_t$  !



### Synchrotron-Oszillationen großer Amplitude

Im Falle großer Oszillationsamplituden gilt die Näherung  $\sin \psi \approx \psi$  in  $\Delta E = eU_0 \sin \psi$  nicht mehr.

Die longitudinale Bewegungs-DGL lautet dann:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Omega_S^2}{\cos \psi_s} [\sin(\psi_s + \varphi) - \sin \psi_s] = 0$$

(ohne Dämpfungsterm, mit obiger Definition von  $\Omega_S$ )

Entspricht der Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\left\{ -\frac{\Omega_S^2}{\cos \psi_s} [\cos(\psi_s + \varphi) - \cos \psi_s + \varphi \sin \psi_s] \right\}}_{\text{potentielle Energie } V}$$

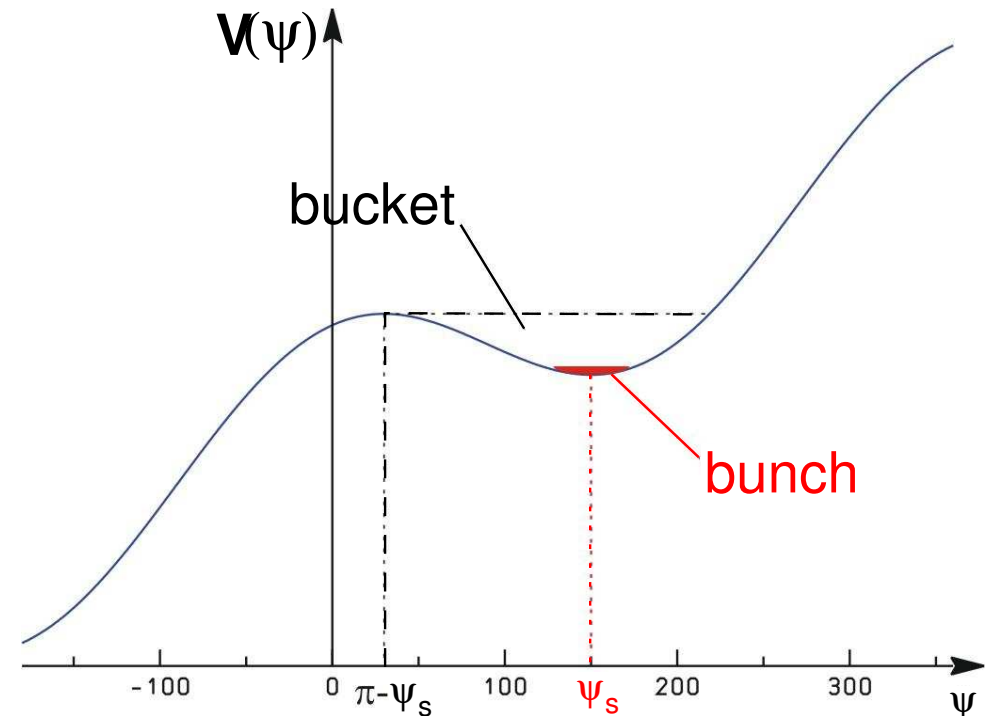
mit

potentielle Energie  $V$

Beiträge zur potentiellen Energie  $V(\psi)$ :

$$\propto \varphi = \psi - \psi_s \quad \text{und} \quad \propto \cos(\psi)$$

- Oszillationen nur für Teilchen in Potentialsenke
- maximale Auslenkung bei stabilen Oszillationen:  
 $\partial V(\psi) / \partial \psi = 0 \rightarrow \psi^{\max} = \pi - \psi_s$
- die zugehörige Kurve im Phasenraum, die *Separatrix*, trennt stabile und instabile Bereich
- maximaler Bereich stabiler Oszillationen heisst *bucket* oder *RF-bucket* (engl. für Eimer)
- Teilchen im Bucket bilden Teilchen-Bunch



### Separatizes

Die Hamilton-Funktion der Teilchenbewegung  $\hat{=}$  harmonischem Pendel.  $\Rightarrow$  Struktur der Trajektorien im  $\dot{\psi}$ - $\psi$ -Phasenraum für  $\psi_s = \pi$ : (NB:  $\dot{\psi} \propto \Delta p/p \equiv \delta$ )

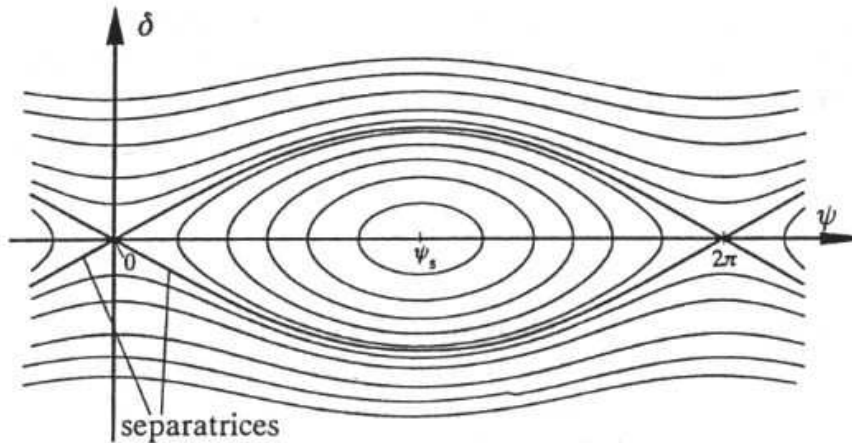


Fig. 8.5. Phase space diagrams for a synchronous phase  $\psi_s = \pi$

- $\psi_s = \pi$ :  $U(\psi) \propto \sin \psi_s = 0 \rightarrow$  keine Beschleunigung.
- $\psi_s < \pi$ : geänderte Trajektorien (Fig. 8.7:  $\eta_c < 0, \gamma > \gamma_t$ ).
- Insbesondere: kleinere stabile Bereiche für kleinere  $\psi_s$  ( $\Leftrightarrow$  wachsende Beschleunigung  $\Delta E = eU_0 \sin(\psi_s)$ ).
- Außerhalb Stabilitätsbereiche instabile Trajektorien: kontinuierl. Energieverlust/-gewinn, abhängig von  $\eta_c \geq 0$ .

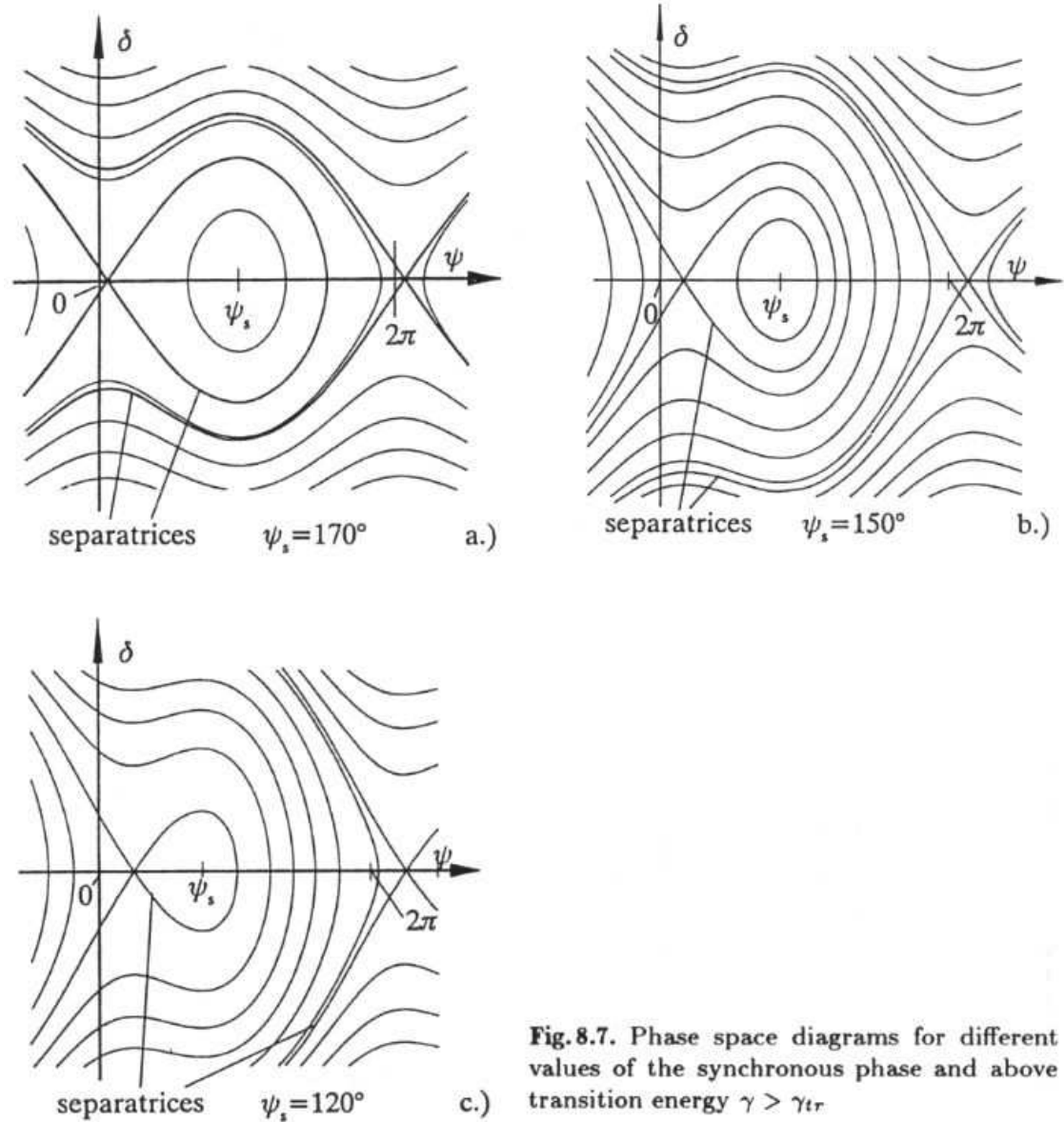


Fig. 8.7. Phase space diagrams for different values of the synchronous phase and above transition energy  $\gamma > \gamma_{tr}$

**Separatrix** (fortgesetzt)

Die Bestimmungsgleichung der Separatrix folgt aus  $\mathcal{H}(\psi) = \mathcal{H}(\psi_1^{\max})$  (vgl. Folie 8.7 und mit  $\varphi = \psi - \psi_s$ ):

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\Omega_S^2}{\cos\psi_s} [\cos\psi + (\psi - \psi_s) \sin\psi_s] = -\frac{\Omega_S^2}{\cos\psi_s} [\cos(\pi - \psi_s) + (\pi - 2\psi_s) \sin\psi_s] \quad (\#\#)$$

An beiden Punkte maximaler Auslenkung ist  $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$  (da pot. Energie  $V = \max. \rightarrow$  kinet. Energie  $= 0$ ):

- Punkt 1:  $\psi_1^{\max} = \pi - \psi_s$  (vgl. Folie 8.7)

- Punkt 2 folgt aus  $(\#\#)$ :

$$\cos(\psi_2^{\max}) + \psi_2^{\max} \sin\psi_s = \cos(\pi - \psi_s) + (\pi - \psi_s) \sin\psi_s$$

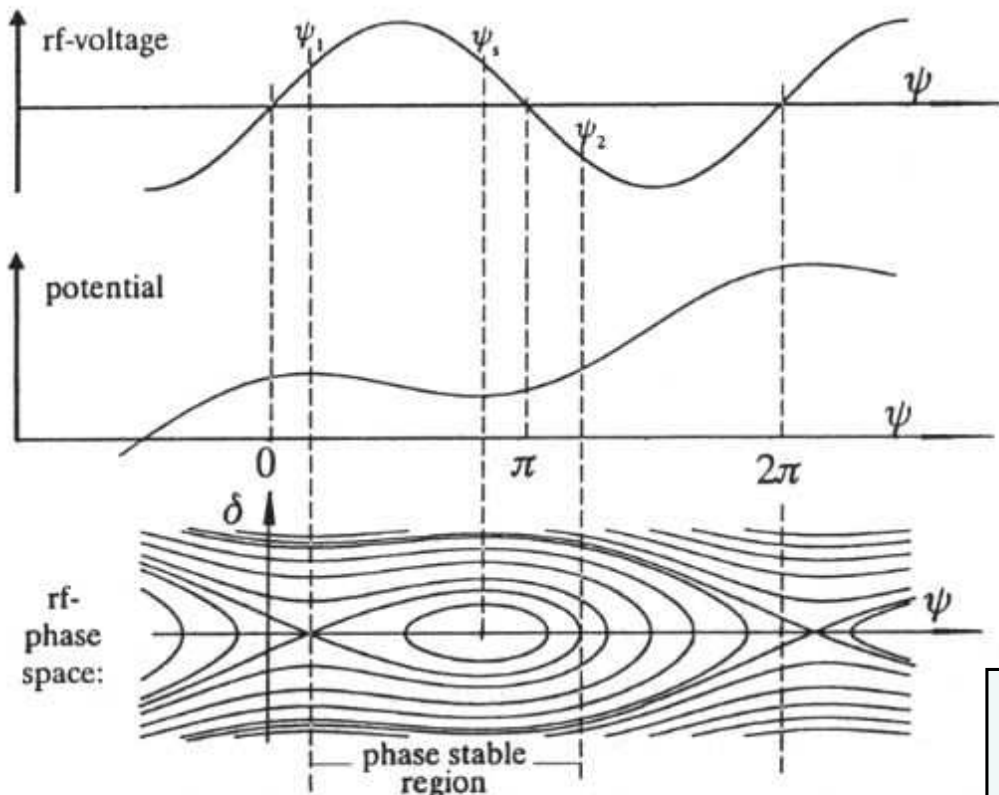
- maximales  $\dot{\psi}$  für  $\ddot{\psi} = 0$ , d.h. bei  $\psi = \psi_s$

$$(\#\#) \rightarrow \dot{\psi}_{\max}^2 = 2\Omega_S^2 [2 - (\pi - 2\psi_s) \cdot \tan\psi_s]$$

$\rightarrow$  RF-Akzeptanz (aus  $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{-\dot{\psi}}{\beta c k_h \eta_c}$ ,  $k_h = h \frac{2\pi}{\beta c T_0}$ ):

$$\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{\max} = \pm \sqrt{\frac{eU_0}{\pi h \eta_c E_0} [2 \cos\psi_s - (\pi - 2\psi_s) \sin\psi_s]}$$

pos.  $[\dots]$ :  $0 < \psi_s < \frac{\pi}{2}$ ,  $6.064 < \psi_s$ , aber auch  $\eta_c \lesssim 0$



**Fig.8.9.** Phase space focusing for moving rf bucket displaying the phase relationship of accelerating field, potential, and rf bucket

NB:  $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{\max} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega_{RF}}}$   $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{\max} \stackrel{\gamma \gg 1}{\propto} \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}$   $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)_{\max} \propto \sqrt{\frac{eU_0 \sin\psi_s}{E_0}}$  Mit  $\omega_{RF} \equiv \omega_h$  und  $\omega_h = k_h \beta c$

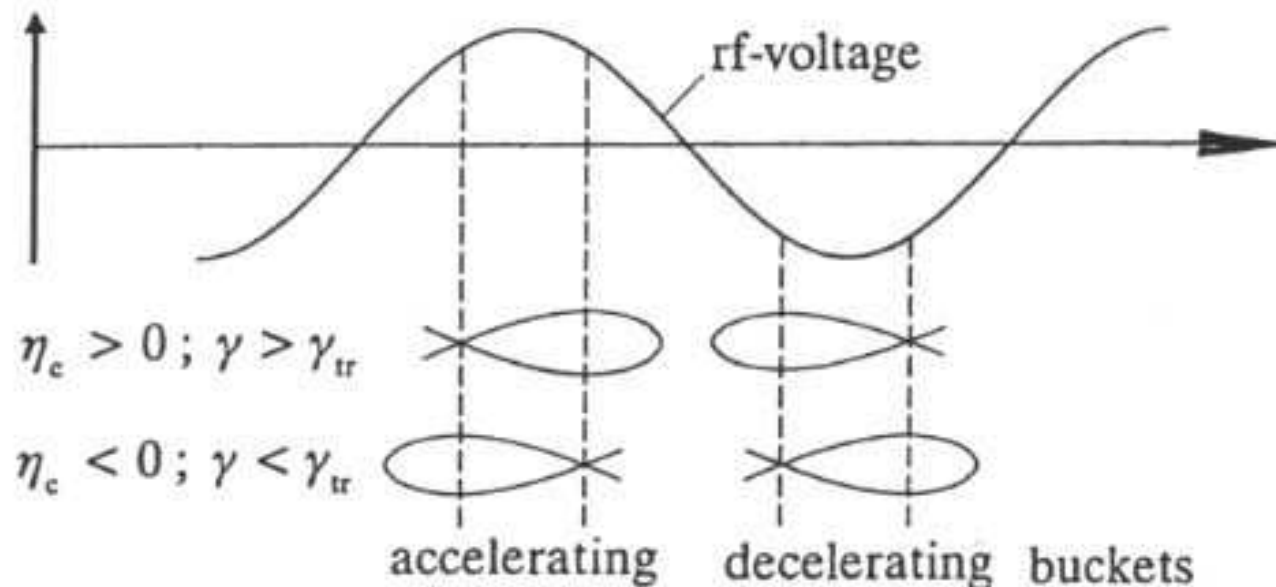
**Separatrix** (fortgesetzt)

- Phasen  $\psi_s$  und  $\pi - \psi_s$  ergeben den gewünschten Energiegewinn  
(da  $\Delta E \propto \sin(\psi_s)$ )

- nur eine Phase gibt stabile Phasenoszillationen

→ stabile Phase aus Forderung:  $\Omega_S^2 > 0 \Leftrightarrow \eta_c \cos \psi_s > 0$

- ▷ Orientierung des RF-Buckets hängt von Wahl für  $\eta_c$ ,  $\gamma_t$  und Beschleunigung/Abbremsung ab



**Fig. 8.10.** Relationship between rf phase and orientation of moving rf buckets for accelerating as well as decelerating fields

# Synchrotron-Strahlung

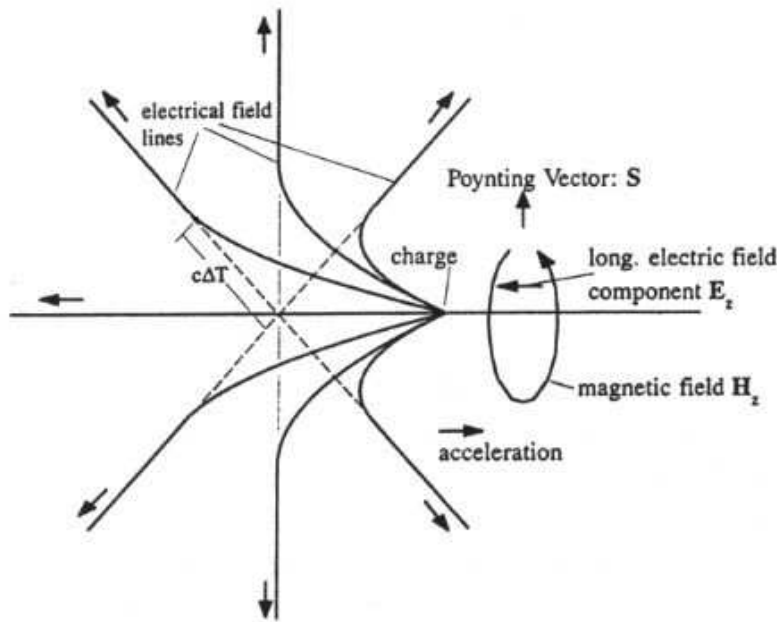
- Synchrotron-Strahlung
  1. Physikalische Grundlagen
  2. Kohärente Abstrahlung
  3. Wiggler und Undulatoren

## Physikalische Grundlagen

- Beschleunigte elektrische Ladungen strahlen elektromagnetische Wellen ab;
  - Phänomenologische Ursache: Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit;
  - 1898-1900 A.Liénard & E.Wiechert: Mathematische Behandlung durch *retardierte* Potentiale (Liénard-Wiechert-Potentiale);
  - Retardierte Potentiale  $\Phi_{\text{ret}}$  und  $\vec{A}_{\text{ret}}$  verknüpfen Felder am Beobachtungspunkt mit Ladungen & Strömen zum Zeitpunkt der Emission;
  - 1907 G.A.Schott: Klassische Theorie der Strahlung eines im homogenen Magnetfeld umlaufenden Elektrons;
  - 1946 J.P.Blewett: Berechnung & Beobachtung der Abnahme des Elektronorbits in einem 100 MeV Betatron (General Electric);
  - 1947 F.R.Elder: Erstmalige Beobachtung sichtbarer Strahlung an 70 MeV Synchrotron (General Electric);
- Strahlung wird als *Synchrotron-Strahlung* bezeichnet.

Mathematische Herleitung der Synchrotron-Strahlung aus den Maxwell-Gleichungen ist zwar geradlinig aber sehr umfangreich. Daher im Folgenden: nur intuitive Diskussion zur Physik der Synchrotron-Strahlung.

### Abstrahlung von beschleunigten Ladungen



**Fig.9.1.** Distortion of electrostatic fields by longitudinal particle acceleration and creation of synchrotron radiation

Zwei Fälle von Beschleunigung bezüglich der Bewegungsrichtung der Ladung: longitudinal, transversal

Wirkung einer longitudinalen Beschleunigung auf elektr. Feldlinien:

- vor Beschleunigung: Feldlinien radial von Ladung nach aussen
- Beschleunigung während  $\Delta T$ : von Ladung ausgehende Feldlinien müssen sich mit ursprünglichen radialen bei  $r = c\Delta T$  verbinden
- ▷  $\vec{E}^*$ -Feld erhält während Beschleunigung nicht-radiale Komponenten (\* bezeichnet das anfängliche Lorentzsystem der Ladung)

▷ bewegte Ladung erzeugt azimuthales Magnetfeld  $\vec{B}_\varphi^*$

→ Poynting-Vektor  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^* \times \vec{B}^*] \neq 0$  ( $\hat{=}$  Energiestrom), elektromagnetische Energie wird in Richtung von  $\vec{S}$  abgestrahlt

- $\vec{E}$ -Feldstörung  $\propto$  Ladung  $q$  und Beschleunigung  $a^*$
  - nicht-radiale Feldkomponente  $\propto \sin \theta^*$
  - $\theta^*$  ist  $\angle$ (Beobachtungs-, Beschleunigungsrichtung)
  - Feldstärke nimmt radial mit  $1/R$  ab
- $\vec{E}$ -Feldstörung ( $\perp$  Beobachtungsrichtung):

$$|\vec{E}_\perp^*| = \frac{qa^*}{c^2 R} \sin \theta^*$$

- $|\vec{B}|$ -Feld  $\propto |\vec{E}|$ -Feld

(da durch Verschiebungsstrom hervorgerufen)

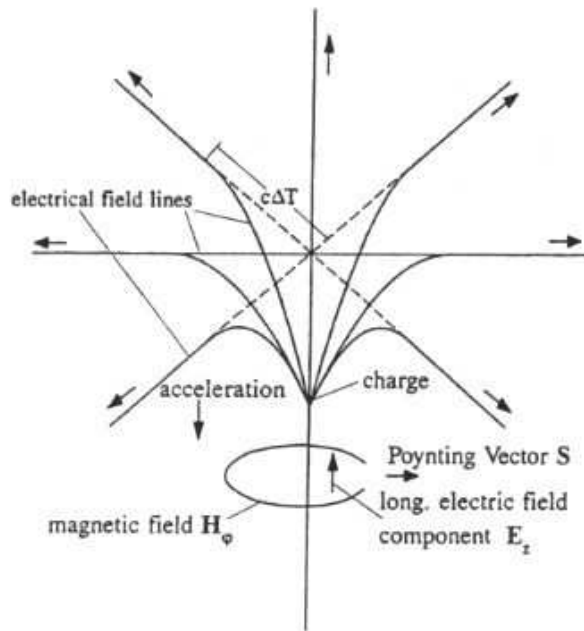
→ Poynting-Vektor  $\vec{S} \propto$  Quadrat des  $|\vec{E}|$ -Feldes

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}^*|^2 \vec{n}^* \quad \text{(NB: Gauss-Einheiten)}$$

mit Einheitsvektor  $\vec{n}^*$  von Beobachter zur Ladung

NB:  $\vec{S} \xrightarrow{a^* \rightarrow 0} 0$ , keine Abstrahlung ohne Beschleunigung

### Abstrahlung transversal beschleunigter Ladungen



**Fig.9.1.** Distortion of electrostatic fields by transverse particle acceleration and creation of synchrotron radiation

- transversale Beschleunigung erzeugt transversale  $\vec{E}$ -Feldkomponenten
- maximale Störung in Vorwärtsrichtung ist  $\perp \vec{a}^*$
- Mit  $\theta^*$  als  $\angle$ (Beobachtungs-, Beschleunigungsrichtung)

→  $\vec{E}$ -Feldstörung ( $\perp$  Beobachtungsrichtung):

$$|\vec{E}_{\perp}^*| = \frac{qa^*}{c^2 R} \cos \theta^*$$

- ▷ transversale Beschleunigung
- ▷ Strahlung wird hauptsächlich in Vorwärtsrichtung tangential zur Teilchenbewegung emittiert

→ analog zur longitudinalen Beschleunigung:

Poynting-Vektor  $\vec{S} \propto (\vec{E}\text{-Feldes})^2$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}^*|^2 \vec{n}^*$$



### Synchrotron-Strahlungsleistung

- $P = \int \vec{S} d\vec{A}^*$

- ◇ mit  $\vec{n}^* d\vec{A}^* = R^2 \sin \theta^* d\theta^* d\psi^*$

- ◇ und  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}^*|^2 \vec{n}^*$

- ◇ mit  $|\vec{E}^*| \propto a^* \sin \theta^*$  oder  $\propto a^* \cos \theta^*$

- ◇ und  $a^* = c\dot{\beta}^*$

→ *Lamorsche Formel:*  
(Herleitung vereinfacht)

$$P = \frac{2q^2}{3c} \left| \dot{\vec{\beta}}^* \right|^2$$

- In lorentzinvarianter Form mit Viererimpuls  $p^\mu/mc$  und Eigenzeitelement  $d\tau = dt/\gamma$

$$P = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dp_\mu^*}{d\tau} \frac{dp^{*\mu}}{d\tau} \right)$$

- ◇ dabei ist mit  $\vec{p} = \gamma mc \vec{\beta}$  und  $E = \gamma mc^2$

$$\left( \frac{dp_\mu^*}{d\tau} \frac{dp^{*\mu}}{d\tau} \right) = \gamma^2 m^2 c^2 \left[ \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 - \left( \frac{d\gamma \vec{\beta}}{dt} \right)^2 \right]$$

- ◇ Der Ausdruck  $[\dots]$  ergibt mit Hilfe der Relationen  $\vec{\beta}^2 \dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \dot{\vec{\beta}})^2 = [\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}]^2$  und  $\dot{\gamma} = (\vec{\beta} \dot{\vec{\beta}}) \gamma^3$

$$\rightarrow P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \left( \dot{\vec{\beta}}^2 - [\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}]^2 \right)$$

- Für longitudinale & transversale Beschleunigung mit  $\vec{\beta} = \vec{\beta}_\parallel + \vec{\beta}_\perp$  folgt

$$\rightarrow \begin{cases} P_\parallel = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \dot{\beta}_\parallel^2 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}_\parallel}{dt} \right)^2 \\ P_\perp = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^4 \dot{\beta}_\perp^2 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left( \frac{d\vec{p}_\perp}{dt} \right)^2 \end{cases}$$

- ◇ mit  $E = \gamma mc^2$  und  $p = \gamma mc \beta$  und

- ▷  $\gamma mc \dot{\beta}_\parallel = \frac{1}{\gamma^2} (d\vec{p}_\parallel/dt)$

- ▷  $\gamma mc \dot{\beta}_\perp = (d\vec{p}_\perp/dt)$

- NB:  $P_\perp \propto \gamma^2 \rightarrow P_\perp \gg P_\parallel$  für  $\dot{p}_\parallel \sim \dot{p}_\perp$

### Synchrotron-Strahlungsleistung (fortgesetzt)

Charakteristische Eigenschaften (für einfach geladene Teilchen  $q = e$ ):

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} P_{\parallel} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \dot{\beta}_{\parallel}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \beta^2 \left( \frac{dE}{dx} \right)^2 \\ P_{\perp} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^4 \dot{\beta}_{\perp}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left( \frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} e^2 c \beta^4 \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4 \end{array} \right.$$

wobei  $\left( \frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} \right) \xrightarrow[\beta(dE/dx)]{dp_{\parallel}/dt =} \beta \cdot (dE/dx)$  und  $\left( \frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} \right) = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \xrightarrow[p = \gamma mc \beta]{pc = eB\rho} \gamma mc \frac{c\beta^2}{\rho}$

- Beispiel Elektron-Linearbeschleuniger (Tesla):  $dE/dx \approx 40 \text{ MeV/m} \rightarrow \frac{P}{\beta(dE/dx)} \sim 10^{-16}$   
(NB: Gauss-  $\rightarrow$  SI-Einheiten:  $e^2 \rightarrow e^2/4\pi\epsilon_0$ )

- Beispiel Elektron/Proton-Kreisbeschleuniger:  $\frac{P_{\perp,e}}{P_{\perp,p}} = \left( \frac{m_p}{m_e} \right)^4 \sim 10^{13} !$

- Synchrotron-Strahlungsleistung pro Umlauf:  $\Delta E = \oint P_{\perp} dt \stackrel{ds=c\beta dt}{=} \frac{2}{3} e^2 \beta^3 \gamma^4 \oint \frac{ds}{\rho^2}$

Im isomagnetischem Gitter:  $\rho = \text{const.} \rightarrow \oint ds = 2\pi\rho \rightarrow \Delta E = \frac{4\pi}{3} e^2 \beta^3 \frac{\gamma^4}{\rho}$

$\rightarrow$  in praktischen Einheiten für Elektron/Positron:  $\Delta E[\text{keV}] \approx 88.5 \cdot \frac{(E[\text{GeV}])^4}{\rho[\text{m}]}$

**Synchrotron-Strahlungsleistung** (fortgesetzt)

Beispiele:

Beschleuniger	Umfang [m]	Energie [GeV]	Radius [m]	$B$ -Feld [T]	$\Delta E$ [MeV]
BESSY I (Berlin)	62.4	0.8	1.78	1.50	0.02
DORIS II (DESY)	288	5.0	12.2	1.37	4.53
ESRF (Grenoble)	844	6.0	23.4	0.855	4.90
PETRA (DESY)	2304	23.5	195	0.40	138
LEP II (CERN)	27 000	104	3000	0.116	3450

BESSY, DORIS II, ESRF sind so gen. *Synchrotron-Strahlungsquellen*, d.h. auf Erzeugung von Synchrotron-Strahlung spezialisiert, PETRA wird demnächst dazu umgebaut.

Synchrotron-Strahlungsquellen nutzen besondere Eigenschaften der Synchrotron-Strahlung . . . (→ nächste Folie)

### Eigenschaften der Synchrotron-Strahlung

(NB: In diesem Abschnitt werden vielfach nur Resultate angegeben, da Rechnungen i.A. umfangreich!)

- Winkelverteilung:

Hertzscher Dipol im mitbewegten Bezugssystem  $\xrightarrow{\text{Lorentz-transform.}}$  Photon-Abstrahlwinkel im Laborsystem

$$\tan \theta = \frac{p_y}{p_z} \approx \frac{1}{\gamma}$$

→ schmales Strahlbündel bei großem  $\gamma$

- Zeitstruktur

Öffnungskegel der Abstrahlung  $\propto 2/\gamma$   
überstreicht Beobachtungsrichtung

Pulslänge: Laufzeitdifferenz von  $P_0 \rightarrow P_1$

von: Teilchen – Licht

$$\delta t = \frac{2\rho}{\beta c \gamma} - \frac{2\rho}{c} \sin \frac{1}{\gamma} \approx \frac{4\rho}{3c\gamma^3}$$

→ sehr kurzer Puls bei großem  $\gamma$

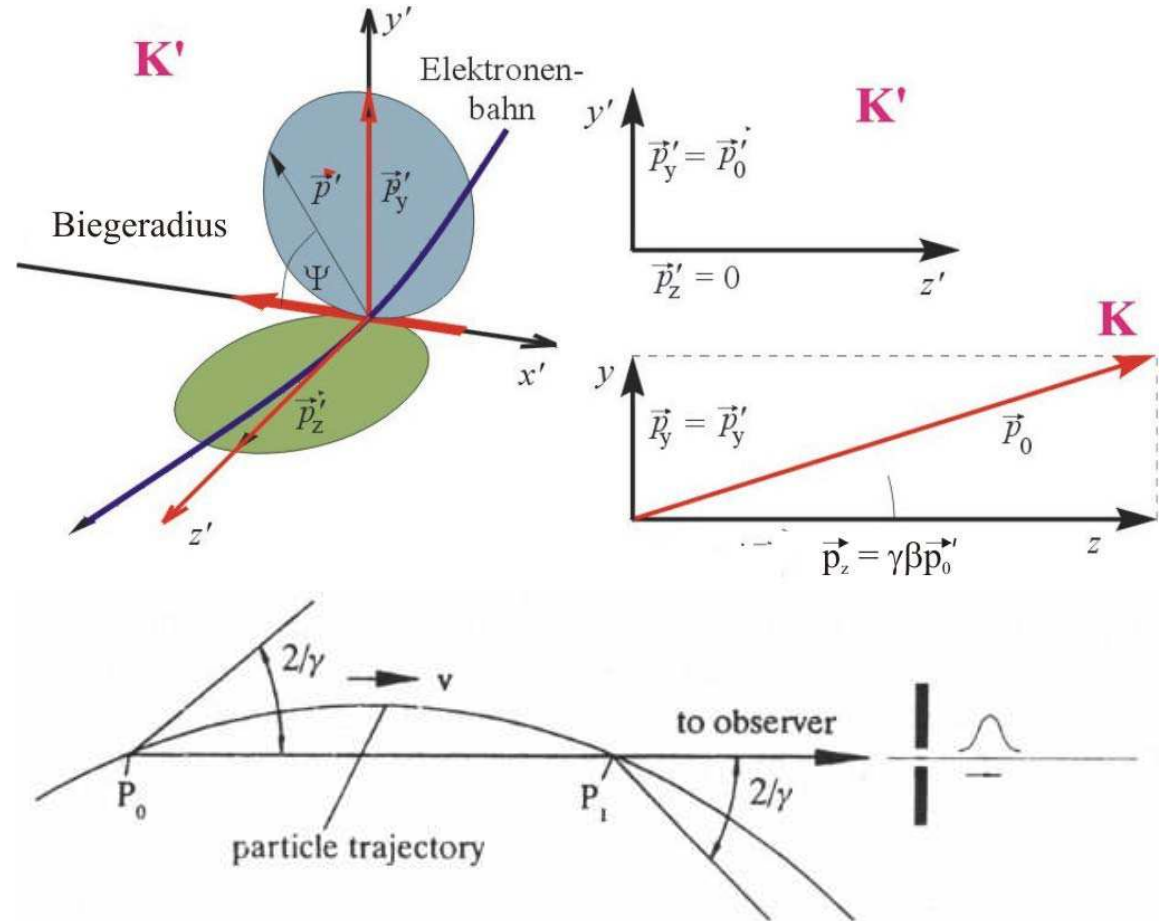


Fig. 9.3. Time structure of synchrotron radiation

**Eigenschaften der Synchrotron-Strahlung** (fortgesetzt)

- Spektrum

Pulslänge  $\propto \frac{1}{\gamma^3} \rightarrow$  beschränktes Fourierspektrum

kritische Frequenz:  $\omega_c \equiv \frac{3c\gamma^3}{2\rho} = 2/\delta t$

▷ Photonfluss in Ablenkebene (Winkel  $\psi$ ):

$$\frac{dN_\gamma}{d\psi} = \frac{4\alpha}{9emc^2} EI \frac{\Delta\omega}{\omega} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

◇ Strahlstrom  $I$ , Photonenergie  $E$ , Frequenzintervall  $\Delta\omega$   
(Feinstrukturkonstante  $\alpha$ , Elektronenmasse & -ladung  $m, e$ )

◇ universelle Synchrotronstrahlungsfkt.  $S(\omega/\omega_c)$  (Fig.9.5)

- Polarisation

▷ in Ablenkebene: vollständig linear

▷ außerhalb Ablenkebene: schwach elliptisch

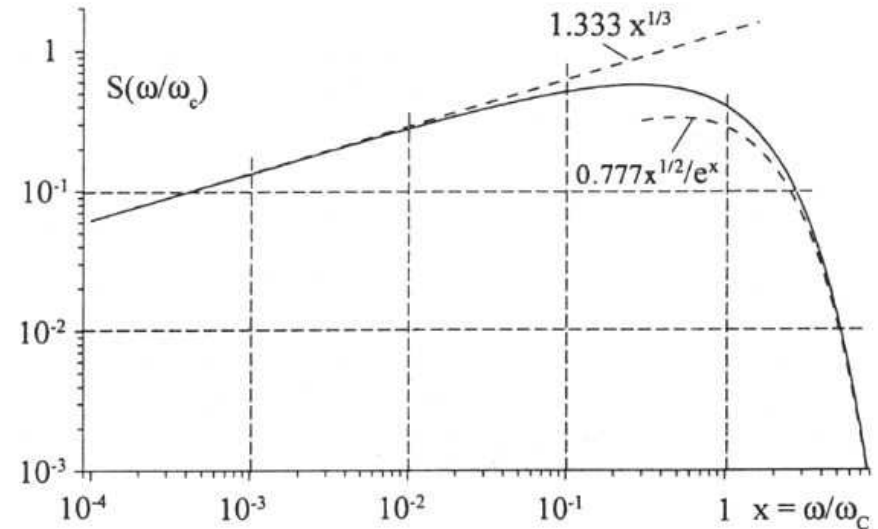
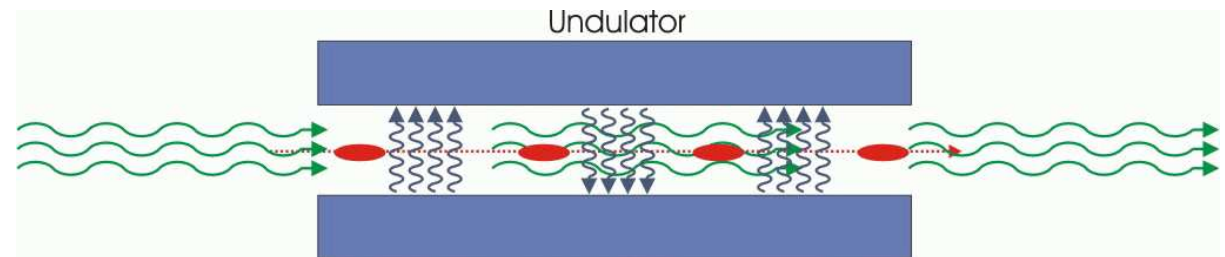


Fig. 9.5. Universal function of the synchrotron radiation spectrum  $S(\omega/\omega_c)$

## Kohärente Abstrahlung

- Synchrotronstrahlung hat breites Spektrum  
(von Umlauffrequenz bis wenig über kritische Frequenz)
- ▷ Abstrahlintensität  $\propto$  Strahlstrom,
- Abstrahlintensität  $\propto$  Teilchenzahl  $N_e$
- bei geringen Photonenenergien:  
erhöhte Abstrahlung möglich
- ▷ Poynting-Vektor  $|\vec{S}| \propto |\vec{E}^*|^2 \propto q^2$
- ▷ Photon-Wellenlänge  $\lambda \geq$  Bunch-Länge  
(d.h.  $\lambda$  zu groß, um Bunch-Struktur aufzulösen)
- *alle* Teilchen eines Bunch strahlen *kohärent*
- Intensität  $\propto$  (Teilchenzahl im Bunch,  $N_e$ )<sup>2</sup> !
- ⇒ *Freie-Elektronen-Laser* (FEL)
- (nutzen spezielle Magnetstrukturen, z.B. Undulatoren:  
Magnete mit periodisch wechselnde Feldrichtung)

### Freie-Elektronen-Laser Konzept:



Emission:  
(inverse Compton-Streuung eines  $e^-$  an  $\gamma$ )

Absorption:  
(Compton-Streuung eines  $\gamma$  am  $e^-$ )

# Wiggler und Undulatoren

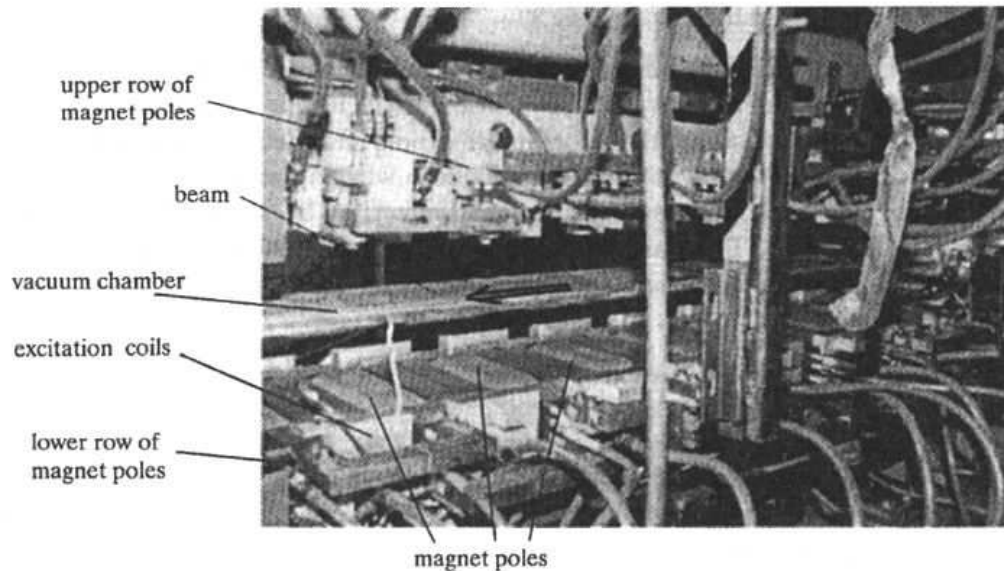


Fig.9.14. Electromagnetic wiggler magnet with a maximum field strength of 18 kG and eight poles [9.32]

- *Wiggler-/Undulator-Magnet*: alternierende Folge auf-/abwärts gerichteter Magnetfelder, Periode  $\lambda_p$

$$\diamond B_y(x, y=0, z) = B_0 \sin(2\pi z/\lambda_p)$$

- ◇ Ablenkwinkel je Halbpol:

$$\vartheta = \frac{B_0}{B\rho} \int_0^{\lambda_p/4} \sin(2\pi z/\lambda_p) dz = \frac{B_0 \lambda_p}{B\rho 2\pi}$$

- ◇ *Wiggler-Stärkeparameter*:  $K \equiv \beta\gamma\vartheta$

- Unterscheidung: Wiggler  $\leftrightarrow$  Undulator  
 $K \gg 1 \leftrightarrow K \leq 1$

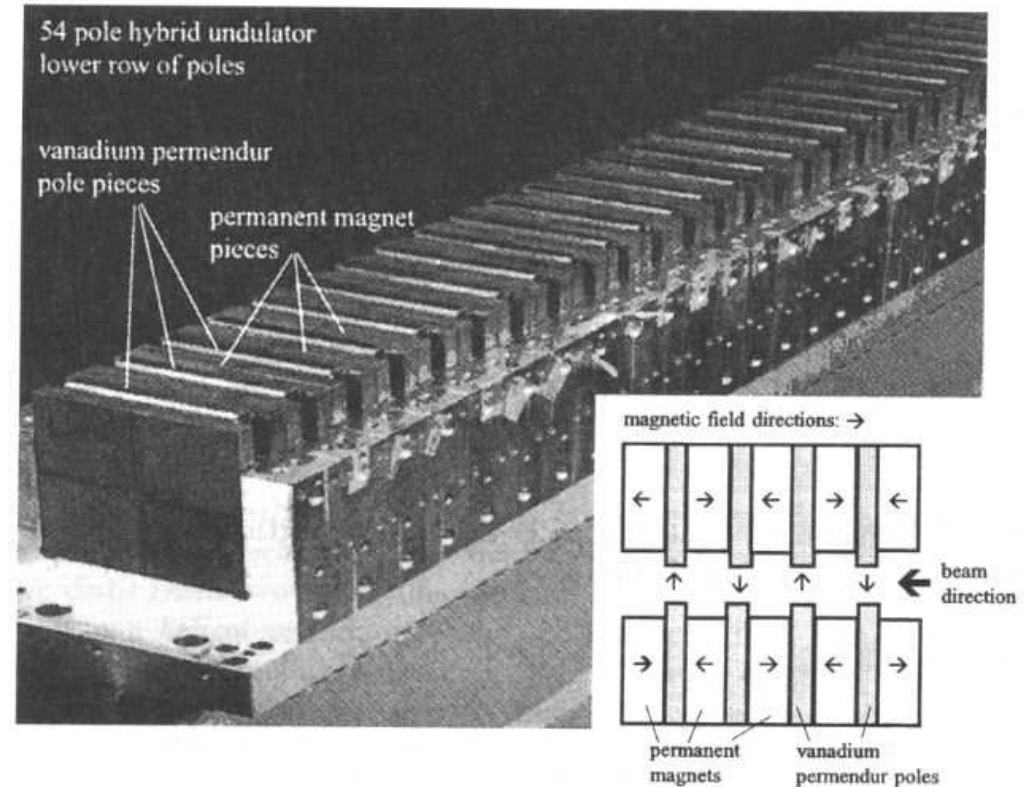


Fig.9.15. Row of 54 wiggler poles based on permanent magnet technology [9.33]

- Wiggler: Erzeugung von intensiver Synchrotron-Strahlung im Röntgen-Bereich

- Undulatoren: Kohärente Synchrotron-Strahlung

$$\text{Photonenergie: } \epsilon_\gamma[\text{eV}] = 950 \frac{E^2[\text{GeV}^2]}{\lambda_p[\text{cm}](1 + \frac{1}{2}K^2)}$$

## Vorteile/Nachteile der Synchrotron-Strahlung

- ⊖ Energieverlust insbesondere für Elektronen/Positronen  $\Delta E \propto \frac{1}{\rho} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4$
- ⊖ Synchrotron-Strahlungsleistung  $P_{\perp} \propto \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4$
- ⊖ Hochenergetische Elektron-Kreisbeschleuniger erfordern großen Radius  $\rho$
- ⊕ hochintensive Lichtquelle
- ⊕ sehr kurze Lichtpulse
- ⊕ stark gebündelt bei hoher Strahlenergie
- ⊕ breites Frequenzspektrum, bis in den Röntgenbereich
- ⊕ Phasenraumdämpfung (d.h. Verkleinerung der Emittanz)
- ⊕ Aufbau transversaler Polarisation der Elektronen/Positronen im Strahl  
(Sokolov-Ternov-Effekt: Energieunterschied für Elektronenspin  $\uparrow\uparrow/\uparrow\downarrow$  zu Magnetfeld  
→  $E^4$ -Term: Spineinstellung mit kleinerer Energie bevorzugt)



## Teilchenstrahlparameter

- Teilchstrahlparameter
  1. Allgemeine Parameter (Energie, Zeitstruktur, Strom, Dimensionen)
  2. Dämpfung, Dämpfungspartitionen
  3. Teilchenverteilung im Phasenraum
  4. Strahlemittanz und Wiggler-Magnete

## Strahlparameter

- Strahlenergie:
  - Teilchenimpuls (für transversale Strahldynamik)
  - kinetische Energie (für Beschleunigung)
- Zeitstruktur:
  - Unterteilung des Strahls in Bunche,
  - ggf. diese noch in Mikro-Bunche;
  - auch Zusammenfassung mehrere Mikro-Bunche zu einem “bunch train” mit Lücken zwischen den Trains
- Strahlstrom:
  - mittlerer Strom im Bunch (d.h. zeitgemittelt über Zeitdauer des Bunches)
  - mittlerer Strom im gesamten Beschleuniger ( $\hat{=}$  Summe aller Bunch-Ströme)
  - *Duty Factor* oder *Duty Cycle*: Verhältnis von Zeit mit Strahl zu Gesamtzeit für Umlauf  
(100% Duty Factor  $\hat{=}$  DC-Strahl)
- Strahldimension:
  - Strahlgröße durch  $\sqrt{\text{Emittanz} \cdot \beta\text{-Funktion}}$
  - *normierte Emittanz*:  $\varepsilon_n \equiv \beta_r \gamma_r \varepsilon$ , bleibt konstant gemäß Liouville-Theorem (NB:  $\beta_r, \gamma_r$  Lorentzfaktoren)
  - *normierte 95%-Emittanz*:  $\varepsilon_{N95} \equiv 6\beta_r \gamma_r \varepsilon$ , wenn Strahl nicht gaußförmig oder “ausgefranst”

## Strahlparameter

- Luminosität:

- Zählrate  $\dot{N} = \mathcal{L}\sigma$

Produkt aus Luminosität  $\mathcal{L}$  und Wirkungsquerschnitt  $\sigma$

- $\mathcal{L} = fB \frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y}$

mit Teilchenzahlen  $n_{1,2}$  in  $B$  kollidierenden Bunchen, Kollisionsfrequenz  $f$ ,

- $= fB \frac{n_1 n_2}{4\sqrt{\beta_x^* \varepsilon_x \beta_y^* \varepsilon_y}}$

Strahlgröße  $\sigma_{x,y}$ , Emittanz  $\varepsilon_{x,y}$ ,  $\beta$ -Funktion am Kollisionsort  $\beta_{x,y}^*$

- $\mathcal{L} \propto I^2$

bei Strom  $I$  je Strahl

(NB: nicht-lineare Strahl-Strahl-Effekte →  $\mathcal{L} \propto I^1$  bei hohem Strahlstrom)

## Dämpfung

- Synchrotron-Strahlung  $\propto E^4$

- geringe Energiestreuung im  $e^-/e^+$ -Strahl → starke Streuung in Synchrotron-Strahlungsverlust

→ Reduktion der Energiestreuung im Strahl durch Synchrotron-Strahlung

- Betatron-Oszillation  $\leftrightarrow$  Transversalimpuls, trägt zu Synchrotron-Strahlungsverlust bei

- Beschleunigungsresonatoren führen Strahl nur Longitudinalimpuls zu

→ Reduktion der Transversalimpulse im Strahl durch Synchrotron-Strahlung

- Dämpfung: Partionszahl  $J_{x,y,s}$ , Dekrement  $\alpha_{x,y,s} = -\frac{1}{2} \frac{\langle P_\gamma \rangle}{E_0} J_{x,y,s}$ , Robinsonkriterium  $J_x + J_y + J_s = 4$

mittlere Synchrotron-Strahlungsleistung  $\langle P_\gamma \rangle$  (longitudinal:  $\langle P_\gamma \rangle =$  Beschleunigungsenergie  $\Delta E$ /Umlaufzeit  $T_0$ ),

Teilchenenergie  $E_0$ , für "separated function"-Beschleuniger  $J_x \approx 1, J_y \approx 1, J_s \approx 2$ , d.h. Dämpfung in allen 3 Dim.

### Teilchenverteilung im Phasenraum

- relativistische Elektronen/Positronen erzeugen Synchrotron-Strahlung in Ablenkmagneten

▷ Quantenanregungs- und Dämpfungseffekte

→ Gleichgewichtswerte von Strahlparametern:

◇ Energiestreuung:  $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{E^2} \approx 3.84 \times 10^{-13} \text{m} \cdot \frac{\gamma^2 \langle 1/\rho^3 \rangle_s}{J_s \langle 1/\rho^2 \rangle_s}$  mit Photonenergie  $\varepsilon$  und  $\langle 1/\rho^n \rangle_s = \int_0^\infty \varepsilon^2 / \rho(\varepsilon)^n d\varepsilon$

◇ Bunch-Länge:  $\sigma_\ell \propto 1/\sqrt{U_0}$  mit Beschleunigungsspannung  $U_0$

◇ transversale Strahl-Emittanz:  $\varepsilon_{x,y} \approx 3.84 \times 10^{-13} \text{m} \cdot \frac{\gamma^2 \langle 1/\rho^3 \mathcal{H} \rangle_s}{J_{x,y} \langle 1/\rho^2 \rangle_s}$  mit  $\mathcal{H}(s) = \beta\eta'^2 + 2\alpha\eta\eta' + \gamma\eta^2$

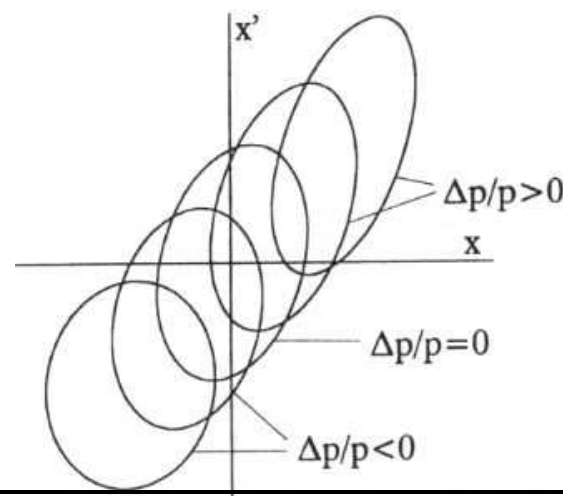
Ablenkung nur in horizontaler Ebene →  $\varepsilon_y/\varepsilon_x = 1/\gamma^2 \ll 1$  grob genähert

◇ transversale Strahlgröße:  $\sigma_{x,y} = \sqrt{\varepsilon_{x,y}\beta_{x,y}(s) + \eta^2(s)\sigma_\delta^2}$  mit  $\sigma_\delta \equiv \sigma_\varepsilon/p_0c$ , Dispersion  $\eta(s)$

→ Bruchteil der Strahlintensität in gauss-förmigen Strahl:

	1-dim	2-dim	3-dim
$1\sigma$	68.3%	46.6%	31.8%
$2\sigma$	95.4%	91.1%	86.9%
$\sqrt{6}\sigma$	98.6%	97.1%	95.7%

z.B.: in  $2\sigma_x \cdot 2\sigma_y$  sind 46.6% der Intensität;  
in  $\sqrt{6}\sigma_x \cdot \sqrt{6}\sigma_y$  sind 95.7%, →  $\varepsilon_{N95}$ -Definition



**Fig. 10.3.** Distribution of beam ellipses for a beam with finite emittance and momentum spread (schematic). The variation in the shape of the phase ellipses for different energies reflects the effect of chromatic aberrations

Prof. Dr. O. Biebel ◇ transversale Strahldivergenz:  $\sigma_{x',y'} = \sqrt{\varepsilon_{x,y}\gamma_{x,y}(s) + \eta'^2(s)\sigma_\delta^2}$

## Strahlemittanz und Wiggler-Magnete

- Elektron/Positron-Kreisbeschleuniger: Strahl-Emittanz durch Synchrotron-Strahlung bestimmt
- ▷ Emittanzvergrößerung durch Quantenanregung bei Photon-Emission  
(bei Dispersion  $\eta \neq 0$  führt Synchrotron-Strahlungsemission zu plötzlichem Energieverlust  
→ Änderung der Gleichgewichtstrajektorie  
→ i.A. größere Betatron-Oszillationsamplitude um neues Gleichgewichtsort)
- ▷ Emittanzverkleinerung durch Dämpfung
- Emittanz-Manipulation durch gezielten Einsatz von Synchrotron-Strahlung !
- so gen. *Dämpfungs-Wiggler-Magnete* mit  $B(z) = B_w \cos(2\pi z/\lambda_p)$  (vgl. Folie 9.11)
- ▷ in Abschnitten mit  $\eta = 0$  → minimale Quantenanregung durch Synchrotron-Strahlung
- ▷ für Zahl der Wiggler-Pole  $\rightarrow \infty$  gilt:  $\frac{\varepsilon_{x,w}}{\varepsilon_{x,0}} \rightarrow \frac{4}{30\pi} \frac{C_Q}{J_x} \frac{\beta_x}{\varepsilon_x \rho_w} \gamma^2 \Theta_w^2$  mit  $C_Q \equiv 2.06 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{GeV}^2}$ ,  
 $\Theta_w = \lambda_p/2\pi\rho_w$ , Bahnkrümmung im Wiggler  $\rho_w = p_0 c/eB_w$ , Betatron-Fkt.  $\beta_x$  und Emittanz  $\varepsilon_x$  in horizontaler Ebene
- mit Wiggler: Emittanz nimmt ab, wenn  $\frac{4}{30\pi} \frac{C_Q}{J_x} \frac{\beta_x}{\varepsilon_x \rho_w} \gamma^2 \Theta_w^2 < 1$
- ◇ Energiestreuung  $\frac{\sigma_{\varepsilon,w}^2}{\sigma_{\varepsilon,0}^2} \rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_w} = \frac{B_w}{B_0}$  wächst,  
wenn Wiggler-Magnetfeld  $B_w > B_0$  Magnetfeld in Ablenktdipolen ( $B_w > B_0$  trifft für fast alle Anwendungen zu)

## Strahllebensdauer

Strahllebensdauer: Stromabnahme  $I(t) = I_0 \cdot \exp(-t/\tau)$

Zur endlichen Strahllebensdauer trägt bei:

- Vakuum: Teilchenverlust durch Streuung an Restgas in Strahlröhre, wenn Streuwinkel  $>$  Akzeptanz der Apertur
  - ◇ Vielfach-Streuung  $\rightarrow$  Winkeländerung (Coulomb-Streuung)
    - $\rightarrow$  Emittanz  $\varepsilon_{x,y} \propto \frac{Z^2 L^2}{(\beta c p)^2 X_0}$
    - (Kernladung  $Z$ , Weglänge im Restgas  $L$ , Strahlungslänge des Restgases  $X_0$ )
  - ◇ elastische Streuung (Rutherford-Streuung)
    - $\rightarrow$  Strahllebensdauer  $\tau$ :
    - $$\tau^{-1} \propto P \cdot \left( \frac{zZ}{\beta c p} \right)^2 \frac{1}{\tan^2(\hat{\theta}/2)}$$
    - Teilchenladung  $z$ , Restgasdruck  $P$ , max. zulässiger Streuwinkel  $\hat{\theta}$
  - ◇ inelastische Streuung  
z.B. Bremsstrahlung

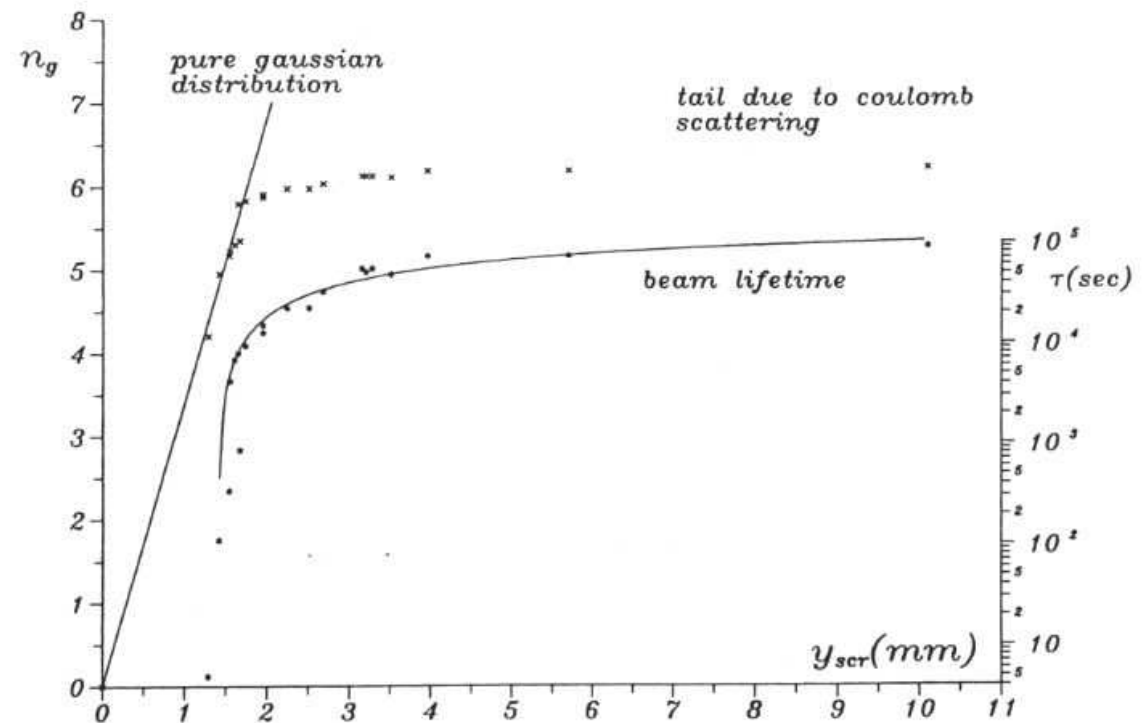


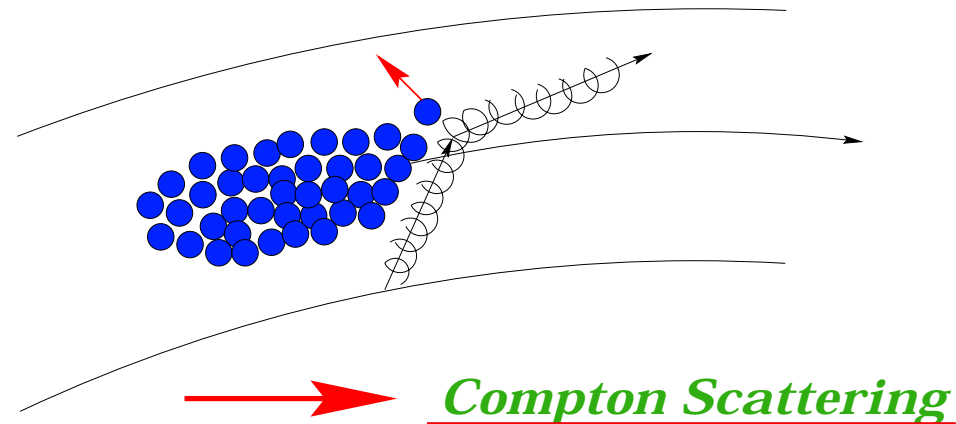
Fig. 11.2. Measurement of beam lifetime in an electron storage ring with a movable scraper. The curve on the left shows the Coulomb scattering halo for amplitudes larger than  $6\sigma$  indicating a strong deviation from a gaussian particle distribution. The curve on the right shows the beam lifetime as a function of scraper position.

## Strahllebensdauer (fortgesetzt)

- thermische Photonen:  
durch inverse Compton-Streuung der Teilchen im Strahl an thermischen Photonen im Strahlrohr
- Synchrotron-Strahlungsphotonen:  
inverse Compton-Streuung
- Kollision zwischen Teilchenstrahlen:  
hierzu tragen insbesondere Strahl-Strahl-Wechselwirkungen (nicht-lineare Effekte) bei

Beispiele:

- ◇ LEP-Beschleuniger ( $e^+e^-$ ) Tab. ↘  
typ. Strahllebensdauer bei Kollisionen:  
6-12 Stunden
- ◇ Tevatron-Beschleuniger ( $p\bar{p}$ )  
typ. Strahllebensdauer bei Kollisionen:  
15-25 Stunden
- ◇ Hera-Beschleuniger ( $e^-p$ )  
typ. p-Strahllebensdauer bei Kollisionen:  
 $\sim 100$  Stunden



<b>Beam Gas <math>10^{-10}</math> Torr</b>	$\tau_g =$ <b>200 hours</b>
<b>Beam thermal photons</b>	$\tau_{tp} =$ <b>80 hours</b>
<b>Beam synchrotron photons</b>	$\tau_{sp} =$ <b>134 hours</b>
<b>Total</b>	$\tau_{tot} =$ <b>40 hours</b>

## Kollektive Phänomene

- Kollektive Phänomene
- Bisher vereinfachte Betrachtung: Einzelteilchen-Effekte bestimmen transversale und longitudinale Strahldynamik
- Aber: Kollektive Phänomene → Störungen der Strahlstabilität, z.B.
  - Lineare Raumladungseffekte
  - Strahl-Strahl-Effekte
  - Wake-Felder (Kielwasser-Effekte)
  - ...
- Kollektive Phänomene i.A.  $\neq$  kleine Störungen
  - ▷ Kollektive Phänomene hängen von Strahlintensität ab
  - ▷ Reduktion des Strahlstroms → geringer Auswirkungen von kollektiven Phänomenen
  - ▷ Korrektur der Auswirkungen → erhöhter Strahlstrom möglich



## Lineare Raumladungseffekte

- Eigenfelder des Teilchenstrahls sind gegeben durch die Strahlgröße und lineare Ladungsdichte  $\lambda$ :

$$E_x \propto \frac{\lambda}{\sigma_x \cdot (\sigma_x + \sigma_y)} x \quad E_y \propto \frac{\lambda}{\sigma_y \cdot (\sigma_x + \sigma_y)} y$$

$$B_x \propto -\frac{\lambda}{\sigma_y \cdot (\sigma_x + \sigma_y)} y \quad B_y \propto +\frac{\lambda}{\sigma_x \cdot (\sigma_x + \sigma_y)} x$$

- ◇ flacher Strahlquerschnitt vorteilhaft, da entweder  $\sigma_x$  oder  $\sigma_y$  groß

→  $E_{x,y} \propto 1/(\sigma_x + \sigma_y)$  und  $B_{x,y} \propto 1/(\sigma_x + \sigma_y)$  klein

- ◇ Elektron/Positron-Teilchenstrahlen in Kreisbeschleunigern meist  $\sigma_y \ll \sigma_x$

→ horizontale Felder  $E_x \ll E_y$  vertikale Felder

## Strahl-Strahl-Effekte

- Collider: gegenläufig umlaufende Teilchenstrahlen + Strahlkreuzung in Zentren der Teilchendetektoren

→ Kräfte zwischen Teilchenstrahlen, z.B. vertikale Kraft zwischen Teilchen- und Antiteilchen-Strahl

$$F_y \propto -\frac{\lambda}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} y$$

→  $F_y$  hat fokussierende Wirkung → Quadrupolwirkung

→ Verschiebung des vertikalen Betatron-Tunes (*betatron tune shift*):  $\delta Q_y \propto \frac{\lambda \ell \beta_y}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} = \frac{eN\beta_y}{B\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}$

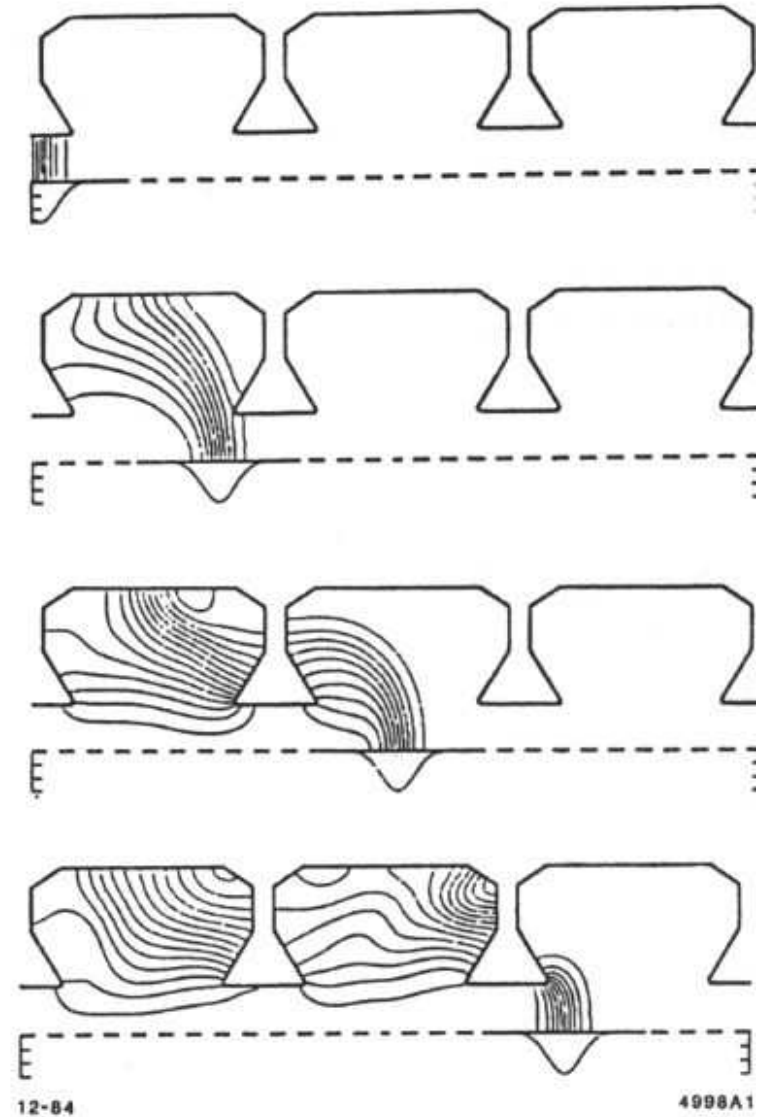
für  $B$  Bunche der Länge  $\ell$ , insgesamt  $N$  Teilchen, lineare Ladungsdichte  $\lambda = eN/B\ell$

- ◇ max. zulässige Tune-Shifts  $\delta Q_y \approx 0.04-0.06$  (Elektronen, Protonen weniger (NB: Protonstrahl i.A. rund))

## Wake-Felder

Insbesondere in Elektron/Positron-Beschleunigern:

- hohe Ladungsdichte in kurzem Teilchen-Bunch, d.h. hoher instantaner Strom beim Durchlauf der Teilchen
- ▷ Anregung hoher (bis 20.ter) Oberwellen der Umlauffrequenz
- ▷ Wechselwirkung zwischen Teilchen-Bunch und Umgebung
- ▷ elmag. Resonanzen in Vakuumröhre und Cavities angeregt
- ◇ z.B. Anregung höhere Schwingungsmoden in Beschleunigungsresonatoren (engl.: higher order modes, HOM)
- ◇ Erwärmung von Beschleunigerstrukturen durch Absorption der angeregten Oberwellen ( $\leftrightarrow$  Supraleitung)
- ▷ Rückwirkung auf (ersten und nachfolgende) Teilchen-Bunche
- ◇ longitudinale&transversale Deformationen&Oszillationen einzelner Bunche (d.h. Abweichung von gaußschem Profil)
- ◇ longitudinale&transversale Verschiebung der Bunche vom Sollorbit & Oszillationen um Sollorbit



**Fig.12.1** Parasitic mode fields

**Wake-Felder** (fortgesetzt)

Beispiele für longitudinale & transversale parasitäre Schwingungsmoden in Beschleunigerstrukturen (z.B. Cavities, Balgverbindungen zwischen Strahlrohren, Strahlinjektions-/ -extraktionsbereiche, etc.)

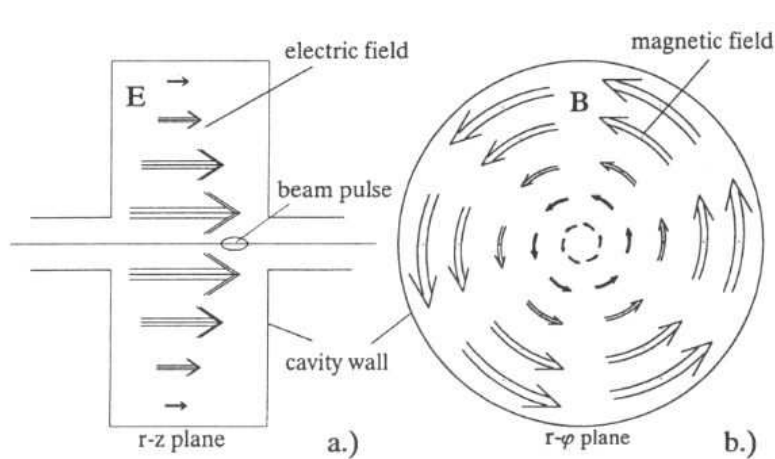


Fig. 12.2. Longitudinal parasitic mode

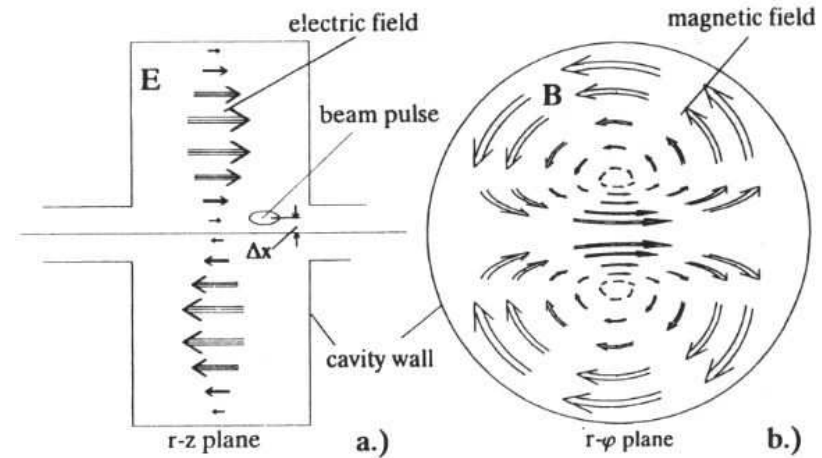
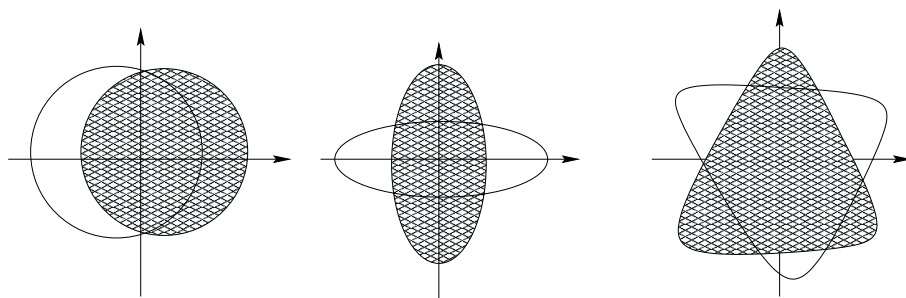


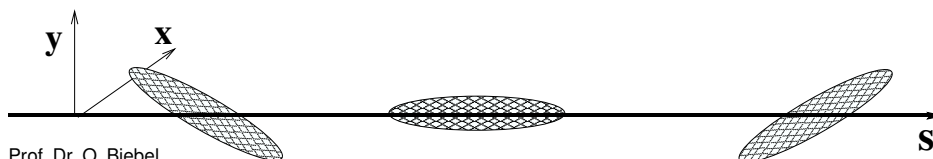
Fig. 12.3. Transverse parasitic mode

Wake-Feldeffekte auf einzelne Bunche:

- transversale Deformation & Oszillationen

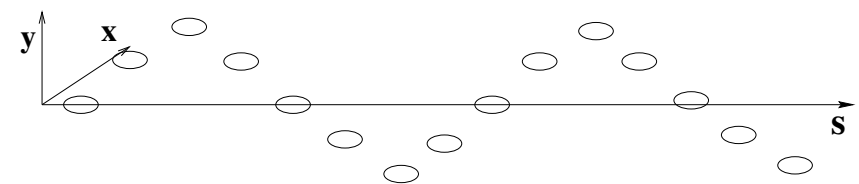


- ebenso auch longitudinal (Head-Tail-Instabilität)

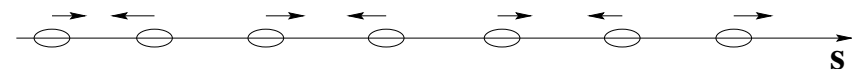


Wake-Feldeffekte auf Multibunch-Teilchenstrahlen:

- transversale Verschiebung der Bunche



- longitudinale Verschiebung der Bunche



# Strahlemittanz

Bedeutung der Strahlemittanz  $\varepsilon$  in Speicherringen

- Strahlquerschnitt  $\sigma \propto \sqrt{\beta\varepsilon}$
- Luminosität  $\mathcal{L} \propto 1/\sqrt{\beta_x\varepsilon_x\beta_y\varepsilon_y}$
- Liouville-Theorem: Strahlemittanz ist Erhaltungsgröße im Beschleuniger
- Synchrotronstrahlung vergrößert/verkleinert Emittanz durch Quantenanregung/Dämpfung

→ Minimierung durch Optimierung der Magnetgitter und Magnetstärken

- ▷ optimale Parameter im *isomagnetischen Beschleunigerring* (alle Magnete haben gleiche Stärke und Länge) am Eintrittspunkt der Ablenkmagnete (Index 0) bei verschwindender Dispersion ( $\eta_0, \eta'_0 = 0$ ):

$$\alpha_{0,\text{opt}} \approx 15, \quad \beta_{0,\text{opt}} \approx \sqrt{\frac{12}{5}}\ell_b, \quad \langle \mathcal{H} \rangle_{\text{min}} \approx \frac{\Theta^3 \rho}{4\sqrt{15}}, \quad \varepsilon_{0,\text{opt}} \approx 3.84 \times 10^{-13} \text{m} \cdot \frac{\gamma_r^2 \Theta^3}{4\sqrt{15}} \quad (\text{vgl. Folie 10.4})$$

Twiss-Parameter  $\alpha, \beta$ , Phasenraumellipse durch Dispersion  $\mathcal{H}$ , Gleichgewichtsemittanz  $\varepsilon$ , Dipollänge  $\ell_b$ , Ablenkradius  $\rho$ , Ablenkwinkel  $\Theta \equiv \ell_b/\rho$  im Dipol, Lorentzfaktor  $\gamma_r$

weitere Verringerung der Emittanz durch Dispersion  $\eta, \eta' < 0$ :  $\langle \mathcal{H} \rangle_{\eta,\text{min}} \approx \langle \mathcal{H} \rangle_{\text{min}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{5}{3}\eta_0 + 6\eta'_0 \ell_b \right) \Theta$

NB: Emittanz  $\propto$  (Teilchenenergie)<sup>2</sup> und  $\propto$  (Ablenkwinkel  $\Theta = \ell_b/\rho$ )<sup>3</sup>

→ Niedrig-Emittanzringe: viele kurze Magnete mit großem Ablenkradius, geringe Teilchenenergie

### Optimale Emittanz in Collider-Speicherring

- Luminosität  $\mathcal{L} = f \frac{N_1}{AB} N_2 = f \frac{N_1}{4\pi\sigma_x\sigma_y B} N_2$  (Strahlquerschnitts  $A = 4\pi\sigma_x\sigma_y$ , Umlauffrequenz  $f$ , Teilchenzahl in Strahlen  $N_{1,2}$ , Bunch-Anzahl  $B$ )
- Betatron-Tune-Verschiebung für  $B$  Bunche und insgesamt  $N$  Teilchen:

$$\delta Q_y \propto \frac{N\beta_y}{B\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} \longrightarrow N_{1,2} \propto \left(\frac{\delta Q_y}{\beta_y}\right) B\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y) \approx \left(\frac{\delta Q_y}{\beta_y}\right) B\sigma_y\sigma_x$$

(Elektronenstrahlen wg. Synchrotronstrahlung i.A. flach:  $\sigma_y \ll \sigma_x$ )

→ Luminosität am Kollisionspunkt ( $\beta \rightarrow \beta^*$ ):  
hängt von Betatron-Tune-Verschiebung ab !

$$\mathcal{L} \propto f \cdot \left(\frac{\delta Q_y}{\beta_y^*}\right)^2 \sigma_x \sigma_y B$$

- Bei Betatron-Tune-Verschiebung  $\delta Q_y \leq \delta Q_{\max} = \text{const.}$  (Limitierung durch Stabilität)
- ▷ Maximierung der Luminosität  $\mathcal{L}$  am Kollisionsort:
  - $\beta_y^* \rightarrow \text{min.}$  durch *Low Beta Insertions*  
(auch gen. *Minibeta-Quadrupole*  $\hat{=}$  Fokussierungsmagnete nahe Kollisionsort)
  - große Strahlemittanz  $\varepsilon \rightarrow \sigma_{x,y} \propto \sqrt{\varepsilon_{x,y}\beta_{x,y}}$  groß
  - viele Bunche  $B$
  - hohe Kollisionsfrequenz  $f$

## Strahlkühlung

- Strahlkühlung
  1. Strahltemperatur
  2. Stochastische Kühlung
  3. Elektronkühlung
  4. Ionisationskühlung
  5. Laserkühlung
  
- Liouville-Theorem: Fläche der Phasenraumellipse (Emittanz) in nicht-dissipativen Systemen ist invariant
- Reduktion des 3-dim-Phasenraumvolumens eines Teilchenstrahls häufig erforderlich, um Strahlgröße (transversal und longitudinal) zu verringern (z.B.  $\sigma_{x,y} \propto \sqrt{\epsilon_{x,y}}$ )
  - ◇ bei Elektron/Positron-Strahlen: Synchrotron-Strahlung als dissipativer Effekt (Wiggler/Undulatoren zur Reduktion der Emittanz)
  - ◇ bei schwereren Teilchen (Protonen, Ionen, etc.) ist Synchrotron-Strahlung stark unterdrückt, → andere dissipative Effekte notwendig

# Strahltemperatur

Begriffe *Strahltemperatur*, *Strahlkühlung* analog zur kinetischen Gastheorie

Temperatur eines Teilchenstrahls  $\iff$  kinetische Energie der Teilchen im Strahl:

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle$$

Unterschieden werden *transversale Temperatur*  $T_{\perp}$  und *longitudinale Temperatur*  $T_{\parallel}$ :

- transversale Temperatur:

▷ Es gilt (\*  $\hat{=}$  Schwerpunktsystem):

$$k_B T_{\perp} = \left\langle \frac{1}{2} m c^2 \beta_{\perp}^{*2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m c^2 \gamma_r^2 \beta_{\perp}^2 \right\rangle$$

◇ mit  $\beta_{\perp} \approx \beta_r p_{\perp} / p$  und  $\langle p_{\perp}^2 \rangle = \langle p_x^2 + p_y^2 \rangle = p^2 (\sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2) \rightarrow k_B T_{\perp} \approx \frac{1}{2} m c^2 \gamma_r^2 \beta_r^2 (\sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2)$

◇ Strahldivergenz  $\sigma_{u'} = \sqrt{\varepsilon_u \gamma_u}$  (vgl. Folie 10.4) und  $\gamma_u = (1 + \alpha_u^2) / \beta_u \xrightarrow{\alpha_u \text{ klein}} 1 / \beta_u$  (vgl. Folie 5.13)

→ transversale Temperatur:

$$k_B T_{\perp} \approx \frac{1}{2} m c^2 (\gamma_r \beta_r)^2 \left( \frac{\varepsilon_x}{\beta_x} + \frac{\varepsilon_y}{\beta_y} \right)$$

- longitudinale Temperatur:

▷ Es gilt (\* s.o.):  $\frac{1}{2} k_B T_{\parallel} = \left\langle \frac{1}{2} m c^2 \beta_{\parallel}^{*2} \right\rangle = \frac{\beta_{\parallel}^* = \frac{\beta_{\parallel} - \beta_r}{1 - \beta_{\parallel} \beta_r} = \frac{\Delta \beta}{\gamma_r^{-2} - \gamma_r^{-3} \Delta \gamma} \approx \gamma_0^2 \Delta \beta}{d\gamma_r / d\beta_r = \beta_r \gamma_r^3 \equiv \Delta \gamma / \Delta \beta \text{ mit } \Delta \gamma = \gamma - \gamma_r} = \frac{1}{2} m c^2 \beta_r^2 \left\langle \frac{\Delta p}{p} \right\rangle^2$

→ longitudinale Temperatur:

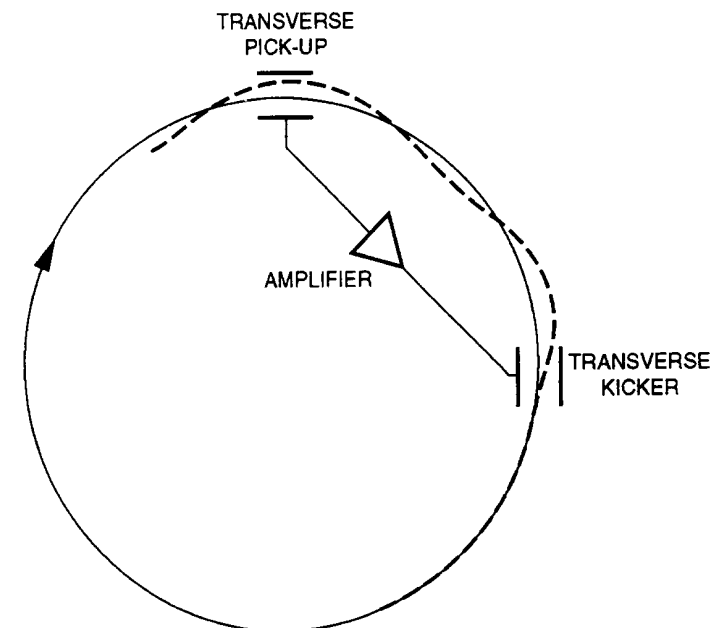
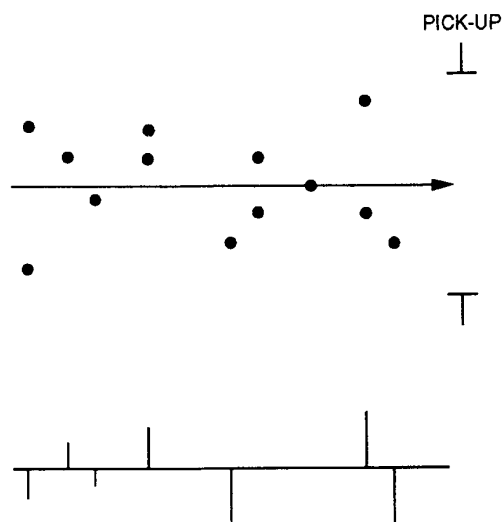
$$\frac{1}{2} k_B T_{\parallel} \approx \frac{1}{2} m c^2 \beta_r^2 \left( \frac{\sigma_p}{p} \right)^2$$

$\implies$  Gesamt-Temperatur:

$$\frac{3}{2} k_B T = k_B T_{\perp} + \frac{1}{2} k_B T_{\parallel} \approx \frac{1}{2} m c^2 (\gamma_r \beta_r)^2 \left( \frac{\varepsilon_x}{\beta_x} + \frac{\varepsilon_y}{\beta_y} + \frac{1}{\gamma_r^2} \left( \frac{\sigma_p}{p} \right)^2 \right)$$

# Stochastische Kühlung

- 1968 erfunden von S. van der Meer (Nobelpreis 1984)
  - 1983 genutzt zur Antiproton-Kühlung bei Entdeckung der intermediären Vektorbosonen  $W^\pm$  und  $Z^0$
  - Konzept:
    - ◇ Teilchendichte entlang Trajektorie ist Zufallsgröße, d.h. Teilchen sind *stochastisch* verteilt
    - ◇ Pick-Up-Elektrode registriert momentanen Schwerpunkt der Ladungsverteilung im Strahl (Fig.1)
    - ◇ verstärktes,  $\delta$ -förmiges Signal re-zentriert Schwerpunkt der Ladungsverteilung
- Reduktion von  $\beta_\perp \leftrightarrow$  Temperaturreduktion  $T_\perp \leftrightarrow$  Kühlung
- ◇ Idealisiert: Pick-Up misst jedes Teilchen & Kicker korrigiert es  $\implies$  Emittanz  $\rightarrow 0$
  - ◇ Realität: Endliche Bandbreite in Signalverarbeitung
  - ▷ Pick-up:  $\langle u \rangle$  von Teilchenensemble
  - ▷ Kicker an Maximum der  $\beta$ -Funktion: korrigiert  $\langle u' \rangle$

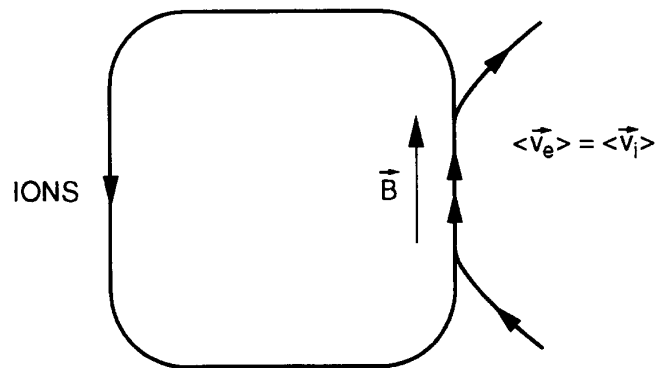




# Elektronenkühlung

- 1966 von G. Budker vorgeschlagen
- Konzept:
  - ◇ “heißer” Ionenstrahl  $\langle v_i^2 \rangle > \langle v_e^2 \rangle$  mit “kaltem” Elektronenstrahl  $\langle v_e^2 \rangle$  “mischen” (Fig.3)
  - ◇ Ionenstrahl kühlt ab, Elektronenstrahl aufgeheizt (Fig.4(b): Situation im Teilchensystem)
  - ◇ ersetze aufgeheizten Elektronenstrahl durch neuen kalten
  - ◇ Ionenstrahltemperatur  $T_i = \frac{1}{2}M\langle v_i^2 \rangle \rightarrow T_e = \frac{1}{2}m_e\langle v_e^2 \rangle$  (im Grenzwert)

$$\rightarrow v_i^{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle v_i^2 \rangle} = \sqrt{\frac{m_e}{M}} v_e^{\text{rms}} \sim \frac{1}{43} \sqrt{\frac{1}{A}} v_e^{\text{rms}} \quad (\text{Atomgewicht } A)$$



PF:  $\langle v_e^2 \rangle = \langle v_i^2 \rangle$

∴  $T_e \leq (m/M)T_i \ll T_i$

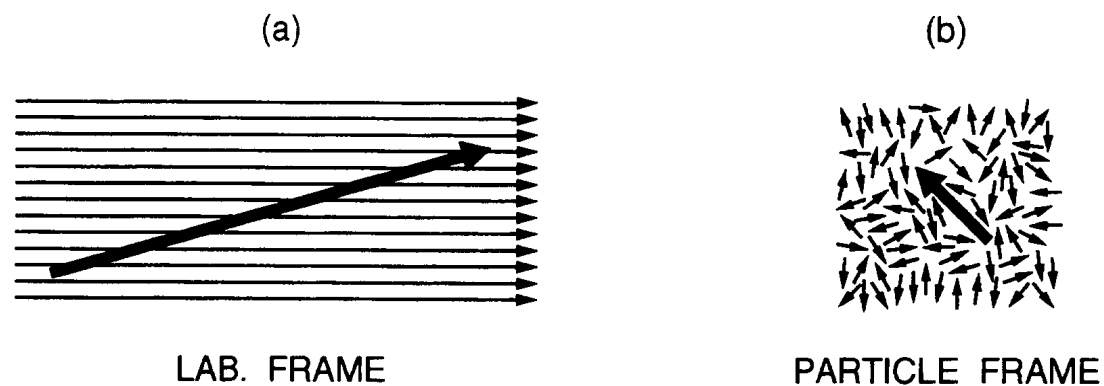
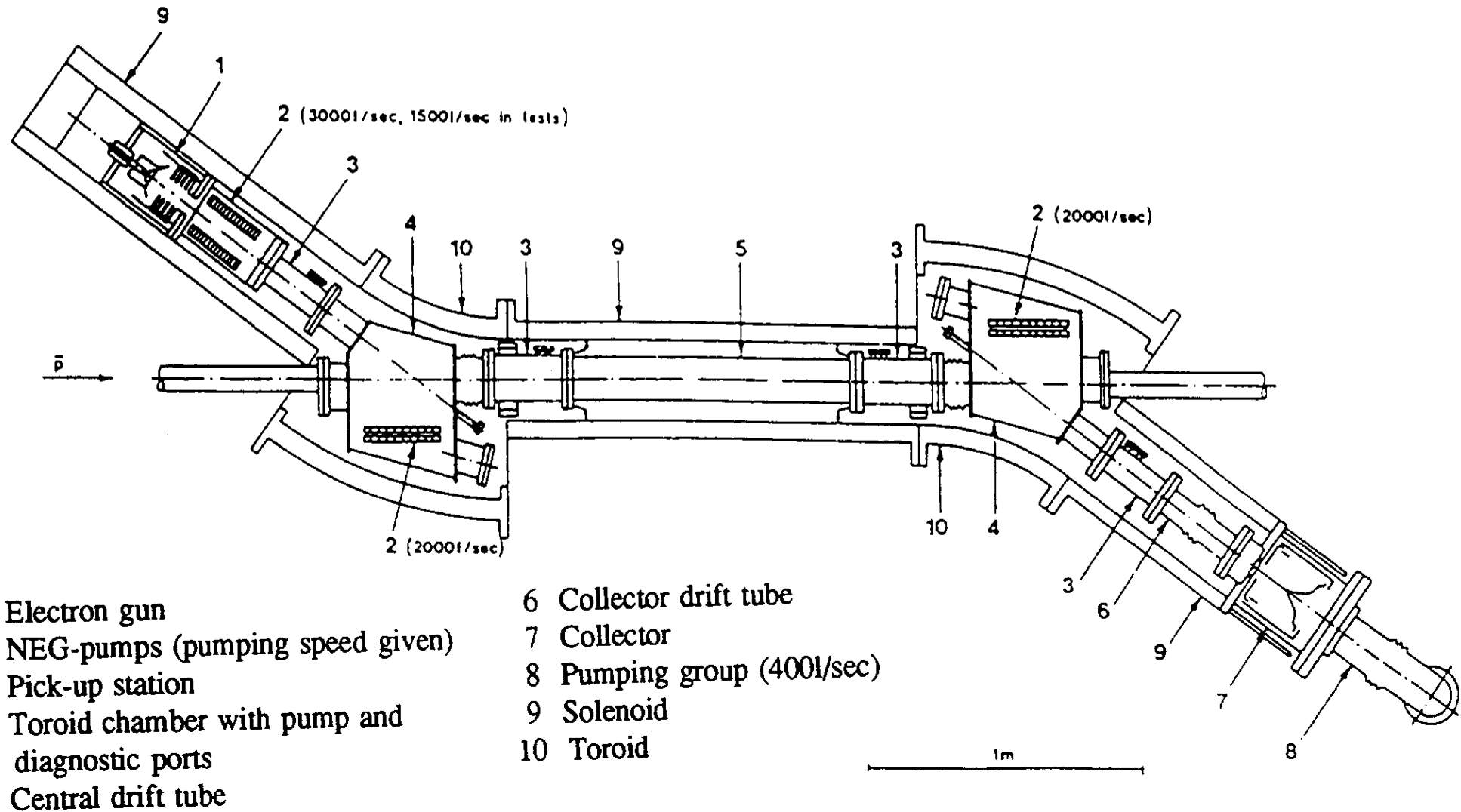


Fig. 3 Principle of electron cooling in a storage ring

Fig. 4 Electron cooling in the laboratory frame and in the particle frame

### Beispiel: Low Energy Antiproton Ring LEAR, CERN



## Ionisationskühlung

(Fast) ausschließlich nur für Myonen nutzbar:

- ◇ Myonen verlieren Energie  $\frac{dE}{ds} \Delta s$  beim Durchqueren von Absorber (unabhängig von Impulsrichtung)
  - ◇ longitudinale Beschleunigung ersetzt Energieverlust nur in longitudinaler Richtung
- transversale Kühlung des Myonstrahls
- ◇ vielfach zu wiederholen für signifikanten Kühlung

SKETCH OF TRANSVERSE "IONIZATION COOLING" PRINCIPLE

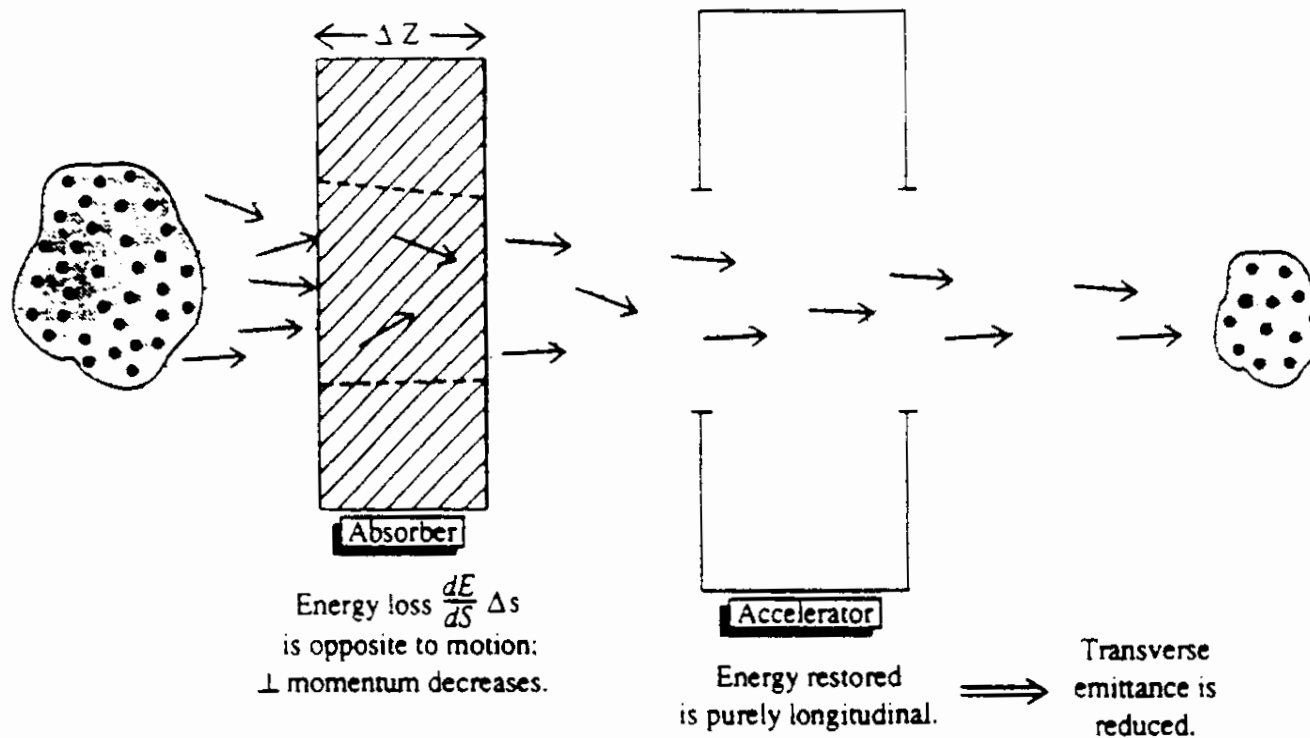


Figure 3. Schematic view of transverse "ionization cooling." Energy loss in an absorber occurs parallel to the motion; therefore transverse momentum is lost with the longitudinal energy loss. Energy gain is longitudinal only; the net result is a decrease in transverse phase-space area.

# Laserkühlung

- zur Kühlung von Atomen & Ionen in elmag. Fallen, auch für Ionenstrahlen in Speicherringen
- Konzept:
  - ◇ partiell ionisierte Ionen haben diskrete Absorptionslinien
  - ◇ Ionenbewegung: Dopplerverschiebung der Absorption
  - ◇ Frequenz  $\omega' = \gamma_r \omega (1 - \beta_r \cos \theta)$  *gerichtet eingestrahlt*, sodass schnellste Ionen absorbieren
  - ◇ *Emission* von angeregten Ionen erfolgt *ungerichtet* (isotrop)
- Impulsübertrag von Licht auf Ionen
  - ◇ Variation der eingestrahlt Frequenz → Reduktion der Geschwindigkeitsstreuung der Ionen

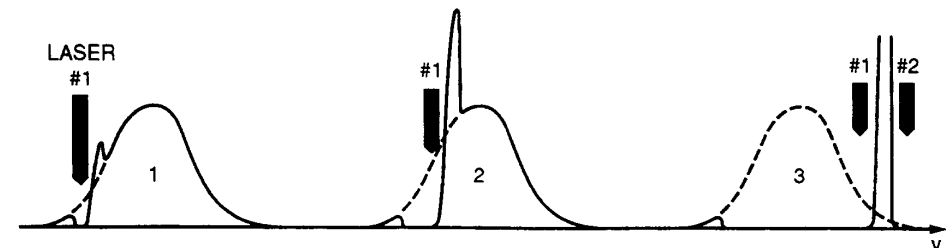
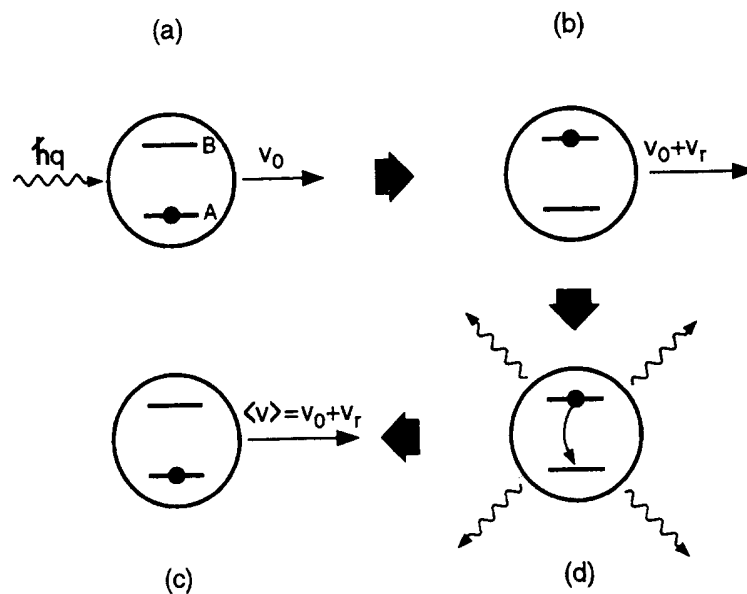


Fig. 9 Photon absorption-emission cycle responsible for laser cooling

Fig. 10 Change in ion-velocity distribution caused by the laser during the laser-cooling process

## Vergleich: Strahlkühlung

	stochastisch	Elektronen	Ionisation	Laser	Synchrotron-Strahlung
für Teilchenart	alle	Ionen	Myonen	einige Ionen	$e^{-}, e^{+}$
bevorzugte Teilchengeschwindigkeit	hoch	mittel ( $\beta < 1/\sqrt{2}$ )	gering ( $\beta\gamma \ll 4$ )	beliebig (NB: Dopplereffekt)	sehr hoch ( $\gamma \geq 100$ )
Strahlintensität	niedrig	beliebig	beliebig	beliebig	beliebig
Kühlzeit	$N \cdot 10^{-8} \text{ s}$	$1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$	$\sim 10^{-2} \text{ s}$	$\sim 10^{-4}-10^{-5} \text{ s}$	$\sim 10^{-3} \text{ s}$
bevorzugte Strahltemperatur	hoch	niedrig	niedrig	niedrig	beliebig

## Existierende, zukünftige und alternative Beschleunigerkonzepte

- Existierende, zukünftige und alternative Beschleunigerkonzepte
  1. LEP, SLC
  2. Tevatron, PEP-II, KEK-B, HERA, RHIC, CESR, DAΦNE
  3. LHC
  4. Linear-Collider: NLC, TESLA, CLIC
  5. Neutrino-“Beschleuniger”
  6. Myon-Beschleuniger
  7. Free-Elektron-Laser
  8. Laser/Teilchenstrahl-Plasma-Beschleuniger

# Übersicht der Beschleuniger-Projekte

**Tab. 3.3** Liste einiger im Betrieb oder im Bau befindlicher Teilchenbeschleuniger und Speicherringe.

Name	Ort	Max. Strahlenergie/GeV	Fertigstellung
<i>Protonen-Synchrotrons</i>			
CERN PS	Genf, Schweiz	28	1960
BNL AGS	Brookhaven, USA	32	1960
KEK	Tsukuba, Japan	12	1976
Serpukhov	Serpukhov, UdSSR	76	1967
CERN SPS	Genf, Schweiz	450	1976
Fermilab Tevatron	Batavia, USA	900	1982
<i>Elektronenbeschleuniger</i>			
SLAC Linearbeschleuniger	Stanford, USA	20	1966
DESY-Synchrotron	Hamburg, BRD	7	1964
<i>Speicherringe</i>			
SPEAR	Stanford, USA	$e^+e^-$ 4.2 + 4.2	1972
DORIS II	DESY, Hamburg	$e^+e^-$ 5.6 + 5.6	1974/82
PETRA	DESY, Hamburg	$e^+e^-$ 23 + 23	1978
PEP	Stanford, USA	$e^+e^-$ 15 + 15	1980
CESR	Cornell, USA	$e^+e^-$ 8 + 8	1979
TRISTAN	Tsukuba, Japan	$e^+e^-$ 30 + 30	1986
LEP	CERN, Schweiz	$e^+e^-$ <del>100</del> 50 + <del>50</del> 100	1989
Sp̄p̄S	CERN, Schweiz	$p\bar{p}$ 310 + 310	1982
Tevatron	Fermilab, USA	$p\bar{p}$ 900 + 900	1987
HERA	Hamburg, BRD	$ep$ 30e + 820p	1990
<i>Linearbeschleuniger mit kollidierenden Strahlen</i>			
SLC	Stanford, USA	$e^+e^-$ 50 + 50	1988

Davon noch in Betrieb, u.a.:

CERN PS :  $p, e^\pm$ , Ionen  
(Teststrahlen, Vorbeschl. SPS)

CERN SPS :  $p, e^\pm$ , Ionen  
(Teststrahlen, Vorbeschl. LHC)

KEK :  $e^+ \rightarrow \leftarrow e^-$   
(für b-Quark-Fabrik KEK-B)

DORIS II :  $e^-$  (Synchrotron-Strahlungsquelle)

PETRA :  $p, e^+$  (Vorbeschl. HERA)

PEP :  $e^+ \rightarrow \leftarrow e^-$   
(für b-Quark-Fabrik PEP-II)

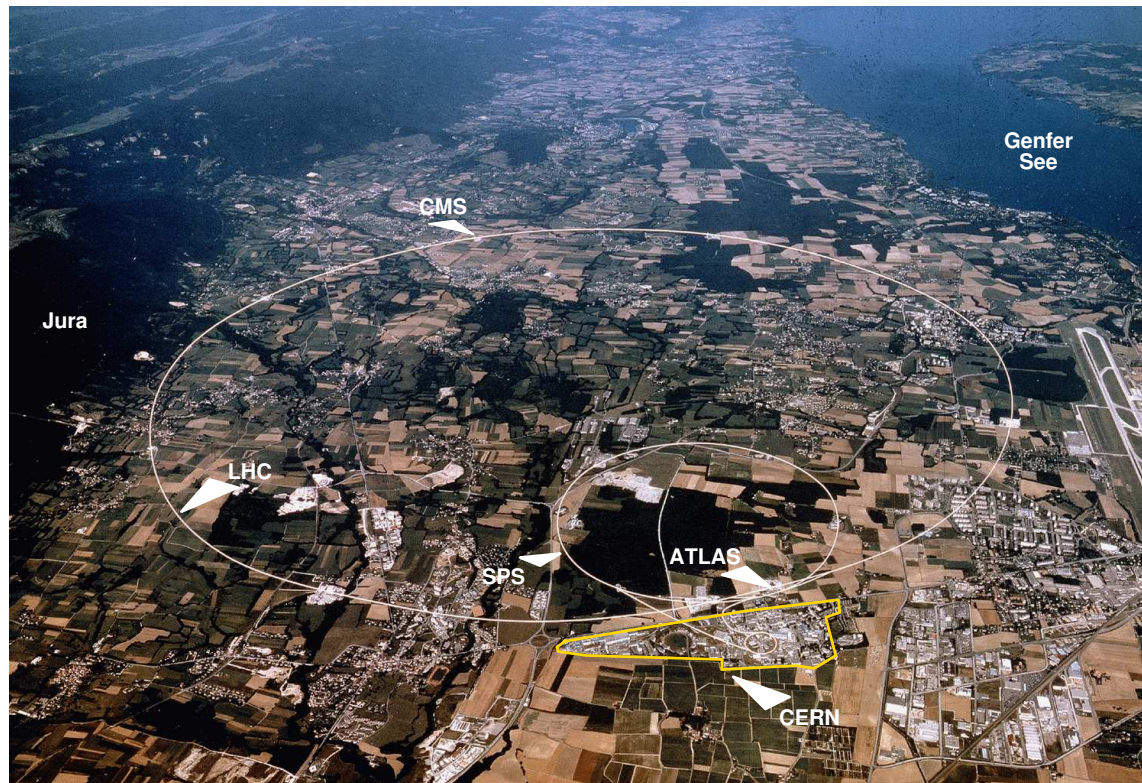
CESR :  $e^+ \rightarrow \leftarrow e^-$   
(für CLEO-Exp.)

Tevatron :  $p \rightarrow \leftarrow \bar{p}$   
(für DØ- & CDF-Exp.,  $2 \times 1000$  GeV)

HERA :  $p \rightarrow \leftarrow e^+$   
(für H1- & ZEUS-Exp.)

RHIC :  $^{197}\text{Au} \rightarrow \leftarrow ^{197}\text{Au}$   
(100 GeV/Nukleon)

# Large Hadron Collider



Im Tunnel des LEP- $e^+e^-$ -Beschleunigers:

- LHC: größter & höchstenergetischster Beschleuniger weltweit
- Proton  $\rightarrow$   $\leftarrow$  Proton
- zwei separate Ringe
- $2 \times 7$  TeV Energie
- 4 Experimente:
  - ◇ ATLAS, CMS (Vielzweck-Experimente)
  - ◇ LHC-b (CP-Verletzung bei b-Quarks)
  - ◇ ALICE (Quark-Gluon-Plasma)

Chronologie von LHC:

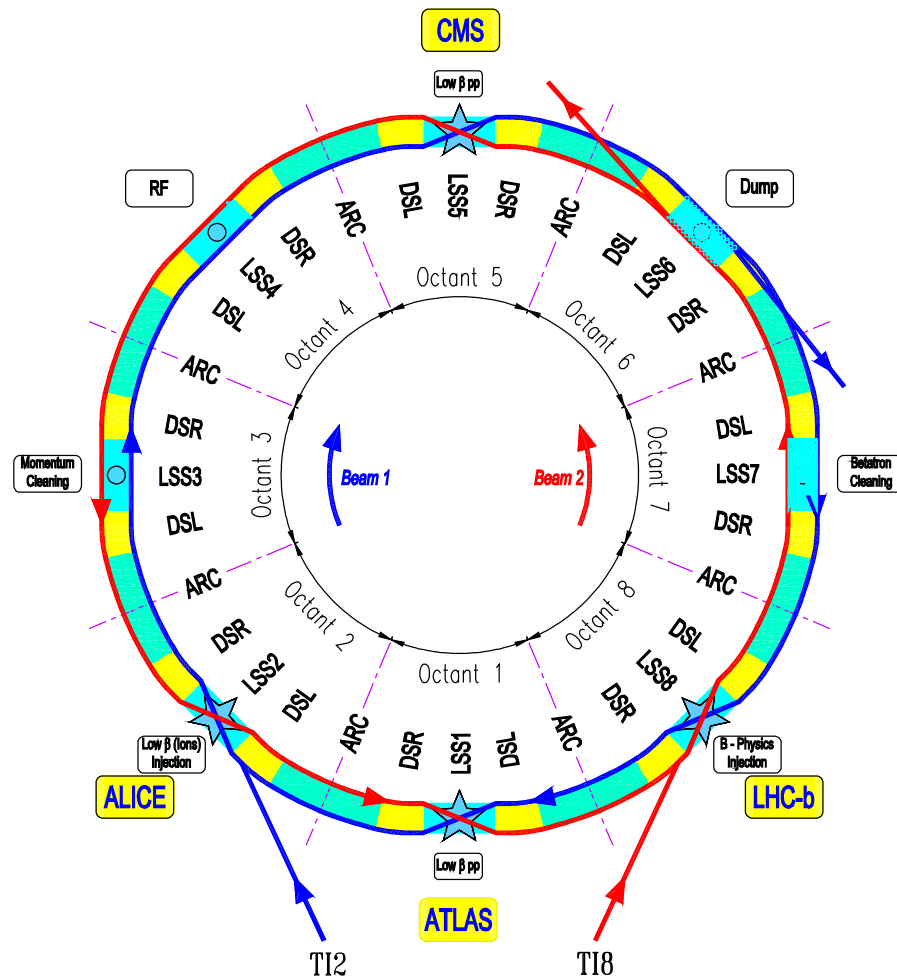
- ◇  $\sim$  1984 erstes Konzept
- ◇ 1991 konkrete Design-Studie
- ◇ Dez. 1994 Zustimmung des CERN Councils
- ◇ 1999 Beginn der Erdarbeiten
- ◇ 2000/1 Demontage von LEP & Experimenten
- ◇ 2004-6 Installation Beschleuniger & Experimente
- ◇ 2004 LHC-Sektor- & Injektionstest
- ◇ Herbst 2006 Testlauf Beschleuniger
- ◇ Frühjahr 2007 Beginn des regulären Messprogramms
- ◇  $\gtrsim$  15 Jahre Laufzeit des Messprogramms



LHC-Parameter:		Injektion	Kollision
Ringumfang	[m]	26658.883	
Ringabstand	[mm]	194	
Anzahl Ablenkmagnete		1232	
Länge je Magnet	[m]	14.3	
$B$ -Ablenkfeldstärke	[T]	0.535	8.33
Protonenergie	[GeV]	450	7000
Protonen/Bunch		$1.15 \times 10^{11}$	
Bunchanzahl		2808	
Strahlstrom	[A]	0.584	
Energie im Strahl	[MJ]	23.3	362
Synchrotron-Strahlungsleistung	[W]	0.06	3600
Energieverlust/Umlauf	[eV]	0.12	6710
RF-Frequenz	[MHz]	400.8	
ges. RF-Spannung	[MV]	8	16

		Injektion	Kollision
Energiestreuung $\delta$ (RMS)	$[10^{-4}]$	3.06	1.11
$\beta^*$ in IP1&5	[m]	18	0.55
transv. Emittanz $\varepsilon_{x,y}$	$[\mu\text{m rad}]$	3.5	3.75
Bunchlänge (RMS)	[cm]	17.5	7.7
Strahldurchmesser an IP1&5 (RMS)	$[\mu\text{m}]$	375.2	16.7
Betatron-Tunes $Q_{x,y}$ (hori, vert)		64.28, 59.31	64.31, 59.32
Synchrotron-Tune $Q_s$		$5.5 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-3}$
Übergangsenergie $\gamma_t$		55.68	
Spitzenluminosität	$[\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}]$	—	$1.0 \times 10^{34}$
Strahllebensdauer	[h]	—	14.9

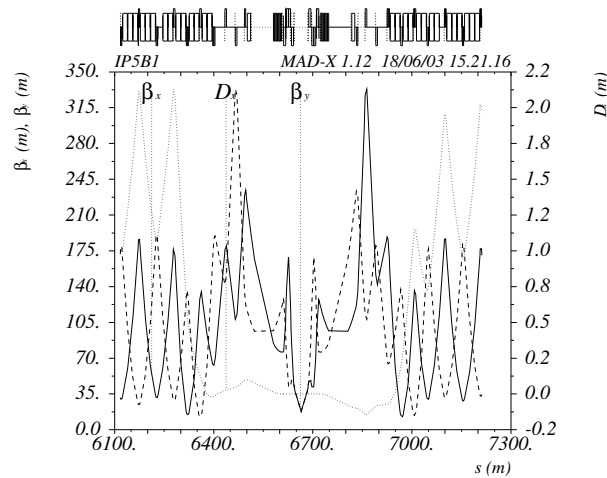
## LHC-Ring:



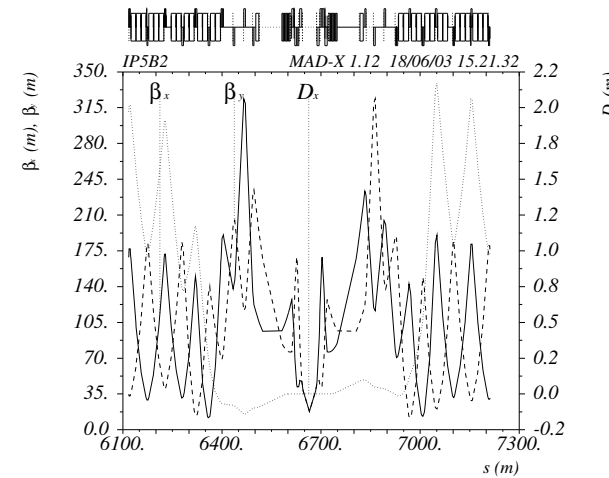
- Ring besteht aus 8 Oktanden
- 4 Wechselwirkungszone: IP1, IP2, IP5, IP8
- Strahlinjektion in IP2 und IP8
- Strahlextraktion (Dump) in IP6
- RF-Beschleunigungsstrukturen in IP4
- Reduktion der Impulsstreuung in IP3  
(große Dispersionsfunktion  $D(s)$ :  
Teilchen mit großer Impulsstreuung  $\delta \rightarrow$  Kollimator)
- Reduktion der Betatron-Amplitude in IP7  
(kleine Dispersionsfunktion  $D(s)$ :  
Teilchen mit großer Betatron-Ampl.  $\beta_{x,y} \rightarrow$  Kollimator)

Figure 3.2: Schematic layout of the LHC. The blue line indicates Beam1 and the red line Beam 2. Beam 1 circulates clockwise and Beam 2 counter clockwise.

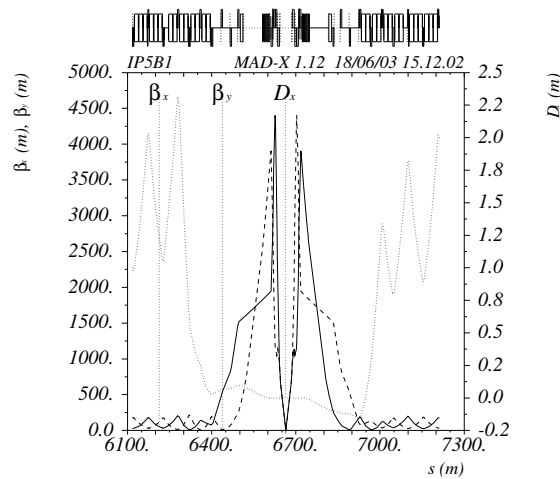
### Strahloptik in Kollisionspunkten IP1&5:



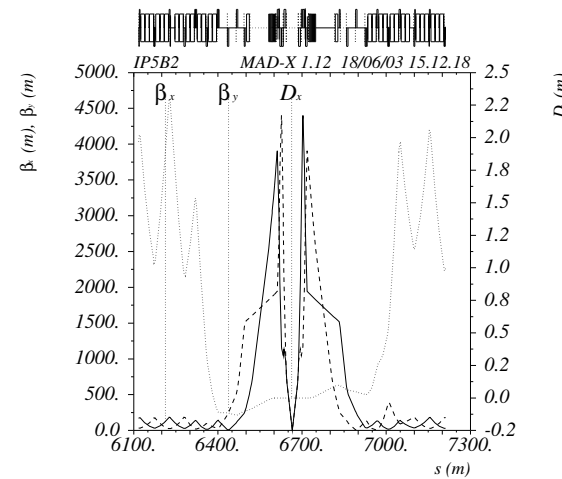
(a) Beam 1, injection optics



(b) Beam 2, injection optics



(c) Beam 1, collision optics

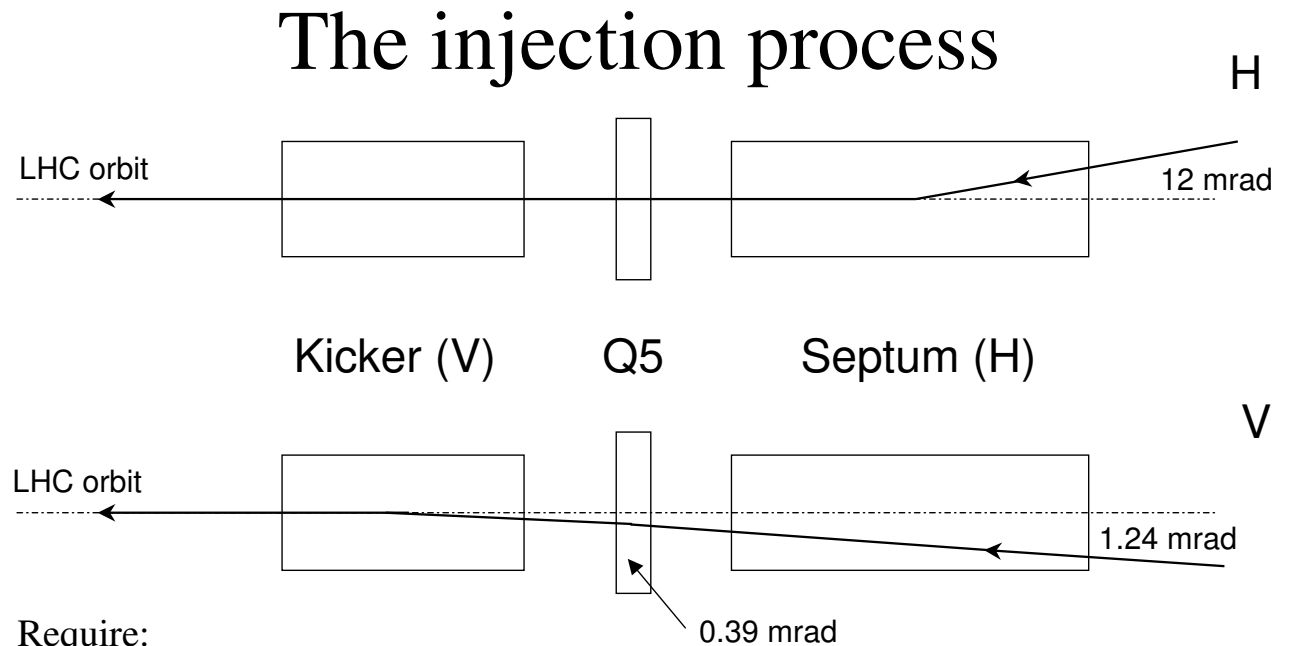


(d) Beam 2, collision optics

Figure 4.3: Injection (top) and collision (bottom) optics of the high-luminosity insertions at IP1 and IP5 for a  $\beta^*$  of 18 m and 0.55 m.

## Strahlinjektionsprinzip IP2&8:

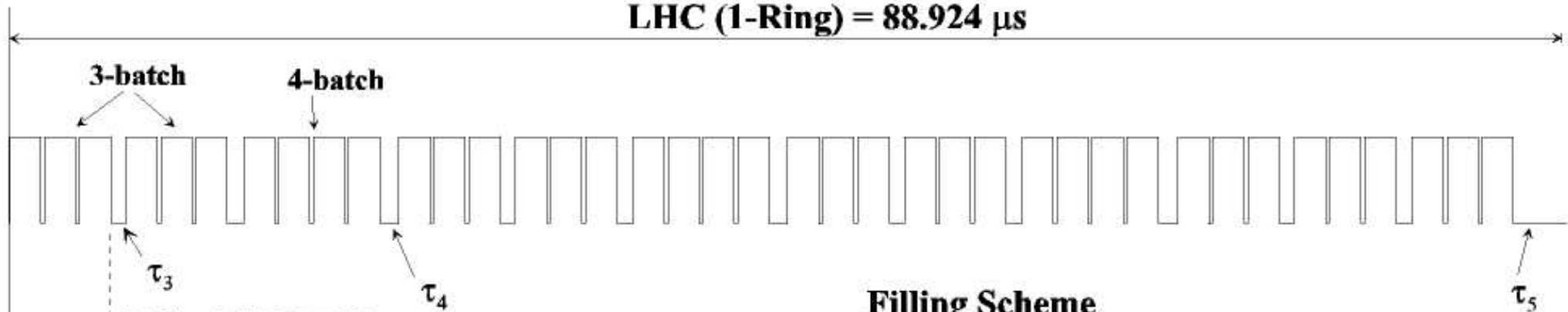
- zu injizierender Strahl besteht aus Abfolge von vielen Bunchen (so genannter Bunchzug von  $\sim 7.4 \mu\text{s}$  Dauer mit  $3$  oder  $4 \times 72$  Einzelbunchen)
- neuer Strahl wird in freie Lücke in LHC-Strahl eingefügt
- zu injizierender Strahl kommt von außerhalb des Rings
- liegt unterhalb der Ebene des Sollorbits
- Septummagnet bringt zu injizierenden Strahl auf LHC-Sollorbit aber noch unterhalb der Ebene (12 mrad Ablenkwinkel)
- Strahl läuft von unten auf LHC-Sollorbit zu (1.24 mrad Winkel)
- Quadrupol Q5 reduziert Annäherungswinkel (um 0.39 mrad)
- Kickermagnet bringt zu injizierenden Strahl auf LHC-Sollorbit (0.85 mrad Kickwinkel)
- Kickermagnet: Anstiegszeit des  $B$ -Feldes  $< 1 \mu\text{s}$ , Plateaulänge  $8 \mu\text{s}$ , Abfallzeit des  $B$ -Feldes  $< 3 \mu\text{s}$  (Abfallszeit = Länge der Zeitlücke für Strahldump-Kicker)



LHC Bunch-Struktur des Strahls:

**Bunch Disposition in the LHC, SPS and PS**

LHC (1-Ring) = 88.924 μs



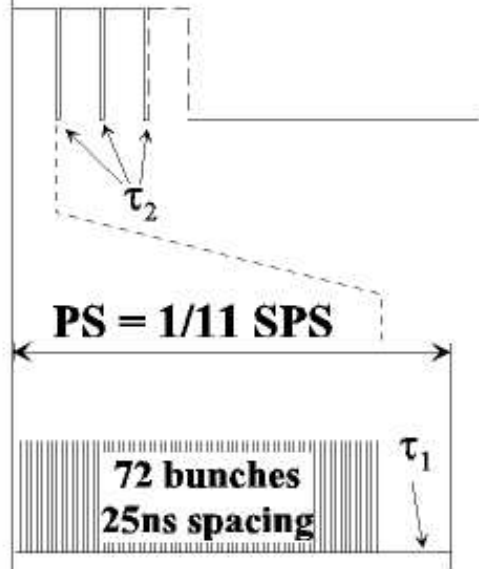
SPS = 7/27 LHC

**Filling Scheme**

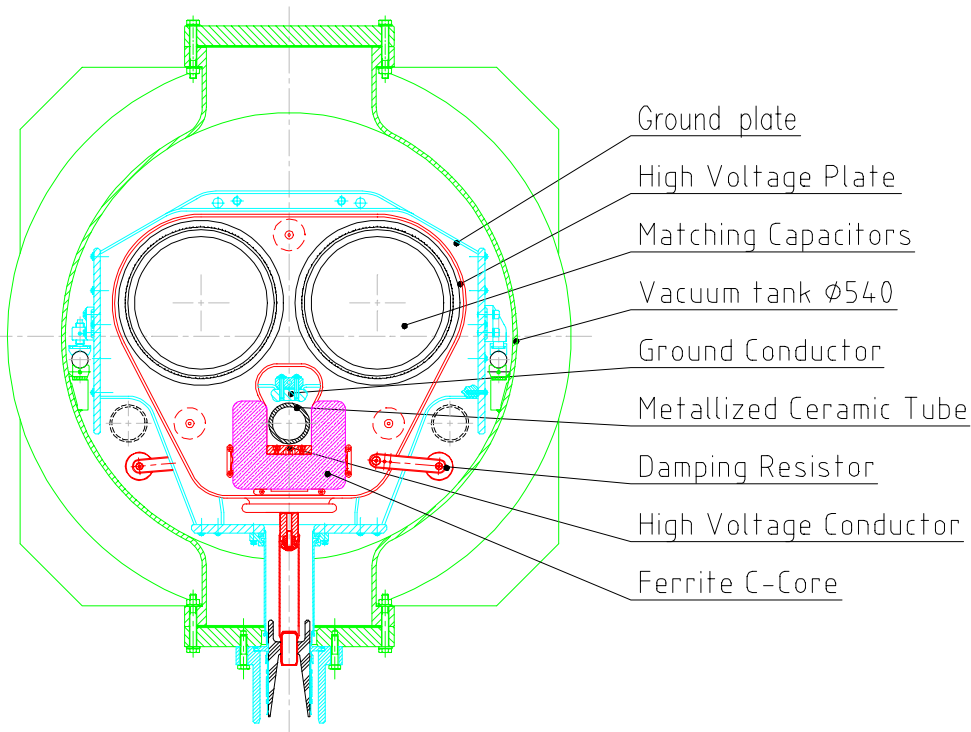
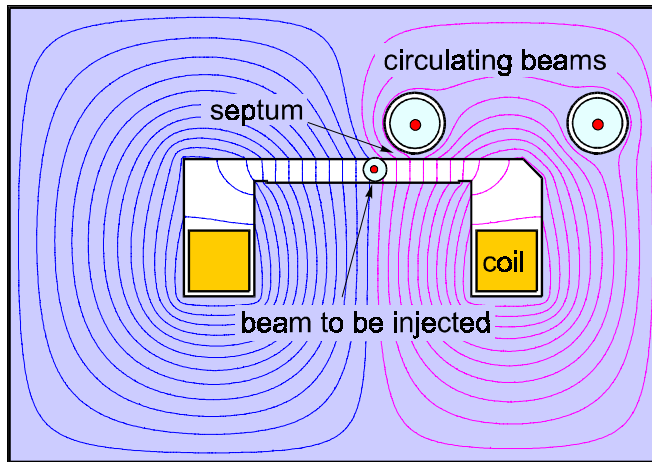
$$3564 = \{[(72b + 8e) \times 3 + 30e] \times 2 + [(72b + 8e) \times 4 + 31e]\} \times 3 + \{[(72b + 8e) \times 3 + 30e] \times 3 + 81e\}$$

**Beam Gaps**

- τ<sub>1</sub> = 12 missing bunches (72 bunches on h=84)
- τ<sub>2</sub> = 8 missing bunches (SPS Injection Kicker rise time = 220 ns.)
- τ<sub>3</sub> = 38 missing bunches (LHC Injection Kicker rise time = 0.94 μs.)
- τ<sub>4</sub> = 39 missing bunches ( " " )
- τ<sub>5</sub> = 119 missing bunches (LHC Dump Kicker rise time = 3 μs.)



## Septum- und Kickermagnete:



**Figure 4:** Kicker magnet cross section.

- (Lambertson)-Septummagnet:
  - ◇ Dipolfeld für Injektionsstrahl
  - ◇ Strahl auf Sollorbit verläuft in  $B$ -feldfreien Raum ( $B$ -Feldabschirmung durch Mu-Metall)
  - ◇ Septummagnetlänge: 4 m
  - ◇ Anzahl Septummagnete: 5/Injektionszone
- Kickermagnet:
  - ◇ kurzzeitiges Dipolfeld  $\rightarrow$  Kick (=kleine Ablenkung) des Injektionsstrahls
  - ◇ Konzept: Kondensator (54 kV) über Stromschiene entladen
  - ◇ Pulsform-Schaltungen für notwendiges Zeitprofil:
 

Anstiegszeit 0.5%-99.5%:	0.9 $\mu$ s
Plateauzeit :	bis zu 7.9 $\mu$ s
Plateaurippel :	$< \pm 0.5\%$
Abfallzeit 99.5%-0.5%:	3.0 $\mu$ s
  - ◇ HV-Versorgung, Pulsformung, HV-Schalter: außerhalb des LHC-Tunnels
  - ◇ Zuleitung über 35 m lange Koaxialkabel (10 Stück parallel)
  - ◇ Kickermagnetlänge: 2.65 m
  - ◇ Anzahl Kickermagnete: 4/Injektionszone

## Strahldump in IP6:

Strahldump: 7 TeV Strahlen in einem Umlauf  
(88  $\mu\text{s}$ ) aus LHC extrahieren & absorbieren

- 15 Kickermagnete  
( $t_{\text{Anstieg}} < 3 \mu\text{s}$ ,  $t_{\text{Plateau}} > 90 \mu\text{s}$ )
- 15 Septummagneten  
(vergleichbar zu Injektionsseptum)
- 10 Dilution-Kickermagnete  
(verteilen Strahlintensität auf Absorber)

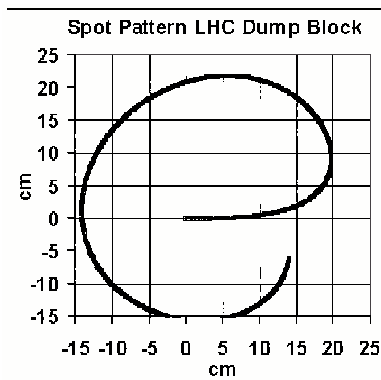
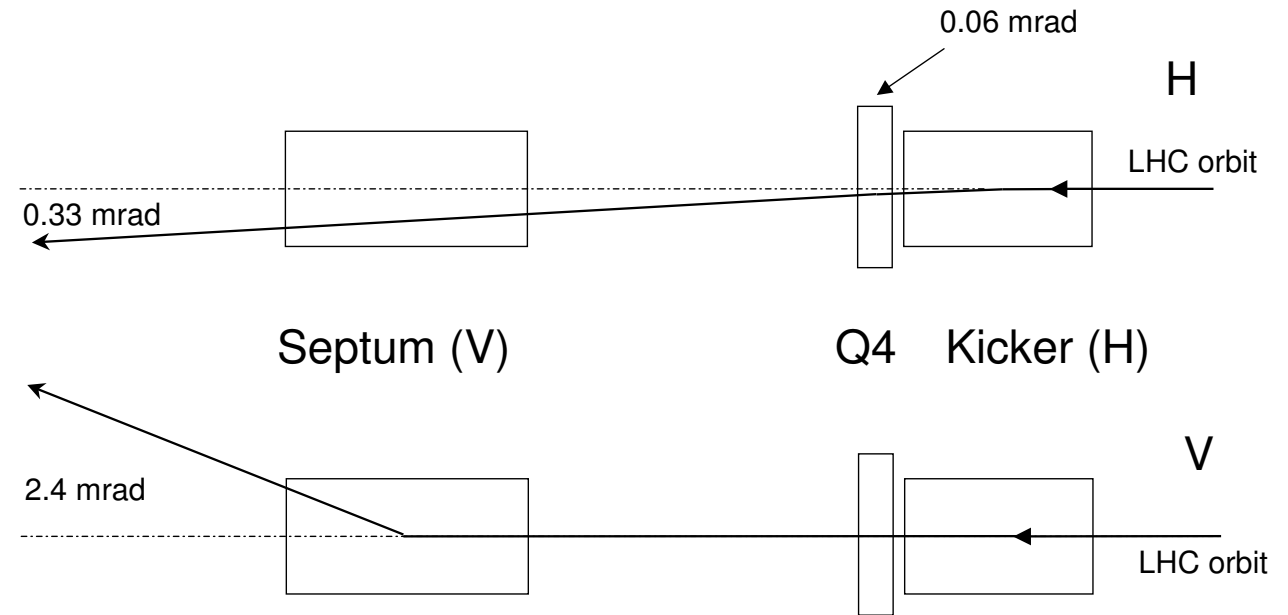


Figure 17.6 Beam spot figure on absorber block.

- Absorberblock je:
  - ◇ 7.7 m langer, segmentierter Kohlenstoff-Zylinder mit  $\text{Ø}0.7\text{m}$
  - ◇ in Stahlmantel eingeschlossen
  - ◇ rund 6 t Eigengewicht
  - ◇ umgeben von  $\sim 900$  t Eisen-Stahl-Strahlungsschilde
  - ◇ muss 428 MJ absorbieren
  - ◇ max. Temperatur 1050-1250  $^{\circ}\text{C}$
  - ◇ wassergekühlt
  - ◇ muss 20 Jahre halten

## The extraction process



Require:

- <3  $\mu\text{s}$  extraction kicker rise time (abort gap),
- >89  $\mu\text{s}$  extraction kicker flat-top length (full LHC turn)

## Linea-Collider: NLC, TESLA, CLIC

- Elektron-Positron-Collider limitiert durch Synchrotron-Strahlung (Energieverlust  $\propto E^4/R$ )
- größter  $e^+e^-$ -Beschleuniger: LEP (27 km Umfang,  $2 \times 10^4$  GeV,  $\sim 10$  MW Synchrotron-Strahlungsverluste)
- höhere Teilchenenergie  $\rightarrow$  Lineare Collider (LC)

Unterscheidung i.W. durch Beschleunigungs-System:

- ▷ normalleitende Beschl.resonatoren (=Cavities)
  - ◇ (nahezu) beliebig hohe Beschleunigungsgradienten
  - ◇ hohe thermische Verluste in Cavities
  - ◇ nur sehr kurze Strahlpulse möglich
- $\rightarrow$  Strahlagekorrektur für aktuellen Strahl nicht möglich
  - ◇ i.A. starke "Beam-Strahlung" (longit. Synch.-Strahlung)
- ▷ supraleitende Beschleunigungsresonatoren (TESLA)
  - ◇ Beschl.gradienten theor. auf  $\sim 55$  MV/m beschränkt
  - ◇ praktisch erreicht  $\sim 35$ -40 MV/m

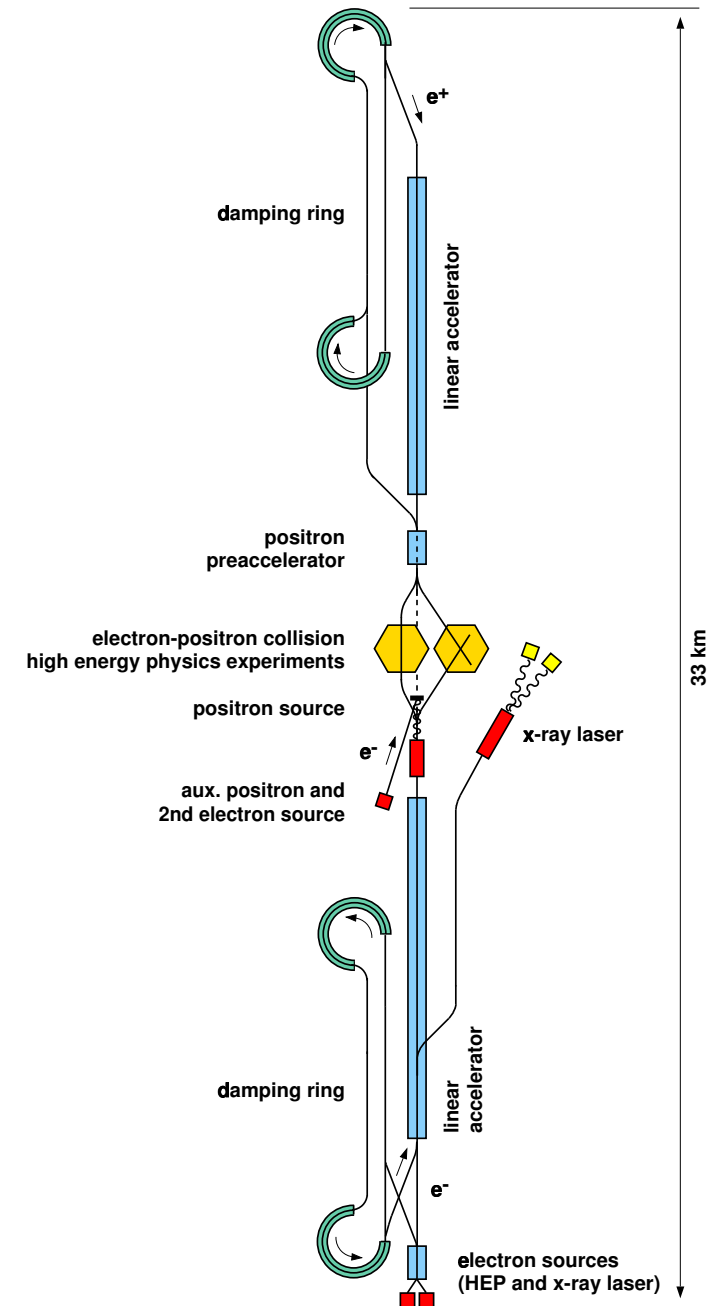
- ◇ geringste Verluste in Cavities
- ◇ lange Strahlpulse möglich
- $\rightarrow$  Strahlagekorrektur für aktuellen Strahl möglich
  - ◇ nur geringe "Beam-Strahlung"
- ▷ "Drive-beam"-Beschleunigung (CLIC)
  - ◇ intensiver, niederenergetischer Strahl parallel zu Linear-Collider erzeugt HF in Resonatoren im Multi-GHz-Bereich  
(entspricht langgestrecktem Klystron)
  - ◇ HF-Leistung beschleunigt Teilchen im Haupt-Beschleuniger
  - ◇ (nahezu) beliebig hohe Beschleunigungsgradienten ( $> 60$  MV/m)
  - ◇ Multi-GHz-Bereich führt zu starken Wake-Feldern (Effekte wachsen  $\propto$  Frequenz<sup>3</sup>)
- $\rightarrow$  derzeit noch Research&Development (R&D)



**TESLA: Supraleitender Linearer  $e^+e^-$  Collider**

		TESLA-500
Accelerating gradient	$E_{acc}$ [MV/m]	23.4
RF-frequency	$f_{RF}$ [GHz]	1.3
Fill factor		0.747
Total site length	$L_{tot}$ [km]	33
Active length	[km]	21.8
No. of accelerator structures		21024
No. of klystrons		584
Klystron peak power	[MW]	9.5
Repetition rate	$f_{rep}$ [Hz]	5
Beam pulse length	$T_P$ [ $\mu$ s]	950
RF-pulse length	$T_{RF}$ [ $\mu$ s]	1370
No. of bunches per pulse	$n_b$	2820
Bunch spacing	$\Delta t_b$ [ns]	337
Charge per bunch	$N_e$ [ $10^{10}$ ]	2
Emittance at IP	$\gamma \varepsilon_{x,y}$ [ $10^{-6}$ m]	10, 0.03
Beta at IP	$\beta_{x,y}^*$ [mm]	15, 0.4
Beam size at IP	$\sigma_{x,y}^*$ [nm]	553, 5
Bunch length at IP	$\sigma_z$ [mm]	0.3
Beamstrahlung	$\delta_E$ [%]	3.2
Luminosity	$L_{e^+e^-}$ [ $10^{34}$ cm $^{-2}$ s $^{-1}$ ]	3.4
Power per beam	$P_b/2$ [MW]	11.3
Two-linac primary electric power (main linac RF and cryogenic systems)	$P_{AC}$ [MW]	97
$e^-e^-$ collision mode:		
Beamstrahlung	$\delta_{E,e^-e^-}$ [%]	2.0
Luminosity	$L_{e^-e^-}$ [ $10^{34}$ cm $^{-2}$ s $^{-1}$ ]	0.47

Table 1.3.1: TESLA parameters for the  $E_{cm} = 500$  GeV baseline design. The machine length includes a 2% overhead for energy management. The klystron power and primary electric power quoted include a 10% regulation reserve.



## TESLA: Optik

- vor Wechselwirkungspunkt: Ablenkung des Strahls aus Beschleunigungsstrecke, damit so gen. “Beam-Strahlung” ( $\hat{=}$  longitudinale Synchrotron-Strahlung) nicht in Wechselwirkungszone gelangt
  - Magnetgitter mit Dipolen & fokus./defokus. Quadrupolen
  - Fig.7.2.1: Betatron-Funktion, Dispersionsfunktion, Magnetgitter auf einer Seite des Wechselwirkungspunkts (engl. Interaction Point, IP)
  - “Final Focus” ist spezielle Anordnung von Fokussierungsmagneten (im Bild nicht detailliert)
- am IP Strahlgröße:  $533 \text{ nm} \times 5 \text{ nm}$  !  
(horizontal  $\times$  vertikal, notwendig für Luminosität)

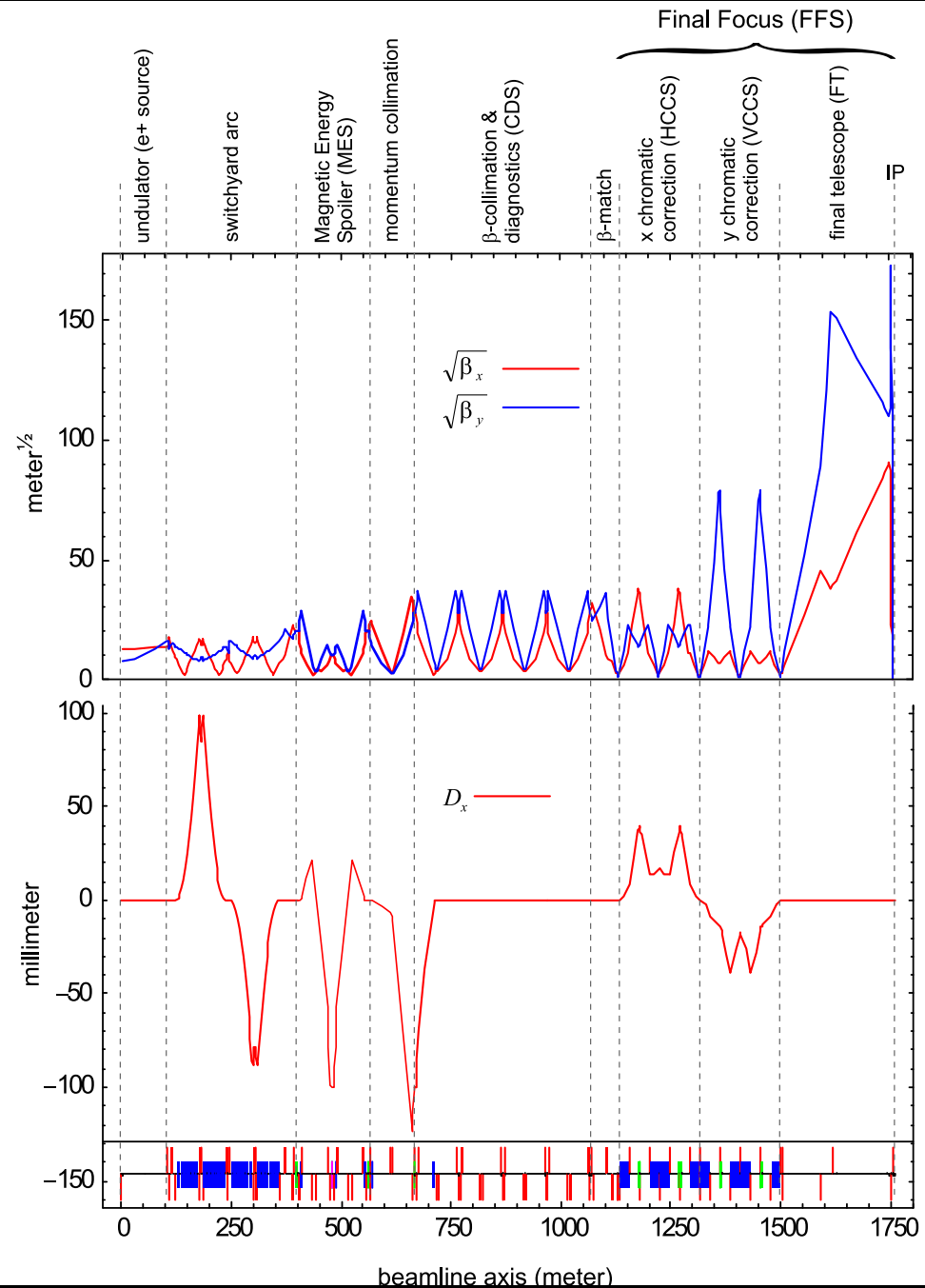


Figure 7.2.1: Optics functions for the TESLA BDS ( $e^-$ ).

## TESLA: einige weitere Beschleuniger-Elemente

### ● Positron-Quelle:

- ◇ Undulator-Magnet erzeugt intensive  $\gamma$ -Strahlung  
( $\gamma$ -Energie mehrere MeV)
- ◇  $\gamma$ -Photonen auf Absorber-Target
- $e^+e^-$ -Paarbildung (im Feld der Atomkerne)
- ◇ Einfangen der Positronen durch Solenoid-Magnet
- ◇ und Beschleunigung der Positronen
- ◇ Speicherung im Emittanz-Dämpfungsring

### ● Emittanz-Dämpfungsring:

- ◇ “hundknochen-förmiger” Ring
- ◇ ca. 17 km Umfang, 5 GeV Strahlenergie, bis zu 160 mA Strahlstrom
- ◇ Emittanz  $\gamma\epsilon$ : Dämpfung durch Wiggler-Magnete
- ◇ Injektion:  $\gamma\epsilon \approx 0.01 \text{ m}/10 \times 10^{-5} \text{ m}$  ( $e^+/e^-$ )
- ◇ Extraktion:  $\gamma\epsilon_x / \gamma\epsilon_y \approx 8 \times 10^{-6} \text{ m} / 0.02 \times 10^{-6} \text{ m}$
- ◇ Dämpfungszeit 28 ms/50 ms für  $e^+/e^-$

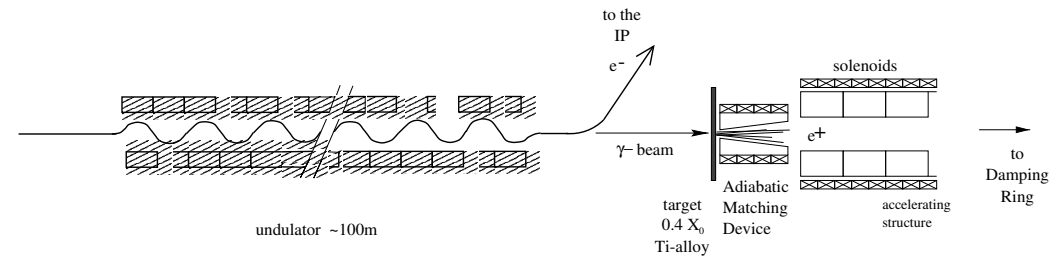


Figure 4.3.1: Sketch of the positron source layout.

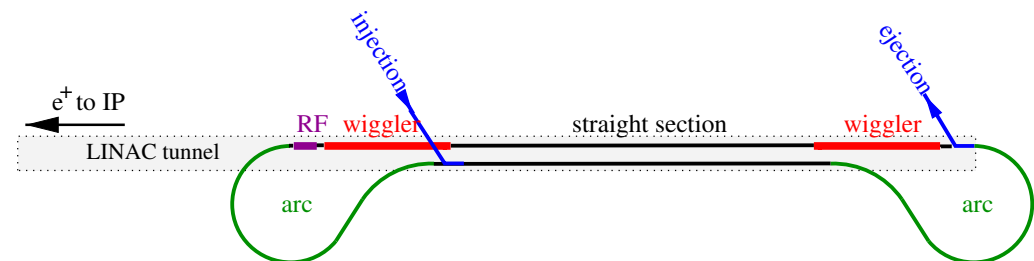
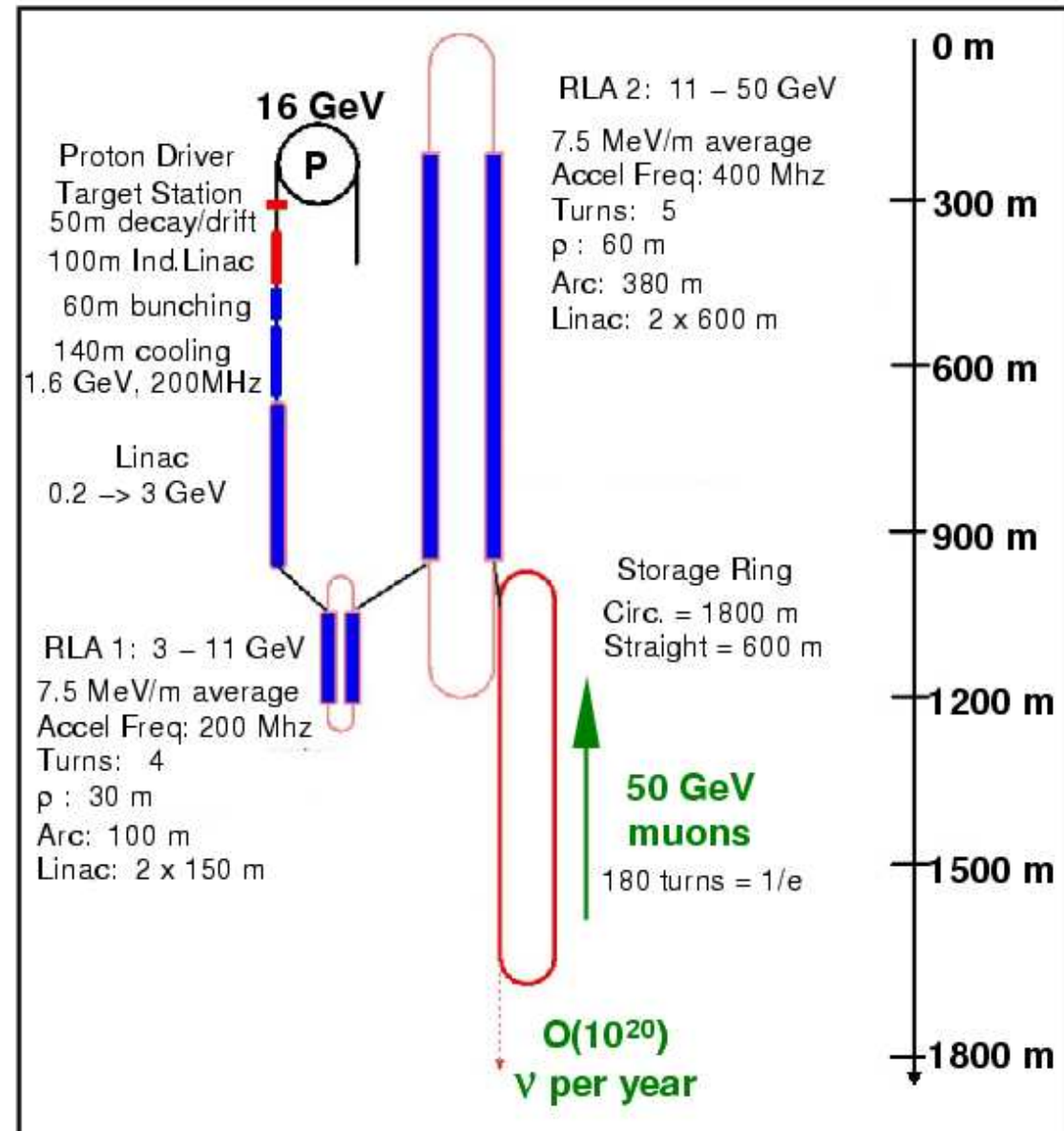


Figure 5.1.1: Conceptual layout of the positron damping ring. The electron ring is similar with the exception that the injection point is located close to the indicated ejection position at the beginning of the linac.

## Neutrino-“Beschleuniger”

- Höchstintensiver Protonenstrahl  
( $> 10^{13}$  Protonen/ Schuss, 10-20 GeV)
- \* auf Target (muss  $\gtrsim$  MW absorbieren, z.Zt. Quecksilber)
- produzierte Pion-Teilchen einfangen  $\rightarrow$  Pion-Zerfall in langem Flugtunnel  $\rightarrow$  Myonen
- \* Kühlung des Myonstrahls (v.a. transversal)
- Phasenrotation des Myonstrahls (große Energiestreuung  $dE$ , kurze Pulsdauer  $dt \rightarrow$  geringes  $dE$ , großes  $dt +$  Bunchstruktur)
- speichern der Myonen in Kreisbeschleuniger mit langen geraden Abschnitten
- Myonzerfall  $\rightarrow$  Neutrinos, starke Bündelung in geradem Abschnitt, wg. Lorentzfaktor  $\gamma \gg 1$
- ▷ große technologische Herausforderungen in \*
- $\rightarrow$  Neuentwicklungen erforderlich:  
Research&Development (R&D)



## Myon-Beschleuniger

- Myon:  $\sim 200$ -fach höhere Masse gegenüber Elektron
- Synchrotron-Strahlung  $200^4 \approx 2 \times 10^9$ -fach geringer
- ◇ höhere Strahlenergie in Beschleuniger mit geringem Radius möglich
- ◇ Kollisionen: punktförmige Myonen  $\leftrightarrow$  Protonen mit komplizierter Struktur
- ◇ hohe Myon-Masse → starke Kopplung ans Higgs-Boson  
→ direkte Erzeugung und Präzisionsuntersuchung des Higgs-Bosons
- ▷ Myon-Collider benötigt  $\mu^+$  und  $\mu^-$ -Strahlen
- Neutrino-Fabrik ist erster Schritt zu Myon-Collider
- neue technologische Probleme bei Myon-Strahlenergie  $\gtrsim$  TeV, u.a.:
- ◇ Neutrinos aus Myon-Zerfall mit Energie  $E_\nu \sim$  TeV
- ◇ Wirkungsquerschnitt Neutrino-Nukleon wächst  $\propto E_\nu$
- ◇ signifikante Strahlungsbelastung durch Neutrinos
- Myon-Collider z.B. tief unterirdisch

## Free-Elektron-Laser (FEL)

- Elektronenstrahl durchläuft Undulator
- Spontane Emission von Synchrotron-Strahlungsphotonen
- Elektronenstrahl wechselwirkt mit Synchrotron-Strahlungsphotonen
- Bunch wird durch Wechselwirkung in Mikro-Bunche aufgeteilt
- Mikro-Bunche emittieren kohärent Synchrotron-Strahlungsphotonen

→ SASE-Prinzip:

*Self-Amplified-Spontaneous-Emission*

- Intensität der Synchrotron-Strahlung  $\propto (\text{Teilchenzahl im Bunch})^2$
- FEL-Parameter:
  - ◇ Photon-Energiebereich: 0.2-12.4 keV
  - ◇ Photonstrahl-Leistung: 20-100 GW

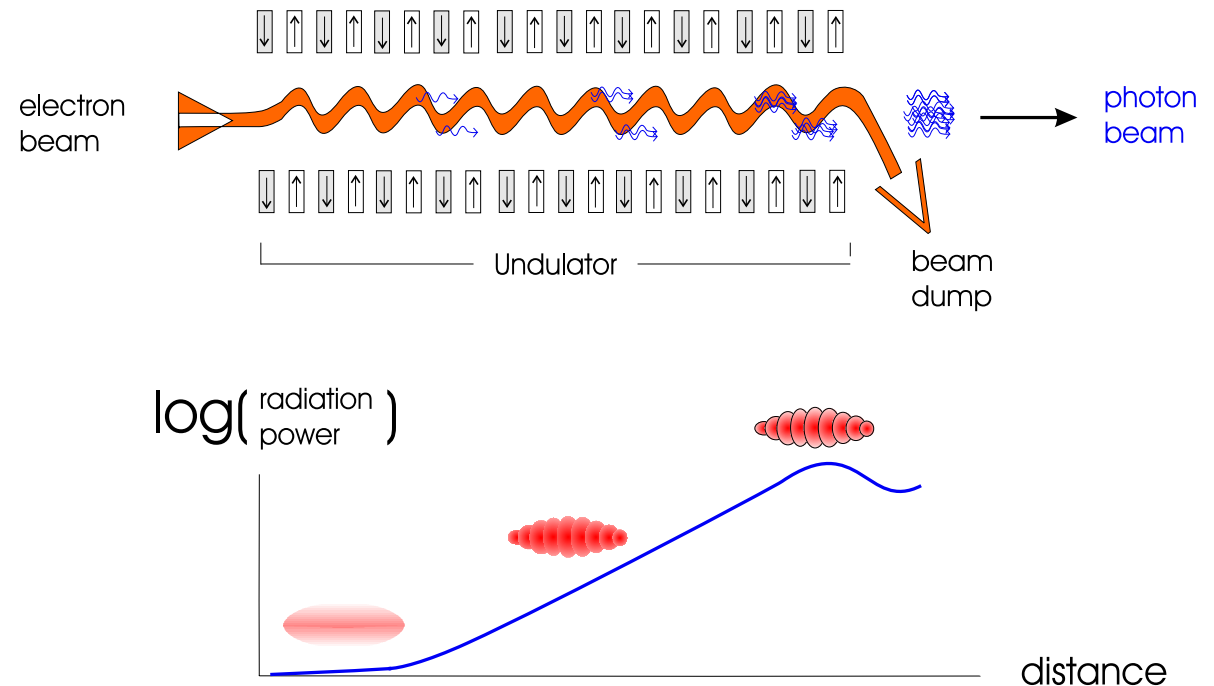


Figure 9.1.1: Schematic Diagram of a Single-Pass Free Electron Laser (FEL) operating in the Self-Amplified-Spontaneous-Emission (SASE) mode. The bunch density modulation (“micro-bunching”), growing up in parallel to the radiation power, is schematically shown in the lower part of the figure. Note that in reality the number of slices is much larger.

- ◇ Zahl der Photonen/Bunch:  $(1-20) \times 10^{12}$
- ◇ typ. Photonstrahl-Divergenz:  $1 \mu\text{rad}$
- ◇ typ. Photonstrahl-Durchmesser:  $20 \mu\text{m}$

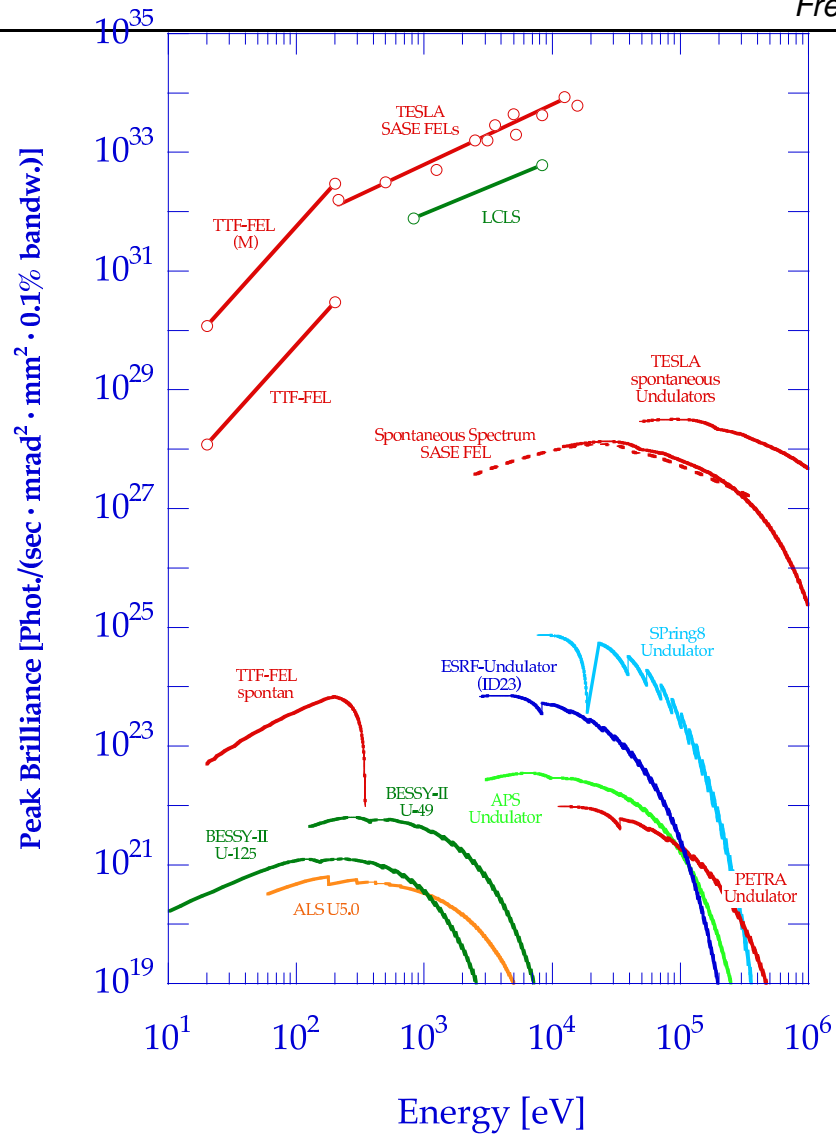


Figure 9.1.2: Spectral peak brilliance of X-ray Free Electron Lasers (XFEL) and undulators for spontaneous radiation at TESLA, in comparison with third-generation synchrotron radiation sources. For comparison, also the spontaneous spectrum of an XFEL undulator is shown. The label TTF-FEL indicates design values for the FEL at the TESLA Test Facility, with (M) for the planned seeded version. First lasing was demonstrated at TTF FEL in the year 2000 at 11 eV photon energy, and a peak brilliance of  $(6 \pm 4) \cdot 10^{25}$  in the above units has been achieved up to now.

Variable	Unit	Value
<b>Linac Parameters</b>		
optimised gradient for XFEL operation	MV/m	18
linac repetition rate $f_{rep}$ for XFEL	Hz	5
bunch length (rms)	fs	80
bunch spacing	ns	93
number of bunches per train		11500
bunch train length	$\mu$ s	1070
bunch charge	nC	1
normalised emittance at undulator entrance	mmrad	1.6
uncorrelated rms energy spread	MeV	5.1
RF duty cycle	%	0.5
average electron beam power (27 GeV branch)	MW	$\leq 0.8$
average electron beam power (50 GeV branch)	MW	$\leq 1.4$
over-all power efficiency AC to electron beam	%	28
<b>FEL Parameters</b>		
typical saturation length	m	100 - 220
photon energy range	keV	0.2 - 12.4
photon beam power range	GW	20 - 100
number of photons per bunch	$10^{12}$	1 - 20
typical photon beam divergence (rms)	$\mu$ rad	1
typical photon beam diameter (rms)	$\mu$ m	20

Table 9.1.1: Key parameters for XFEL operation with TESLA. More detailed tables on XFEL operation are given in part V.

# Laser/Teilchenstrahl-Plasma-Beschleuniger

- Limitierung der Beschleunigungsgradienten in herkömmlichen Resonatoren auf typ.  $< 100 \text{ MV/m}$   
(höhere Gradienten  $\rightarrow$  stärkere HF-Felder  $\rightarrow$  Feldemission aus Resonatorwänden  $\rightarrow$  Oberflächenbeschädigung)
- alternative Beschleunigungsmethoden gesucht, z.B. mittels Plasma:
  - ◇ Plasma: Elektronen  $e^-$  & Ionen  $I^+$ , im Mittel neutral
  - ◇ Plasma:  $e^-$  sehr beweglich,  $I^+$  "träge"
  - ◇ durchlaufender Teilchen- (a)/ Laserpuls (b)
- $\rightarrow$  transv. Verschiebung der  $e^-$  bzgl.  $I^+$
- $\cong$  transversale Wake-Felder
- ◇ verschobene  $e^-$  oszillieren transversal durch pos.  $I^+$ -Kanal
- $\rightarrow$  Wake-Felder laufen durch Plasma
- ◇ zu beschleunigender Elektronenbunch "surft" auf beschleunigendem Wake-Feld
- ◇ (theor.) Beschleunigungsgradienten: bis zu  $\sim 100 \text{ GV/m}$  !

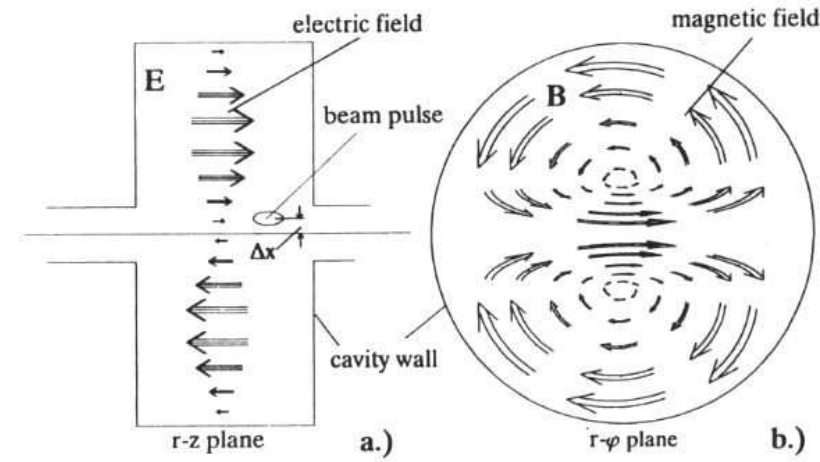
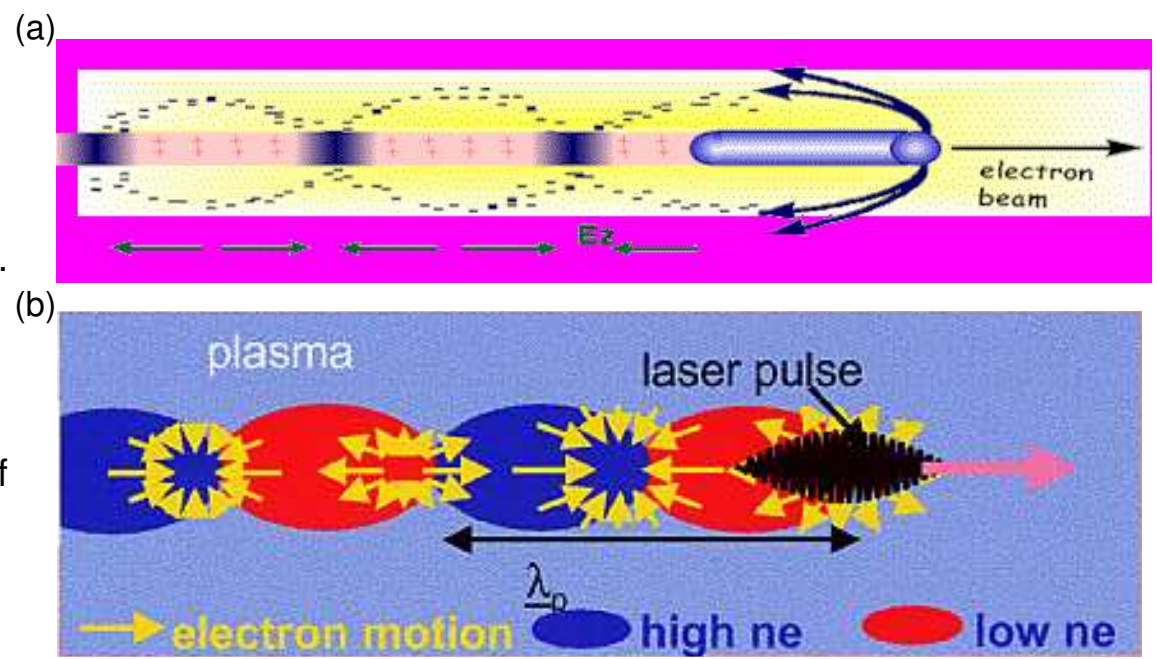


Fig. 12.3. Transverse parasitic mode  
transv. Wake-Felder durch nicht-zentrierten Teilchenstrahl





## Zusammenfassung

- Physik der Beschleuniger: angewandte Elektrodynamik mit Berührungspunkten zu vielen weiteren Gebieten:
  - ◇ Hochfrequenztechnik
  - ◇ Magnettechnik
  - ◇ Supraleitung für Magnete & Hochfrequenz-Resonatoren
  - ◇ Nicht-lineare Theorie
  - ◇ Chaos
  - ◇ Laser
  - ◇ Plasma
  - ◇ . . .
- Prinzipien werden bis zur technologischen Grenze ausgereizt
- neue Prinzipien werden gesucht/untersucht, um zu höheren Strahlenergien & -intensitäten zu gelangen
- Teilchenführung basiert meist noch auf Magnete  
(abgesehen von “Channeling” von Teilchen entlang Kristallebenen für Spezialanwendungen)
- Physik der Beschleunigung: immer noch weites Feld für neue Ideen & Konzepte !