Theoretische Informatik und Logik

Musterklausur

Sommersemester 2018

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Definieren Sie folgende Begriffe, wobei Sie die Begriffe „(prädikatenlogische) Formel“, „Atom“, „Literal“, „Quantor“, „Skolemform“, „Substitution“, und „Term“ als bekannt voraussetzen dürfen:

a) konjunktive Normalform,

b) prädikatenlogische Klausel,

c) allgemeinster Unifikator,

d) Variante einer prädikatenlogischen Klausel, sowie

e) prädikatenlogische Resolvente.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende WHILE-Programm:

$x_0 := x_1$
$x_6 := x_3$
WHILE $x_3 \mathrel{!=} 0$ **DO**
    $x_5 := x_5 + x_2$
    $x_3 := x_3 - 1$
    $x_7 := x_3$
    $x_8 := 1$
    WHILE $x_7 \mathrel{!=} 0$ **DO**
        $x_7 := 0; x_8 := 0$
    END
    WHILE $x_8 \mathrel{!=} 0$ **DO**
        $x_8 := x_4$
        $x_9 := 1$
        WHILE $x_8 \mathrel{!=} 0$ **DO**
            $x_8 := 0; x_9 := 0$
            $x_3 := x_6$
            $x_4 := x_4 - 1$
            $x_0 := x_0 + x_5$
            $x_5 := 0$
        END
        WHILE $x_9 \mathrel{!=} 0$ **DO**
            $x_9 := 0$
        END
    END
END

a) Welchen Wert x_0 berechnet das Programm für die Eingabe $x_1 = 23, x_2 = 42, x_3 = 2, x_4 = 3$?

b) Welche Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ berechnet das Programm?

c) Geben Sie ein zu obigem Programm äquivalentes LOOP-Programm an, oder begründen Sie, warum kein solches existiert.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sind die folgenden prädikatenlogischen Formeln:

$$F = \forall x, y, z.\ \Big(p(f(x), y) \rightarrow q(z, g(y))\Big)$$
$$G = \neg\exists u, v.\ \Big(p(u, f(v))\Big)$$
$$H = \forall x, y.\ \Big(q(x, g(f(y)))\Big)$$

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\{F, G\} \models H$ gilt. Geben Sie bei jeder Resolventenbildung die verwendeten Klauseln und den verwendeten allgemeinsten Unifikator an.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde das Postsche Korrespondenzproblem (**PCP**) vorgestellt:

Gegeben: eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ über Σ^*.

Frage: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \dots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \dots x_{i_\ell} = y_{i_1} \dots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \dots, k\}$ für alle $j = 1, \dots, \ell$?

---

a) Bestimmen Sie alle Lösungen für das folgende PCP: $(bc, bcd), (b, b), (da, a)$.

b) Zeigen Sie, dass die folgende Instanz keine Lösung hat: $(bab, abb), (abb, bb), (ba, bab)$.

c) Sei $\mathbf{PCP}^{\Sigma}_{\leq n}$ die Menge aller lösbaren PCP-Instanzen über dem Alphabet Σ, in deren Wortpaaren nur Wörter der Länge n oder weniger vorkommen. Ist $\mathbf{PCP}^{\Sigma}_{\leq n}$ entscheidbar oder unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_1$, wird $L(\mathcal{M}_1)$ von einer deterministischen 2-Band Turing-Maschine entschieden?

b) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_2$ und ein Wort w, hat die Turing-Maschine nach maximal $23 \cdot |w|$ Schritten jedes Zeichen des Eingabewortes w mindestens einmal gelesen?

c) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_3$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, akzeptiert $\mathcal{M}_3$ nur Wörter der Länge $\leq n$?

Aufgabe 6 (10 Punkte)

a) Definieren Sie die Komplexitätsklasse ExpTime. Dabei dürfen Sie die Begriffe „DTM“, „zeitbeschränkt“, und „DTime“ als bekannt voraussetzen.

b) Zeigen Sie mit einem direkten Beweis NP $\subseteq$ ExpTime, ohne dabei eine der bekannten Inklusionen zwischen Komplexitätsklassen NP $\subseteq C \subseteq$ ExpTime zu benutzen.

c) Sei $\mathbf{A} \in \mathrm{NPSpace}, \mathbf{B} \in \mathrm{ExpTime}$. Zeigen Sie: $\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} \in \mathrm{ExpTime}$.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$\begin{aligned} L(x,y) &\leftarrow s(x,y) \\ L(x,z) &\leftarrow s(x,y) \wedge L(y,z) \\ Q(y) &\leftarrow t(x,y,z) \wedge L(y,x) \wedge L(y,z) \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie für die folgenden Fakten schrittweise die Mengen T_P^0, T_P^1, $T_P^2, \ldots$. Wann wird der Fixpunkt erreicht?

$s(0,1) \quad s(1,2) \quad s(2,3) \quad s(3,4) \quad t(1,0,2) \quad t(3,1,4)$

b) Geben Sie einen Ableitungsbaum für $Q(0)$ an.

Aufgabe 8 (16 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind jeweils wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Sind **A**, **B** zwei formale Sprachen mit $\overline{\mathbf{A}} \leq_m \mathbf{B}$, dann gilt auch $\mathbf{A} \leq_m \overline{\mathbf{B}}$.

b) coNP ist das mengentheoretische Komplement von NP, d.h. coNP $= \{ L \subseteq \Sigma^* \mid L \notin \mathrm{NP} \}$.

c) Erfüllbarkeit prädikatenlogischer Formeln ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

d) Jede QBF-Formel ist auch eine prädikatenlogische Formel.

e) **SAT** ist in polynomieller Zeit auf **Clique** reduzierbar.

f) Das Resolutionsverfahren ist ein deterministisches, polynomiell zeitbeschränktes Verfahren, um Unerfüllbarkeit prädikatenlogischer Formeln zu entscheiden.

g) Es ist entscheidbar, ob eine gegebene Turing-Maschine die Kolmogorov-Komplexität des Eingabewortes berechnet.

h) Jede prädikatenlogische Formel mit Gleichheit ist semantisch äquivalent zu einer prädikatenlogischen Formel ohne Gleichheit.