KARL-FRANZENS-UNIVERSITÄT GRAZ
UNIVERSITY OF GRAZ

Graphentheorie

Algebraic Graph Theory von Chris Godsil und Gordon Royle

Kapitel 1.1 – 1.3

Seminararbeit

von

Katharina Mayr

01210559

Universität Graz

Insitut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen

Univ.-Prof.Dr.phil. Karin Baur

Graz, April, 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit entstand im Zuge der Lehrveranstaltung “Mathematisches Seminar“ bei Univ.-Prof.Dr.phil. Karin Baur. Als Grundlage diente das Buch Algebraic Graph Theorie von Chris Godsil und Gordon Royle. Zudem wurden ein paar Ergänzungen mithilfe des Buchs Graphentheorie von Reinhard Diestel gemacht.

2 Graphen

Ein Graph X = (V,E) besteht aus einer Knotenmenge V(X) und einer Kantenmenge E(X). Die Elemente von E heißen Kanten von X. Eine Kante ist ein ungeordnetes Paar von zwei verschiedenen Knoten aus V(X), also von der Form {u,v} mit gewissen u,v ∈ V. Eher verwendet man *uv* als Schreibweise.
In Abbildung 0.1.1. kann man sich die Definitionen auch verbildlicht anschauen. Die Ecken werden als Punkte und die Kanten als Linien dargestellt. Die genaue Lage der Knoten spielt dabei keine Rolle.

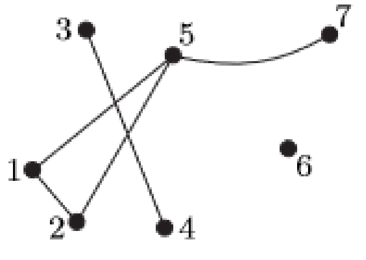


Abb. 0.1.1. Der Graph auf $V = \{1, \ldots, 7\}$ mit der Kantenmenge $E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5,7\}\}$

Weiters unterscheidet man zwischen gerichteten und ungerichteten Graphen. Bei den ungerichteten Graphen ist die Richtung zwischen den Knoten egal, sie besitzen keine Orientierung. Dies bedeutet, dass (x,y) = (y,x). Bei den gerichteten Graphen besitzen die Kanten eine Orientierung oder Richtung, also spielt die Reihenfolge der Knoten eine Rolle. Wird ein gerichteter Graph in einer Zeichnung dargestellt, wird die Orientierung meist durch einen Pfeil am Ende der Kante ausgedrückt. Schriftlich bleibt die Form der Kante mit (u,v) gleich, jedoch kann man u als Anfangsknoten und v als Endknoten sehen.

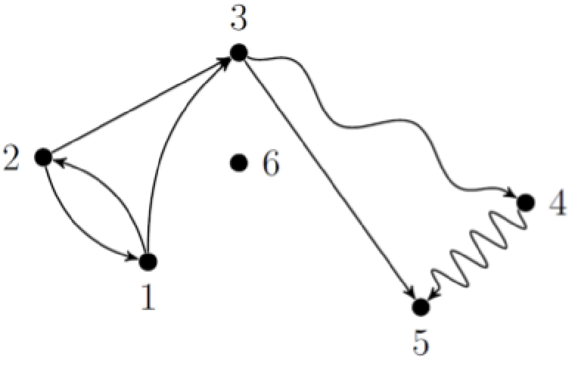


Abb. 0.1.2. Graph G = (V,E) mit den Knoten V = {1,2,3,4,5,6} und den Kanten E = {(1,2), (2,1), (1,3), (2,3), (3,4), (3,5), (4,5)}.

Nun folgen ein paar wichtige Begriffe:

- adjazent

Die Knoten x und y sind adjazent oder benachbart, wenn xy eine Kante ist. Dies schreibt man folgendermaßen: x ~ y

- inzident

Ein Knoten heißt inzident mit einer Kante, wenn der Knoten ein Element der Kante ist.

- vollständig

Ein Graph heißt vollständig, wenn alle Knotenpaare adjazent, also alle Knoten miteinander verbunden sind. Einen vollständigen Graphen auf n Ecken bezeichnen wir mit K_n oder K(n).

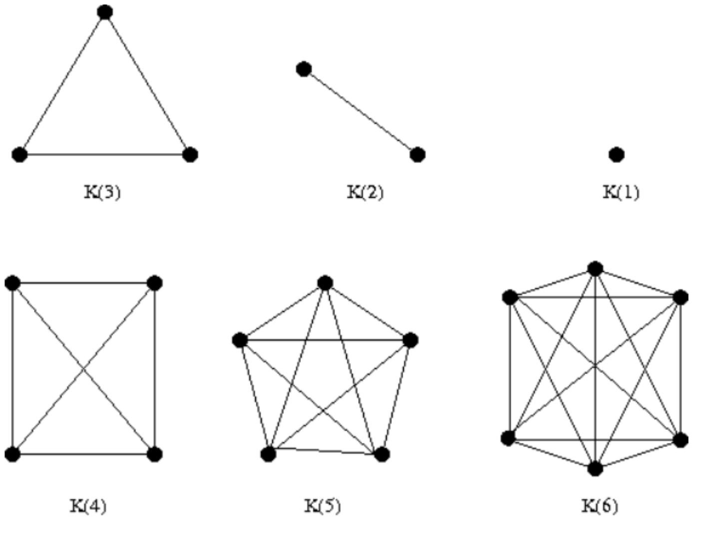


Abb. 0.1.3. Die vollständigen Graphen

- leer

Ein Graph mit keinen Kanten, also einen leeren Menge E, aber mindestens einem Knoten, heißt leerer Graph.

- Nullgraph

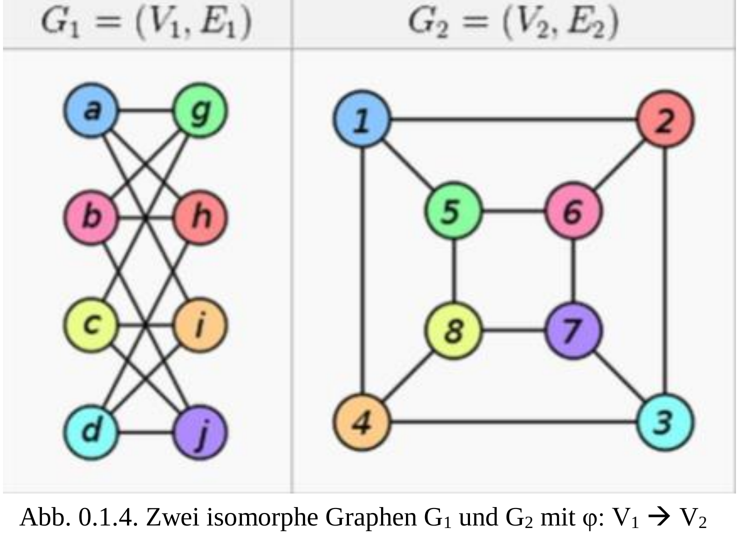
Der Graph der eine leere Kanten- und Knotenmenge besitzt, wird Nullgraph genannt.

Zwei Graphen sind genau dann gleich, wenn sie dieselbe Knoten- und Kantenmenge besitzen. Obwohl dies eine angemessene Definition ist, ändert sich durch Umbenennung der Knoten in manchen Anwendungen die Beziehung nicht.
(Dies ist für viele Anwendungen aber zu eng definiert. Für die meisten Anwendungen kann man auch durch Umbenennung der Knoten des einen Graphen einen gleichen Graphen erstellen.)

Dies motiviert die folgende Definition:

Def. isomorphe Graphen
Zwei Graphen G und H sind isomorph, wenn eine Bijektion φ von V(G) nach V(H) existiert, sodass x adjazent zu y in G ist genau dann, wenn φ(x) adjazent zu φ(y) in H ist. Φ heißt dann Isomorphismus von G nach H. Wenn G isomorph zu H ist, schreiben wir $G \cong H$.

Isomorphe Graphen werden gewöhnlich so behandelt, als wären sie gleich. Ein Isomorphismus φ beschreibt lediglich eine Umbenennung der Knoten, ohne dass die Struktur des Graphen verändert wird. Isomorphe Graphen haben dieselbe Anzahl an Knoten und Kanten und die Ordnung von φ(x) muss gleich der Ordnung von x sein. Die Definition der Ordnung folgt im Unterkapitel 4.
Da wir wissen, dass bijektive Funktionen eine Umkehrfunktion haben, hat auch die Bijektion φ eine Umkehrfunktion, also eine Bijektion von V(H) nach V(G).
In den folgenden Abbildung nennen wir φ den Isomorphismus von G_1 auf G_2.



$\varphi: V_1 \rightarrow V_2$

$\varphi(a) = 1$

$\varphi(b) = 6$

$\varphi(c) = 8$

$\varphi(d) = 3$

$\varphi(g) = 5$

$\varphi(h) = 2$

$\varphi(i) = 4$

$\varphi(j) = 7$

Abb. 0.1.4. Zwei isomorphe Graphen G_1 und G_2 mit $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$

3 Teilgraphen

Sollte es vorkommen, dass $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist, dann spricht man von einem Teilgraph Y. Informell sagt man auch, dass X den Graph Y enthält.
Def. Teilgraph
Ein Teilgraph oder Subgraph eines Graphen X ist ein Graph Y, für den gilt, dass $V(Y) \subseteq V(X)$, $E(Y) \subseteq E(X)$.

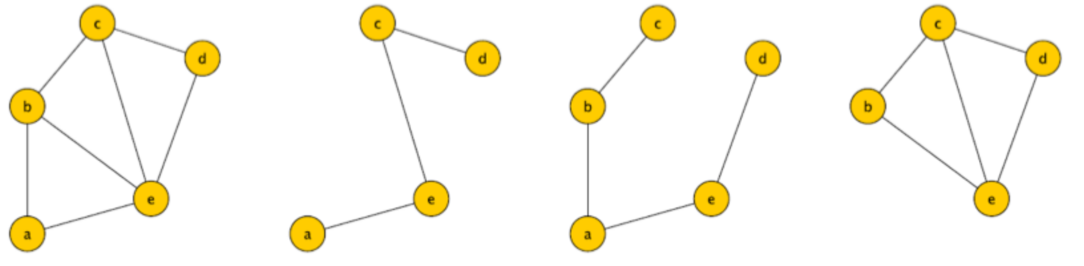
Auch hier gibt es wieder einige Definitionen für Begriffe, die wichtig für das weitere Verständnis sind.

- aufspannender Teilgraph

Wenn V(Y) = V(X), also wenn Y alle Knoten des Graphen X enthält, dann nennt man Y einen aufspannenden Teilgraph von X. Man kann einen aufspannenden Teilgraph erhalten, indem man einfach Kanten von X weglässt. Die Anzahl der aufspannenden Teilgraphen von X ist gleich der Anzahl der Teilmengen von E(X).

- induzierter Teilgraph

Ein Teilgraph Y von X heißt induzierter oder aufgespannter Teilgraph, wenn zwei Knoten aus V(Y) immer genau dann in Y adjazent sind, wenn sie in X adjazent sind. Anders könnte man sagen, dass der Teilgraph als induziert bezeichnet wird, wenn er alle Kanten $\{u,v\} \in X$ enthält.



G | Teilgraph (nicht aufgespannt, nicht induziert) | aufgespannter Teilgraph | induzierter Teilgraph

Abb. 0.1.5. Teilgraphen eines Graphen G

Allgemeiner gesagt, ein Teilgraph heißt aufgespannt, wenn er die gleichen Knoten wie der Graph besitzt, und induziert, wenn zwischen den Knoten, die in dem Teilgraphen noch existieren, alle Kanten wie in dem Hauptgraphen vorhanden sind. Ein Teilgraph, der sowohl aufgespannt als auch induziert ist, ist identisch mit seinem Hauptgraphen.

- Clique

Eine bestimmte Art von Teilgraphen ist die **Clique**. So wird ein Teilgraph genannt, der vollständig ist. Dies bedeutet, dass er notwendigerweise ein induzierter Teilgraph ist. Falls eine Menge von Knoten einen leeren Teilgraph induzieren, dann nennt man diese Menge eine **unabhängige Knotenmenge**. Die Anzahl der Knoten der größten Clique wird mit $\omega(X)$ bezeichnet. Die Größe der größten unabhängigen Knotenmenge wird mit $\alpha(X)$ geschrieben.

Als **Pfad** oder Weg der Länge r von x nach y in einem Graph ist eine Folge von r +1 verschiedenen Knoten, wobei bei x gestartet wird und bei y geendet wird und wo je zwei nachfolgende Knoten benachbart sind. Die Anzahl der Kanten eines Pfads ist seine Länge. Falls es einen Pfad zwischen je 2 beliebigen Knoten in einem gegebenen Graph gibt, nennt man den Graph zusammenhängend, sonst unzusammenhängend.

Alternativ kann man sagen, dass der Graph X unzusammenhängend ist, wenn wir seine Knotenmenge in zwei nichtleere Mengen umschreiben können, sagen wir R und S, sodass kein Knoten aus der Menge R zu einem Knoten aus S adjazent ist. In diesem Fall sagen wir, dass der Graph X eine disjunkte Vereinigung der zwei Teilgraphen ist, die von R und S induziert werden.

Ein induzierter Teilgraph von X welcher maximal ist und zusammenhängend, nennt man eine **Zusammenhangskomponente** von X.

Ein **Kreis** ist ein zusammenhängender Graph, wo jede Knotenmenge exakt zwei benachbarte Knoten besitzt. Der kleinste Kreis ist der vollständige Graph K_3. Als Kreis in einem Graph, wird ein Teilgraph von X genannt, der ein Kreis ist. Ein Graph, wo jede Knotenmenge mindestens zwei Nachbarn hat, muss einen Kreis enthalten. Dies wird meistens am Beginn in der Einführung in die Graphentheorie bewiesen.

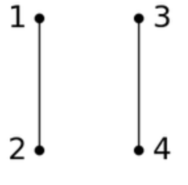
Ein azyklischer Graph ist ein Graph ohne Kreisen. Es gibt mehrere bildliche Bezeichnungen für azyklische Graphen.

Def. Baum: Ein Baum T = (V,E) ist ein zusammenhängender, kreisfreier Graph.
Bei mehreren Bäumen spricht man von einem **Wald**. Ein Wald ist somit ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

4 Automorphismen

Einen Isomorphismus von einem Graphen X auf sich selbst nennt man Automorphismus von X. Ein Automorphismus ist eine Permutation von den Knoten von X, die Kanten zu Kanten und Nichtkanten zu Nichtkanten abbildet. Klarerweise ist die Identitätspermutation, welche wir mit e bezeichnen, ein Automorphismus.
Wenn g ein Automorphismus von X ist, dann existiert seine Inverse g^{-1} und ist auch ein Automorphismus. Falls h ein zweiter Automorphismus von X ist, dann ist das Produkt gh auch ein Automorphismus. Daher formt die Menge aller Automorphismen von G eine Gruppe, welche die Gruppe der Automorphismen von X genannt wird, geschrieben wird Aut(X). Anders ausgedrückt: Die Automorphismen von X bilden bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe, die Automorphismengruppe von X.

Beispiel 1:
Sei V = {1,2,3,4} und E = {{1,2},{3,4}}: Automorphismen von G = (V,E) sind Permutationen von V, so dass die Anwendung der Permutation auf das Diagramm wieder eine Veranschaulichung desselben Graphen ergibt.



Die Permutation $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ ist ein Automorphismus, weil die Kanten nach wie vor zwischen 1 und 2 und 3 und 4 verlaufen.

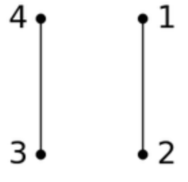


Abb. 0.1.6. Beispiel Automorphismus

Die **symmetrische Gruppe** Sym(V) ist die Gruppe aller Permutationen von einer Menge V und so ist die Automorphismengruppe von X eine Untergruppe der Symmetrischen Gruppe Sym(V(X)). Falls X n Knoten besitzt, dann verwenden wir Sym(n) für Sym(V(X)).

Im Allgemeinen ist es eine nichttriviale Aufgabe zu entscheiden, ob zwei Graphen isomorph sind, oder ob ein gegebener Graph einen nichtidentischen Automorphismus besitzt. Nichtsdestotrotz gibt es einige Fälle, wo dies ganz einfach möglich ist. Zum Beispiel ist jede Permutation der Knoten des vollständigen Graphen K_n ein Automorphismus, also $\mathrm{Aut}(K_n) \cong \mathrm{Sym}(n)$.
Das Bild von einem Element $v \in V$ unter einer Permuation $g \in \mathrm{Sym}(V)$ wird geschrieben als v^g. Wenn $g \in \mathrm{Aut}(X)$ und Y ist ein Teilgraph von X, dann Y^g der Graph mit

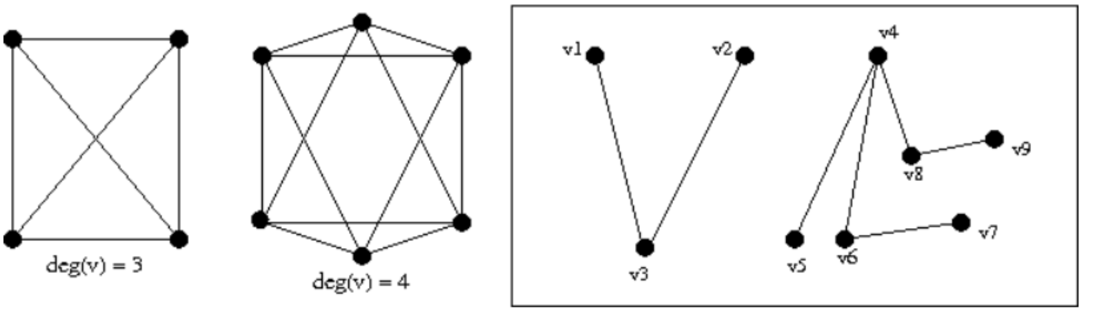
$$V(Y^g) = \{x^g : x \in V(Y)\}$$

und

$$E(Y^g) = \{\{x^g, y^g\} : \{x,y\} \in E(Y)\}.$$

Man sieht sofort, dass Y^g isomorph ist zu Y und dass Y^g zudem ein Teilgraph von X ist.

Der **Grad** oder auch Valenz von einem Knoten x ist die Anzahl der Nachbarn von x ($\deg(v) = |E(v)|$). Der kleinste bzw. größte Grad von einem Graph X sind die Minimum- bzw. Maximumwerte von dem Grad jeglicher Knoten von X.
Ein Graph, bei welchem jeder Knoten die gleiche Ordnung k hat, wird regulär vom Grad k oder k-regulär genannt. Ein 3-regulärer Graph wird kubisch genannt, ein 4-regulärer Graph quartisch.



deg(v1) = deg(v2) = deg(v5) = deg(v7) = deg(v9) = 1
deg(v3) = deg(v6) = deg(v8) = 2
deg(v4) = 3

Abb. 0.1.7. Knoten unterschiedlicher Ordnung

Lemma 1.1 Sei x ein Knoten vom Graph X und g ein Automorphismus von X. Dann hat der Knoten $y = x^g$ dieselbe Ordnung wie x.

Beweis. Sei N(x) der Teilgraph von X, der von den Nachbarn von x in X induziert wird. Dann $N(x)^g = N(x^g) = N(y)$, und deshalb sind N(x) und N(y) isomorphe Teilgraphen von G. Daraus folgt, dass sie die gleiche Anzahl an Knoten haben und somit haben x und y dieselbe Ordnung.

Dies zeigt uns, dass die Gruppe der Automorphismen von einem Graphen immer die Knoten mit gleichem Grad permutiert.

Der **Abstand $d_X(x,y)$** zwischen zwei Knoten x und y in einem Graph X ist die Länge des kürzesten Wegs von x zu y. Wenn es klar ist, welcher Graph X gemeint ist, dann schreiben wir vereinfacht d(x,y).

Lemma 1.2 Sei x und y Knoten von X und $g \in Aut(X)$, dann ist $d(x,y) = d(x^g,y^g)$.

Beweis. Betrachtet man den Teilgraphen X, der durch alle Pfade von x nach y induziert wird, dann folgt aus dem Lemma 1.1, dass der Teilgraph unter dem Automorphismus erhalten bleibt.

Das Komplement $\bar{X}$ von einem Graph X hat die gleiche Knotenmenge wie X, wobei die Knoten x und y adjazent in $\bar{X}$ sind genau dann, wenn sie in X nicht adjazent sind.

Lemma 1.3. Die Gruppe der Automorphismen von einem Graph ist gleich der Gruppe der Automorphismen von seinem Komplement.

Beweis. Dies folgt aus der Definition eines komplementären Graphen, da ein Automorphismus Kanten auf Kanten und Nichtkanten aus Nichtkanten abbildet.

Sei X ein gerichteter Graph, dann ist ein Automorphismus eine Permutation von den Knoten, die gerichtete Kanten auf gerichtete Kanten abbildet, das heißt, dass die Richtungen der Kanten erhalten werden.

Literaturverzeichnis

Chris Godsil und Gordon Royle. 2001. Algebraic Graph Theory. New York: Springer

Reinhard Diestel. 2006. Graphentheorie. Heidelberg: Springer-Verlag

Abbildungsverzeichnis