Geometrie und ihre Didaktik für LAK
Kapitel 2: Vektorräume und affine Räume

Karin Baur

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

621.237 Vorlesung im WS 2011/12
(gem. mit Michaela KRAKER)
(Unterlagen von G. Lettl)

2: Vektorräume und affine Räume:

Kann man Punkte und Pfeile addieren?

3. Zwei Grundaufgaben für das Rechnen mit Punkten und Pfeilen

Geg.: Koordinaten von A und E
Ges.: Koordinaten von $\overrightarrow{AE}$

Geg.: Koordinaten von A und $\overrightarrow{AE}$
Ges.: Koordinaten von E

Gemäß Fig. 8.3 erhält man die Koordinaten *vorzeichenrichtig* (!) aus

$$x_{AE} = x_E - x_A \qquad x_E = x_A + x_{AE}$$
$$y_{AE} = y_E - y_A \qquad y_E = y_A + y_{AE}$$

oder ausgedrückt in Zahlenpaaren[1]

$$\begin{pmatrix} x_{AE} \\ y_{AE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{AE} \\ y_{AE} \end{pmatrix}$$

Leichter merken kann man sich diese Formeln in der Gestalt

$$\overrightarrow{AE} = E - A$$

„Spitze minus Schaft"-Regel

$$E = A + \overrightarrow{AE} \quad (\text{bzw. } A + \overrightarrow{AE} = E)$$

„APPEnd"-Regel[2]

Formuliere die beiden Regeln mit Worten (Aufg. **674**)!

[1] Ersichtlich erleichtert die Spaltenform den Wechsel zwischen der „Gleichungssystem"-Schreibweise und der „Zahlenpaar"-Schreibweise. Für das Rechnen ist daher die *Spaltenform* zu bevorzugen. Für das bloße Schreiben (wie zB in Angaben) eignet sich hingegen die platzsparende *Zeilenschreibweise* besser.

[2] append (engl.) . . . anhängen; hier: „Pfeil-Anhänge-Regel" (**A**nfangspunkt **P**lus **P**feil = **End**punkt).

[Rei5-215]

1. Vektoren

Wir wissen bereits: *Verschiedene* Pfeile können die *gleiche* Koordinatendarstellung besitzen.

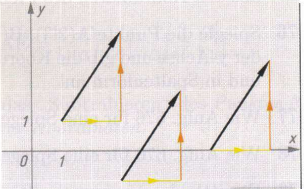


Fig. 8.7

Wann ist dies der Fall? Vergleiche Fig. 8.7!

Man sieht: Durch Angabe der Koordinatendarstellung ist nicht ein Pfeil festgelegt, sondern die *Menge aller* (unendlich vielen) *Pfeile*, welche *gleich lang*, *parallel* und *gleich orientiert* sind. Man gibt daher die folgende Definition:

Definition: Die Menge aller Pfeile der (Zeichen-)Ebene, welche gleich lang, parallel und gleich orientiert sind, wird als **Vektor** bezeichnet. Anders gesagt: Ein *Vektor* ist die Menge all jener Pfeile der (Zeichen-)Ebene, welche das *gleiche* geordnete Zahlenpaar als Koordinatendarstellung besitzen.

Demgemäß kann man einen Vektor auf zwei Arten festlegen:

- Arithmetisch: Durch ein *geordnetes Zahlenpaar*, die so genannten **Koordinaten des Vektors.**
- Geometrisch: Durch *(irgend-)einen* Pfeil; dieser heißt **Repräsentant des Vektors.**

Zusammenfassend gilt: Punkte, Pfeile und Vektoren lassen sich in *einheitlicher Weise*

- in Form *geordneter Zahlenpaare* (**arithmetisches Modell**) oder
- in Form von *(Orts-)Pfeilen* (**geometrisches Modell**)

darstellen und verarbeiten.

[Rei5-218]

Mit Vektoren lassen sich Translationen beschreiben.

Beispiel D: Unterwirf das Dreieck A(−2|3), B(0|−1), C(1|2) der durch den Vektor $\vec{s} = (5|-1)$ gegebenen Schiebung **(1)** graphisch, **(2)** rechnerisch!

Lösung: **(2)**

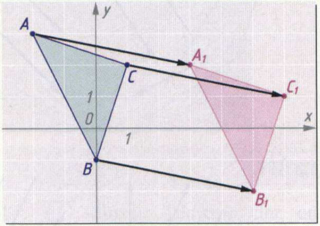
Jeder Punkt X des $\triangle ABC$ geht über in den Punkt $X_1 = X + \overrightarrow{XX_1} = X + \vec{s}$, insbesondere

$$A_1 = A + \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = B + \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = C + \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1)



[Rei5-219]

Zusammenfassend lässt sich sagen:

- Jedem Vektor aus $\mathbb{R}^2$ (Zahlenpaar) entspricht genau ein Punkt der Ebene. Umgekehrt entspricht jedem Punkt der Ebene genau ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$ (Zahlenpaar).
- Jedem Vektor aus $\mathbb{R}^2$ (Zahlenpaar) entsprechen unendlich viele Pfeile der Ebene, die alle gleich lang und (vom Nullvektor abgesehen) auch parallel und gleich gerichtet sind. Umgekehrt entspricht jedem Pfeil der Ebene genau ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$ (Zahlenpaar).

[Mal5-176a]

Grundaufgaben

13.01 Stelle den folgenden Vektor als Punkt und als Pfeil dar.

a) $(3|4)$ **c)** $(-6|-5)$ **e)** $(1|5)$ **g)** $(6|0)$
b) $(-2|5)$ **d)** $(3|-4)$ **f)** $(-6|-2)$ **h)** $(0|5)$

13.02 Stelle den Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ durch mindestens 5 Pfeile in der Ebene dar.

a) $\vec{a} = (4|2)$ **c)** $\vec{a} = (-5|3)$ **e)** $\vec{a} = (4|-5)$ **g)** $\vec{a} = (6|0)$
b) $\vec{a} = (6|-1)$ **d)** $\vec{a} = (-5|-2)$ **f)** $\vec{a} = (-4|5)$ **h)** $\vec{a} = (0|-3)$

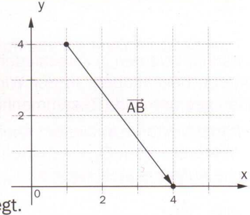
[Mal5-176b]

Der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ beschreibt, wie wir von $A\,(1|4)$ nach $B\,(4|0)$ kommen: 3 Einheiten nach rechts, 4 Einheiten nach unten.

Wir schreiben: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Alle Pfeile, die den Weg „3 nach rechts, 4 nach unten" angeben, beschreiben wir mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Damit sind Richtung, Orientierung und Länge des Weges festgelegt.



Auch Punkte sind im Koordinatensystem durch Zahlenpaare bestimmt. Allgemein legen wir fest:

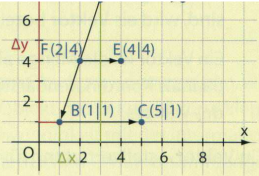
Definition: Zahlenpaare lassen sich geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten. Ein solches Zahlenpaar heißt Vektor.

Grundvorstellung: Ein Vektor beschreibt eine Wegangabe (Pfeil) oder eine Position (Punkt).

Wir werden Vektoren häufig in *Spaltenform*, z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder $P = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ anschreiben. Alternativ dazu ist die *Zeilenform*, z.B. $\vec{v} = (x|y)$ oder $P\,(m|n)$ möglich. Die Zahlen x und y bzw. m und n heißen *Komponenten* oder *Koordinaten des Vektors* $\vec{v}$ bzw. P.

[Bra5-180]

Die Koordinaten des Pfeils können auch aus der Zeichnung abgelesen werden. Der **Pfeil** $\overrightarrow{AB}$ kann in **Zeilen**- oder **Spaltenform** angeschrieben werden.



$\overrightarrow{AB} = (-2|-6) = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Für Pfeile sind auch Schreibweisen mit Strichpunkt oder Beistrich gebräuchlich:
$(-2; -6)$ oder $(-2, -6)$

Auch **Punkte** können in **Zeilenform** oder **Spaltenform** angeschrieben werden:

$A(x_A | y_A)$ oder $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

Koordinatendarstellung $\overrightarrow{AB}$

1. Komponente ... $\Delta x = x_B - x_A$

2. Komponente ... $\Delta y = y_B - y_A$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ oder $\overrightarrow{AB} = (\Delta x | \Delta y)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = B - A$$

$\overrightarrow{AB}$ = Endpunkt minus Anfangspunkt

Beispiel:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

[Blei5-197]

Ausgehend von den obigen Beispielen ist folgende Definition sinnvoll.

Definition

Die **Menge aller Pfeile der Zeichenebene**, die **gleich lang, parallel** und **gleich orientiert** sind, wird als **Vektor** bezeichnet.

Ein Vektor ist die Menge aller Pfeile der Zeichenebene, die das gleiche geordnete Zahlenpaar als Koordinatendarstellung besitzen. Ein Element dieser Menge heißt **Repräsentant**[1] des Vektors.

Ein **Vektor** – stellvertretend für alle gleich langen, parallelen und gleich orientierten Pfeile – wird mit einem **Kleinbuchstaben** und darüber gestelltem Pfeil bezeichnet: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …

Ein **Repräsentant** wird mit **Großbuchstaben** und darüber gestelltem Pfeil bezeichnet.

[Blei5-198]

Mathematisches Modell: “Affiner Raum”

Definition (4)

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$ der n-dimensionale Standardvektorraum über K. Ein *n-dimensionaler affiner Raum über K* ist eine nichtleere Menge X, deren Elemente wir *Punkte* nennen, gemeinsam mit einer Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : X \times X &\to V \\ (A, B) &\mapsto \mathcal{V}(A, B) = \overrightarrow{AB}, \end{aligned}$$

sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

Aff1) Zu jedem $A \in X$ und jedem $\boldsymbol{v} \in V$ existiert genau ein $B \in X$ mit $\mathcal{V}(A, B) = \boldsymbol{v}$.
Aff2) Für alle $A, B, C \in X$ gilt: $\mathcal{V}(A, B) + \mathcal{V}(B, C) = \mathcal{V}(A, C)$.

Das Paar $(A, B) \in X \times X$ heißt auch der *Pfeil von A nach B* (mit *Spitze B* und *Schaft A*).
$\mathcal{V}(A, B) = \overrightarrow{AB}$ heißt der *durch den Pfeil (A, B) repräsentierte Vektor*.

Lemma (1)

Es sei X ein n-dimensionaler affiner Raum über K. Dann gilt:

a) $\forall A \in X : \mathcal{V}(A, A) = \boldsymbol{o}$

b) $\forall A, B \in X$*:* $\mathcal{V}(B, A) = -\mathcal{V}(A, B)$

c) Für jedes fix gewählte $A \in X$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_A : X &\to V \\ P &\mapsto \overrightarrow{AP} \end{aligned} \qquad \textit{bijektiv.}$$

Aff1) ermöglicht es uns, sinnvoll eine *"Addition" von Punkt und Vektor* zu definieren:

$$\begin{aligned} \oplus : X \times V &\to X \\ (A, \boldsymbol{v}) &\mapsto A \oplus \boldsymbol{v} := B \end{aligned}$$

wobei B der eindeutig bestimmte Punkt mit $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v}$ ist.

Definition (5)

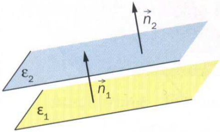
Es sei X ein n-dimensionaler affiner Raum über K. Eine nichtleere Teilmenge $M \subset X$ heißt ein *affiner Teilraum* (= *affiner Unterraum*) *von* X, wenn es ein $A \in M$ gibt, sodass

$$T_A(M) := \{\overrightarrow{AP} \mid P \in M\}$$

ein Untervektorraum von K^n ist.
Ist M ein affiner Teilraum von X, so heißt
$T_A(M)$ der *Tangentialraum von* M und
$\dim_K(T_A(M)) \in \{0, 1, \ldots, n\}$ heißt die *Dimension von* M.

4.10 Lage von zwei Ebenen

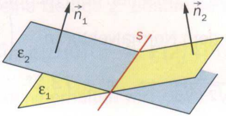
Für zwei Ebenen sind folgende Lagebeziehungen möglich:



Die Ebenen sind parallel.

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

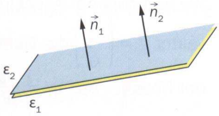
$$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset$$



Die Ebenen haben eine gemeinsame Schnittgerade s.

$$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$$

$$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = s$$



Die Ebenen sind identisch.

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

$$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

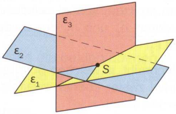
Identische Ebenen haben äquivalente Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1&: \ 4x - 3y + 5z = 2 \quad | \cdot 3 \\ \varepsilon_2&: \ 12x - 9y + 15z = 6 \end{aligned}$$

[Bra6-114]

Die folgenden Abbildungen zeigen die möglichen Lagebeziehungen dreier Ebenen. Lineare Gleichungssysteme haben entweder eine, keine oder unendlich viele Lösungen (siehe Abschnitt 2.2). Geometrisch entsprechen dem die folgenden Fälle:

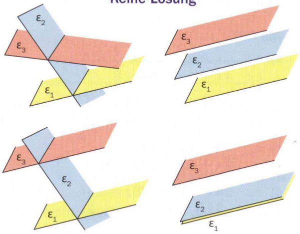
Eindeutige Lösung



$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = \{S\}$

Ein Punkt – der Schnittpunkt – liegt auf allen drei Ebenen.

Keine Lösung



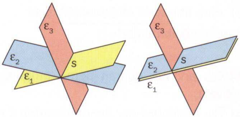
$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = 0$

Je zwei Ebenen haben eine Schnittgerade.

Ebenen liegen parallel bzw. zwei sind identisch.

Unendlich viele Lösungen

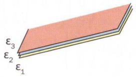
Schnittgerade



$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = s$

Die drei Ebenen haben eine Schnittgerade gemeinsam.

Schnittebene



$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$

$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$

Die Ebenen sind identisch, sie haben alle Punkte gemeinsam.

[Bra6-116]

Satz (3)

Es sei X ein n-dimensionaler affiner Raum über K und $\emptyset \neq M \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Dann gilt:
M ist ein affiner Teilraum von X genau dann, wenn mit einem beliebig gewählten Punkt $O \in X$ gilt:
für alle $P_1, \ldots, P_k \in M$ und für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ ist

$$P = O \oplus \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \in M \, .$$

(Jedes solche P heißt eine affine Linearkombination der Punkte $P_1, \ldots, P_k \in M$.)

Definition (6)

Es sei X bzw. Y ein n- bzw. m-dimensionaler affiner Raum über K. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *affin*, wenn es eine K-lineare Abbildung (= einen K-Vektorraumhomomorphismus) $\varphi : K^n \to K^m$ gibt, sodass für alle $A, B \in X$ gilt:

$$\overrightarrow{f(A)\, f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) \ .$$

Äquivalent zu dieser Bedingung ist: Ist $O \in X$ beliebig gewählt und $O' = f(O) \in Y$, so gilt für jedes $P \in X$:

$$f(P) = O' \oplus \varphi\left(\overrightarrow{OP}\right) \ .$$