Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 12 (bis 18.6.2020, 10:00)

Aufgabe 58. Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: Ist A eine selbstadjungierte Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, so gibt es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht (auch wenn es weniger als n verschiedene Eigenwerte von A gibt).

Aufgabe 59.

a) Sei $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine selbstadjungierte, nilpotente lineare Abbildung. F nilpotent bedeutet: $F^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $F = 0$, die Nullabbildung.

b) Sei $T : V \to V$ normal. Zeigen Sie: T und T^* besitzen dieselben Eigenvektoren.

Aufgabe 60. Geben Sie die Koordinatenvektoren von $u, v \in \mathbb{C}^4$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ an:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 61. Bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

sind die Matrixdarstellungen von $A, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben:

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen A und B bezüglich der Basis

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 62. Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ über $\mathbb{R}$?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in (0, \pi)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}, \quad \omega, \mu \geq 0.$$