Numerische Mathematik 1 Übungen
Blatt 1 – Bearbeitung bis zum 13.03.2014

Hausaufgaben

1. *Eigenschaften von Projektionen* Zeigen Sie, dass eine Projektion P die folgenden Eigenschaften erfüllt:

   (a) $I - P$ ist wieder eine Projektion.

   (b) $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Im}(I - P)$.

   (c) $\mathrm{Ker}(P) \cap \mathrm{Im}(P) = \{0\}$.

2. *Cayley-Transformation* Sei $S = -S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schief-symmetrisch. Zeigen Sie, $I-S$ ist invertierbar und $(I - S)^{-1}(I + S)$ ist orthogonal.

3. *A-orthogonale Projektion* Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und sei M ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Abbildungen

$$P_A : \mathbb{R}^n \to M,\ x \mapsto u \in M \text{ mit } \langle x - u, v\rangle_A = 0 \text{ für alle } v \in M, \tag{1}$$

$$\tilde{P}_A : \mathbb{R}^n \to M,\ x \mapsto u \in M \text{ mit } \langle x - u, v\rangle_A = 0 \text{ für alle } v \in AM. \tag{2}$$

   (a) Vergewissern Sie sich, dass P_A und $\tilde{P}_A$ Projektionen sind (d .h. dass durch diese Festlegung von u jeweils eine eindeutige, idempotente lineare Abbildung definiert wird).

   (b) Geben Sie eine Matrixdarstellung von P_A und $\tilde{P}_A$ an.

   (c) Welches Minimierungsproblem löst $P_A z$ bzw. $\tilde{P}_A z$ für gegebenes $z \in \mathbb{R}^n$?

4. *Norm schiefer Projektionen*

   (a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine schiefe Projektion P an, und bestimmen Sie die Norm ihrer Matrixdarstellung.

   (b) Zeigen Sie, dass $\|P\|_2 > 1$ für jede schiefe Projektion P gilt.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass ein $u_1 \in Im(P)$ und $u_2 \in Ker(P)$ mit $\langle u_1, u_2\rangle < 0$ existieren. Zeigen Sie dann, dass das Minimierungsproblem $\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|u_1 + \alpha u_2\|_2^2$ eine Lösung $\alpha^* > 0$ hat. Verwenden Sie dann $x^* = u_1 + \alpha^* u_2$ um zu zeigen, dass $\|P\|_2 > 1$ gilt.

Programmieraufgabe

Alle Kodes sollen an `laurent.pfeiffer@uni-graz.at` *per Email bis zum 12.10.2014 geschickt werden.*
Der eigene Kode und die eigene Funktion sollen mit
`FamilienV` = Familienname + erster Buchstabe des Vornamen
genannt werden, wie z.B. `pfeifferl.m` *für Laurent Pfeiffer.*

1. *QR-Zerlegung per Orthonormalisierungsverfahren*

   Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das die QR-Zerlegung einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mit Hilfe der beiden Gram–Schmidt-Verfahren berechnet. Die Funktion sollte wie folgt deklariert werden:

```
[Q,R,e] = FamilienV(A,verfahren,ep)
```

wobei als `verfahren` die Zeichenkette `'gs'` (für Gram–Schmidt) oder `'mgs'` (für modifiziertes Gram–Schmidt) akzeptiert werden soll. Für die Eingabematrix `A` sollen eine unitäre Matrix `Q` und eine obere Dreiecksmatrix `R` berechnet werden, wobei `A=QR` gilt. Der Ausgabeparameter `e` erfüllt `e=1` wenn der Code erfolgreich läuft und `e=2` wenn die Matrix `A` singulär ist. Die Matrix `A` wird als singulär erkannt, wenn eine Spalte von `Q` eine Norm hat, die kleiner als der Eingabeparameter `ep` ist.

Testen Sie Ihre Funktion mit Hilfe der Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = \left(2\frac{i-1}{m-1}\right)^{j-1}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{für} \quad m, n \in \{10, 20, 30\}.$$

Diese Matrix ist eine Eingabe der Funktion und soll nicht im eigenen Kode definiert werden. Der Kode soll wohl strukturiert und wohl kommentiert sein.

Diskussionspunkte:

(a) Können Schleifen vermieden werden, damit der Kode schneller läuft?

(b) Ist die Ausgabematrix R die gleiche für `'gs'` und `'mgs'`?

(c) Gibt es Unterschiede zwischen den eigenen Ergebnissen und jenen von der in Matlab eingebauten Funktion `qr` (für quadratische Matrizen)?