Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 23. Oktober 2018**

Analysis III — Vortragsübung 1

1.1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (u^2 - v^2, 2uv)$.

(a) Ist f lokal injektiv?

(b) Ist $f|_{\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}}$ lokal injektiv?

(c) Ist $f|_{\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}}$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild?

(d) Sei $\Omega = \{\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u, v > 0,\ 1 < u^2 + v^2 < 4 \,\}$.
Skizzieren Sie Ω.
Berechnen und skizzieren Sie die Teilmenge $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2$.

(e) Ist $f|_\Omega$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild? Kann man die Umkehrfunktion angeben?

(f) Kann man nach Identifikation $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die Funktion f als holomorphe Funktion auffassen?

1.2. (a) Gibt es ein $n \geqslant 1$ und eine bijektive C^1-Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die kein Diffeomorphismus ist?

(b) Gibt es ein solches f, für welches die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist?

1.3. Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - y^2, y - x^2)$.
Wir schreiben $\hat{\varphi} = \varphi - \mathrm{id}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{D}\varphi$ und $\mathrm{D}\hat{\varphi}$. Ist $\mathrm{D}\varphi(0) = \mathrm{Id}$?

(b) Bestimmen Sie ein $r > 0$ mit $[\hat{\varphi}]_{\mathrm{B}_r(0)} \leqslant \frac{1}{4}$. Hinweis: Lemma 19.7.

(c) Wir schreiben $B = \mathrm{B}_r(0)$ und $B' = \mathrm{B}_{r/2}(0)$.
Für eine stetige Abbildung $w : B' \to B$ mit $w(0) = 0$ und $[w]_{B'} \leqslant 1/2$ schreiben wir

$$Tw \ = \ -\hat{\varphi} \circ (\mathrm{id} + w)\ .$$

Sei $w_0 = 0$. Sei $w_{k+1} = Tw_k$ für $k \geqslant 0$.
Bestimmen Sie w_1, w_2 und w_3 .

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 30. Oktober 2018**

Analysis III — Vortragsübung 2

2.1. Sei $K := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y^3 + y = x^3 - x \}$.

(a) Für welche $(x_0, y_0) \in K$ gibt es eine Umgebung U von x_0, eine Umgebung V von y_0 und eine C^1-Abbildung $v : U \to V$ mit

$$K \cap (U \times V) \; = \; \{ (u, v(u)) \, : \, u \in U \} \, ?$$

(b) Für welche $(x_0, y_0) \in K$ gibt es eine Umgebung U von x_0, eine Umgebung V von y_0 und eine C^1-Abbildung $u : V \to U$ mit

$$K \cap (U \times V) \; = \; \{ (u(v), v) \, : \, v \in V \} \, ?$$

(c) Man bestimme die Tangenten an K in $(-1, 0)$, in $(0, 0)$ und in $(1, 0)$.

(d) Für $x_0 < 0$ bestimme man ein $\varepsilon > 0$, für welches der Schnitt von K und der Strecke von (x_0, x_0) nach $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ nicht leer ist.

(e) Skizzieren Sie K, soweit dies anhand von (c) und (d) möglich ist.

2.2. Gibt es eine Umgebung U von $(1,1)$ in $\mathbb{R}^2$, eine Umgebung W von $(1,1)$ in $\mathbb{R}^2$ und eine C^1-Abbildung $f : U \to W$, für welche

$$\begin{array}{rl} & \{ ((u,v),(w,x)) \in U \times W \, : \, uvwx = 1, \; uvw + 2uvx + uwx + vwx = 5 \} \\ = & \{ ((u,v), f(u,v)) \, : \, (u,v) \in U \} \end{array}$$

ist?

2.3. Sei $k > 0$. Für eine C^2-Abbildung $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto z(t) = (x(t), y(t))$ gelte folgende Differentialgleichung für $t \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t), y(t)) \; = \; -k(x(t)^2 + y(t)^2)^{-3/2}(x(t), y(t))$$

Diese beschreibt die Bewegung eines Massepunktes in einem Gravitationsfeld mit festem Zentrum im Ursprung.

(a) Man schreibe diese Differentialgleichung in Polarkoordinaten.

(b) Man verwende (a), um kreisförmige Lösungen der Differentialgleichung zu bestimmen.

2.4. Man verallgemeinere Kugelkoordinaten auf $\mathbb{R}^4$ und diskutiere die resultierende Abbildung $\kappa : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ auf Surjektivität und lokale Injektivität.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 6. November 2018**

Analysis III — Vortragsübung 3

3.1. (a) Seien $m,\, n \geqslant 1$. Sei $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (u,v) \mapsto f(u,v)$ eine C^1-Funktion.
Sei $(u_0, v_0) \in \mathrm{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gegeben mit $f(u_0,v_0) = 0$ und $\det f_v(u_0,v_0) \neq 0$.
Seien $u_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $v_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ Umgebungen und $\varphi : U \to V$ eine C^1-Funktion mit $\det f_v(u,v) \neq 0$ für $(u,v) \in U \times V$ und

$$\{\, (u,v) \in U \times V \,:\, f(u,v) = 0 \,\} = \{\, (u, \varphi(u)) \,:\, u \in U \,\}\,.$$

Man bestimme die Jacobimatrix von φ unter Verwendung der Jacobimatrix von f.

(b) Sei nun $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto \exp(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 - \exp(2) - 2$.
Man verifiziere die Existenz von Umgebungen $(1,1) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $0 \in V \subseteq \mathbb{R}$ und einer C^1-Funktion $\varphi : U \to V$ mit

$$M \;=\; \{\, (x,y,z) \in U \times V \,:\, f(x,y,z) = 0 \,\} \;=\; \{\, (x,y,\varphi(x,y)) \,:\, (x,y) \in U \,\}\,.$$

Man bestimme den Gradienten $\nabla\varphi$. Man bestimme die Tangentialebene an M in $(1,1,0)$.

3.2. Wir betrachten die Kurve

$$K \;=\; \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + xy + y^2 = 4 \,\}\,.$$

(a) Skizzieren Sie K. Ist K eine Mannigfaltigkeit?

(b) Sei $(x_0, y_0) = (2, -2)$. Man verifiziere die Existenz von Umgebungen $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$ und $y_0 \in V \subseteq \mathbb{R}$ und einer C^1-Funktion $\varphi : U \to V$ mit $K \cap (U \times V) = \{\, (x, \varphi(x)) \,:\, x \in U \,\}$.

(c) Bestimmen Sie $\varphi'(x)$. Ist φ eine C^2-Funktion?

(d) Bestimmen Sie den Krümmungsradius $|(1+\varphi'(x)^2)^{3/2}/\varphi''(x)|$ für $x = 2$.

(e) Ergänzen Sie den Krümmungskreis an der Stelle $(2,-2)$ in der Skizze.

3.3. Sei $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 10\cos(x)$. Man bestimme im Phasenportrait von $\ddot{x} = -V'(x)$ zeichnerisch Kurven K_1, K_2 und K_3 unter Beachtung der folgenden Bedingungen.

(a) Es ist K_1 eine geschlossene Kurve.

(b) Es durchläuft K_2 einen kritischen Punkt der Gesamtenergie.

(c) Es ist K_3 unbeschränkt und durchläuft keinen kritischen Punkt der Gesamtenergie.

(d) Man zeichne auch die Spiegelbilder von K_1, K_2 und K_3 an der x-Achse in das Phasenportrait mit ein.

© kuenzer@mathematik.uni-stuttgart.de david.mitrouskas@mathematik.uni-stuttgart.de
poschel@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 13. November 2018**

Analysis III — Vortragsübung 4

4.1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy^2$.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Sei $K = g^{-1}(0)$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von $f|_K$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von $f|_K$ mittels Lagrange.

(c) Bestimmen Sie die globalen Extremstellen von $f|_K$ mittels Lagrange.

(d) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von $f|_K$ mitttels Lagrange.

(e) Man löse (b), (c), (d) mittels Parametrisierung von K.

4.2. Wir betrachten eine quaderförmige Kiste ohne Deckel mit den Grundseitenlängen a und b und der Höhe c, wobei $(a, b, c) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Das Volumen der Kiste ist $V(a, b, c) = abc$.

Die Oberfläche der Kiste ist $F(a, b, c) = ab + 2bc + 2ac$.

Unter der Nebenbedingung $F(a, b, c) = 1$ maximiere man das Volumen der Kiste.

4.3. Sei $g \subseteq \mathbb{R}^3$ die Gerade durch die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$.
Sei $h \subseteq \mathbb{R}^3$ die Gerade durch die Punkte $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$.

(a) Man bestimme den minimalen Abstand zweier Punkte P, $Q \in \mathbb{R}^3$ unter den Nebenbedingungen $P \in g$ und $Q \in h$ mittels Lagrange.
Hinweis: Quadrat des Abstandes minimieren.

(b) Man bestimme den minimalen Abstand zweier Punkte $P \in g$ und $Q \in h$ mittels Parametrisierungen von g und h.

(c) Seien $P_{\min} \in g$ und $Q_{\min} \in h$ die Punkte, bei denen der Abstand von $P_{\min}$ und $Q_{\min}$ minimal wird. Sei k die Gerade durch $P_{\min}$ und $Q_{\min}$.
Man überprüfe, ob k orthogonal ist zu g und h.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 27. November 2018**

Analysis III — Vortragsübung 5

5.1. Für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sei $\mu(I) := \operatorname{card}(\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cap I)$.

Für eine Folge $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ reeller Zahlen sei

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} a_x & \text{falls } x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Sei $a_n \geqslant 0$ für $n \geqslant 0$. Man zeige $f_a \in \mathcal{M}_s^1(\mu)$ und

$$\int f_a \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n \geqslant 0} a_n \, .$$

(b) Man finde eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \geqslant 0}$ mit $f_a \in \mathcal{M}^1(\mu) \smallsetminus \mathcal{M}_s^1(\mu)$ und mit $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ konvergent.

5.2. Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} : x \mapsto \begin{cases} x^{-1/2} - 1 & \text{falls } x \in (0,1] \\ \infty & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Es ist $f \in \mathcal{U}^1(\lambda_1)$, i.e. es ist f monoton approximierbar.

(b) Es ist $I_{\lambda_1}(f) < \infty$.

5.3. Der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(1/x)$$

ist eine λ_2-Nullmenge.

5.4. Man finde eine Intervallfunktion, die additiv, monoton, aber nicht regulär ist.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 4. Dezember 2018**

Analysis III — Vortragsübung 6

6.1. Sei $n \geqslant 1$. Sei μ ein Maß auf J^n.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes nichtleeres Intervall. Sei $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto f(t,x)$ eine Funktion, für welche $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f_t(x) := f(t,x)$ in $\mathcal{M}^n(\mu)$ liegt für $t \in I$.

(a) Sei $I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t,x)$ stetig für $x \in \mathbb{R}^n$ bis auf eine μ-Nullmenge.
Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existent mit $g \in \mathcal{L}^n(\mu)$ und $|f_t| \leqslant_\mu g$ für $t \in I$.
Dann ist f_t integrierbar für $t \in I$. Ferner ist

$$F : I \to R : t \mapsto F(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f_t \, \mathrm{d}\mu$$

stetig.

(b) Gebe es ein $a \in I$, für welches $f_a \in \mathcal{L}^n(\mu)$ liegt.
Sei $f_t'(x) := (\partial_s f(s,x))|_{s=t}$ existent für $t \in I$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existent mit $g \in \mathcal{L}^n(\mu)$ und $|f_t'| \leqslant_\mu g$ für $t \in I$.
Dann ist f_t integrierbar für $t \in I$. Ferner ist

$$F : I \to R : t \mapsto F(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f_t \, \mathrm{d}\mu$$

differenzierbar, wobei

$$F'(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f_t' \, \mathrm{d}\mu$$

für $t \in I$.

6.2. (a) Wir können $\Gamma : (1,\infty) \to \mathbb{R} : t \mapsto \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ definieren.
Es ist Γ differenzierbar mit $\Gamma'(t) = \int_0^\infty \ln(x) x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathcal{L}^1(\lambda^1)$. Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto v(x) := xg(x)$ auch in $\mathcal{L}^1(\lambda^1)$.
Die Fouriertransformierte von g sei

$$\hat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \hat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x \,.$$

Dann ist $\hat{g}$ existent und stetig differenzierbar mit

$$\partial_t \hat{g}(t) \;=\; -\mathrm{i}\hat{v}(t) \,.$$

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 11. Dezember 2018**

Analysis III — Vortragsübung 7

7.1. Wir betrachten die Funktion

$$f \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;:\; (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Es ist $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = f(x,y)$ für $y \in \mathbb{R}$, außer bei $(0,0)$.

(b) Man zeige $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\pi/4\,.$

Man folgere $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \pi/4\,.$

(c) Man zeige $\int_{[0,1]\times[0,1]} |f|\mathrm{d}\lambda_2 = \infty.$

(d) Sei $\tilde{f} := f \cdot \chi_{[0,1]^2}$. Ist $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\lambda_2)$?

7.2.

(a) Man berechne $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mittels Polarkoordinaten.

(b) Man berechne $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ unter Verwendung von (a).

7.3. Für $n \geqslant 1$ sei $\mathrm{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$.

(a) Man bestimme das Volumen von D^2 mittels Integral einer konstanten Funktion über den Bereich D^2.

(b) Man bestimme das Volumen von D^3 mittels Integral einer geeigneten Funktion über den Bereich D^2 ohne Verwendung von Polarkoordinaten.

(c) Man bestimme das Volumen von D^3 mittels Integral einer geeigneten Funktion über den Bereich D^2 mit Verwendung von Polarkoordinaten.

(d) Man bestimme das Volumen von D^3 mittels Kugelkoordinaten.

(e) Man bestimme das Volumen von D^4 mittels verallgemeinerter Kugelkoordinaten; cf. Lösung zu Aufgabe 2.4.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 18. Dezember 2018**

Analysis III — Vortragsübung 8

8.1. Sei $n \geqslant 1$.
Seien $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Diffeomorphismen mit $\det(\mathrm{D}\psi) > 0$ und $\det(\mathrm{D}\varphi) > 0$.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Man zeige $\det\big(\mathrm{D}(\varphi \circ \psi)(x_0)\big) = \det\big(\mathrm{D}\psi(\varphi(x_0))\big) \cdot \det\big(\mathrm{D}\varphi(x_0)\big)$ auf zwei Weisen.

(a) Mittels Kettenregel.
(b) Mittels Transformationsformel.

8.2. Man finde eine stetige Abbildung $C : [0,1] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit folgenden Eigenschaften.

(1) Es ist $C(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(2) Es ist $C(1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(3) Es ist $\det(C(t))$ monoton fallend in $t \in [0,1]$.

8.3. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x/2$. Sei $U = (0,2) \subseteq \mathbb{R}$.
Man finde eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\psi|U = \varphi$, mit $\psi(U) \cap \psi(U^{\mathrm{c}}) = \emptyset$ und mit $\psi|I^{\mathrm{c}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ für ein hinreichend großes Intervall I.

8.4. Man zeige.

(a) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung.
Dann ist $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine λ_2-Nullmenge.
(b) Es gibt keine surjektive stetig differenzierbare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 08. Januar 2019**

Analysis III — Vortragsübung 9

9.1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3). Sei $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ die dazu duale Basis von V^*.
Sei $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Sei $f : V \to V : v_i \mapsto \sum_{j=1}^{3} a_{j,i} v_j$ die durch A gegebene lineare Abbildung, wobei $1 \leqslant i \leqslant 3$.
Sei $\psi_1 := \varphi_2 \wedge \varphi_3$, $\psi_2 := \varphi_3 \wedge \varphi_1$ und $\psi_3 := \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
Man finde die Matrix, die die lineare Abbildung

$$f^* \;:\; \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$$

bezüglich (ψ_1, ψ_2, ψ_3) beschreibt.

9.2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3, v_4).
Sei $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ die dazu duale Basis von V^*.
Wir identifizieren $\mathbb{R}$ und $\Lambda^4 V$ via $\mathbb{R} \to \Lambda^4 V : x \mapsto x\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$.

(a) Wir haben die symmetrische Bilinearform

$$\begin{array}{rccccccc} \kappa : & \Lambda^2 V & \times & \Lambda^2 V & \to & \Lambda^4 V & = & \mathbb{R} \\ & (\omega & , & \tilde{\omega}) & \mapsto & \omega \wedge \tilde{\omega} \,. & & \end{array}$$

(b) Man bestimme eine Grammatrix von κ.

(c) Es ist κ nichtausgeartet. Es ist κ nicht positiv definit.

9.3. Sei $U := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sei $\omega := \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\,\mathrm{d}x_1 - \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\,\mathrm{d}x_2 \in \Omega^1(U)$.

(a) Es ist ω geschlossen.

(b) Es ist ω nicht exakt.

9.4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.
Sei $\omega = u(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 + v(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2 \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.
Man bestimme $f^*\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^1)$, i.e. man bestimme $(f^*\omega)(t) \in \Lambda^1\mathbb{R}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 15. Januar 2019**

Analysis III — Vortragsübung 10

10.1. Seien $m,\, n \geqslant 1$. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete.

Bezeichne $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$ die zur Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ duale Basis.

Bezeichne $(\mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_m)$ die zur Standardbasis von $\mathbb{R}^m$ duale Basis.

Sei $c : U \to V : (t_1, \ldots, t_m) \mapsto c(t_1, \ldots, t_m)$ eine glatte Funktion.

Sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Sei $k \geqslant 0$. Sei $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Wir betrachten $\omega \in \Omega^k(V)$ mit

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) \;:=\; f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\ .$$

Wir wollen $c^*\omega \in \Omega^k(U)$ berechnen.

(a) Für $p := (t_1, \ldots, t_m) \in U$ zeige man

$$(c^*\omega)(p) \;=\; f(c_1(p), \ldots, c_n(p)) \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant m} \; \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \partial_{j_1} c_{i_{\sigma(1)}}(p) \cdot \ldots \cdot \partial_{j_k} c_{i_{\sigma(k)}}(p)\, \mathrm{d}t_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}t_{j_k}\ .$$

Hierbei ist der Faktor $\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \partial_{j_1} c_{i_{\sigma(1)}}(p) \cdot \ldots \cdot \partial_{j_k} c_{i_{\sigma(k)}}(p)$ die Determinante der $k \times k$-Teilmatrix von $(\mathrm{D}c)(p)$ aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_k$ und den Spalten $j_1, \ldots, j_k$.

(b) Man spezialisiere zu $m = 1$, $k = 1$, $n = 3$ und $i_1 = 2$.

(c) Man spezialisiere zu $m = 2$, $k = 1$, $n = 3$ und $i_1 = 2$.

(d) Man spezialisiere zu $m = 2$, $k = 2$, $n = 3$, $i_1 = 1$ und $i_2 = 3$.

10.2. Sei $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$.

Sei $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1$. Man verifiziere $\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega$.

10.3. Sei $c : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^2 : (t_1, t_2) \mapsto (\cos(\pi t_1), \sin(\pi t_1) t_2)$.

Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega(x_1, x_2) = x_2\, \mathrm{d}x_1$. Man verifiziere $\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega$.

10.4. Die 1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$ aus Aufgabe **9.3** ist nicht exakt.

Man verfahre dazu nun wie folgt.

Man berechne $\int_c \omega$ für $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Unter der Annahme $\omega = \mathrm{d}\eta$ für ein $\eta \in \Omega^0(U)$ berechne man $\int_c \omega = \int_c \mathrm{d}\eta = \int_{\partial c} \eta$.

Man vergleiche.

© kuenzer@mathematik.uni-stuttgart.de david.mitrouskas@mathematik.uni-stuttgart.de
poschel@mathematik.uni-stuttgart.de

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 22. Januar 2019**

Analysis III — Vortragsübung 11

11.1. Sei $K := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1\,\}$.

Sei $\xi_{1,+} := (1,0,0)$, $\xi_{1,-} := (-1,0,0)$, $\xi_{2,+} := (0,1,0)$, $\xi_{2,-} := (0,-1,0)$, $\xi_{3,+} := (0,0,1)$ und $\xi_{3,-} := (0,0,-1)$.

Für $p \in K$ identifizieren wir $\mathrm{T}_p K$ mit einem Teilraum von $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^3$, und diesen identifizieren wir mit $\mathbb{R}^3$.

(a) Man zeige $\bigcup_{i\in\{1,2,3\}}(\mathrm{B}_1(\xi_{i,+}) \cap K) \cup (\mathrm{B}_1(\xi_{i,-}) \cap K) = K$.

(b) Man finde Karten $\varphi_{i,+}$ und $\varphi_{i,-}$ mit $1 \leqslant i \leqslant 3$, deren Inverse jeweils eine Restriktion einer Projektion auf eine Koordinatenebene ist und für welche die Vereinigung der Bilder der $\varphi_{i,+}$ und der $\varphi_{i,-}$ gleich K ist.

(c) Man finde Karten $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, für welche $\sigma(\mathbb{R}^2) = K \smallsetminus \{\xi_{3,-}\}$ und $\nu(\mathbb{R}^2) = K \smallsetminus \{\xi_{3,+}\}$ ist.

(d) Man bestimme für $p \in \mathrm{B}_1(\xi_3^+) \cap K$ den Teilraum $\mathrm{T}_p K$ von $\mathbb{R}^3$ mittels (b).

(e) Man bestimme für $p \in K \smallsetminus \{\xi_{3,-}\}$ den Teilraum $\mathrm{T}_p K$ von $\mathbb{R}^3$ mittels (c).

(f) Man vergleiche die Ergebnisse von (d) und (e) für ein $p \in \mathrm{B}_1(\xi_3^+) \cap K$.

11.2. Sei $M := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geqslant 0\,\}$.

(a) Man finde Karten für M, dank welcher M zu einer berandeten 2-Mannigfaltigkeit wird.

(b) Man ermittle den Rand ∂M von M.

(c) Für $p \in \partial M$ bestimme man die Teilräume $\mathrm{T}_p(\partial M) \subseteq \mathrm{T}_p M \subseteq \mathbb{R}^3$.

(d) Für $p \in \partial M$ bestimme man die äußere Normale $\mathrm{n}(p)$.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 29. Januar 2019**

Analysis III — Vortragsübung 12

12.1.

(a) Man bestimme die Länge des Graphen der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \cosh(t)$.

(b) Seien $a,\ b > 0$. Man bestimme den Umfang der Ellipse $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,\}$ als Integral, welches nicht auszuwerten ist.

12.2. Sei $K := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$.

Man bestimme den Flächeninhalt von K unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

12.3. Sei $M := \{\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1 \}$.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x_1,x_2,x_3) \mapsto f(x_1,x_2,x_3)$ eine glatte Funktion.

Sei $n : \partial M \to \mathbb{R}^3$ die Funktion, die jedem Punkt $(x_1,x_2,x_3) \in \partial M$ den nach außen gerichteten normierten Normalenvektor an ∂M zuordnet.

Man bestätige

$$\int_M \Delta f \,\mathrm{d}V \;=\; \int_{\partial M} \langle \nabla f, n \rangle \,\mathrm{d}A$$

in den folgenden Fällen durch direkte Berechnung beider Seiten.

(a) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

(b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2$

(c) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2$

12.4. Sei $c : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ ein 3-Würfel mit positiver Jacobideterminante.

(a) Das Volumen von $c([0,1]^3)$ ist

$$\int_c \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \;=\; \int_{\partial c} x_1 \,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \;=\; \int_{\partial c} x_2 \,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \;=\; \int_{\partial c} x_3 \,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\,.$$

(b) Man verwende (a) zur Bestimmung des Volumens einer Kugel mit Radius 1.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Matthias Künzer
David Mitrouskas
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 5. Februar 2019**

Analysis III — Vortragsübung 13

13.1. Alle betrachteten Funktionen seien glatt.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + 1 \end{pmatrix}$.

(a) Man bestimme $\operatorname{rot} g$.
Wie kann man hieraus auf die Existenz von $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla U = g$ schließen?

(b) Man bestimme ein U wie in (a) beschrieben.

(c) Sei $C : [0,1] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$.
Sei M das Bild von C, i.e. die Strecke von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$.
Man bestimme $\int_M g \bullet \mathrm{d}\vec{s}$ einmal direkt und einmal unter Verwendung von

$$\int_M g \bullet \mathrm{d}\vec{s} \;=\; \int_M \nabla U \bullet \mathrm{d}\vec{s} \;=\; \int_{\partial M} U \;=\; U(1,1,1) - U(0,0,0)\ .$$

13.2. Wir begeben uns in die Situation von Aufgabe 10.1 im Fall $n = 3$, $m = 2$, $k = 1$, $i_1 = 1$:
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $V \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiete.
Bezeichne $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)$ die zur Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ duale Basis.
Bezeichne $(\mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2)$ die zur Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ duale Basis.
Sei $c : U \to V : (t_1, t_2) \mapsto c(t_1, t_2) = (c_1(t_1, t_2), c_2(t_1, t_2), c_3(t_1, t_2))$ eine glatte Funktion.
Sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir betrachten $\omega \in \Omega^1(V)$ mit

$$\omega(x_1, x_2, x_3) \;:=\; f(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}x_1\ .$$

(a) Man bestimme $c^*\omega$ und $d(c^*\omega)$.

(b) Man bestimme $d\omega$ und $c^*(d\omega)$.

(c) Man verifiziere $d(c^*\omega) = c^*(d\omega)$.

$$\begin{array}{ccc} \omega \in \Omega^1(V) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(V) \\ {\scriptstyle c^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c^*} \\ \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) \end{array}$$

13.3. Seien $p,\, q > 1$ variabel. Seien $a,\, b > 1$ fest gewählt.
Man minimiere $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$ unter der Nebenbedingung $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 = 0$.