

FAQs #6

Standardtrick für die Konvergenz- und Divergenzuntersuchung bei rationalen Folgen

Wenn Sie eine gegebene Folge auf Konvergenz bzw. Divergenz untersuchen wollen versuchen Sie zuallererst die Grenzwertsätze aus der Vorlesung anzuwenden. Damit können Sie alle rationalen Folgen (a_n) mit $a_n = p(n)/q(n)$ (wobei p und q Polynome sind) behandeln. Sie müssen bekanntlich nur im Zähler- und im Nennerpolynom die höchste Potenz ausklammern und sehen damit (unter Verwendung von den Grenzwertsätzen und von $1/n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)): Wenn $\deg p < \deg q$, dann gilt $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) (wobei $\deg p$, $\deg q$ den Grad der Polynome p bzw. q bezeichnen). Wenn $\deg p = \deg q$, dann gilt $a_n \rightarrow l(p)/l(q)$ (wobei $l(p)$, $l(q)$ den Leitkoeffizienten (zur höchsten Potenz gehöriger Koeffizient) von p bzw. q bezeichnen). Und wenn $\deg p > \deg q$, dann ist (a_n) divergent (es ist $|a_n| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)).

Konvergent plus divergent und konvergent mal divergent

Zunächst eine ganz einfache Folgerung aus den Grenzwertsätzen. Wenn (a_n) konvergent ist und (b_n) divergent, dann ist die Summenfolge $(a_n + b_n)$ divergent ($a_n, b_n \in \mathbb{C}$). Wenn zusätzlich $\lim a_n \neq 0$ dann ist auch die Produktfolge $(a_n b_n)$ divergent.

Angenommen nämlich, $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$ seien doch konvergent. Dann wäre nach den Grenzwertsätzen auch die Folge $(b_n) = (a_n + b_n) - (a_n)$ bzw. $(b_n) = \frac{a_n b_n}{a_n}$ konvergent – als Differenz konvergenter Folgen bzw. Quotient konvergenter Folgen mit Limes der Nennerfolge $\neq 0$. Widerspruch!

Anwendungen hiervon: (x_n) mit $x_n = (-1)^n + \frac{n}{2+n^3}$ ist divergent und (x_n) mit $x_n = \frac{n}{n+1}((-1)^n + 1)$ oder $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{10})^n$ ist divergent.

Verkettung von Folgen

Wenn (a_n) eine gegen eine Zahl a konvergente Folge ist und (b_k) eine Folge mit Werten in \mathbb{N} ist mit $b_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), dann ist auch die verkettete Folge (a_{b_k}) konvergent, und zwar ebenfalls gegen a . (Zeigen Sie das!) Insbesondere ist jede Teilfolge (a_{n_k}) einer konvergenten Folge selbst konvergent mit demselben Grenzwert (denn für Teilfolgen gilt nach Definition, dass (n_k) streng monoton wächst, und damit insbesondere $n_k \rightarrow \infty$).

Anwendungen hiervon:

- $\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{k^2} \rightarrow e$ und $\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{-1} \rightarrow e \cdot 1 = e$
- $\left(1 + \frac{1}{qk}\right)^k = \sqrt[q]{\left(1 + \frac{1}{qk}\right)^{qk}} \rightarrow \sqrt[q]{e} = e^{\frac{1}{q}}$.

- Aufgrund der oben festgehaltenen Aussage vermuten wir $\frac{\ln k}{k} \rightarrow 0$ (wobei \ln den natürlichen Logarithmus bezeichnet), denn $\frac{\ln k}{k} = a_{\ln k}$ für $a_x := \frac{x}{e^x}$ ($x \in [0, \infty)$) und $a_n \rightarrow 0$ (Standard Grenzwert aus der Vorlesung) und $b_k := \ln k \rightarrow \infty$. Diese Argumentation ist allerdings streng nicht richtig, weil $b_k = \ln k$ für kein $k \in \mathbb{N}$ in \mathbb{N} liegt (sodass also die oben erwähnte Aussage nicht angewendet werden kann). Mit den Regeln von de l'Hospital kann man die Konvergenz $\frac{\ln k}{k} \rightarrow 0$ auch streng beweisen.

Wurzeln

Sie haben in der Vorlesung gelernt, dass Sie Limites in eine Wurzel reinziehen dürfen: wenn (a_n) eine konvergente Folge in $[0, \infty)$ ist, dann gilt $\sqrt[m]{a_n} \rightarrow \sqrt[m]{\lim a_n}$. Wenn Sie nun aber Folgen (a_n) der Art $a_n = \sqrt{n^4 + 8n} - \sqrt{n^4 + 5}$, $a_n = n(\sqrt{n^4 + 8n} - \sqrt{n^4 + 5})$ oder $a_n = n(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}})$ untersuchen sollen, bringt Ihnen dieser Satz allein erst mal wenig: er liefert Ihnen nur die unbestimmten Ausdrücke $\infty - \infty$ bzw. $\infty \cdot (\infty - \infty)$ bzw. $\infty \cdot 0$.

Die Strategie in solchen Fällen ist dieselbe wie im Beweis des angesprochenen Satzes aus der Vorlesung: Sie benutzen die Formel

$$u - v = \frac{u^m - v^m}{\sum_{k=0}^{m-1} u^k v^{m-1-k}} \quad (u, v \in \mathbb{R}),$$

um die in den obigen Beispielfolgen problematische Differenz $\sqrt[m]{x_n} - \sqrt[m]{y_n}$ m -ter Wurzeln in der Form

$$\sqrt[m]{x_n} - \sqrt[m]{y_n} = \frac{x_n - y_n}{\sum_{k=0}^{m-1} \sqrt[m]{x_n}^k \sqrt[m]{y_n}^{m-1-k}} \quad (1)$$

zu schreiben. Das ist der Standardtrick, wenn eine Differenz von m -ten Wurzeln Probleme macht (natürlich gibt es auch Differenzen von m -ten Wurzeln, die unproblematisch sind!). Sie sollten sich ihn gut einprägen.

Beispiele, in denen dieser Standardtrick weiterhilft:

- Sei $a_n = n \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^\alpha}} \right)$ für ein $\alpha \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$a_n = n \left(1 - \sqrt[3]{1 - n^{-\alpha}} \right) = n \frac{n^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^2 \sqrt[3]{1 - n^{-\alpha}}^k}$$

und wir sehen wegen $\sum_{k=0}^2 \sqrt[3]{1 - n^{-\alpha}}^k \rightarrow 3$ ($n \rightarrow \infty$) (Grenzwertsätze!): Wenn $\alpha \in (0, 1)$, dann $a_n \rightarrow \infty$. Wenn $\alpha = 1$, dann $a_n \rightarrow \frac{1}{3}$. Und wenn $\alpha \in (1, \infty)$, dann $a_n \rightarrow 0$.

- Sei $a_n = \sqrt[m]{n + \sqrt[n]{n}} - \sqrt[m]{n - \sqrt[n]{n}}$ für eine natürliche Zahl $m \geq 2$. Dann sieht man durch analoge Argumentation wie in den obigen beiden Beispielen, dass $a_n \rightarrow 1$, falls $m = 2$ und $a_n \rightarrow 0$, falls $m > 2$ (Übung!).
- Die Folge $a_n = n(\sqrt{n^4 + 8n} - \sqrt{n^4 + 5})$ (Gruppenübung)

Monotone und beschränkte Folgen

Sie haben in der Vorlesung gezeigt, dass jede beschränkte und monoton wachsende oder fallende Folge in \mathbb{R} konvergent ist. Sie haben auch die überaus wichtigen Anwendungen dieses Satzes auf die Exponentialfolge gesehen. Wir wollen hier noch zwei weitere Anwendungen besprechen, und zwar auf Kettenwurzeln und Kettenbrüche.

- Sei (a_n) die Folge mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}} \quad (n \text{ Wurzeln}).$$

Wir wollen diese Folge auf Konvergenz bzw. Divergenz untersuchen. Wir sehen (mit Induktion) sofort, dass $a_n \leq 8$ ist und damit (a_n) beschränkt ist. Wir sehen auch sofort, dass (a_n) monoton wachsend ist, denn $a_{n+1} = f(a_n)$ mit $f(x) := \sqrt{1+x}$ und f ist monoton wachsend. Also ist (a_n) konvergent. Wir bestimmen noch den Limes a dieser Folge, und zwar klappt hier der Standardtrick für die Berechnung von Grenzwerten rekursiv gegebener konvergenter Folgen: wir nehmen die Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ und beachten, dass mit (a_n) auch (a_{n+1}) gegen a konvergiert. Dann erhalten wir aufgrund von den Grenzwertsätzen, dass $a = \sqrt{1+a}$. Diese Gleichung können wir nach dem gesuchten Limes a auflösen (beachte hierbei, dass wegen $a_n \geq 0$ auch $a \geq 0$ sein muss) und wir erhalten $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

- Sei (a_n) die Folge mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt

$$a_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}} \quad (n-1 \text{ Bruchstriche}).$$

Wir wollen diese Folge wieder auf Konvergenz bzw. Divergenz untersuchen. Wieder sehen wir sofort, dass (a_n) beschränkt ist: $0 \leq a_n \leq 2$. Leider ist (a_n) hier aber nicht mehr monoton. Aber glücklicherweise sind die beiden Teilfolgen (a_{2n-1}) und (a_{2n}) monoton wachsend bzw. monoton fallend (wie man mit Induktion zeigt). Das heißt, wenigstens diese beiden Teilfolgen sind schon mal konvergent mit Limites a_* bzw. a^* . Der Witz ist nun, dass beide Limites gleich $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sind (Berechnung dieser Limites wieder mit dem Standardtrick aus dem obigen Beispiel) und damit muss auch die volle Folge (a_n) gegen diesen Wert a konvergieren, wie man sich leicht überlegt.