Es gibt nicht nur duale Vektorräume, sondern auch duale Abbildungen

5.22 <u>Def</u>: Sei $T: V \to W$ linear. Definiere die zu T duale Abbildung $T^*: W^* \to V^*$ durch $T^*(f) := f \circ T$, für alle $f \in W^*$.

5.23 <u>Bem/Bsp</u>:

(a) Es ist $T^*f: V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{f} K$ Komposition zweier linearer Abbildungen, also ist T^*f linear. Also ist $T^*f \in V^*$ und damit ist $T^*: W^* \to V^*$ wohldefiniert.

(b) Bildlich können wir die duale Abbildung so darstellen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dashed, "T^*f"'] & W \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Man nennt so ein Diagram ein "kommutatives Diagram". Gemeint ist damit, folgt man den Pfeilrichtungen, so erhält man auf beiden Wegen dasselbe Ergebnis: $\to \downarrow$ entspricht $\dashrightarrow$

also $f \circ T = T^*f$. Symbolisch deutet man dies an, indem man das Symbol $\circlearrowleft$ oder /// in das Diagram hineinmalt.

(c) Sei $T = id_V \in End_K(V)$. Dann gilt für alle $f \in V^*$:

$T^*f = f \circ T = f \circ id_V = f$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T = id_V"] \arrow[dr, dashed, "T^*f = f"'] & V \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "///"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Also ist $T^* = id_{V^*}$.

Wir sammeln Eigenschaften der Abbildung T^*:

5.24 Prop: Seien $T: V_1 \to V_2$, $S: V_2 \to V_3$, beide linear.

(a) Die Abbildung $T^*: V_2^* \to V_1^*$ ist linear.

(b) Es ist $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Beweis:

(a) Für $f, g \in W^*$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} T^*(f+\lambda g)(v) &\overset{\text{Def}^*}{=} ((f+\lambda g)\circ T)(v) \\ &\overset{\text{Def}\circ}{=} (f+\lambda g)(Tv) \\ &\overset{5.1}{=} f(Tv) + \lambda\, g(Tv) \\ &\overset{\text{Def}\circ}{=} (f\circ T)(v) + \lambda\,(g\circ T)(v) \\ &\overset{\text{Def}^*}{=} (T^*f)(v) + \lambda\,(T^*g)(v) \\ &\overset{5.1}{=} (T^*f + \lambda T^*g)(v), \quad \forall v \in V_1. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T^*(f+\lambda g) = T^*f + \lambda T^*g, \quad \forall f, g \in V_2^*, \lambda \in K.$$

(b) Es ist
$$\begin{aligned} (S\circ T)^*(f) &= f \circ (S \circ T) \\ &= (f\circ S)\circ T \\ &= T^*(f \circ S) \\ &= T^*(S^*(f)) \\ &= (T^* \circ S^*)(f), \end{aligned}$$

für alle $f \in V_3^*$. Also ist $(S\circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Nach 5.11 können wir dann V identifizieren mit V^{**}, mittels des Isomorphismus i. Hierbei identifizieren wir v mit $i(v) = i_v$. Unter dieser Identifikation gilt:

5.25 Prop: Sei $T: V_1 \to V_2$ linear, $\dim V_1 < \infty$, $\dim V_2 < \infty$.

(a) Es ist $(T^*)^*(i_v) = i_{Tv}$. Insbesondere ist also $(T^*)^* = T$.

(b) Es ist T Isomorphismus $\Leftrightarrow$ T^* Isomorphismus.
Hierbei gilt dann: $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Beweis: Schreibe $T^{**} = (T^*)^*$.

(a) Nach Def 5.22 gilt:

$$(T^*)^*: V_1^{**} \to V_2^{**}, \quad x \mapsto T^{**}(x) = x \circ T^*$$
mit $x \in V_1^{**}$.

Nach 5.11 ist $x = i_v$ für ein $v \in V_1$.

$\Rightarrow$ $x \circ T^* = i_v \circ T^* : V_2^* \to K$ mit

$$(i_v \circ T^*)(\varphi) = i_v(T^*\varphi) = i_v(\varphi \circ T)$$
$$= (\varphi \circ T)(v) = \varphi(Tv) = i_{Tv}(\varphi),$$

für alle $\varphi \in V_2^*$. Also gilt $i_v \circ T^* = i_{Tv}$, beziehungsweise $T^{**}(i_v) = i_{Tv}$. Unter der Identifikation in 5.11 gilt: $T^{**}(v) = Tv$, $\forall v \in V_1$.
Damit ist $T^{**} = T$.

(b) Ist $T: V_1 \to V_2$ bijektiv mit $S: V_2 \to V_1$ so daß $S \circ T = id_{V_1}$ und $T \circ S = id_{V_2}$ gilt, dann folgt mit 5.24:

$$T^* \circ S^* \overset{5.24}{=} (S \circ T)^* = id_{V_1}^* \overset{5.23}{=} id_{V_1^*}$$
$$S^* \circ T^* \overset{5.24}{=} (T \circ S)^* = id_{V_2}^* \overset{5.23}{=} id_{V_2^*}$$

Also ist T^* invertierbar mit $(T^*)^{-1} = S^* = (T^{-1})^*$.
(Mit (a) folgt die Behauptung für die Rückrichtung)

Kern und Bild sind wichtige Größen einer Abbildung.
Es gilt:

5.26 Prop: Sei $T: V \to W$ linear.

(a) $\operatorname{Ker}(T^*) = \{\varphi \in W^* \mid \operatorname{im} T \subseteq \operatorname{Ker} \varphi\} = \operatorname{im}(T)^\circ$;
insbesondere ist T^* injektiv $\Leftrightarrow$ T surjektiv;

(b) $\operatorname{im}(T^*) = \{\varphi \in V^* \mid \operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Ker} \varphi\} = \operatorname{Ker}(T)^\circ$;
insbesondere ist T^* surjektiv $\Leftrightarrow$ T injektiv.

Beweis:

(a)(i) Sei $\varphi \in W^*$ mit $T^*(\varphi) = 0$, (also $\varphi \in \operatorname{Ker} T^*$).

$\Rightarrow 0 = T^*(\varphi)(v) = (\varphi \circ T)(v) = \varphi(Tv) \quad \forall v \in V.$

$\Rightarrow \operatorname{im} T \subseteq \operatorname{Ker} \varphi.$

(ii) Umgekehrt: Sei $\varphi \in W^*$ mit $\operatorname{im} T \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$.

$\Rightarrow T^*(\varphi)(v) = (\varphi \circ T)(v) = \varphi(\underbrace{Tv}_{\in \operatorname{im} T}) = 0, \ \forall v \in V.$

$\Rightarrow T^*(\varphi) = 0$

$\Rightarrow \varphi \in \operatorname{Ker}(T^*).$

(iii) Es ist T^* injektiv $\overset{LAI}{\Leftrightarrow} \operatorname{Ker}(T^*) = \{0\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{im}(T)^\circ = \{0\} \overset{5.15}{=} W^\circ$

$\overset{5.19}{\Leftrightarrow} \operatorname{im} T = W$

$\overset{LAI}{\Leftrightarrow} T$ surjektiv.

(b)(i) Sei $\varphi \in \operatorname{im}(T^*)$. Dann ex $\psi \in W^*$ mit $\varphi = T^*(\psi) = \psi \circ T$.
Sei $v \in \operatorname{Ker} T$. Dann ist $\varphi(v) = (\psi \circ T)(v)$
$= \psi(Tv) = \psi(0) = 0.$

$\overset{5.13}{\Rightarrow} \varphi \in \operatorname{Ker}(T)^\circ \leq V^*$. Also ist $\operatorname{im}(T^*) \subseteq \operatorname{Ker}(T)^\circ$.

(ii) Sei $\varphi \in \operatorname{Ker}(T)^\circ$. Wir wollen zeigen $\varphi \in \operatorname{im}(T^*)$.
Also suchen wir ein $\psi \in W^*$ mit $\varphi = T^*(\psi) = \psi \circ T$.
Falls dies existiert, folgt $\operatorname{Ker}(T)^\circ \subseteq \operatorname{im}(T^*)$.

· Schreibe $W = \operatorname{im} T \oplus \tilde{W}$. Nach linearer Algebra I existiert zu $x \in W$ dann eindeutige Elemente $w_1 \in \operatorname{im} T$ und $w_2 \in \tilde{W}$ mit $x = w_1 + w_2$.
Zu $w_1 \in \operatorname{im} T$ existiert (nicht notwendigerweise eindeutig) ein Element $v_1 \in V$ mit $Tv_1 = w_1$.
Definiere $\psi : W \to K$ durch $\psi(x) := \varphi(v_1)$.

· Wir müssen zeigen, daß ψ unabhängig von der Wahl des Elementes $v_1 \in V$ ist. Sei also $\tilde{v}_1 \in V$ mit $T\tilde{v}_1 = w_1 = Tv_1$.
$\Rightarrow 0 = T\tilde{v}_1 - Tv_1 = T(\tilde{v}_1 - v_1)$, also ist $\tilde{v}_1 - v_1 \in \operatorname{Ker} T$.
Da $\varphi \in \operatorname{Ker}(T)^\circ$ ist, folgt $\varphi(\tilde{v}_1 - v_1) = 0$.
Also ist $\varphi(\tilde{v}_1) = \varphi(v_1)$ und damit ist ψ wohldefiniert.
Man zeigt leicht, daß ψ linear ist; dh. $\psi \in W^*$.

· Nach Konstruktion von ψ gilt nun:

$$(T^*\psi)(x) = (\psi \circ T)(x) = \psi(Tx) = \varphi(x), \quad \forall x \in V.$$

Also ist $T^*\psi = \varphi$ und die Behauptung folgt.

(iii) Es ist T^* surjektiv $\overset{LA\,I}{\Longleftrightarrow}$ $\operatorname{im}(T^*) = V^*$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(T)^\circ = V^* = \{0\}^\circ$$

$$\overset{5.19}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Ker} T = \{0\}$$

$$\underset{LA\,I}{\Longleftrightarrow} T \text{ injektiv}.$$

<u>Bem</u>: Dieser Beweis gilt für alle K-Vektorräume.
Im endlich-dimensionalen kann man Aussage (b) direkt aus (a) herleiten, mittels der Identifikation aus 5.11 und ihren Konsequenzen:

$$\operatorname{Ker}(T)^\circ \underset{5.25}{=} \operatorname{Ker}((T^*)^*)^\circ \underset{(a)}{=} \operatorname{im}(T^*)^{\circ\circ} \underset{5.20}{=} \operatorname{im}(T^*).$$

5.27 Bsp:

(a) Nach Definition 5.2 ist $K^* = \mathrm{Hom}_K(K,K)$.
Sei $\varphi \in K^*$. Dann ist $\varphi(a) = \varphi(a \cdot 1) = a \cdot \varphi(1)$, da φ linear ist. Also ist φ durch $\varphi(1)$ vollständig bestimmt.

(b) Sei V ein K-Vektorraum. Sei $f \in V^*$.
Dann ist $f^*: K^* \to V^*$, nach Definition 5.22.
Also gilt
$$\begin{aligned}(f^*(\varphi))(v) &= (\varphi \circ f)(v) \\ &= \varphi(f(v)) = \varphi(\underbrace{f(v)}_{\in K} \cdot 1) \\ &\overset{\varphi \text{ linear}}{=} \underbrace{f(v)}_{\in K} \cdot \underbrace{\varphi(1)}_{\in K} = \varphi(1) \cdot f(v) \quad \leftarrow K \text{ kommutativ} \\ &\overset{5.1}{=} (\varphi(1) \cdot f)(v)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^*(\varphi) = \underbrace{\varphi(1)}_{\text{Skalar}} \cdot f$$

(c) Sei $V = M_n(K)$ und sei $f := \text{Spur-Abbildung}$.
$$\Rightarrow \mathrm{im}(f^*) = \mathrm{im}(Sp^*) \overset{(b)}{=} \{a \cdot Sp \mid a \in K\}.$$
$$= \mathrm{Span}\{Sp\}.$$
$\overset{5.26}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Ker}(Sp)^\circ = \mathrm{im}(Sp^*)$ ist 1-dimensional, erzeugt von der Spurabbildung.

5.28 Korollar: Sei $T: V \to W$ lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Dann gilt
(a) $\dim \mathrm{Ker}(T^*) = \dim W - \mathrm{rk}(T)$
(b) $\mathrm{rk}(T^*) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\, T = \mathrm{rk}(T)$.

Beweis: (a) Es ist $\dim \mathrm{Ker}(T^*) \overset{5.26}{=} \dim \mathrm{im}(T)^\circ \overset{5.16}{=} \dim W - \dim(\mathrm{im}\, T)$.
(b) Nach (a) ist $\dim(\mathrm{im}\, T^*) \overset{(a)}{=} \dim V^* - \dim \mathrm{Ker}(T^{**}) \overset{5.25}{=} \dim V - \dim \mathrm{Ker}\, T = \mathrm{rk}(T)$.

5.29 Thm: Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Dann ist die Abbildung $T \longrightarrow T^*$ ein Vektorraum-Isomorphismus:

$$*: \mathrm{Hom}_K(V,W) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*).$$
$$T \longmapsto T^*$$

Beweis:

(a) Es ist für $S, T \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $\lambda \in K$, $f \in W^*$:

$$\begin{aligned}
\big((T+\lambda S)^*(f)\big)(v) &\overset{\mathrm{Def}\,*}{=} \big(f \circ (T+\lambda S)\big)(v) \\
&\overset{\mathrm{Def}\,\circ}{=} f\big((T+\lambda S)(v)\big) \\
&\overset{5.1}{=} f(Tv + \lambda Sv) \\
&\overset{f \text{ linear}}{=} f(Tv) + \lambda f(Sv) \\
&\overset{\mathrm{Def}\,*}{=} (T^*f)(v) + \lambda (S^*f)(v) \\
&\overset{5.1}{=} (T^*f + \lambda S^*f)(v) \\
&= \big((T^* + \lambda S^*)(f)\big)(v), \quad \forall v \in V
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (T+\lambda S)^*(f) = (T^* + \lambda S^*)(f), \quad \forall f \in W^*$

$\Rightarrow (T+\lambda S)^* = T^* + \lambda S^*, \quad \forall \lambda \in K$ und $\forall S, T \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

Also ist die Abbildung $*$ linear.

(b) Wir zeigen, daß Abbildung $*$ injektiv ist:

Sei $T^* = 0$.

$\Rightarrow T^*(f) = 0 \quad \forall f \in W^*$

$\Rightarrow 0 = T^*(f)(v) = f(Tv) = i_{Tv}(f), \quad \forall f \in W^*$

$\Rightarrow i_{Tv} = 0, \quad \forall v \in V$

Da $i: W \to W^{**}$ Isomorphismus nach 5.11

$\Rightarrow Tv = 0, \quad \forall v \in V.$

$\Rightarrow T = 0.$

Also ist Abb. $*$ injektiv.

(c) Da $\dim \mathrm{Hom}_K(V,W) \overset{LAI}{=} \dim V \cdot \dim W$
$\overset{5.4}{=} \dim V^* \cdot \dim W^*$
$\underset{LAI}{=} \dim \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$

folgt Abb. $*$ ist auch surjektiv, d.h. Isomorphismus.

Bem: Beweisteile (a) und (b) zeigen: Im unendlich-dimensionalen Fall ist Abbildung $*$ eine Einbettung.
Im endlich-dimensionalen wissen wir $\mathrm{Hom}_K(V,W) \simeq M_{\ell \times n}(K)$ und nach 5.4 auch $\mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \simeq M_{n\times \ell}(K)$. Außerdem ist nach LAI: $M_{\ell\times n}(K) \xrightarrow{\cong} M_{n\times\ell}(K)$, mittels $A \mapsto A^T$.
Transponieren von Matrizen steckt auch hinter dem Isom. in 5.29:

5.30 Thm: Sei $T: V \to W$ linear, $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$.
Für Basen B_V von V und B_W von W beziehungsweise ihre dualen Basen B_V^* und B_W^* gilt: $M_{B_W}^{B_V}(T) = M_{B_V^*}^{B_W^*}(T^*)^T$. ← transponierte Matrix

Beweis:
Sei $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$.
Schreibe $(a_{ij}) = A = M_{B_W}^{B_V}(T)$,
$(b_{ij}) = B = M_{B_V^*}^{B_W^*}(T^*)$.
Nach Definition der darstellenden Matrizen gilt
also $$T v_j = \sum_{t=1}^m a_{tj} w_t, \quad \text{mit } 1 \le j \le n. \qquad (1)$$
und $$T^*(w_i^*) = \sum_{t=1}^n b_{ti} v_t^*. \qquad (2)$$

Nach Definition von T^* gilt $T^*(w_i^*) = w_i^* \circ T$,
wobei
$$T^*(w_i^*)(v_j) \overset{(2)}{=} \left(\sum_{t=1}^n b_{ti} v_t^*\right)(v_j) \overset{5.4}{=} b_{ji}$$
und $$(w_i^* \circ T)(v_j) = w_i^*(T v_j) \overset{(1)}{=} w_i^*\left(\sum_{t=1}^m a_{tj} w_t\right) \overset{5.4}{=} a_{ij}.$$
Also ist $b_{ji} = a_{ij}$, für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$,
d.h. es gilt $B = A^T$ bzw $A = B^T$.

Wir erhalten als Korollar ein Resultat aus LA I:

5.31 <u>Korollar</u>: Sei $A \in M_{m\times n}(K)$.

$\Rightarrow$ Zeilenrang von A = Spaltenrang von A.

<u>Beweis</u>: Multiplikation mit A liefert eine lineare Abbildung $T_A : \underset{\overset{\parallel}{V}}{K^n} \longrightarrow \underset{\overset{\parallel}{W}}{K^m}$, $x \mapsto Ax$.

Die duale Abbildung $T_A^* : W^* \longrightarrow V^*$ hat bezüglich der dualen Basen die darstellende Matrix A^T, siehe 5.30, d.h. $T_A^* = T_{A^T}$.

Nach LA I ist Spaltenrang von A = $\dim \operatorname{im} T_A$

Zeilenrang von A = Spaltenrang von A^T

$= \dim \operatorname{im} T_A^*$

Die Rang-Defekt-Formel liefert:

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{im} T_A &= \dim V - \dim \operatorname{Ker} T_A \\
&\overset{5.16}{=} \left[\dim \operatorname{Ker} T_A + \dim \operatorname{Ker}(T_A)^\circ\right] - \dim \operatorname{Ker} T_A \\
&= \dim \operatorname{Ker}(T_A)^\circ . \\
&\overset{5.26}{=} \dim \operatorname{im}(T_A^*).
\end{aligned}$$

Also ist Spaltenrang von A = Zeilenrang von A. ∎

5.32 <u>Bem</u>: Nach 5.24 gilt $(S\circ T)^* = T^* \circ S^*$.

$\Rightarrow$ $M((S\circ T)^*) = M(T^* \circ S^*) = M(T^*)\cdot M(S^*)$

für die darstellenden Matrizen mit geeigneten Basen.

Mit 5.30 liefert dies ein weiteres Resultat aus Linearer Algebra I: $(AB)^T = B^T A^T$.

5.33 Korollar:

Sei $T: V \to W$ lineare Abbildung endlich-dimensionaler k-Vektorräume. Dann gilt:

(a) $\det(T^*) = \det(T)$,

(b) $Sp(T^*) = Sp(T)$,

(c) $\chi_{T^*} = \chi_T$,

(d) $m_{T^*} = m_T$.

(e) T ist nilpotent mit $T^n = 0 \iff T^*$ ist nilpotent mit $(T^*)^n = 0$.

Beweis: In allen fünf Aussagen müssen wir zeigen, daß die analoge Aussage für die zugehörigen darstellenden Matrizen gilt. Da $Sp\,A = Sp\,A^T$ und $\det(A) = \det(A^T)$ nach Linearer Algebra I, folgt:

(a) $$\det T \overset{Def}{=} \det M_B(T) \overset{LAI}{=} \det M_B(T)^T \overset{5.30}{=} \det M_{B^*}(T^*) \underset{Def}{=} \det(T^*)$$

(b) $$Sp(T) \overset{Def}{=} Sp(M_B(T)) \overset{LAI}{=} Sp(M_B(T)^T) \overset{5.30}{=} Sp\, M_{B^*}(T^*) = Sp(T^*).$$

(c) Es ist $(I_n X - A)^T = (I_n X)^T - A^T = I_n X - A^T$ für $A \in M_n(k)$

$$\Rightarrow \chi_A = \det(XI_n - A) = \det(XI_n - A)^T = \det(XI_n - A^T) = \chi_{A^T}.$$ Mit darstellenden Matrizen folgt $\chi_T = \chi_{M_B(T)} \overset{\downarrow}{=} \chi_{M_B(T)^T} \overset{5.30}{=} \chi_{M_{B^*}(T^*)} = \chi_{T^*}$,

(d) Es ist für $A \in M_n(k)$ und $f \in k[X]$: $f(A) = 0 \iff f(A^T) = 0$, denn $(A+B)^T = A^T + B^T$ und $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

$\Rightarrow m_A = m_{A^T}$. Mit 5.30 folgt $m_T = m_{T^*}$.

(e) Folgt sofort über die darstellenden Matrizen von T und T^* und wegen $A^n = 0 \iff (A^T)^n = 0$.