Neben Längen definieren wir auch Winkel im euklidischen Raum. Zunächst definieren wir Orthogonalität im euklidischen und unitären Raum, ganz in Analogie zu 6.19 / 6.24:

7.23 Def: Sei V ein innerer Produktraum über K.

(a) Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal, $x \perp y$, genau dann, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ist.

(b) Eine Teilmenge $M \subset V$ heißt Orthogonalsystem $\Leftrightarrow$ $0 \notin M$ und $\forall x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $x \perp y$.

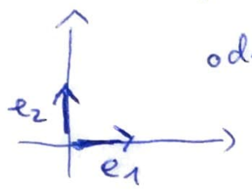
(c) Ein Orthogonalsystem M heißt Orthonormalsystem genau dann, wenn $\forall x \in M$ gilt $\|x\| = 1$.

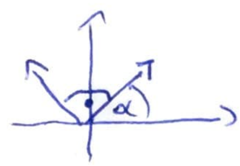
7.24 Bsp:

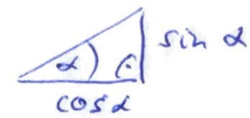
(a) Die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ bilden bezüglich des Standard-Skalarprodukts 7.3(a) bzw. 7.12 (a) ein Orthonormalsystem. In beiden Fällen bilden sie auch eine Basis, dh. $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist jeweils eine Orthonormalbasis (von $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$).

Allgemein: Ist B Basis eines inneren Produktraumes und B orthogonalsystem oder Orthonormalsystem, so heißt B Orthogonalbasis bzw. Orthonormalbasis, siehe 6.24.

(b) Orthonormalsysteme im $\mathbb{R}^2$ mit Standard-Skalarprodukt gibt es viele; als Bild finden wir sie:

$\mathbb{R}^2$: 

oder 

mit 

Dies entspricht $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ im 1. Bild

bzw $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \right\}$

bzw $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \right\}$ $\Bigg\}$ für $0 \leq \alpha < 2\pi$

im 2. Bild. Dies sind Orthonormalsysteme:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

(c) Sei $V = C[0, 2\pi]$ mit $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$,
siehe Bsp. 7.3 (b) mit $K = \mathbb{R}$.
Dann ist $M := \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ ein Orthogonalsystem, denn es gilt für $m, n \in \mathbb{N}$:

- $\int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt)\, dt = 0$
- $\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt)\, dt = 0$
- $\int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt)\, dt = 0$ $\Big\}$ für $m \neq n$.

7.25 Thm: Sei V ein innerer Produktraum über K.
Sei $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein Orthonormalsystem (ONS).

(a) $x \perp y \iff y \perp x$ für alle $x, y \in V$.

(b) $x \perp u \ \forall u \in V \iff x = 0$

(c) $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig und $n \leq \dim V$.

(d) Ist $z \in \operatorname{Span} M$, so gilt $z = \sum_{j=1}^{n} \langle z, v_j \rangle v_j$. Koeffizienten von z bzgl ONS bzw Basis

Ist $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, so ist $\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{1/2}$.

Beweis:

(a) Behauptung folgt aus 7.1 (S3) bzw 7.10, der Eigenschaft konjugiert symmetrisch: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

(b) Sei $x \perp u$ für alle $u \in U$.

$\Rightarrow x \perp x$ dh. $\langle x,x\rangle = 0$. Da $\langle -,-\rangle$ positiv definit

$\Rightarrow x = 0$.

Umgekehrt: $\langle 0,u\rangle \overset{\langle -,-\rangle \text{ linear}}{=} 0 \cdot \langle 0,u\rangle = 0$.

(c) Sei $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, mit $\lambda_i \in K$, $1 \leq i \leq n$.

$$\Rightarrow 0 = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_j\rangle$$
$$= \lambda_1 \langle v_1, v_j\rangle + \dots + \lambda_n \underbrace{\langle v_n, v_j\rangle}_{=0 \text{ für } n \neq j}$$
$$\overset{\text{ONS}}{=} \lambda_j \underbrace{\langle v_j, v_j\rangle}_{=1} = \lambda_j, \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Also sind $\{v_1,\dots,v_n\}$ linear unabhängig, und nach LA I gilt also $n \leq \dim V$.

(d) Nach (c) ist $\{v_1,\dots,v_n\}$ Basis von $\operatorname{Span}\{v_1,\dots,v_n\}$.

Schreibe $z = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

$$\Rightarrow \langle z, v_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^n \mu_j v_j, v_i\rangle = \sum \mu_j \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle}_{=\delta_{ij}} = \mu_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Außerdem ist

$$\|z\|^2 = \langle \sum_{i=1}^n \mu_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\rangle = \sum_i \sum_j \mu_i \overline{\mu_j} \underbrace{\langle v_i, v_j\rangle}_{=\delta_{ij}}$$
$$= \sum_{i=1}^n \mu_i \overline{\mu_i} = \sum_{i=1}^n |\mu_i|^2$$

$$\Rightarrow \|z\| = \left(\sum_{i=1}^n |\mu_i|^2\right)^{1/2}$$

Mit ONS läßt sich also besonders effizient rechnen.

7.26 Def: Sind V und W innere Produkträume mit Skalarprodukten $\langle -,-\rangle_V$ und $\langle -,-\rangle_W$, so heißen V und W isometrisch, falls es einen Isomorphismus $\varphi: V \to W$ gibt mit $\langle \varphi u, \varphi v\rangle_W = \langle u,v\rangle_V$ für alle $u,v \in V$.

Damit können wir endlich-dimensionale innere Produkträume klassifizieren:

7.27 Thm:

Sei V ein endlich-dimensionaler innerer Produktraum.

(a) V besitzt eine Orthonormalbasis $\{w_1, \dots, w_n\}$, $n = \dim V$.

(b) V ist isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$, ausgestattet mit dem Standard-Skalarprodukt, $n = \dim V$.

Beweis:

(a) Gegeben ist beliebige Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V.
Das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren 6.24 funktioniert auch im Fall komplexer innerer Produkträume: Setze $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ (wir normieren zusätzlich),

$\tilde{w}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, w_i \rangle w_i$, $w_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$, für $k \geq 2$.

Dann folgt analog zum Beweis von 6.24, daß $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Orthonormalbasis von V ist.

(b) Für $v \in V$, definiere $\varphi(v) = M_B(v)$, wobei $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ eine Orthonormalbasis von V ist.

Sei $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ und $v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$.

Sei $\langle -, - \rangle_V$ Skalarprodukt in V.

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle_V = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j \Big\rangle_V$$

$$= \sum_i \sum_j \lambda_i \overline{\mu_j} \underbrace{\langle w_i, w_j \rangle_V}_{= \delta_{ij}}$$

$$\overset{(i=j)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i}$$

$$= \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$$

mit $\langle -, - \rangle$ Standard-Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise von $\mathbb{C}^n$.

Wir beweisen eine weitere wichtige Ungleichung als Anwendung zum Rechnen in Orthonormalsystemen:

7.28 **Thm** (Bessel's Ungleichung)

Sei V ein innerer Produktraum über $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine orthonormale Teilmenge von V.

Für $u \in V$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle u, v_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

Hierbei gilt Gleichheit genau dann, wenn $u \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$ liegt.

Beweis:

Sei $u \in V$. Definiere $w := u - \sum_{i=1}^{m} \langle u, v_i \rangle v_i$

Dann ist wegen $\langle -, - \rangle$ positiv definit:

$$0 \leq \langle w, w \rangle = \langle u - \sum_i \langle u, v_i \rangle v_i, \ u - \sum_i \langle u, v_i \rangle v_i \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \langle u, \sum_i \langle u, v_i \rangle v_i \rangle - \langle \sum_i \langle u, v_i \rangle v_i, u \rangle$$

$$+ \langle \sum_i \langle u, v_i \rangle v_i, \sum_j \langle u, v_j \rangle v_j \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \sum_i \overline{\langle u, v_i \rangle} \langle u, v_i \rangle - \sum_i \langle u, v_i \rangle \underbrace{\langle v_i, u \rangle}_{= \overline{\langle u, v_i \rangle}}$$

$$+ \sum_{i,j} \langle u, v_i \rangle \overline{\langle u, v_j \rangle} \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{= \delta_{ij}}$$

$$\overset{(i=j)}{=} \langle u, u \rangle - \sum_{i=1}^{m} |\langle u, v_i \rangle|^2$$

$\Rightarrow \langle u, u \rangle \geq \sum_{i=1}^{m} |\langle u, v_i \rangle|^2$, und es gilt Gleichheit, genau dann, wenn $w = 0$ ist (wegen $\langle -, - \rangle$ positiv definit), also genau dann, wenn $u \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$ ist.

Wenn Orthogonalität von Vektoren definiert ist, so existiert auch das Konzept orthogonaler Räume. Dies wird im komplexen Fall ganz analog zum reellen Fall definiert, vergleiche mit 6.19/6.20:

7.29 <u>Def</u>: Sei V ein innerer Produktraum über K. Sei $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Die Menge

$$M^\perp := \{v \in V \mid \langle m, v \rangle = 0 \ \forall m \in M\} \overset{6.20}{\leq} V$$

heißt <u>orthogonales Komplement</u> von M bzw <u>Orthogonalraum</u> zu M.

Zwei Unterräume U_1 und U_2 heißen <u>orthogonal</u>, genau dann, wenn für alle $u_i \in U_i$, $i = 1,2$, gilt: $u_1 \perp u_2$. Wir schreiben in diesem Fall $U_1 \perp U_2$.

Genauso wie im reellen Fall können wir zeigen:

7.30 <u>Thm</u>: Sei V innerer Produktraum. Dann gilt:

(a) $U \leq W \leq V$ impliziert $W^\perp \leq U^\perp$

(b) Für $U, W \leq V$ gilt: $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
$(U \cap W)^\perp \geq U^\perp + W^\perp$,
wobei Gleichheit gilt, falls $\dim V < \infty$.

(c) ~~Für~~ Für $U \leq V$ gilt: $U \leq U^{\perp\perp}$.
Es gilt Gleichheit, falls $\dim V < \infty$.

(d) Ist $\dim V < \infty$, so gilt $U \oplus U^\perp = V$.

<u>Beweis</u>:

zu (a) Sei $w \in W^\perp$. Für alle $u \in U \leq W$ gilt dann $\langle u, w \rangle = 0$ nach Definition von $W^\perp$.
Nach Definition von $U^\perp$ folgt: $w \in U^\perp$.

zu (a)(i) Sei $x \in U \cap U^\perp$. Dann ist nach Definition von $U^\perp$:
$\underset{\in U}{\langle x}, \underset{\in U^\perp}{x \rangle} = 0$. Da $\langle -,- \rangle$ positiv definit ist, folgt $x = 0$.
Also ist $U \cap U^\perp = \{0\}$. Zu zeigen bleibt $U + U^\perp = V$.

(ii) Sei $\dim V < \infty$. Ergänze ONB $\{b_1, \dots, b_r\}$ von U zu einer Basis von V. Wende Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren an, so erhalten wir eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s\}$ von V.
Beachte $\{b_1, \dots, b_r\}$ ändern sich bei diesem Prozeß nicht.
Nach Konstruktion gilt $c_1, \dots, c_s \in U^\perp$. Ist $z \in U^\perp$, so gilt $\langle b_i, z \rangle = 0$ für $1 \leq i \leq r$, also ist nach 7.25(d) $z \in \mathrm{Span}\{c_1, \dots, c_s\}$. Es folgt $\{c_1, \dots, c_s\}$ ist Orthonormalbasis von $U^\perp$. Damit gilt $U \oplus U^\perp = V$.

zu (b)(i) Da $U, W \leq U + W$, folgt mit (a): $(U+W)^\perp \leq U^\perp \cap W^\perp$.
(ii) Umgekehrt, sei $x \in U^\perp \cap W^\perp$, also $\langle u, x \rangle = 0 = \langle w, x \rangle$, für alle $u \in U$ und $w \in W$. Ist also $u + w \in U + W$ mit $u \in U$ und $w \in W$, so ist

$$\langle u+w, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle w, x \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Also ist $U^\perp \cap W^\perp \subseteq (U+W)^\perp$, d.h. $U^\perp \cap W^\perp = (U+W)^\perp$

zu (c)(i) Sei $x \in U^\perp$ und $u \in U$. Dann ist $\langle x, u \rangle = \overline{\langle u, x \rangle} = \overline{0} = 0$.
Also ist $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Ist $\dim V < \infty$, so ist nach (a):
$\dim U + \dim U^\perp = \dim V = \dim U^\perp + \dim U^{\perp\perp}$.
Also ist $\dim U = \dim U^{\perp\perp}$; es folgt $U = U^{\perp\perp}$.

zu (b) (iii) Hiermit läßt sich auch die zweite Aussage in (b) zeigen:
Es ist $(U^\perp + W^\perp)^\perp \overset{(b)(ii)}{=} U^{\perp\perp} \cap W^{\perp\perp} = U \cap W$. Also $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

(iv) Ist $\dim V = \infty$, so gilt zumindest wegen $U \cap W \leq U, W$, daß nach (a) auch $U^\perp, W^\perp \leq (U \cap W)^\perp$.
Nach LA I ist damit $U^\perp + W^\perp \leq (U \cap W)^\perp$.

7.31 Bem: Ausgeartete Sesquilinearformen (siehe 6.3) existieren z.B. $V = \mathbb{C}^n$ mit $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{r} x_i \bar{y}_i$, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ und $r < n = \dim V$.
Jede positiv-definite Sesquilinearform auf V (Beweis wie in 7.7 a).
ist aber nicht ausgeartet.

Aus der Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$ in 7.30 ergeben sich Block-zerlegungen auf den Endomorphismen von V, ohne den Dualraum V^* explizit zu erwähnen. Der Zusammenhang besteht aber:

7.32 Thm: Sei V endlich-dimensionaler innerer Produkt-raum. Sei $f \in V^*$, also $f: V \to K$ linear. Dann existiert $v_f \in V$ mit $f = \langle -, v_f\rangle$. Vektor v_f ist durch f eindeutig bestimmt.

Beweis:
Beachte $\langle -, v\rangle$ ist linear für $v \in V$, da $\langle -, -\rangle$ linear in 1. Variablen ist (gilt nicht für 2. Variable).
Falls $f = 0$, setze $v_f := 0$. Dann ist $f = \langle -, 0\rangle$.
Sei also $f \neq 0$. Da f linear, ist also f surjektiv.
Setze $U := \mathrm{Ker}(f)$. Dann ist $\dim U = \dim V - 1$ nach dem Rang-Defekt-Theorem. Nach 7.30 gilt auch $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$. Also ist $\dim U^\perp = 1$.
Wähle $v \in U^\perp$ mit $\|v\| = 1$, d.h. $V = \underbrace{\mathrm{Span}\{v\}}_{= U^\perp} \oplus U$.
Definiere $v_f := \overline{f(v)} \cdot v$. Sei $u \in V$, also $u = \alpha v + w$ mit $\alpha \in K, w \in U$ eindeutig

$$\Rightarrow \langle u, v_f\rangle = \langle \alpha v + w, \overline{f(v)} \cdot v\rangle = \alpha f(v) \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=1} + \underbrace{\langle \underset{\in U}{w}, \underset{\in U^\perp}{\overline{f(v)}v}\rangle}_{=0}$$
$$= \alpha f(v) = \alpha f(v) + \underbrace{f(w)}_{=0,\ \text{da } w \in U}$$
$$= f(\alpha v + w) = f(u).$$

Also ist $\langle -, v_f\rangle = f$.

7.33 **Bem**: Im euklidischen Vektorraum, also falls $K=\mathbb{R}$, ist $\langle -,- \rangle$ auch linear in 2. Variablen. In diesem Fall ist dann $\phi: V \to V^*,\ x \mapsto \langle -,x \rangle$ ein Monomorphismus (injektive lineare Abb.). Ist $\dim V < \infty$, so ist es nach LA I also ein Isomorphismus. Dieser Isomorphismus ist unabhängig von der Basis von V, vergleiche mit den Isomorphismen in 5.4.

· Injektivität von ϕ ergibt sich wie folgt:

Sei $\phi(x) = \langle -,x \rangle = 0$.

$\Rightarrow \langle -,x \rangle$ ist die Nullabbildung

d.h. $\langle y,x \rangle = 0$ für alle $y \in V$.

$\overset{7.7(a)}{\Longrightarrow} x = 0$, sonst $\langle -,- \rangle$ ausgeartet.

Also ist ϕ injektiv.

· Linearität in 1. Variablen von $\langle -,- \rangle$ liefert $\langle -,x \rangle \in V^*$, also ϕ wohldefiniert.

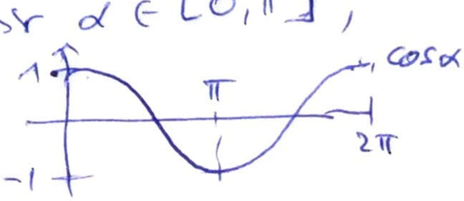
Linearität in 2. Variablen liefert ϕ linear.

In euklidischen Vektorräumen können wir auch Winkel definieren:

7.34 **Def**: Sei V euklidischer Vektorraum, $x,y \in V \setminus \{0\}$.

Der Winkel α zwischen den Vektoren x und y ist definiert durch $\cos\alpha = \dfrac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\,\|y\|}$

7.35 **Bem** Nach Cauchy-Schwarzschen Ungleichung 7.20 (c) ist $\left| \dfrac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \leq 1$; verlangen wir $\alpha \in [0,\pi]$, so ist α eindeutig bestimmt



Wir schreiben $\alpha = \sphericalangle(x,y)$. Es ist $\sphericalangle(x,y) = \sphericalangle(y,x)$, und $\sphericalangle(\lambda x, \mu y) = \sphericalangle(x,y)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu \neq 0$.

Definition 7.34 verlangt nicht, daß V endlich-dimensional ist, d.h. wir können mit dieser Definition von Winkel Geometrie in unendlich-dimensionalen Vektorräumen machen. Beispielsweise:

7.36 Proposition:

Sei V ein euklidischer Vektorraum, $x, y \in V \setminus \{0\}$. Dann gilt:

(a) Cosinussatz: $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos \sphericalangle(x,y)$

(b) Satz des Pythagoras: Ist $x \perp y$, so gilt
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

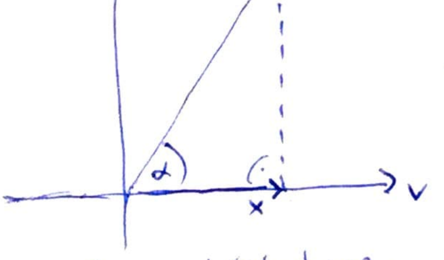
Beweis:

(a) Nachrechnen ergibt:

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\cos\sphericalangle(x,y) \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

(b) Folgt aus (a) mit $\cos 90° = 0$.

7.37 **Bem:** Die Idee im Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ist "orthogonale Projektion":



Gegeben sind $\{u, v\}$. Sei $\alpha = \sphericalangle(u,v)$.
Gesucht ist x mit $x = \lambda v$ und $u - x \perp v$.

$$\Rightarrow 0 = \langle u - \lambda v, v\rangle = \langle u,v\rangle - \lambda\langle v,v\rangle$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}.$$

Die Vektoren v und $u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$ sind also orthogonal.

Vergleiche mit 6.34 / 7.27.