

Roberto Frucht.

Zur Geometrie auf einer Fläche
mit indefiniter Metrik.

Sobre la Geometría en una
superficie con métrica
indefinida.

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N° 11

BUENOS AIRES

1940



ZUR GEOMETRIE AUF EINER FLÄCHE MIT INDEFINITER METRIK

Von Dr. ROBERT FRUCHT

EINLEITUNG

Wenn man die elementare Flächentheorie, d. h. die Geometrie der Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum entwickelt, so zeigt sich, dass die geometrischen Eigenschaften einer solchen Fläche durch zwei invariante quadratische Differentialformen bestimmt werden. Ein besonders wichtiges Kapitel der Flächentheorie ist aber die (durch Gauss begonnene) Untersuchung der "inneren" Eigenschaften einer Fläche, die nur von den Massverhältnissen auf der Fläche selbst, nicht aber von denen des umgebenden Raumes abhängen. Da die Massverhältnisse auf der Fläche selbst vollkommen durch die erste der beiden soeben genannten quadratischen Differentialformen festgelegt sind, indem diese das Quadrat des "Bogenelements" (d. h. der Entfernung zweier "unendlich" benachbarter Punkte) darstellt, läuft also die Untersuchung der "inneren" Eigenschaften einer Fläche darauf hinaus, diejenigen Eigenschaften der Fläche festzustellen, bei denen nur eine einzige quadratische Differentialform auftritt. Hierher gehören z. B. der Gauss'sche Satz von der Invarianz des Krümmungsmasses ("theorema egregium"), die geodätische Krümmung von Kurven auf der Fläche und die Gauss-Bonnetsche Integralformel; auch die sich für $n = 2$ ergebende Spezialisierung der allgemeineren Riemannschen Geometrie, die eine invariante quadratische Differentialform in n Veränderlichen zu Grunde legt, würde hierher gehören.

Entsprechend ihrer Herleitung als *Quadrat* des Bogenelements:

$$[1] \quad ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

ist diese erste Grundform der Flächentheorie positiv definit, d. h.

$$[2] \quad E > 0, \quad EG - F^2 > 0.$$

Bei einigen Sätzen und Begriffsbildungen der "inneren" Geometrie einer Fläche ist diese Voraussetzung aber gar nicht we-

sentlich; z. B. lässt sich das Krümmungsmass einer solchen quadratischen Differentialform

$$[3] \quad K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}, & \frac{1}{2}E_u, & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{array} \right\}$$

(wobei die angehängten Indices partielle Ableitungen bedeuten) ebenso gut durch dieselbe Formel auch bei einer indefiniten Form definieren, sofern nur $EG - F^2 \neq 0$ ist. Hingegen wird schon die Bogenlänge

$$[1a] \quad ds = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

selbst nicht immer reel ausfallen, sondern für einige Richtungen auch imaginär (diese Tatsache ist aus der speziellen Relativitätstheorie der "Ereignisse auf einer Geraden" durchaus geläufig, wo es "raumartige und "zeitartige" Richtungen gibt; dieser spezielle Fall ergibt sich, wenn man z. B. u als räumliche, v als zeitliche Variable deutet und $E = 1$, $F = 0$ und $G = c^2$ setzt!), sofern man diese Schwierigkeiten nicht einfach dadurch umgeht, dass man 1a) durch die Definition

$$[1b] \quad ds = \sqrt{|E du^2 + 2F du dv + G dv^2|}$$

ersetzt. Eine ähnliche Schwierigkeit ergibt sich bei der Definition der geodätischen Krümmung auf Grund einer indefiniten Differentialform.

Wegen dieser Schwierigkeiten mag es also auf den ersten Blick nicht geraten erscheinen, sich etwas von einer Geometrie mit einer indefiniten binären quadratischen Differentialform zu versprechen, und dies mag auch der Grund sein, warum eine solche meines Wissens bisher nicht ausgebaut worden ist, zumal da wohl ein zwingender geometrischer Anstoss zur Entwicklung einer solchen Theorie fehlte. Andererseits zeigt sich jedoch, dass die Geometrie einer indefiniten Form viel anschaulicher ist als die übliche Geometrie auf einer Fläche mit definiter Metrik, und zwar aus dem folgenden einfachen Grunde:

Die Nullrichtungen der Form (1), d. h. diejenigen Richtungen $du : dv$, für welche $ds^2 = 0$ ist, sind unter der Voraussetzung (2) imaginär, so dass man sie zwar zur Herleitung geo-

metrisch anschaulicher Ergebnisse *indirekt* verwenden kann, ihnen aber ein direkter geometrisch anschaulicher Inhalt im reellen Gebiet fehlt. Ist hingegen

$$[4] \quad EG - F^2 < 0,$$

so gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei verschiedene reelle Nullrichtungen, und diese schliessen sich zu zwei reellen Kurvenscharen zusammen. Auch diese Tatsache ist aus der Flächentheorie wohl bekannt und zwar nicht von der definiten ersten Grundform, die wir bisher betrachtet haben, sondern von der sogenannten zweiten Grundform

$$[5] \quad -d\sigma d\xi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

die bei hyperbolisch gekrümmten Flächen ($LN - M^2 < 0$) indefinit ist. In diesem Falle bezeichnet man die Nullrichtungen als Asymptotenrichtungen und die beiden erwähnten Kurvenscharen als die Asymptotenlinien der Fläche.

Die Existenz solcher reellen Kurvenscharen ermöglicht nun durch die Betrachtung des Flächeninhalts der von ihnen gebildeten Vierecke die den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildende anschauliche Deutung des Gauss'schen Krümmungsmasses (§§ 1 & 2) und der geodätischen Krümmung einer Kurve (§ 3), sowie eine äusserst elementare Herleitung des Gauss-Bonnetschen Integralsatzes (§ 4) — alles natürlich nur für den Fall einer indefiniten quadratischen Differentialform, für welche (4) erfüllt ist. Diese letztere Einschränkung scheint den geometrischen Wert dieser Ergebnisse etwas herabzumindern, wenn man nur an die elementare Flächentheorie denkt, wo die erste Differentialform (1) die Voraussetzung (4) ja nicht erfüllt, sondern nur unter Umständen die zweite, die aber allein (ohne die erste) in geometrischen Fragestellungen eigentlich niemals auftritt.

Anders wird die Sache aber, wenn wir uns der affinen Differentialgeometrie der Flächen zuwenden, denn dort tritt die zweite Grundform der elementaren Flächentheorie in anderer Normierung gerade als erste Grundform auf. Bezeichnen wir die Koeffizienten dieser ersten Grundform der affinen Flächentheorie nach dem Vorgang von Herrn Blaschke wieder mit $E, 2F, G$, so ist für hyperbolisch gekrümmte Flächen (4) erfüllt und die Asymptotenlinien sind reell.

Wir werden also unsere Ergebnisse auch als Aussagen der affinen Differentialgeometrie hyperbolisch gekrümmter Flächen deuten können — die in der affinen Flächentheorie ausserdem noch auftretende kubische Grundform kommt natürlich in unseren Untersuchungen nicht vor — und der Bequemlich-

keit halber werden wir uns auch der Sprache der affinen Flächentheorie bedienen, also z. B. Nullrichtungen von (1) als Asymptotenrichtungen bezeichnen oder das invariante Doppelintegral

$$[6] \quad \Omega = \iint \sqrt{F^2 - E G} \, du \, dv$$

als Affinoberfläche, usw. Doch gelten die abgeleiteten Ergebnisse ebenso gut für andere Gebiete der Geometrie, wo eine invariante quadratische Differentialform (1) auftritt, für welche die Voraussetzung (4) erfüllt ist.

§ 1. Die Konstruktion des vierten Asymptotenvierecks und die darauf beruhende anschauliche Deutung der Gauss'schen Krümmung.

Den folgenden Betrachtungen legen wir eine in einem gewissen Bereich der Parameter u und v definierte quadratische Differentialform (1) zu Grunde, deren Koeffizienten E , $2F$ und G genügend oft differenzierbare (oder noch einfacher analytische) Funktionen von u und v sein und der Bedingung (4) genügen mögen. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, gibt es dann zwei getrennte Scharen von Asymptotenlinien (Nulllinien der Form) derart, dass durch jeden Punkt je eine Kurve aus beiden Scharen geht. Führen wir diese Asymptotenlinien als Parameterlinien eines neuen Koordinatensystem ein (über dessen Anfangspunkt wir noch später zweckmässig verfügen werden), so wird in diesen neuen Parametern, die wir wieder mit u und v bezeichnen, E und G verschwinden und die Form (1) nimmt daher die einfachere Gestalt

$$[7] \quad ds^2 = 2 F (u, v) \, du \, dv$$

an, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

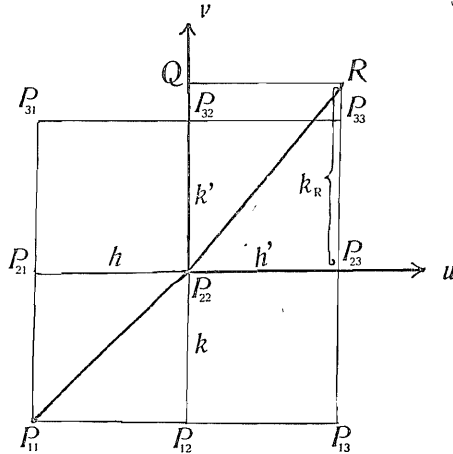
$$[8] \quad F (u, v) > 0$$

annehmen können. Für die Affinoberfläche ergibt sich daher aus (6) der einfache Ausdruck

$$[9] \quad \Omega = \iint F \, du \, dv .$$

Wir konstruieren nun das folgende Asymptotenviereck (Fig. 1): Von einem Punkte P_{11} unseres Bereiches ausgehend schreiten wir längs der positiven u -Richtung solange fort, bis der

Parameter u um den Wert h zugenommen hat; hierbei sei h eine bereits so klein vorgegebene positive Zahl, dass alle weiter unten durchgeführten Reihenentwicklungen zulässig sind. (Wir werden später natürlich den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ ausführen). So gelange man zum Punkt P_{12} . Ferner trage man abermals von P_{11} , aber diesmal in der positiven v -Richtung ein



solches Stück ab, dass der Parameter v um die Grösse k wachse, wo auch k eine genügend klein vorgegebene positive Zahl sei; so entstehe der Punkt P_{21} . Der Schnittpunkt der durch P_{21} gehenden u -Linie und der durch P_{12} gehenden v -Linie heisse P_{22} . Wählen wir P_{22} zum Anfangspunkt unserer u - v -Koordinaten, so haben die bisher betrachteten Punkte also die Koordinaten:

$$[9'] \quad P_{11} = \{-h, -k\}; \quad P_{12} = \{0, -k\}; \quad P_{21} = \{-h, 0\}; \quad P_{22} = \{0, 0\},$$

und das "Asymptotenviereck" $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$ hat nach (9) die Affinoberfläche

$$[10] \quad \omega = \int_{u=-h}^0 \int_{v=-k}^0 F(u, v) \, du \, dv.$$

Angrenzend an dieses Asymptotenviereck wollen wir zwei weitere solche Vierecke mit der gleichen Affinoberfläche ω konstruieren und zwar auf die folgende Weise: Wir verlängern zunächst die u -Linien $P_{11} P_{12}$ über P_{12} hinaus und $P_{21} P_{22}$ über P_{22} hinaus um je ein solches Stück h' bis zu den Punkten P_{13} bzw. P_{23} , dass das neu entstehende Asymptotenviereck $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$ gerade die Affinoberfläche ω habe. Entsprechend verlängern wir die v -Linien $P_{11} P_{21}$ über P_{21} hinaus und $P_{12} P_{22}$ über P_{22} hinaus um ein solches Stück k' , dass das entstehende Asymptotenviereck $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$ wieder die Affinoberfläche (10) hat.

Durch die drei Asymptotenvierecke $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$, $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$ und $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$, die alle drei die gleiche Affinoberfläche ω haben, ist nun aber ein viertes Asymptotenviereck völlig mitbestimmt, nämlich das Asymptotenviereck $P_{22} P_{23} P_{33} P_{32}$, wo P_{33} der Schnittpunkt der u -Linie durch P_{32} mit der v -Linie durch P_{23} ist. Die Affinoberfläche dieses vierten Asymptotenvierecks, die wir mit ω' bezeichnen wollen, wird im allgemeinen von ω verschieden sein.

Man wird ohne weiteres vermuten, dass die Differenz $\omega - \omega'$ in Zusammenhang mit der Gauss'schen Krümmung K im Punkt P_{22} steht, die für spezielle Form (7) der ersten Grundform nach (3) den einfachen Wert

$$[11] \quad K = - \frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}$$

annimmt. In der Tat zeigt die Rechnung, die wir im § 2 durchführen werden, dass

$$[12] \quad \omega' = \omega - K \omega^2 + \dots$$

ist, wo die Punkte auf Glieder hindeuten, die in h und k von mindestens fünfter Ordnung sind.

Für die Gauss'sche Krümmung K im Punkt P_{22} ergibt sich hieraus

$$[13] \quad K = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\omega - \omega'}{\omega^2}$$

Wir haben also folgende anschauliche Deutung der Gauss'schen Krümmung einer indefiniten Metrik erhalten:

Konstruiert man zu drei Asymptotenvierecken der gleichen Affinoberfläche ω und in der gegenseitigen Lage der Fig. 1 das zugehörige vierte Asymptotenviereck, dessen Affinoberfläche ω' sei, so strebt der Quotient $\frac{\omega - \omega'}{\omega^2}$ beim Zusammenschrumpfen der Vierecke gegen den Wert der Gauss'schen Krümmung K im gemeinsamen Berührungspunkt der vier Vierecke.

§ 2. Beweis der Formel (12) für die Gauss'sche Krümmung.

Entwickeln wir in (10) die Funktion $F(u, v)$ unter dem Integralzeichen in eine Potenzreihe nach u und v und führen die Integration gliedweise durch, so erhalten wir

$$[14] \quad \omega = Fhk - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} h^2k - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} hk^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} h^3k + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} h^2k^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} hk^3 + \dots$$

Hierbei sind die Werte der Funktion F und ihrer partiellen Ableitungen (ebenso wie im folgenden) im Punkte P_{22} , d. h. für $u = v = 0$ zu nehmen.

Analog errechnet man für das Asymptotenviereck $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$ die Affinoberfläche

$$[15] \quad \omega = \int_{u=0}^{h'} \int_{v=-k}^0 F(u, v) du dv = Fh'k + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} h'^2 k - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} h'k^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} h'^3 k - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} h'^2 k^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} h'k^3 + \dots,$$

und wenn man hierin etwa $h' = h + \eta$ einträgt und nur die Glieder bis zur dritten Ordnung berücksichtigt, so dass man η^2 vernachlässigen kann, so erhält man durch Vergleich von (14) und (15) eine lineare Gleichung für η , deren Auflösung für h' den Wert ergibt:

$$[16] \quad h' = h - \frac{\partial \log F}{\partial u} h^2 + \left(\frac{\partial \log F}{\partial u} \right)^2 h^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} h^2 k + \dots$$

Ebenso ergibt sich aus der Bedingung, dass das Asymptotenviereck $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$ die Affinoberfläche ω haben soll:

$$[17] \quad k' = k - \frac{\partial \log F}{\partial v} k^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} h k^2 + \left(\frac{\partial \log F}{\partial v} \right)^2 k^3 + \dots$$

Die Affinoberfläche des vierten Vierecks $P_{22} P_{23} P_{33} P_{32}$

$$[18] \quad \omega' = \int_{u=0}^{h'} \int_{v=0}^{k'} F(u, v) du dv = Fh'k' + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} h'^2 k' + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} h'k'^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} h'^3 k' + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} h'^2 k'^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} h'k'^3 + \dots$$

kann jetzt durch Einsetzen von (16) und (17) berechnet werden; es ergibt sich für ω' ein etwas länglicher Ausdruck, von dem aber die meisten Glieder wegfallen, wenn wir die Differenz $\omega' - \omega$ bilden, und zwar wird diese letztere

$$[19] \quad \omega' - \omega = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} \right) h^2 k^2 = -F \cdot \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} h^2 k^2 + \dots,$$

wo die durch Punkte angedeuteten höheren Glieder von mindestens fünfter Ordnung sind, oder (20) wegen (14)

$$[20] \quad \omega' - \omega = \frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} \omega^2 + \dots$$

Wegen (11) ist hiermit aber die Formel (12) bewiesen.

§ 3. Einführung der geodätischen Linien und des geodätischen Krümmungsdifferentials.

Die im § 2 abgeleiteten Formeln (16) und (17) für die "Seitenlängen" h' und k' des vierten Asymptotenvierecks liefern aber nicht nur die soeben angegebene Deutung der Gauss'schen Krümmung, sondern auch eine anschauliche Definition der geodätischen Linien, die zur indefiniten Metrik (7) gehören. Wir betrachten dazu einfach den "Streckenzug" $P_{11} P_{22} P_{33}$, der sich also durch Anfügung der "Diagonale" des vierten an die des ersten Asymptotenvierecks ergibt; im Grenzfall zusammenschumpfender Vierecke erhalten wir so ein "Stück" einer geodätischen Linie.

In der Tat! Setzen wir in (16) und (17) im Grenzfall $h = du$, $k = dv$, $h' = du + d^2u$ und $k' = dv + d^2v$ ein, so erhalten wir bei Division durch dt^2 die Differentialgleichungen der geodätischen Linien

$$[21] \quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = - \frac{\partial \log F}{\partial u} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \\ \frac{d^2v}{dt^2} = - \frac{\partial \log F}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \end{cases}$$

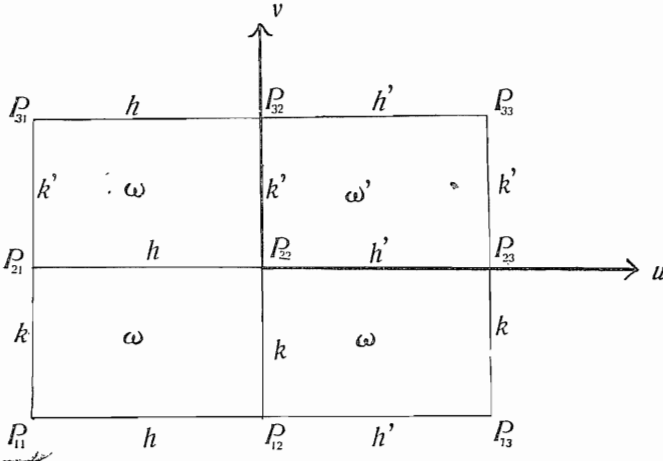
Die Bezeichnung "geodätische Linien" rechtfertigt sich hierbei durch die Tatsache, dass die üblichen Differentialgleichungen der geodätischen Linien in einem beliebigen Koordinaten-

system $[u_1, u_2]$ $\left(\frac{d^2u^i}{dt^2} = - \sum_{rs} \Gamma^i_{rs} \frac{du_r}{dt} \frac{du_s}{dt} \right)$ gerade in (21) über-

gehen, wenn man berücksichtigt, dass für die Form (7) von den Dreieindicesymbolen $\Gamma^i_{r,s}$ alle verschwinden mit Ausnahme

$$\text{von } \Gamma^1_{22} = \frac{\partial \log F}{\partial u} \text{ und } \Gamma^2_{22} = \frac{\partial \log F}{\partial v}.$$

Die soeben angedeutete anschauliche Einführung der geodätischen Linien *) legt es nahe, für eine Kurve, die nicht geodätische Linie ist, in der folgenden Weise eine anschauliche Definition einer "geodätischen Krümmung" vorzunehmen. Ha-



ben die Punkte $P^{\alpha\beta}$ dieselbe Bedeutung wie in §§ 1 und 2 und in Fig. 1, so sei (siehe Fig. 2) eine durch P_{11} und P_{22} gehende Kurve $v = v(u)$ gegeben, für die wir annehmen wollen, dass $\frac{dv}{du} > 0$ sei. Bei Verfolgung der Kurve über P_{22} hinaus wird sich zeigen, dass sie die v -Linie durch P_{13} P_{23} P_{33} , d. h. die Asymptotenlinie $u = h'$, im allgemeinen in einem von P_{33} verschiedenen Punkt R schneiden wird. (In der Fig. 2 ist angenommen, dass R ausserhalb von P_{23} P_{33} liegt, doch ändert sich an den folgenden Betrachtungen nichts, wenn R innerhalb von P_{23} P_{33} liegt). Wir ziehen noch die durch R gehende u -Linie und erhalten so ein Asymptotenviereck P_{22} P_{23} RQ , dessen Affinoberfläche ω'' nur dann gleich der Affinoberfläche ω' von P_{22} P_{23} P_{33} P_{32} sein wird, wenn $R = P_{33}$, also im Grenzfall, wenn die betrachtete Kurve eine geodätische Linie ist. Daher wird die Differenz $\omega'' - \omega'$ als ein Mass für die Abweichung unserer Kurve von einer geodätischen Linie zu brauchen sein.

Die Durchrechnung dieses Gedankengangs verläuft folgendermassen: Wenn wir die Ordinate von R mit k bezeichnen (die Abszisse ist ja gleich h'), so wird wegen (18)

$$[22] \quad \omega'' - \omega' = F h' (k - k') + \dots,$$

(*) Man könnte in weiterer Verfolgung dieses Gedankengangs auch den Parallelismus von Levi-Civita auf anschaulichen Wege einführen, doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

wo der Wert von F an der Stelle P_{22} , d. h. für $u = v = 0$ zu nehmen ist, und hierbei ist

$$[23] \quad k_{\text{R}} = v (h') = \frac{dv}{du} h' + \frac{1}{2} \frac{d^2v}{du^2} h'^2 + \dots,$$

wo die Werte von $\frac{dv}{du}$ und $\frac{d^2v}{du^2}$ hier und im folgenden ebenfalls im Punkte P_{22} zu nehmen sind, oder wegen (16):

$$[24] \quad k_{\text{R}} = \frac{dv}{du} h + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2v}{du^2} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \frac{dv}{du} \right) h^2 + \dots$$

Andererseits folgt wegen

$$[25] \quad k = -v (-h) = \frac{dv}{du} h - \frac{1}{2} \frac{d^2v}{du^2} h^2 + \dots$$

aus (17)

$$[26] \quad k' = \frac{dv}{du} h - \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2v}{du^2} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right\} h^2 + \dots$$

Setzen wir (24) und (26) in (22) ein, so ergibt sich

$$[27] \quad \omega'' - \omega' = F h k' \cdot \left\{ \frac{d^2v}{du^2} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \frac{dv}{du} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right\} h^2 + \dots$$

oder mit Rücksicht auf (16) und (25):

$$[28] \quad \begin{aligned} \omega'' - \omega' &= F h k^2 \cdot \left\{ \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\left(\frac{dv}{du} \right)^2} - \frac{\frac{\partial \log F}{\partial u}}{\frac{dv}{du}} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \right\} + \dots \\ &= F (hk) \sqrt[3]{\frac{dv}{du} \left\{ \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\left(\frac{dv}{du} \right)^2} - \frac{\frac{\partial \log F}{\partial u}}{\frac{dv}{du}} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \right\}} + \dots \end{aligned}$$

und daher endlich wegen (14):

$$[29] \quad \frac{\omega'' - \omega'}{\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{F} \, du \, dv} \left\{ \left(\frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \right) du + \frac{\partial \log F}{\partial v} dv \right\} + \dots$$

Einen in u und v (abgesehen vom Vorzeichen) symmetrischen Ausdruck erhält man, wenn man unsere Kurve $v = v(u)$ lieber in Parameterdarstellung $u = u(t)$, $v = v(t)$ schreibt und

$$[29'] \quad \frac{dv}{du} = \frac{\dot{v}}{\dot{u}}, \quad \frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{\dot{u}^3} \begin{vmatrix} \dot{u} & \dot{v} \\ \ddot{u} & \ddot{v} \end{vmatrix},$$

einträgt (die aufgesetzten Punkte bedeuten Ableitungen nach t); man erhält so die Grenzwertformel für zusammenschumpfende Asymptotenvierecke:

$$[30] \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\omega'' - \omega'}{\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{F \dot{u} \dot{v}}} \left\{ \frac{\dot{u} \ddot{v} - \ddot{u} \dot{v}}{\dot{u} \dot{v}} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \dot{v} \right\}$$

Hierin unterscheidet sich die rechte Seite nur um einen (imaginären) Zahlenfaktor von der in der üblichen Weise definierten geodätischen Krümmung einer Kurve in einer definiten Metrik; in der Tat liefert die bekannte Formel für die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_g^{def.}}$ in beliebigen Koordinaten, die man in den Lehrbüchern der Differentialgeometrie nachschlagen kann, für den Fall $E = G = 0$ ($i = \sqrt{-1}$):

$$[31] \quad \frac{1}{\varrho_g^{def.}} = \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{F \dot{u} \dot{v}}} \left(\frac{\dot{u} \ddot{v} - \ddot{u} \dot{v}}{\dot{u} \dot{v}} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \dot{v} \right)$$

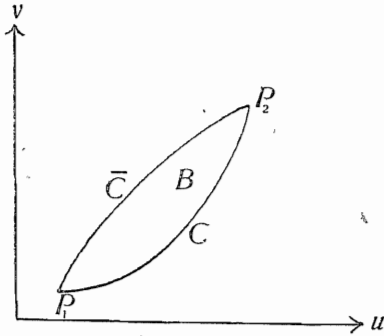
Die hierbei auftretenden Vorzeichen- bzw. Reellitätsschwierigkeiten für den uns interessierenden Fall einer indefiniten Grundform werden umgangen, wenn man im Sinne der oben gegebenen Herleitung, statt die geodätische Krümmung selbst zu definieren, sich auf den aus (29) folgenden Differentialausdruck

$$[32] \quad \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \right) du + \frac{\partial \log F}{\partial v} dv \right\}$$

beschränkt, den man etwa als “*geodätisches Krümmungsdifferential*” bezeichnen könnte. Mit seinem Integral längs eines endlichen Kurvenbogens werden wir uns im § 4 beschäftigen und so das “indefinite Analogon” zum Gauss-Bonnetschen Satz der Flächentheorie erhalten.

§ 4. Das Integral des geodätischen Krümmungsdifferentials und der Gauss-Bonnetsche Satz für das Kurvenzweieck.

Wir betrachten das Stück einer Kurve $C: v=v(u)$ zwischen zwei Punkten $P_1 = [u_1, v_1]$ und $P_2 = [u_2, v_2]$; der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, dass auf diesem Kurvenstück



durchwegs $\frac{dv}{du} > 0$ ist (siehe Fig. 3). Integrieren wir das oben eingeführte “geodätische Krümmungsdifferential” (32) längs C von P_1 bis P_2 , so erhalten wir das *Kurvenintegral*

$$[33] \quad \int_C \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \int_C \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}} du - \frac{1}{2} \int_C \left(\frac{\partial \log F}{\partial u} du - \frac{\partial \log F}{\partial v} dv \right)$$

Von den beiden rechts auftretenden Kurvenintegralen lässt sich aber das erste auch als gewöhnliches Integral auswerten:

$$[34] \quad \frac{1}{2} \int_C \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}} du = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{v''(u)}{v'(u)} du = \frac{1}{2} \log \frac{v'(u_2)}{v'(u_1)}$$

mit

$$v'(u) = \frac{dv}{du}, \quad v''(u) = \frac{d^2v}{du^2}$$

Ferner ist

$$[35] \int_C \left(\frac{\partial \log F}{\partial u} du + \frac{\partial \log F}{\partial v} dv \right) = \int_C d(\log F) = \log \frac{F(u_2, v_2)}{F(u_1, v_1)}$$

daher

$$[36] \frac{1}{2} \int_C \frac{\partial \log F}{\partial v} dv = \frac{1}{2} \log \frac{F(u_2, v_2)}{F(u_1, v_1)} - \frac{1}{2} \int_C \frac{\partial \log F}{\partial u} du.$$

Tragen wir (34) und (36) in (33) ein, so ergibt sich

$$[37] \int_C \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \log \frac{v'(u_2)}{v'(u_1)} + \frac{1}{2} \log \frac{F(u_2, v_2)}{F(u_1, v_1)} - \int_C \frac{\partial \log F}{\partial u} du.$$

Wir betrachten nun eine zweite Kurve $\zeta : v = w(u)$, die "oberhalb" von ζ gleichfalls von P_1 nach P_2 laufen möge (d. h. $w(u) \equiv v(u)$, $w(u_1) = v_1$, $w(u_2) = v_2$), und bilden auch für diese das Integral ihres geodätischen Krümmungsdifferentials von P_1 bis P_2 . Für die Differenz dieser Integrale längs C und längs \bar{C} folgt dann aus (37):

$$[38] \int_C \frac{ds}{\varrho_g} - \int_{\bar{C}} \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \log \frac{v'(u_2)}{v'(u_1)} - \frac{1}{2} \log \frac{w'(u_2)}{w'(u_1)} - \int_C \frac{\partial \log F}{\partial u} du + \int_{\bar{C}} \frac{\partial \log F}{\partial u} du.$$

Die beiden letzten Kurvenintegrale auf der rechten Seite lassen sich aber als ein Doppelintegral der negativen Gauss'schen Krümmung über die Affinoberfläche des zwischen den Kurven C und \bar{C} gelegenen u - v -Bereiches, den wir mit β bezeichnen und als einfach zusammenhängend voraussetzen, auffassen, denn nach (9) und (11) lässt sich in diesem Doppelintegral eine Integration ausführen:

$$[39] - \iint_C K d\Omega = \int_C \int_C \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} du dv = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v(u)}^{w(u)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \log F}{\partial u} \right) dv = \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \frac{\partial \log F(u, w(u))}{\partial u} - \frac{\partial \log F(u, v(u))}{\partial u} \right\} du$$

und so ergibt sich tatsächlich

$$[40] \quad - \int_C \int_{\bar{C}} K d\Omega = \int_C \frac{\partial \log F}{\partial u} du - \int_{\bar{C}} \frac{\partial \log F}{\partial u} du.$$

Tragen wir dies in (38) ein, so erhalten wir für unsere indefinite Metrik den Gauss-Bonnetschen Integralsatz für das Kurvenzweieck in der Form:

$$[41] \quad \int_C \int_{\bar{C}} K d\Omega + \int_C \frac{ds}{\varrho_g} - \int_{\bar{C}} \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \log \frac{v'(u_2) \cdot w'(u_1)}{v'(u_1) \cdot w'(u_2)}.$$

Hierbei kan man die rechte Seite noch folgendermassen deuten: Bezeichnen wir das Doppelverhältnis, welches im Punkt P_i die Tangenten von C und \bar{C} (in dieser Reihenfolge) mit den beiden Asymptotenrichtungen bilden, mit $D_i(C, \bar{C})$ ($i = 1, 2$), so ist z. B.

$$[42] \quad D_1(C, \bar{C}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & du \\ 0 & dv \end{vmatrix}_1 \times \begin{vmatrix} 0 & du \\ 1 & dv \end{vmatrix}_1}{\begin{vmatrix} 1 & du \\ 0 & dv \end{vmatrix}_1 \times \begin{vmatrix} 0 & du \\ 1 & dv \end{vmatrix}_1} = \frac{v'(u_1)}{w'(u_1)}$$

und daher

$$[43] \quad \int_C \int_{\bar{C}} K d\Omega + \int_C \frac{ds}{\varrho_g} - \int_{\bar{C}} \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \log \frac{D_2(C, \bar{C})}{D_1(C, \bar{C})}$$

In dieser Formulierung steht die Formel (43) für eine indefinite Metrik in vollkommener Analogie zum gewöhnlichen Gauss-Bonnetschen Satz für eine positiv definitive Grundform, wenn man ihn für ein Kurvenzweieck ausspricht; denn in diesem letzteren Falle würden auf der rechten Seite statt der von uns gefundenen Logarithmen von Doppelverhältnissen die Winkel zwischen C und \bar{C} in P_1 bzw. P_2 auftreten. Der Winkel zweier Richtungen ergibt sich aber bekanntlich aus dem Logarithmus des Doppelverhältnisses dieser Richtungen und der beiden isotropen Richtungen (Nullrichtungen der Grundform) durch Multiplikation mit $i/2$. Der Unterschied zum definiten Fall liegt also nur in dem Faktor i auf der rechten Seite, der aber auch auf der linken Seite von (43) implizit in $1/\varrho_g$ und $d\Omega$ auftritt. (Vgl. hierzu (31) mit (30) und (6) mit der im definiten Fall geltenden Definition der Oberfläche: $\sqrt{EG-F^2} du dv$).

SOBRE LA GEOMETRIA EN UNA SUPERFICIE CON METRICA INDEFINIDA

Por ROBERTO FRUCHT

INTRODUCCION

Al desarrollar la teoría elemental de superficies, esto es, la geometría de las superficies en el espacio euclideo tridimensional, se demuestra que las propiedades de dichas superficies están determinadas por las dos formas diferenciales cuadráticas invariantes. Un capítulo particularmente interesante de esta teoría de superficies, es el estudio (que ya fué iniciado por Gauss) de las propiedades "intrínsecas" de una superficie, las cuales dependen únicamente de la superficie misma, pero no del espacio en que está definida. Puesto que las propiedades métricas de una superficie se derivan de la primera de las mencionadas formas diferenciales cuadráticas, la cual expresa el cuadrado del "elemento de arco" (esto es la distancia entre dos puntos "infinitamente" próximos), las propiedades "intrínsecas" de una superficie se refieren a las propiedades en las cuales interviene únicamente esa forma diferencial cuadrática. A esto se refiere por ejemplo el teorema de Gauss sobre la invariancia de la curvatura total ("theorema egregium"), la curvatura geodésica de las curvas de una superficie y la fórmula integral de Gauss-Bonnet; se puede incluso considerar como perteneciente a esta teoría, el caso particular para $n = 2$ de la geometría general de Riemann derivada de una forma diferencial cuadrática de n variables.

Por tratarse del *cuadrado del elemento de arco* la primera forma diferencial cuadrática de la teoría de superficies [1], es positiva definida, esto es, se verifica [2].

Para algunos teoremas y propiedades de la geometría "intrínseca" de una superficie, estas hipótesis no son necesarias; por ejemplo, la curvatura total de una de estas formas diferenciales cuadráticas [3] (los sub-índices representando derivadas parciales), se puede igualmente expresar por esta misma fórmula, en el caso de una forma diferencial cuadrática con la sola condición de ser $E G - F^2$ distinto de cero. Según esto el elemento de arco [1a] no será siempre real sino que en algunas direcciones podrá ser imaginario (esto es corriente en la teoría de la relatividad en lo referente a "sucesos sobre una recta" en donde intervengan "direcciones de espacio" y "direcciones de tiempo"; esto ocurre p. ej. cuando u es la variable de espacio, v la variable de tiempo, $E = 1$, $F = 0$ y $G = -C^2$), pero se puede sencillamente resolver esta dificultad poniendo, por definición [1b] en lugar de [1a].

Una dificultad de este tipo aparece en la definición de curvatura geodésica a partir de una forma diferencial indefinida.

A causa de estas dificultades, no parece a primera vista muy recomendable ocuparse de una geometría con una forma diferencial cuadrática binaria indefinida, y esta debe ser la causa, de que, al menos que nosotros sepamos, no se haya construido dicha geometría, si bien quizás haga falta para la edificación de tal teoría un más profundo desarrollo geométrico. Se observa sin embargo que la geometría de una forma indefinida es más intuitiva que la geometría ordinaria de una superficie o con métrica definida, a causa de los siguientes razonamientos simples:

Las direcciones nulas de la forma [1], esto es, aquellas direcciones $du : dv$ para las cuales $ds^2 = 0$, son con las hipótesis [2] imaginarias, se pueden por tanto aplicar solo indirectamente a la interpretación de resultados geométricos intuitivos, pero en cambio falta un contenido directo geométrico e intuitivo en el campo real. Si es [4] en cada punto de la superficie hay dos direcciones reales nulas distintas, que constituyen dos haces de curvas reales. Esto es bien conocido en la teoría de superficies, si bien no para la primera forma fundamental sino para la llamada segunda forma fundamental [5] la cual para superficies con curvatura hiperbólica ($LN - M^2 < 0$) es indefinida. En este caso las direcciones nulas se llaman direcciones asintóticas y los mencionados haces de curvas, líneas asintóticas de la superficie.

La existencia de estos haces de curvas reales facilita, mediante la consideración del cuadrilátero que forman, el estudio del tema de este trabajo, que versa sobre la significación intuitiva, de la curvatura de Gauss (§ § 1 y 2), de la curvatura geodésica de una curva (§ 3), y también una obtención muy elemental de la fórmula integral de Gauss-Bonnet (§ 4), todo ello naturalmente, solo para el caso de una forma diferencial cuadrática indefinida que cumpla [4]. Esta última limitación parece disminuir el valor geométrico de estos resultados pues si nos referimos a la teoría elemental de superficies, la primera forma diferencial cuadrática no cumple la condición [4] que es cumplida únicamente por la segunda, pero esta no aparece nunca en las consideraciones geométricas sin ir acompañada de la primera.

El caso es distinto si consideramos la geometría diferencial afín de superficies, ya que en ella la segunda forma fundamental aparece, de una manera algo distinta, como la primera forma fundamental. Indiquemos los coeficientes de esta primera forma fundamental de la teoría afín de superficies según Blaschke (*) con $E, 2F, G$, con lo cual para superficies de curvatura hiperbólica se cumple [4] y las líneas asintóticas son reales.

Podremos así generalizar nuestros resultados a la geometría diferencial hiperbólica de superficies curvas — la forma fundamental cúbica de la geometría afín de superficies, no interviene naturalmente en estas consideraciones — y para mayor comodidad utilizaremos el lenguaje de la geometría afín de superficies, así por ejemplo las direcciones nulas de [1] se llamarán direcciones asintóticas y el invariante integral doble [6] área afine.

Además los resultados que se obtienen son válidos también para otros capítulos de la geometría en los que interviene la forma diferencial cuadrática invariante que satisface la hipótesis [4].

§ 1. CONSTRUCCION DE LOS CUATRO CUADRILATEROS DE ASINTOTAS Y SIGNIFICACION INTUITIVA DE LA CURVATURA DE GAUSS QUE DE ELLA SE DERIVA

Las consideraciones que van a seguir se referirán siempre a una forma diferencial cuadrática del tipo [1], definida en un cierto dominio de u y v ; sus coeficientes $E, 2F$ y G serán generalmente funciones diferenciables, (o más sencillamente analíticas) de u y v que verifican la con-

*) Wilhelm Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie. II: Affine Differentialgeometrie. (Bearbeitet von Kurt Reidemesteir.) Berlin, 1923. — La curvatura de Gauss de esta forma fundamental está allí indicada con la letra S , p. ej. § 49, (5).

dición [4]. Como ya dijimos en la introducción existen entonces, dos haces distintos de líneas asíntóticas, (líneas nulas de la forma), tales que por cada punto pasa una curva de cada haz. Tomando estas líneas asíntóticas como líneas paramétricas de un nuevo sistema de coordenadas, (cuyo arigen lo elegiremos más tarde en donde nos convenga), con estos nuevos parámetros, que seguiremos representando por u y v , E y G desaparecen, y la forma [1] toma la simple expresión [7], en la cual sin limitar la generalidad podemos suponer [8].

Para el área afine [9], teniendo en cuenta [6] deduciremos la sencilla expresión [9].

Construyamos ahora el siguiente cuadrilátero de asíntotas (fig. 1): desde un punto P_{11} de nuestro dominio sigamos a lo largo de la dirección positiva de las u , hasta que este parámetro tome el valor h ; h tiene que ser un número positivo suficientemente pequeño para que todos los desarrollos en serie que ejecutemos sean válidos. (Más tarde efectuaremos naturalmente el paso al límite $h \rightarrow 0$). Así obtendremos el punto P_{12} . Análogamente desde P_{11} en la dirección positiva de las v sigamos hasta el valor k de v , donde k es un número positivo suficientemente pequeño, así obtendremos el punto P_{21} . Obtendremos P_{22} por la intersección de la u -línea que pasa por P_{21} con la v -línea que pasa por P_{12} . Este punto P_{22} lo tomaremos con el origen de nuestro sistema de coordenadas, con lo cual los otros puntos tendrán las coordenadas (9'), y el "cuadrilátero de asíntotas" $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$ tiene como área afine [10].

Lindando con este cuadrilátero de asíntotas, construiremos de la siguiente forma, otros dos cuadriláteros de la misma área afine ω : para ello prolonguemos primero la u línea $P_{11} P_{12}$ del lado de P_{12} y la $P_{21} P_{22}$ del lado de P_{22} un segmento h' hasta obtener los puntos P_{13} y P_{23} respectivamente, de manera que el área afine del cuadrilátero de asíntotas $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$ sea igual a ω . De la misma manera prolongamos las v -líneas $P_{11} P_{21}$ y $P_{12} P_{22}$ del lado de P_{21} y P_{22} respectivamente, un segmento k' tal que el cuadrilátero de asíntotas $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$ tenga igualmente ω como área afine.

Estos tres cuadriláteros $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$, $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$, y $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$, de igual área afine ω determinan un cuarto cuadrilátero de asíntotas, $P_{22} P_{23} P_{33} P_{32}$ donde P_{33} es la intersección de la u -línea que pasa por P_{32} con la v -línea que pasa por P_{23} . El área afine de este cuarto cuadrilátero de asíntotas, la indicaremos con ω' y será en general distinta de ω .

Se puede presumir que la diferencia $\omega - \omega'$ está en dependencia con la curvatura de Gauss K en P_{22} la cual para el caso de la forma especial [7] de la primera forma fundamental toma, teniendo en cuenta [3], el sencillo valor [11].

En efecto, el cálculo, que hacemos en el § 2 prueba [12] donde los puntos significan términos de al menos quinto grado en h y k .

Para la cuadratura de Gauss en el punto P_{22} se tiene por tanto [13], es decir:

Se construye sobre tres cuadriláteros de asíntotas de igual área afine ω y en la posición indicada en la figura 1 el correspondiente cuarto cuadrilátero de asíntotas cuya área afine es ω' , entonces el cociente $\frac{\omega - \omega'}{\omega^2}$ tiende hacia el valor de la curvatura de Gauss K en el punto común a los cuatro cuadriláteros cuando éstos tienden todos a reducirse a dicho punto.

§ 2. DEMOSTRACION DE LA FORMULA [12] PARA LA CURVATURA DE GAUSS

Desarrollemos en [10] la función $F(u, v)$ bajo el signo integral en una serie de potencias de u y v e integremos término a término, así tendremos [14].

En esta fórmula (así como en las siguientes) los valores de la función F y de sus derivadas parciales se toman en el punto P_{22} esto es para $u = v = 0$.

Análogamente se calcula el área afine [15] del cuadrilátero de asíntotas $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$.

Poniendo $h' = h + \eta$ y considerando solo los términos hasta el tercer orden, puesto que η^2 se puede despreciar, se obtiene comparando [14] y [15] una ecuación lineal en η cuya solución para h' nos da [16].

Asimismo la condición de tener el cuadrilátero de asíntotas $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$ el área afine ω da [17].

El área afine [18] del cuarto cuadrilátero $P_{22} P_{23} P_{33} P_{32}$ puede ya calcularse teniendo en cuenta [16] y [17]. Se obtiene así para ω' una expresión bastante larga, pero la mayoría de los términos desaparecen al formar la diferencia $\omega' - \omega$ obteniéndose [19], donde los puntos indican términos de al menos quinto orden y teniendo en cuenta [14], se obtiene [20].

Teniendo en cuenta [11] queda así demostrada la fórmula [12].

§ 3. INTRODUCCION DE LAS LINEAS GEODESICAS Y DE LA CURVATURA DIFERENCIAL GEODESICA

Las fórmulas [16] y [17], obtenidas en el § 2 para las longitudes h' y k' de los lados del cuarto cuadrilátero de asíntotas nos dan no solamente la significación de la curvatura de Gauss, anteriormente expuesta, sino también una definición intuitiva de las líneas geodésicas para el caso de la métrica indefinida [7]. Consideremos para esto el camino $P_{11} P_{22} P_{33}$ que se obtiene añadiendo la diagonal del cuarto cuadrilátero de asíntotas a la del primero; al pasar al límite y reducirse todos los cuadriláteros a un punto este camino tiende a un elemento de geodésica.

En efecto: reemplacemos en [16] y [17] al efectuar el paso al límite $h = du$, $k = dv$, $h' = du + du^2$ y $k' = dv + dv^2$ y dividiendo por dt^2 obtendremos [21] que son las ecuaciones de las líneas geodésicas.

Se prueba que efectivamente estas ecuaciones son las de las líneas geodésicas, recordando que éstas son [21'] en un sistema de coordenadas generales (u_1, u_2) , las cuales se reducen a [21] observando que para la forma [7] los símbolos de tres índices Γ^i_{rs} se anulan a excepción de Γ^1_{11} y Γ^2_{22} .

Esta interpretación intuitiva de las líneas geodésicas (*) nos permite para una línea que no sea geodésica dar una definición intuitiva de la curvatura geodésica. Para ello supongamos los puntos $P_{\alpha\beta}$ con la mis-

(*) Por este mismo camino podría obtenerse igualmente el paralelismo de Levi-Civita, pero por ahora, no entraremos en ello.

ma significación que en los § § 1 y 2 y figura 1 y consideremos (figura 2) una curva $v = v(u)$ que pasa por los puntos P_{11} y P_{22} y para la cual se tenga $\frac{dv}{du} > 0$. Prolongando esta curva por P_{22} se demuestra que corta en general a la v -línea que pasa por P_{13} P_{23} P_{33} (es decir la línea asintótica $u = h'$), en un punto R distinto de P_{33} . (En la figura 2 se ha tomado R exterior a P_{23} P_{33} pero las consideraciones que siguen son válidas aunque dicho punto sea interior a P_{23} P_{33}). Tracemos la u -línea por el punto R hasta obtener un cuadrilátero de asíntotas P_{22} P_{23} R Q , cuya área afine ω'' sea solamente igual al área afine ω' de P_{22} P_{23} P_{33} P_{32} , cuando $R = P_{33}$, esto es en el caso límite de ser la línea considerada una geodésica. De este modo la diferencia $\omega'' - \omega'$ se puede considerar como una medida de la separación entre nuestra línea y una geodésica.

El cálculo de todo lo que acabamos de exponer es el siguiente:

Si la ordenada de R la indicamos con k_r (la abscisa es h'), teniendo en cuenta [18] resulta [22], donde el valor de F se refiere al punto P_{22} es decir para $u = v = 0$. De aquí se tiene [23], donde los valores $\frac{dv}{du}$ y $\frac{d^2v}{du^2}$ los tomamos (e igualmente hacemos en lo sucesivo) en el punto P_{22} . Ahora bien, según [16] resulta [24]. Además teniendo en cuenta [15] deducimos [26] de [17].

Reemplazando [24] y [26] en [22] se obtiene [27].

Volviendo a tener en cuenta [16] y [25] deducimos [28], y de aquí finalmente a causa de [14] tenemos [29].

Expresando la curva $v = v(u)$ en forma paramétrica $u = u(t)$, $v = v(t)$ y poniendo [29'], se obtiene una expresión simétrica (a excepción del signo) en u y v la cual nos da para el caso límite de reducirse el cuadrilátero de asíntotas a un punto, la fórmula [30].

El segundo miembro de esta expresión se diferencia únicamente en un factor imaginario de la curvatura geodésica ordinaria de una curva en el caso de una métrica definida. En efecto, la conocida fórmula para la curvatura geodésica en cualquier sistema de coordenadas (véase cualquier texto de geometría diferencial) es [31] para el caso $E = G = 0$, ($i = \sqrt{-1}$).

Las dificultades de signo y realidad, para el caso que nos interesa de una métrica indefinida, desaparecen si en lugar de la curvatura geodésica nos limitamos a la expresión diferencial invariante [32] deducida de [29] y que se podrá llamar "curvatura diferencial geodésica". En el § 4 nos ocuparemos de la integral [32] a lo largo de un arco de curva finita obteniendo así el análogo del teorema de Gauss-Bonnet para una métrica indefinida.

§ 4. LA INTEGRAL DE LA CURVATURA DIFERENCIAL GEODESICA Y EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA HUSOS CURVOS

Consideremos el segmento de curva $\underline{C} : (v = v(u))$ entre dos puntos $P_1 (u_1, v_1)$ y $P_2 (u_2, v_2)$. Para simplificar supondremos que en toda esta curva es $dv/du > 0$ (ver figura 3). Integrando la curvatura diferencial geodésica, introducida en [32], a lo largo de \underline{C} desde P_1 a P_2 , obtenemos la integral de línea [33].

La primera de las dos integrales curvilínea del 2º miembro se puede calcular como una integral ordinaria [34].

Además tenemos [35] de donde deducimos [36] y substituyendo [34] y [36] en [33] se obtiene [37].

Consideremos ahora una segunda curva \bar{C} ($v = w(u)$ que vaya asimismo de P_1 a P_2 pero por encima de C (esto es: $w(u) \geq v(u)$, $w(u_1) = v_1$, $w(u_2) = v_2$), y formemos para ella la integral de su curvatura diferencial geodésica desde P_1 hasta P_2 . La diferencia de estos dos integrales a lo largo de C y \bar{C} es [38] en virtud de [37].

Las dos últimas integrales curvilíneas del segundo miembro de la igualdad anterior se pueden expresar como la integral doble de la curvatura de Gauss negativa, sobre la superficie afín del recinto comprendido entre las curvas C y \bar{C} que designaremos por B y que supondremos simplemente conexo. Teniendo en cuenta [9] y [11] podemos integrar parte de esta integral doble quedando [39] y así obtenemos efectivamente [40].

Substituyendo en [38] obtenemos para nuestra métrica indefinida, la fórmula integral de Gauss-Bonnet para husos curvos, en la forma [41].

Al segundo miembro podemos darle la siguiente interpretación: formamos la razón doble entre las dirección de las tangentes P_i a C y \bar{C} , y las dos direcciones asintóticas y representémosla por $D_i(C, \bar{C})$, ($i=1, 2$), por ejemplo [42] y de aquí [43].

De esta manera la fórmula [43] es completamente análoga para el caso de una métrica indefinida, a la fórmula de Gauss-Bonnet para una forma positiva definida al referirse a un huso curvo; pues en este último caso en el segundo miembro aparece en lugar de los logaritmos de las razones dobles, los ángulos entre C y \bar{C} en P_1 y P_2 respectivamente. El ángulo de dos direcciones viene dado como es sabido por el logaritmo de la razón doble de estas dos direcciones y de las direcciones isótropas (direcciones nulas de la forma fundamental) multiplicadas por $i/2$. La diferencia con el caso definido está únicamente en el factor i del segundo miembro, el cual aparece sin embargo de una manera implícita $1/Q_g$ y $d\Omega$. (Compárese, para ello [31] con [30] y [6] con la definición de area $\sqrt{EG - F^2} du dv$, válida para la métrica definida).

Buenos Aires, 1939.