Aufgabe 8: Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren auf die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

an.

LÖSUNG:

$$v_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = a_2 - a_2 \cdot v_1 v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{25}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = a_3 - a_3 \cdot v_1 v_1 - a_3 \cdot v_2 v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{50}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} - \frac{25}{5} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{\|\tilde{v}_3\|} \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0, \pi] \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \ \text{ mit } \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v, w) = \int_0^\pi v(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \ x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot, \cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\right).$$

LÖSUNG: Zuerst beweisen wir die im Tipp aufgestellte Behauptung:

Sei a, $b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$

$$\begin{aligned} \sin(ax) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right) \\ \sin(bx) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ibx} - e^{-ibx}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \sin(ax)\sin(bx) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{i(a+b)x} + e^{-i(a+b)x}\right)}{2} - \frac{\left(e^{i(a-b)x} + e^{-i(a-b)x}\right)}{2}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right) \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} g(\sin(ax), \sin(bx)) &= \int_0^\pi \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2(a-b)}\left[\sin\left((a-b)x\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2(a+b)}\left[\sin\left((a+b)x\right)\right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

weil $a - b \neq 0$ und $a + b \neq 0$. Daraus folgt, dass die Funktionen v_1, v_2 und v_3 bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot, \cdot)$ orthogonal sind.

b) Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, bilden sie also eine orthogonale Basis und wir müssen nur noch normieren:

Die normierte Basis, nennen wir sie w_1, w_2, w_3, erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(x),\, \sin(x))}} \sin(x) \\
w_2 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(2x),\, \sin(2x))}} \sin(2x) \\
w_3 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(3x),\, \sin(3x))}} \sin(3x)
\end{aligned}$$

Sei $a \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
g(\sin(ax), \sin(ax)) &= \int_0^\pi \sin(ax)\sin(ax)\, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left((2a)x\right)\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x\right]_0^\pi - \frac{1}{2a}\left[\sin\left(2ax\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \\
w_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \\
w_3 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(3x)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn die Basis nicht bereits orthogonal wäre, könnten wir das Gram-Schmidt-Verfahren benutzen. Dieses funktioniert mit dem Skalarprodukt $g(\cdot,\cdot)$ analog zum Vorgehen im $\mathbb{R}^3$.

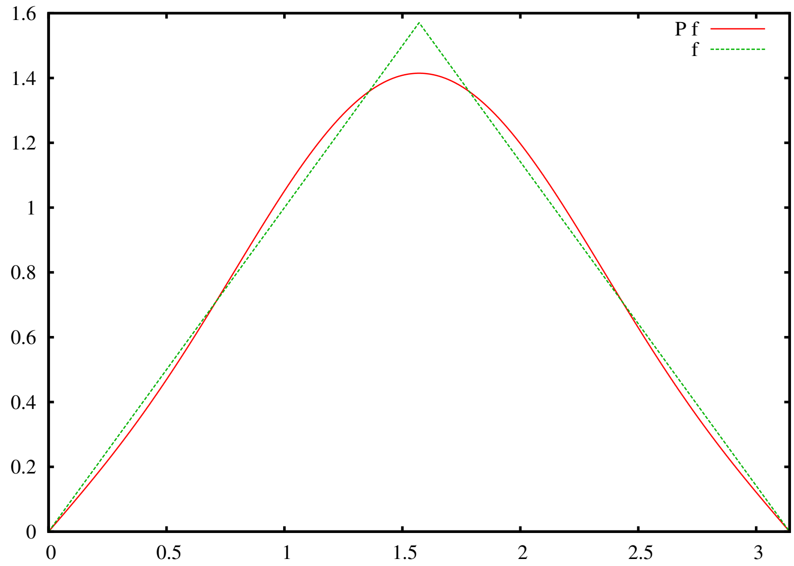
c) Die orthogonale Projektion der Funktion $f(x)$ auf den Vektorraum V bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot,\cdot)$ berechnet sich wie folgt

$$Pf(x) = g(f(x), w_1(x))w_1(x) + g(f(x), w_2(x))w_2(x) + g(f(x), w_3(x))w_3(x)$$

$$
\begin{aligned}
g(f(x), w_1(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
g(f(x), w_2(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 \\
g(f(x), w_3(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_3(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{1}{3}x\cos(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(3x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
Pf(x) &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} w_1(x) - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}} w_3(x) \\
&= \frac{4}{\pi}\sin(x) - \frac{4}{9\pi}\sin(3x)
\end{aligned}
$$


P f
f
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3