Achtung: Der neue Termin für die Nachklausur: 29.03.2018 (14:30 – 16:30).

Thermodynamik und Statistische Mechanik
Abgabetermin: 16.01.2018, 9:00 (Vorlesung)

WS 17/18
Prof. Dr. Claudius Gros

Blatt №11

Dr. Vladislav Borisov <borisov@itp.uni-frankfurt.de>

Aufgabe 32 (*Einstein-Modell*) (6 Pkte.)

Im Einstein-Modell eines Festkörpers betrachtet man ein Kristallgitter mit N Atomen, die unabhängige Schwingungen mit gleicher Frequenz ω um die jeweiligen Gleichgewichtspositionen ausführen. Die Amplitude der Schwingungen ist ausreichend klein, sodass sie als harmonisch angenähert werden können. Ein dreidimensionales Kristall aus N Atomen entspricht in diesem Modell einem System aus $3N$ harmonischen nicht-wechselwirkenden Oszillatoren. In der quantenmechanischen Beschreibung hat jedes Oszillator die erlaubten Energieniveaus $\varepsilon_i = \hbar\omega(n_i + \frac{1}{2})$ mit ganzzahligen n_i ($i \in [1, 3N]$).

Im Rahmen des Einstein-Modells ist es möglich, die durch die Gitterschwingungen verursachte Wärmekapazität zu untersuchen:

a) Berechnen Sie zuerst den Entartungsgrad zu einer gegebenen Gesamtenergie E. Die erlaubten Energiewerte für das ganze System ergeben sich aus der Summe über die einzelnen Oszillatoren: $E = \hbar\omega\left(\frac{3N}{2} + M\right)$, wo $M = \sum_{i=1}^{3N} n_i$ die gesamte Anregungsenergie beschreibt. *(2 Pkte.)*

Hinweis: überlegen Sie sich, wieviele ganzzahlige Lösungen die Gleichung $n_1 + n_2 + \ldots + n_{3N} = M$ besitzt und wie man unterschiedliche Lösungen graphisch darstellen kann. Einige der Zahlen n_i dürfen null sein.

b) Berechnen Sie die Entropie und die Temperaturabhängigkeit der Gesamtenergie im mikrokanonischen Ensemble für den Fall $N, M \gg 1$. *(2 Pkte.)*

c) Berechnen Sie die Wärmekapazität C_V und diskutieren Sie ihren Temperaturverlauf bei sehr tiefen und hohen Temperaturen. Kann das Einstein-Modell das experimentell beobachtete $C_V \propto T^3$ Verhalten der Wärmekapazität bei tiefen Temperaturen erklären? *(2 Pkte.)*

Aufgabe 33 (*Brillouin-Funktion*) (7 Pkte.)

Ein paramagnetisches Material bestehe aus N mikroskopischen nicht-wechselwirkenden magnetischen Momenten mit der Gesamtdrehimpulsquantenzahl J und befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = \vec{e}_z B$. Die Energie eines einzelnen Moments ist gegeben durch $E_m = -mg\mu_{\mathrm{B}}B$, wo m ist die magnetische Quantenzahl ($m = -J, \ldots, +J$), g ist der Landé-Faktor und μ_{B} ist das bohrsche Magneton. Das Paramagnet ist im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T.

a) Verwenden Sie das kanonische Ensemble, um die mittlere magnetische Energie $\langle E \rangle$ und das mittlere magnetische Moment $\langle M \rangle$ des Paramagneten auszurechnen. Skizzieren Sie den Verlauf dieser Größen als Funktion des Magnetfeldes für unterschiedliche Werte des Drehimpulses J. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Aufgabe 27 aus dem Blatt 9. Welchem Wert von J entspricht die dort besprochene Langevin-Funktion? *(4 Pkte.)*

b) Aus dem Ergebnis im **a** wird klar, dass die mittlere Magnetisierung $\langle M \rangle = 0$ wenn das Magnetfeld $B = 0$. Ein Ferromagnet dagegen besitzt eine endliche (*spontane*) Magnetisierung auch ohne externes Magnetfeld. Im früheren Modell von Pierre Weiss wird der Begriff eines Molekularfeldes eingeführt, um das Phänomen des Ferromagnetismus zu erklären. Das Molekularfeld wird von den geordneten magnetischen Momenten erzeugt, sodass das effektive Magnetfeld, das auf jedes einzelne Moment wirkt, ist $B' = B + \lambda \langle M \rangle$ ($\lambda = \text{const}$).

Nutzen Sie das Ergebnis aus **a** und stellen Sie eine Gleichung zur Bestimmung der spontanen Magnetisierung eines Ferromagneten auf. Diskutieren Sie die graphische Lösung dieser Gleichung und zeigen Sie, dass eine spontane Magnetisierung nur unterhalb einer sogenannten Curie-Temperatur T_c existiert. Finden Sie den analytischen Ausdruck für die T_c. *(3 Pkte.)*

Aufgabe 34 (*Neutronenstrahl*) (7 Pkte.)

In einem Neutronenstrahl hat die Hälfte aller Neutronen ihren Spin in der positiven x-Richtung und der Rest hat den Spin in der positiven y-Richtung.

a) Wie lautet der Dichtematrixoperator $\hat{\rho}$ von diesem System? Finden Sie die Matrixdarstellung dieses Operators in der Basis der normierten Eigenvektoren der Pauli-Matrix σ_z: *(2 Pkte.)*

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

b) Der Vektor der Pauli-Spinmatrizen ist folgendermaßen definiert: $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Was erhält man für den Mittelwert des Spinvektors $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ mit der Dichtematrix aus **a**? *(1 Pkt.)*

Hinweis: verwenden Sie die Relationen $\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$ *und* $\mathrm{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$.

c) Berechnen Sie den Polarisationsgrad $\pi_S = |p_+ - p_-|$ des Strahls, wo p_+ und p_- die Eigenwerte der Dichtematrix $\hat{\rho}$ sind. *(1 Pkt.)*

d) Beweisen Sie den allgemeinen Ausdruck für den Polarisationsgrad $\pi_S = |\langle \vec{\sigma} \rangle|$. *(3 Pkte.)*

Hinweis: zeigen Sie zuerst, dass sich jede Dichtematrix in der Basis der Pauli-Spinmatrizen so schreiben lässt:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=0}^{3} \mu_i \sigma_i = \frac{1}{2}\left(1 + \langle \vec{\sigma} \rangle \cdot \vec{\sigma}\right) \tag{2}$$