Blatt 8

Bitte laden Sie die Lösung dieses Blattes bis zum 19.01.2021 18 Uhr über das Abgabetool auf der OLAT Kursseite zur Vorlesung hoch.

Das Abgabetool finden Sie unter *Kursinhalt/Übungen/Abgabe-Übungsgruppe #* (wobei # die Nummer Ihrer jeweiligen Übungsgruppe bezeichnet), auch zu finden unter dem Link https://olat-ce.server.uni-frankfurt.de/olat/auth/RepositoryEntry/9596239873/CourseNode/102408662028611

Bitte laden Sie die Lösung in einer einzigen, zusammenhängenden, .pdf Datei hoch.

Bitte laden Sie nur Ihre finale Abgabe hoch. Sie können hochgeladene Dateien nicht selbständig löschen.

22) Zustandssumme nicht wechselwirkender Teilchen *(4=2+2 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme eines Systems von N nicht wechselwirkenden klassischen Teilchen mit der Zustandssumme für ein einziges klassisches Teilchen Z_1 folgendermaßen zusammenhängt:

$$Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N.$$

(ii) Zeigen Sie, dass dann für das chemische Potenzial im thermodynamischen Limes gilt:

$$\mu = -T \ln(Z_1/N).$$

23) Ideales Gas in harmonischer Falle *(8=3+3+2 Punkte)*

Gegeben sei ein ideales Gas in einer harmonischen Falle. Die Hamiltonfunktion jedes Teilchens im Gas ist gegeben durch

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2).$$

Das Gas ist in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T und mit einem Teilchenbad des chemischen Potenzials μ (d.h. Austausch von Teilchen mit dem Teilchenbad ist zugelassen).

(i) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme des Systems.

(ii) Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich N Teilchen in der Falle befinden. Zeigen Sie, dass $P(N)$ eine Poissonverteilung ist:

$$P(N) = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle}.$$

(iii) Berechnen Sie den Mittelwert der gesamten Energie des idealen Gases $\langle E \rangle$ und die Wärmekapazität

$$C_V = \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_{V, \langle N \rangle}.$$

24) Laplace-Transformation *(8=2+6 Punkte)*

In der Vorlesung wurde die Fugazitätsentwicklung besprochen, mit der die großkanonische Zustandssumme durch kanonische Zustandssummen ausgedrückt werden kann:

$$Z(T,V,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} Z(T,V,N) z^N, \qquad z = e^{\mu/T}.$$

Auf ähnliche Weise lässt sich das kanonische Ensemble auf das mikrokanonische Ensemble zurückführen, wobei anstelle der Potenzreihe in z die sogenannte Laplace-Transformation einer Funktion $f(t)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} f(t)$$

tritt. Diese ist der Fourier-Transformation sehr ähnlich, nur dass der Parameter s nicht notwendig imaginär ist, sondern im Allgemeinen komplex (und im Folgenden reell).

(i) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme als Laplace-Transformierte der normierten mikrokanonischen Zustandsdichte geschrieben werden kann:

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int_0^{\infty} dE_0 e^{-E_0/T} \Omega(E_0,V,N).$$

Hinweis: Fügen Sie auf geschickte Weise eine Eins in Integralform ein.

(ii) Es lässt sich umgekehrt auch eine inverse Laplace-Transformation der kanonischen Zustandssumme definieren, mit der sich die mikrokanonische Zustandsdichte aus der kanonischen Zustandssumme errechnen lässt:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \Omega(E_0,V,N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\beta e^{\beta E_0} Z(T,V,N), \quad \beta = \frac{1}{T}.$$

Hierbei liegt der Integrationsweg parallel zur imaginären Achse, und die Konstante c ist so zu wählen, dass sie größer als der Realteil der Singularitäten der Funktion $Z(T,V,N)$ ist. Berechnen Sie mittels der inversen Laplace-Transformation die mikrokanonische Zustandsdichte für das ideale Gas mit $Z(T,V,N) = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}$.

Hinweis: Erläutern Sie, warum Sie den Integrationsweg beliebig nahe an die imaginäre Achse legen können. Schliessen Sie den Integrationsweg mit einem Halbkreis im Unendlichen und benutzen Sie den Residuensatz: Das Konturintegral auf der Funktion $f(z)$ in der komplexen Ebene von z um eine Polstelle z_0 vom Grad p (d.h. die Funktion f divergiert wie $1/(z-z_0)^p$) ist gegeben durch:

$$\mathrm{Res}[f,z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z-z_0)^p f(z)\right]\bigg|_{z=z_0}.$$