10. Vorlesung Wintersemester

1 Existenz von Potentialen

Für eindimensionale Bewegungen unter der Einwirkung einer Kraft, die nur vom Ort abhängt, existiert immer ein Potential, da man immer eine Stammfunktion berechnen kann. Wenn die Kraft von der Zeit abhängt, wird das Potential — und damit auch die Gesamtenergie — ebenfalls zeitabhängig. Für geschwindigkeitsabhängige Kräfte, wie Reibungskräfte, gibt es dagegen kein Potential und keine Energieerhaltung.

Wie sieht es mit ortsabhängigen Kräften im dreidimensionalen Raum aus? Wie lässt sich überhaupt eine Stammfunktion der Kraft dort definieren? Dazu brauchen wir wieder einen mathematischen Exkurs.

2 Die Arbeit im dreidimensionalen Raum

Im dreidimensionalen Raum geschieht die Bewegung entlang einer Kurve. Für ein kurzes Stück der Kurve muss man definieren

$$\mathrm{d}A = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{1}$$

Das Skalarprodukt drückt aus, dass nur die Komponente von $\vec{F}$ in Richtung der Bewegung Arbeit leistet. *Kräfte, die senkrecht zur Bewegung stehen, leisten keine Arbeit!*

Die Gesamtarbeit muss nun durch Aufsummierung über die Kurvenstücke berechnet werden. Das führt auf die Notwendigkeit von *Linienintegralen* (Kurvenintegralen, Wegintegralen).

3 Linienintegrale

Ein *Linienintegral* (auch *Wegintegral* oder *Kurvenintegral*)

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{2}$$

über einen Weg C:

$$\vec{r}(s), \quad s = s_1 \ldots s_2 \tag{3}$$

wird berechnet über

$$\int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds \tag{4}$$

Auch wenn zwei Kurven denselben Anfangs- und Endpunkt haben, können die Integrale verschieden sein.

3.1 Beispiel

Betrachten wir im zweidimensionalen Raum das Vektorfeld $\vec{F}(x,y) = (2x^2 - 3y, 4xy)$ und integrieren es über zwei verschiedene Wege zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(1,1)$:

1. Der erste Weg C_1 sei die gerade Verbindung, auf der $x = y$ gilt. In Parameterdarstellung führt das auf

$$x(s) = s, \quad y(s) = s, \qquad s = 0 \ldots 1. \tag{5}$$

Der Integrand wird

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \vec{F}(x(s), y(s)) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s \\ &= (2s^2 - 3s, 4s^2) \cdot (1,1)\,\mathrm{d}s \\ &= (6s^2 - 3s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6}$$

Das Integral wird also in diesem Fall zu

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (6s^2 - 3s)\,\mathrm{d}s = \left[2s^3 - 3s^2/2\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

2. Der Weg C_2 sei durch das Parabelstück $y = x^2$ gegeben, in Parameterdarstellung also

$$x(s) = s, \quad y(s) = s^2, \qquad s = 0 \ldots 1. \tag{8}$$

In diesem Fall wird der Integrand zu

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= (2s^2 - 3s^2, 4s^3) \cdot (1, 2s)\,\mathrm{d}s \\ &= (-s^2 + 8s^4)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

und das Integral selbst zu

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (-s^2 + 8s^4)\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{s^3}{3} + \frac{8s^5}{5} \right]_0^1 = \frac{19}{15}. \tag{9}$$

Dieses Beispiel zeigt also schon eindringlich, dass der Wert eines Linienintegrals vom Weg abhängen kann.

4 Energieerhaltung im dreidimensionalen Raum

Die Arbeit wird ein Linienintegral über "Kraft mal Weg" sein, und das Potential muss ähnlich definiert werden. Wir werden erst versuchen zu formulieren, wie die Energieerhaltung aussehen sollte, und dann die mathematischen Hintergründe erforschen.

Zunächst eine weiter Definition: die *Leistung* ist die Arbeit pro Zeit,

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{10}$$

Die Leistung hängt immer vom zeitlichen Verlauf der Bewegung ab, weil sie ja beschreibt, mit welcher Geschwindigkeit Arbeit geleistet wird. Dagegen ist die Arbeit unabhängig vom zeitlichen Verlauf (wenn die Kraft, wie hier immer angenommen, nur vom Ort abhängt).

Jetzt können wir so vorgehen wie im eindimensionalen Fall. Wir schreiben

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \tag{11}$$

Nun gilt analog zum eindimensionalen Fall

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\vec{r}}^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)\\ &= 2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}+2\dot{z}\ddot{z}\\ &= 2\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Damit folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = P. \tag{13}$$

Auf diese Art erhalten wir zwar die naheliegende Definition der kinetischen Energie

$$T = \frac{m}{2}\vec{v}^2 \tag{14}$$

und durch Integrieren über die Zeit die Aussage, dass die geleistete Arbeit in kinetische Energie umgesetzt wird:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\,\mathrm{d}t = T(t_2) - T(t_1), \tag{15}$$

aber es fehlt die Aussage über eine Erhaltung der Energie an jedem Punkt der Bahnkurve. Im eindimensionalen Fall war dazu die Leistung als reine Zeitableitung umgeschrieben worden, was jetzt

$$P = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = -\frac{\mathrm{d}V(\vec{r})}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

lauten müsste (wie die Ableitung zu berechnen ist, kommt später). Wenn es ein Potential in dieser Form gäbe, wäre

$$V(\vec{r}(t)) = -\int_{t_0}^{t} \vec{F}(\vec{r}(t'))\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t', \tag{17}$$

das ergibt aber nur dann eine eindeutige Funktion des Ortes, wenn das Integral für beliebige Wege des Teilchens zum Endpunkt denselben Wert hat.

Wenn eine solche Funktion existiert, dann gilt aber wieder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = 0, \tag{18}$$

d. h. die Gesamtenergie

$$E = T + V \tag{19}$$

bleibt während der Bewegung erhalten.

Nun zur Bedeutung von

$$\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = -\frac{\mathrm{d}V(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t}. \tag{20}$$

Auf der rechten Seite steht ausführlicher geschrieben der Ausdruck

$$-\frac{\mathrm{d}V(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V(x(t),y(t),z(t))}{\mathrm{d}t}. \tag{21}$$

Die Ableitung hierin kann mit Hilfe einer verallgemeinerten Kettenregel ausgedrück werden:

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t),y(t),z(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}, \tag{22}$$

wobei die *partiellen Ableitungen* bedeuten, dass man nach der entsprechenden Größe ableitet und dabei alles andere als konstant betrachtet. Wenn man diesen Ausdruck in (20) einsetzt und dann die beiden Seiten vergleicht, erhält man

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{23}$$

Das ist eigentlich eine naheliegende Verallgemeinerung der eindimensionalen Gleichung

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}. \tag{24}$$

5 Partielle Ableitungen und Vektoranalysis

Ein *Feld* ordnet jedem Punkt im Raum eine physikalische Größe zu. Es gibt *skalare Felder* der Art

$$V(\vec{r}) \tag{25}$$

und *Vektorfelder* wie

$$\vec{F}(\vec{r}). \tag{26}$$

Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} \tag{27}$$

werden ausgewertet, indem man alle anderen Variablen — z. B. y und z bei der Ableitung wie Konstanten behandelt. Sie haben folgende Eigenschaften:

- für alle praktisch wichtigen Funktionen sind die Ableitungen vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \tag{28}$$

  oder als Operatorgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \tag{29}$$

  Beispiel: Für die Funktion

$$f(x, y) = x^2 \sin y \tag{30}$$

  sind die ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y, \tag{31}$$

  und für die gemischten zweiten Ableitungen findet man tatsächlich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cos y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{32}$$

- Es gilt die *Kettenregel* in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} V(x(s), y(s), z(s)) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{33}$$

- Manchmal kann man nach einer Variablen sowohl partiell als auch vollständig differenzieren. Wenn eine Funktion $f(x,t)$ gegeben ist, z. B.

$$F(x,t) = xt^2 \tag{34}$$

dann sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 2xt. \tag{35}$$

Wenn aber jetzt x auch eine Funktion von t wird und man $F(x(t),t)$ betrachtet, dann gibt es auch die vollständige Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x(t),t) = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{36}$$

Wenn man probeweise $x(t) = \sin t$ einsetzt, wird diese Gleichung zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x(t),t) = t^2 \cos t + 2t \sin t \tag{37}$$

und man überzeugt sich, dass erst Einsetzen und dann Differenzieren

$$F(t) = t^2 \sin t, \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 2t \sin t + t^2 \cos t \tag{38}$$

tatsächlich dasselbe Ergebnis liefert.

6 Der Gradient

Der *Gradientenvektor* ist definiert als

$$\nabla V = \mathrm{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right). \tag{39}$$

In dieser Vorlesung wird die Schreibweise mit dem *Nabla-Operator* (engl. *del*)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{40}$$

bevorzugt (wir werden sehen, dass sich damit einige Formeln sehr einfach merken lassen). ∇ ist also der Operator, der als Komponenten die partielle Ableitung nach der jeweiligen Koordinate enthält.

Selten findet man auch die Schreibweise $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ für den Gradienten.

Mit dem Gradienten schreibt sich die Kettenregel als

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = \nabla V \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}, \tag{41}$$

oder in Differentialform

$$\mathrm{d}V = \nabla V \cdot d\vec{r}. \tag{42}$$

6.1 Anschauliche Bedeutung

Aus dieser Schreibweise ersieht man auch die anschauliche Bedeutung des Gradienten: das Skalarprodukt von $\mathrm{d}\vec{r}$ mit dem Gradienten beschreibt die Änderung der Funktion bei einer infinitesimalen Verschiebung des Beobachtungspunktes. Das bedeutet, dass V sich in der Richtung senkrecht zum Gradienten überhaupt nicht ändert und dass in Richtung des Gradienten der maximale Anstieg der Funktion erfolgt. Wenn wir also wieder die anschauliche Interpretation des Potentials als Gebirge betrachten, dann zeigt an jeder Stelle der Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs; sein Betrag gibt die Änderung der Höhe pro zurückgelegter Wegstrecke an.

7 Rechenregeln und Beispiele

Es gelten einige derselben Regeln wie bei der normalen Differentiation: Ableitung von Linearkombinationen

$$\nabla(c_1 f_1(\vec{r}) + c_2 f_2(\vec{r})) = c_1 \nabla f_1 + c_2 \nabla f_2, \tag{43}$$

und die Produktregel

$$\nabla \left(f_1(\vec{r}) f_2(\vec{r}) \right) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1. \tag{44}$$

Eine nützliche Beziehung ist ($\vec{a}$ sei konstant)

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}. \tag{45}$$

Wichtig sind auch die Gradienten von Funktionen des Betrags des Ortsvektors $r = |\vec{r}|$:

$$\nabla r = \nabla \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{46}$$

Für die x-Komponente findet man

$$\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \tag{47}$$

und analog für die anderen Komponenten, was sich zu

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \tag{48}$$

zusammenfassen lässt. Das Resultat ist also der Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors.

Da auch für den Gradienten die Kettenregel gilt, wie man an einer Komponente wieder sieht:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y, z)) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \frac{\partial g}{\partial x}, \tag{49}$$

also

$$\nabla f(g(\vec{r})) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \nabla g \tag{50}$$

errechnet man leicht z. B.

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{51}$$

Im allgemeinen Fall führt das auf die sehr häufig verwendete Formel

$$\nabla f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \frac{\vec{r}}{r}. \tag{52}$$

8 Gradient und Energieerhaltung

Für die Ableitung der Energieerhaltung in der Mechanik braucht man

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \tag{53}$$

das ist erfüllt für

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V. \tag{54}$$

Eine konservative Kraft muss sich also als Gradient einer skalaren Funktion V darstellen lassen. Das ist nachprüfbar über die zweiten Ableitungen, z. B. muss gelten:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{55}$$